

Universität Stuttgart

Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

[www.mechbau.uni-stuttgart.de](http://www.mechbau.uni-stuttgart.de)

**Ergänzung zur Vorlesung**

**Technische Mechanik II**

Formelsammlung

Stand WS 2013/14

letzte Änderung: 10.01.2014

## TEIL I: Mathematische Voraussetzungen

### 1 Grundzüge der Tensorrechnung

- vgl. hierzu separates Skript zu Tensorrechnung ([www.mechbau.uni-stuttgart.de](http://www.mechbau.uni-stuttgart.de)).

### 2 Grundzüge der Vektor- und Tensoranalysis

- vgl. hierzu separates Skript zu Tensorrechnung ([www.mechbau.uni-stuttgart.de](http://www.mechbau.uni-stuttgart.de)).

### 3 Anwendungen zur Tensorrechnung

#### Flächenmomente 2. Ordnung

Der Flächenträgheitstensor:

$$\mathbf{J} = \int_S [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{I} - (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})] da .$$

**Bem.:** Die Koeffizienten  $J_{ik}$  des Flächenträgheitstensors  $\mathbf{J}$  werden als „Flächenträgheitsmomente“ eingeführt.

Man erhält im einzelnen für eine Fläche in der  $\mathbf{e}_2$ - $\mathbf{e}_3$ -Ebene mit der Flächennormalen  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{x} = x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ :

- polares Flächenträgheitsmoment:

$$J_{11} = J_P = \int_S (x_2^2 + x_3^2) da$$

- axiale Flächenträgheitsmomente:

$$J_{22} = \int_S x_3^2 da, \quad J_{33} = \int_S x_2^2 da$$

- Deviations- bzw. Zentrifugalmomente:

$$J_{23} = J_{32} = - \int_S x_2 x_3 da$$

Der Trägheitsradius:

$$i_{(jj)} = \sqrt{\frac{J_{(jj)}}{A}} \quad \text{mit } A: \text{ Querschnittsfläche .}$$

**Bem.:**  $(jj)$  bedeutet hier „keine Summation“ über  $j$

Die Flächenträgheitsmomente bzgl. eines Schwerpunktsystems  $\{\mathcal{O}, \bar{\mathbf{e}}\}$ :

- axiale Eigenträgheitsmomente:

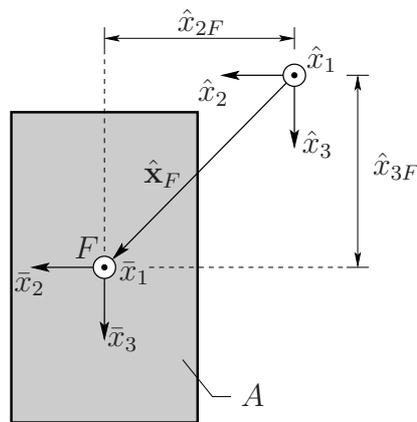
$$\bar{J}_{22} = \int_S \bar{x}_3^2 da, \quad \bar{J}_{33} = \int_S \bar{x}_2^2 da$$

- Eigen-Deviations- bzw. Zentrifugalmomente:

$$\bar{J}_{23} = \bar{J}_{32} = - \int_S \bar{x}_2 \bar{x}_3 da$$

Die Flächenträgheitsmomente bzgl. eines beliebigen Systems  $\{\mathcal{O}, \hat{\mathbf{e}}\}$ :

Veranschaulichung:



- axiale Flächenträgheitsmomente:

$$\hat{J}_{22} = \bar{J}_{22} + \hat{x}_{3F}^2 A \longrightarrow \bar{J}_{22} = \hat{J}_{22} - \hat{x}_{3F}^2 A$$

$$\hat{J}_{33} = \bar{J}_{33} + \hat{x}_{2F}^2 A \longrightarrow \bar{J}_{33} = \hat{J}_{33} - \hat{x}_{2F}^2 A$$

- Deviations- bzw. Zentrifugalmomente:

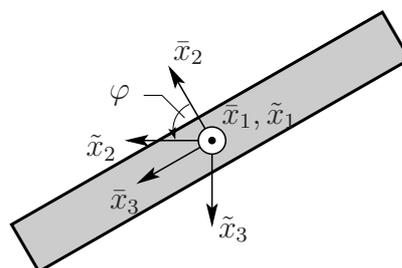
$$\hat{J}_{23} = \hat{J}_{32} = \bar{J}_{23} - \hat{x}_{2F} \hat{x}_{3F} A \longrightarrow \bar{J}_{23} = \bar{J}_{32} = \hat{J}_{23} + \hat{x}_{2F} \hat{x}_{3F} A$$

Bemerkungen:

- In Bezug auf parallelverschobene Achsen setzen sich die Trägheitsmomente zusammen aus den *Eigen*-Trägheitsmomenten und den *Steiner*-Anteilen.
- Die axialen Trägheitsmomente werden im Flächenschwerpunkt zum Minimum, d. h. die *Steiner*-Anteile verschwinden.

Die Flächenträgheitsmomente bzgl. eines gedrehten Schwerpunktsystems  $\{\mathcal{O}, \tilde{\mathbf{e}}\}$ :

Veranschaulichung:



Transformationsbeziehungen für Flächenträgheitsmomente:

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{22} &= \frac{1}{2}(\bar{J}_{22} + \bar{J}_{33}) + \frac{1}{2}(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}) \cos 2\varphi + \bar{J}_{23} \sin 2\varphi, \\ \tilde{J}_{33} &= \frac{1}{2}(\bar{J}_{22} + \bar{J}_{33}) - \frac{1}{2}(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}) \cos 2\varphi - \bar{J}_{23} \sin 2\varphi, \\ \tilde{J}_{23} &= \tilde{J}_{32} = -\frac{1}{2}(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}) \sin 2\varphi + \bar{J}_{23} \cos 2\varphi.\end{aligned}$$

Das polare Trägheitsmoment ist unabhängig von der Drehung des Bezugssystems um die  $\mathbf{e}_1$ -Achse:

$$J_{11} = J_p = \bar{J}_p = \tilde{J}_p = J_{22} + J_{33}.$$

**Hauptträgheitsmomente:**

**Merke:** In Hauptachsendarstellung der Flächenträgheitsmomente verschwinden die Deviationsmomente.

Lage der Hauptachsen:

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\bar{J}_{23}}{\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}}.$$

Eindeutige Lagebestimmung der Hauptachsen:

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{2\bar{J}_{23}}{\pm\sqrt{(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33})^2 + 4\bar{J}_{23}^2}}; \quad \cos 2\varphi_0 = \frac{\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33}}{\pm\sqrt{(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33})^2 + 4\bar{J}_{23}^2}}.$$

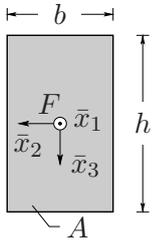
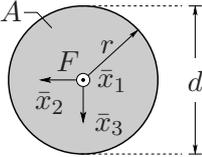
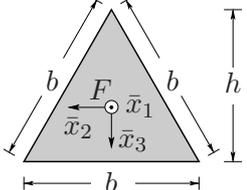
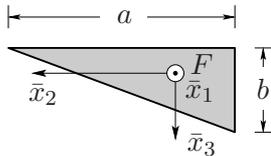
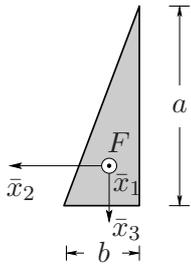
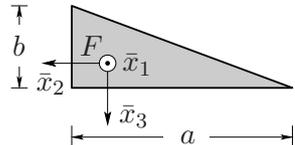
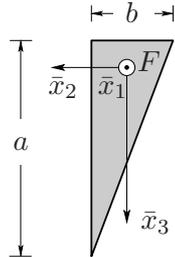
Bestimmung der Hauptträgheitsmomente:

$$J_{1/2} = \frac{1}{2}(\bar{J}_{22} + \bar{J}_{33}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\bar{J}_{22} - \bar{J}_{33})^2 + \bar{J}_{23}^2} = \tilde{J}_{22/33}(\varphi_0).$$

**Bem.:** Bei Symmetrie der Fläche und Wahl der Symmetrieachsen als Koordinatenachsen verschwinden die Deviationsmomente, d. h. das gewählte Koordinatensystem stellt das Hauptachsensystem dar.

**Vorgehen bei der Berechnung des Flächenträgheitsmoments mit Teilflächen** (von denen die Teilflächenträgheitsmomente einfach zu berechnen sind):

1. Einteilen des Querschnitts in einfache, bekannte Teilflächen
2. Gegebenenfalls Berechnung des Flächenschwerpunkts
3. Berechnung der Flächenträgheitsmomente für die Teilflächen (mittels Integration oder aus Tabelle entnehmen)
4. Gegebenenfalls drehen der lokalen Koordinatensysteme auf das globale Koordinatensystem
5. Berechnung der *Steiner*-Anteile für die Teilflächen
6. Addieren der einzelnen Anteile

Geometrie	Fläche $A$	$\bar{J}_{22}$	$\bar{J}_{33}$	$\bar{J}_{23}$
	$bh$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	0
	$\pi r^2$	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^4}{4}$	0
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$	0
	$\frac{ab}{2}$	$\frac{ab^3}{36}$	$\frac{ba^3}{36}$	$\frac{a^2b^2}{72}$
	$\frac{ab}{2}$	$\frac{ba^3}{36}$	$\frac{ab^3}{36}$	$-\frac{a^2b^2}{72}$
	$\frac{ab}{2}$	$\frac{ab^3}{36}$	$\frac{ba^3}{36}$	$\frac{a^2b^2}{72}$
	$\frac{ab}{2}$	$\frac{ba^3}{36}$	$\frac{ab^3}{36}$	$-\frac{a^2b^2}{72}$

## TEIL II: Allgemeine Grundlagen der Elastostatik

### 4 Elastostatik

#### Das linear-elastische Verhalten mit Temperaturdehnung im 1-d Fall (Stabproblem)

**Bem.:** Gesamtdehnung kann als Summe der elastischen Dehnungen  $\varepsilon_e = \sigma/E$  und der thermischen Dehnung  $\varepsilon_\vartheta = \alpha_\vartheta \Delta\Theta$  dargestellt werden:

$$\varepsilon(x_1) = \frac{du}{dx_1} =: u'(x_1) = \frac{\sigma}{E} + \alpha_\vartheta \Delta\Theta \longleftrightarrow \sigma = E \underbrace{(\varepsilon - \alpha_\vartheta \Delta\Theta)}_{\varepsilon_e},$$

$$\text{mit } \begin{cases} \alpha_\vartheta & : & \text{Wärmeausdehnungskoeffizient [1/T]}, \\ \Delta\Theta(x_1) & : & \text{Temperaturänderung [T]}, \\ \sigma = \frac{N_1}{A_1} & : & \text{Normalspannung [K/L}^2\text{]}, \\ EA_1(x_1) & : & \text{Dehnsteifigkeit [K]}. \end{cases}$$

**Hauptdifferentialgleichung des geraden Stabs:**

$$(EAu')' = -n_1 + (EA_1\alpha_\vartheta \Delta\Theta)' \quad \text{mit } n_1: \text{ Streckenlast längs der Stabachse}$$

**Bem.:** Die Lösung der Differentialgleichung erfolgt durch Integrieren und Bestimmung der Konstanten durch Randbedingungen.

### 5 Spannungs- und Verzerrungszustand

#### Der allgemeine Spannungszustand

Das *Lemma* von *Cauchy*:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}).$$

Das *Theorem* von *Cauchy*:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \longrightarrow da_1: \mathbf{t}_1 = \sigma_{i1} \mathbf{e}_i.$$

$$\text{mit } \begin{cases} 1. \text{ Index } i & : & \text{Richtung der Spannungskomponente,} \\ 2. \text{ Index (z. B. 1)} & : & \text{Flächennormale (auf der } \mathbf{e}_2\text{-}\mathbf{e}_3\text{-Ebene).} \end{cases}$$

**Bem.:** Positive (Negative) Normalspannungen sind Zugspannungen (Druckspannungen).

## Hauptspannungen und Hauptrichtungen von $\boldsymbol{\sigma}$

Berechnung der Hauptwerte (Hauptspannungen  $\lambda_{1/2/3} = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) von  $\boldsymbol{\sigma}$  durch Lösen der charakteristischen Gleichung von  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Darstellung des Spannungstensors in Hauptspannungen und -richtungen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{j=1}^3 \sigma_j \mathbf{e}_j^* \otimes \mathbf{e}_j^* = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_j^* \otimes \mathbf{e}_k^*.$$

Berechnung der Hauptrichtungen  $\mathbf{e}_i^*$  von  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{e}_i^* = \mathbf{0},$$

mit den Eigenvektoren:  $\mathbf{e}_i^* = R_{ki} \mathbf{e}_k$ ,  $R_{ki} = \cos \angle(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i^*)$

## Ebener Spannungszustand in der $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_2$ -Ebene ( $\sigma_{33} = 0$ )

Transformationsbeziehungen für die Spannungskoeffizienten:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi, \\ \tilde{\sigma}_{22} &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\varphi - \sigma_{12} \sin 2\varphi, \\ \tilde{\sigma}_{12} &= \tilde{\sigma}_{21} = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Lage der Hauptspannungsachsen:

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}.$$

Eindeutige Lagebestimmung der Hauptnormalspannungsachsen:

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi_0 &= \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}, \\ \cos 2\varphi_0 &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}. \end{aligned}$$

Bestimmung der Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_{1/2} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2}.$$

Lage der Hauptschubspannungsachsen:

$$\tan 2\varphi^* = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}.$$

Eindeutige Lagebestimmung der Hauptschubspannungsachsen:

$$\sin 2\varphi^* = \frac{-(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}},$$

$$\cos 2\varphi^* = \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}.$$

Zusammenhang zwischen Hauptschubspannungs- und Hauptnormalspannungsachsen

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\varphi^* &= -\cos 2\varphi_0 \\ \cos 2\varphi^* &= \sin 2\varphi_0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \varphi^* = \frac{\pi}{4} + \varphi_0$$

Bestimmung der Hauptschubspannungen:

$$\tau_{1/2} = \mp \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2}, \text{ bzw. } \tau_{1/2} = \mp \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Zu den Hauptschubspannungen  $\tau_{1/2}$  gehörende Normalspannungen:

$$\sigma_{11/22}^* = \tilde{\sigma}_{11/22}(\varphi^*) = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_m^{\text{II}}.$$

Berechnung der mittleren Spannung  $\sigma_m^{\text{III}}$  (hydrostatischer Druck  $p$ ):

$$\sigma_m^{\text{III}} := \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} I \boldsymbol{\sigma} = -p.$$

## Der allgemeine Verzerrungszustand

Darstellung von Deformationen:

- nichtlinearer *Greenscher* Verzerrungstensor:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad }^T \mathbf{u} + \text{grad }^T \mathbf{u} \text{ grad } \mathbf{u}),$$

$$\text{bzw. } \mathbf{E} = e_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

mit dem Deformationsgradienten:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x} + d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} = \mathbf{I} + \text{grad } \mathbf{u}.$$

- Linearisierter *Greenscher* Verzerrungstensor:

$$\mathbf{E}_{\text{lin.}} := \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

**Definition:** Die Koeffizienten  $\varepsilon_{ij}$  mit  $i = j$  heißen Verzerrungen, die Koeffizienten  $\gamma_{ij} := 2\varepsilon_{ij}$  mit  $i \neq j$  heißen Gleitungen.

- Bem.:**
- Der lineare Verzerrungstensor ist symmetrisch, d. h.  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T$ .
  - Hauptwerte des Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  bzw.  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und zugehörige Hauptrichtungen können durch Lösung des Eigenwertproblems bestimmt werden.

## Finite und lineare Volumendehnung

Allgemeine Volumendehnung:

$$e_v = \frac{dv - dv_0}{dv_0} = \det \mathbf{F} - 1$$

$$\text{mit } \begin{cases} e_v & : & \text{allgemeine Volumendehnung,} \\ dv & : & \text{Volumenelement im aktuellen Zustand,} \\ dv_0 & : & \text{Volumenelement im Referenzzustand.} \end{cases}$$

Linearisierte Volumendehnung:

$$e_{v \text{ lin.}} =: \varepsilon_v = \operatorname{div} \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I} = \varepsilon_{ii} = u_{i,i}.$$

## 6 Stoffgesetz der linearen Elastizitätstheorie

### Stoffkenngrößen der linearen Elastizitätstheorie

**Voraussetzung:** homogene, isotrope Werkstoffe

**Bezeichnung der Stoffkenngrößen:**

$$\begin{array}{llll} \lambda & : & \text{Lamé-Konstante} & [\text{K/L}^2] & k & : & \text{Kompressionsmodul} & [\text{K/L}^2] \\ \mu \equiv G & : & \text{Schubmodul} & [\text{K/L}^2] & \nu & : & \text{Querkontraktionszahl} & [-] \\ E & : & \text{Elastizitätsmodul} & [\text{K/L}^2] & & & & \end{array}$$

### Das allgemeine Stoffgesetz der linearen Elastizitätstheorie

$$\text{Hookesches Stoffgesetz} : \quad \boldsymbol{\sigma} = \overset{4}{\mathbf{E}} \boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I},$$

$$\text{Koeffizienten von } \boldsymbol{\sigma} : \quad \sigma_{ik} = 2\mu \varepsilon_{ik} + \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \delta_{ik},$$

$$\text{Elastizitätstensor} : \quad \overset{4}{\mathbf{E}} = 2\mu (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\text{23}} + \lambda (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}),$$

mit den *Lamé*-Konstanten  $\mu$ ,  $\lambda$ .

- Bem.:**
- Aus Versuchen können 4 elastische Konstanten ( $E$ ,  $G$ ,  $\nu$ ,  $k$ ) bestimmt werden, von denen nur 2 voneinander unabhängig sind.
  - Die 2 voneinander unabhängigen Materialparameter müssen aus 2 voneinander unabhängigen Versuchen gewonnen werden, z. B. Zugversuch und Schubversuch (bzw. Torsionsversuch).
  - Es existiert ein eindeutiger Zusammenhang der Konstanten  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$ ,  $k$  mit den *Lamé*-Konstanten  $\mu$  und  $\lambda$ .

Superposition von elastischer und thermischer Volumendehnung:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{k} \sigma_m^{\text{III}} + 3 \alpha_{\vartheta} \Delta \Theta =: \varepsilon_{v_e} + \varepsilon_{v_{\vartheta}}$$

Mittlere Spannung  $\sigma_m^{\text{III}}$  mit  $k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ :

$$\sigma_m^{\text{III}} = \frac{E}{3(1-2\nu)} [(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}) - 3 \alpha_{\vartheta} \Delta \Theta].$$

Zusammenhang zwischen den Konstanten:

	$\lambda$	$\mu \equiv G$	$E$	$\nu$	$k$
$\lambda, \mu$	$\lambda$	$\mu$	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$
$\lambda, E$	$\lambda$	$\frac{E - 3\lambda + c}{4}$	$E$	$\frac{2\lambda}{E + \lambda + c}$	$\frac{E + 3\lambda + c}{6}$
$\lambda, \nu$	$\lambda$	$\frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$	$\nu$	$\frac{\lambda(1 + \nu)}{3\nu}$
$\lambda, k$	$\lambda$	$\frac{2}{3}(k - \lambda)$	$\frac{9k(k - \lambda)}{3k - \lambda}$	$\frac{\lambda}{3k - \lambda}$	$k$
$\mu, E$	$\frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E}$	$\mu$	$E$	$\frac{E - 2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu - E)}$
$\mu, \nu$	$\frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}$	$\mu$	$2\mu(1 + \nu)$	$\nu$	$\frac{2\mu(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$
$\mu, k$	$k - \frac{2}{3}\mu$	$\mu$	$\frac{9k\mu}{3k + \mu}$	$\frac{3k - 2\mu}{6k + 2\mu}$	$k$
$E, \nu$	$\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	$E$	$\nu$	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$
$E, k$	$\frac{3k(3k - E)}{9k - E}$	$\frac{3kE}{9k - E}$	$E$	$\frac{3k - E}{6k}$	$k$
$\nu, k$	$\frac{3k\nu}{1 + \nu}$	$\frac{3k(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$	$3k(1 - 2\nu)$	$\nu$	$k$

mit der Hilfsgröße:  $c = \sqrt{E^2 + 9\lambda^2 + 2E\lambda}$

### Allgemeine 3-d Fassung des Stoffgesetzes

1. Das nicht-isotherme Stoffgesetz mit den Konstanten  $E$  und  $\nu$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{E}{1 + \nu} \left[ \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} \right]}_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{mech}}} - \underbrace{\frac{E}{1 - 2\nu} \alpha_{\vartheta} \Delta\Theta \mathbf{I}}_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{temp}}} = \sigma_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k,$$

$$\text{mit } \sigma_{ik} = \frac{E}{1 + \nu} \left[ \varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \delta_{ik} \right] - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha_{\vartheta} \Delta\Theta \delta_{ik}.$$

Im einzelnen erhält man:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[ (1 - \nu) \varepsilon_{11} + \nu (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - (1 + \nu) \alpha_{\vartheta} \Delta\Theta \right],$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[ (1 - \nu) \varepsilon_{22} + \nu (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) - (1 + \nu) \alpha_{\vartheta} \Delta\Theta \right],$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{33} + \nu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - (1+\nu)\alpha_{\vartheta}\Delta\Theta],$$

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ik} = 2G\varepsilon_{ik} \quad \text{für } i \neq k.$$

2. Inversion des nicht-isothermen Stoffgesetzes:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\frac{1}{E}[(1+\nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I}]}_{\boldsymbol{\varepsilon}_e} + \underbrace{\alpha_{\vartheta}\Delta\Theta\mathbf{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\vartheta}} = \varepsilon_{ik}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k,$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{ik} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ik}] + \alpha_{\vartheta}\Delta\Theta\delta_{ik}.$$

Im einzelnen erhält man:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha_{\vartheta}\Delta\Theta,$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})] + \alpha_{\vartheta}\Delta\Theta,$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \alpha_{\vartheta}\Delta\Theta,$$

$$\varepsilon_{ik} = \left. \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ik} = \frac{1}{2G}\sigma_{ik} \longrightarrow \gamma_{ik} = \frac{1}{G}\sigma_{ik} \right\} \text{ für } i \neq k.$$

## 7 Das vollständige Gleichungssystem der Elastostatik deformierbarer Körper

### Gleichgewichtsbedingungen

(a) Kräftegleichgewicht (Kräftesatz):

**Bem.:** Die Summe der auf den Körper einwirkenden Volumen- und Oberflächenkräfte verschwindet.

**Kräftesatz in globaler Form:**

$$\mathbf{0} = \int_S \mathbf{t} \, da + \int_V \rho \mathbf{b} \, dv,$$

bzw. mit *Cauchy*-Theorem und Umwandlung des Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral

$$\mathbf{0} = \int_V (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) \, dv. \quad (*)$$

**Kräftesatz in lokaler Form:**

Bei Stetigkeit und stetiger Differenzierbarkeit von  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\rho \mathbf{b}$  muß der Integrand von (\*) an jedem Ort  $\mathbf{x}$  verschwinden, d. h.:

$$\mathbf{0} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}.$$

**(b) Momentengleichgewicht (Momentensatz):**

**Bem.:** Die Summe der Momente aller Kräfte verschwindet bzgl. eines beliebigen Punktes B.

**hier:** Momentensatz bzgl. des Ursprungs.

**Momentensatz in globaler Form:**

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{0} = \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, da + \int_V \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{b}) \, dv,$$

bzw. nach Umformung mit *Cauchy*-Theorem und Integralsatz

$$\mathbf{0} = \int_V [\mathbf{x} \times (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) + \mathbf{I} \times \boldsymbol{\sigma}] \, dv. \quad (**)$$

**Momentensatz in lokaler Form:**

Bei Stetigkeit und stetiger Differenzierbarkeit des Integranden von (\*\*) folgt

$$\mathbf{0} = \mathbf{x} \times \underbrace{(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b})}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{I} \times \boldsymbol{\sigma},$$

so daß mit der lokalen Form des Kräftesatzes die Symmetrie des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  folgt:

$$\mathbf{0} = \mathbf{I} \times \boldsymbol{\sigma} \implies \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \iff \sigma_{ik} = \sigma_{ki}.$$

***Lamé-Naviersche* Gleichungen**

**Bem.:** Die *Lamé-Navierschen* Gleichungen (Hauptgleichungen des linear-elastisch deformierbaren Körpers) entsprechen dem in den Verschiebungsableitungen formulierten Kräftesatz.

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

$$\text{bzw. } \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \right] + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

## TEIL III: Elastostatik der Stäbe und Balken

### 8 Elementare Elastostatik der Stäbe und Balken

#### Gerade Biegung mit Längskraft und Temperaturänderung

Bestimmung der „Biegenormalspannung“:

(a) Stabproblem:

- Längskraftbeanspruchung mit über die Balkenhöhe konstanter Temperaturbelastung  $\Delta\Theta = \Delta\Theta_m$ :

$$\sigma_{11}^N = \frac{N_1}{A_1} = E \underbrace{(\varepsilon_{11}^N - \alpha_{\vartheta} \Delta\Theta_m)}_{\varepsilon_{11e}^N}.$$

(b) Balkenproblem:

- Gerade Biegung mit über die Balkenhöhe linearer Temperaturdifferenz:

$$\sigma_{11}^B = \frac{M_2}{J_{22}} x_3 = E \underbrace{(\varepsilon_{11}^B - \alpha_{\vartheta} \frac{\Delta\Theta_u - \Delta\Theta_o}{h} x_3)}_{\varepsilon_{11e}^B}.$$

(c) Superposition der Teilergebnisse liefert die „Biegenormalspannung“:

$$\sigma_{11}(x_1, x_3) = \frac{N_1(x_1)}{A_1(x_1)} + \frac{M_2(x_1)}{J_{22}(x_1)} x_3$$

Bestimmung der Lage der „neutralen Faser“:

**Definition:** Die neutrale Faser ist die Verbindungslinie aller geometrischen Orte mit  $\sigma_{11}(x_1, x_{3N}) = 0$ .

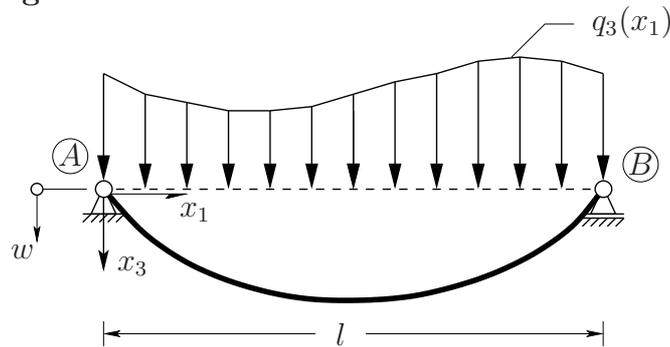
$$\longrightarrow x_{3N} = -\frac{N_1(x_1) J_{22}(x_1)}{A_1(x_1) M_2(x_1)}.$$

Superposition der Teilergebnisse für die Verzerrungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}^N(N_1, \Delta\Theta_m) + \varepsilon_{11}^B(M_2, \Delta\Theta_3^*) \\ &= \frac{\sigma_{11}}{E} + \alpha_{\vartheta} \left( \Delta\Theta_m + \underbrace{\frac{\Delta\Theta_u - \Delta\Theta_o}{h}}_{\Delta\Theta_3^*} x_3 \right). \end{aligned}$$

## Differentialgleichung der geraden Biegelinie

Veranschaulichung:



**Merke:** Das statische und das geometrische Problem können entkoppelt berechnet werden, wenn das statische Problem für sich allein gelöst werden kann:

→ statisch bestimmte Probleme.

Für statisch unbestimmte Probleme müssen das statische und das geometrische Problem gemeinsam behandelt werden (allgemeines Problem der Biegelinie).

### Differentialgleichungen der geraden Biegelinie:

**Sonderfall:** konstante Streckenlast :  $q_3 = q_0 = \text{konst.}$   
konstante Biegesteifigkeit :  $EJ_{22} = \text{konst.}$   
konstante Temperaturbelastung :  $\Delta \dot{\Theta}_3^* = \text{konst.}$

$$EJ_{22} w^{IV} = q_3$$

$$EJ_{22} w''' = q_3 x_1 + C_1 = -Q_3$$

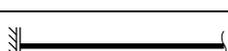
$$EJ_{22} w'' = \frac{1}{2} q_3 x_1^2 + C_1 x_1 + C_2 - EJ_{22} \alpha_\vartheta \Delta \dot{\Theta}_3^* = -M_2 - EJ_{22} \alpha_\vartheta \Delta \dot{\Theta}_3^*$$

$$EJ_{22} w' = \frac{1}{6} q_3 x_1^3 + \frac{1}{2} C_1 x_1^2 + C_2 x_1 - EJ_{22} \alpha_\vartheta \Delta \dot{\Theta}_3^* x_1 + C_3 = -EJ_{22} \varphi_2$$

$$EJ_{22} w = \frac{1}{24} q_3 x_1^4 + \frac{1}{6} C_1 x_1^3 + \frac{1}{2} C_2 x_1^2 - \frac{1}{2} EJ_{22} \alpha_\vartheta \Delta \dot{\Theta}_3^* x_1^2 + C_3 x_1 + C_4$$

**Bem.:** Die Integrationskonstanten  $C_1 - C_4$  sind aus geometrischen **und** statischen Randbedingungen zu bestimmen.

Randbedingungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten:

	Symbol	statische RB	geometrische RB
gelenkiges Auflager		$M_2 = 0$	$w = 0$
freies Ende		$Q_3 = 0$ $M_2 = 0$	–
Einspannung		–	$w = 0$ $w' = 0$
Parallelführung		$Q_3 = 0$	$w' = 0$

Übergangsbedingungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten:

	Symbol	statische ÜB	geometrische ÜB
Momentengelenk		$M_2 = 0$	$w_l = w_r$
Querkraftgelenk		$Q_3 = 0$	$w'_l = w'_r$
Querschnittssprung		–	$w_l = w_r$ $w'_l = w'_r$

## Schubspannungsermittlung bei der geraden Biegung prismatischer Balken mit Vollquerschnitt

Schubspannung infolge Querkraft:

$$\sigma_{31}(x_1, x_3) = -\frac{Q_3(x_1) S_2(x_3)}{J_{22}(x_1) b(x_3)}$$

## Schubspannungsermittlung bei der Biegung gerader Balken mit dünnwandigem Querschnitt

(a) Offene Profile

Annahmen über die Schubspannungsverteilung:

Für hinreichende kleine Profildicke  $\delta(s)$  gilt:

- Es existiert keine Schubspannung in Profildickenrichtung:  $\sigma_{\delta 1} \equiv 0$ .
- Schubspannungen in Richtung der Laufkoordinate  $s$  sind konstant in Profildickenrichtung:

$$\sigma_{s1} =: \tau(s) \text{ konstant bzgl. } \delta(s).$$

- Berechnung des Schubflusses  $t(s)$ :

$$t(s) = \tau(s) \delta(s).$$

**Schubspannung infolge Querkraft:**

$$\tau(s) = -\frac{Q_3(x_1) S_2(s)}{J_{22}(x_1) \delta(s)}, \quad \text{mit} \quad S_2(s) = \int_0^s x_3(\tilde{s}) \delta(\tilde{s}) d\tilde{s}$$

**Merke:** Die Summe der einem Knoten zufließenden und von einem Knoten abfließenden Schubflüsse ist identisch. Dies gilt ebenso für die statischen Momente.

**(b) Geschlossene Profile**

**Merke:** Geschlossene Profile besitzen keinen einfach zusammenhängenden Querschnitt, d. h. sie sind innerlich statisch unbestimmt.

**Bem.:** Auf den Symmetrieachsen verschwinden die Schubkräfte:

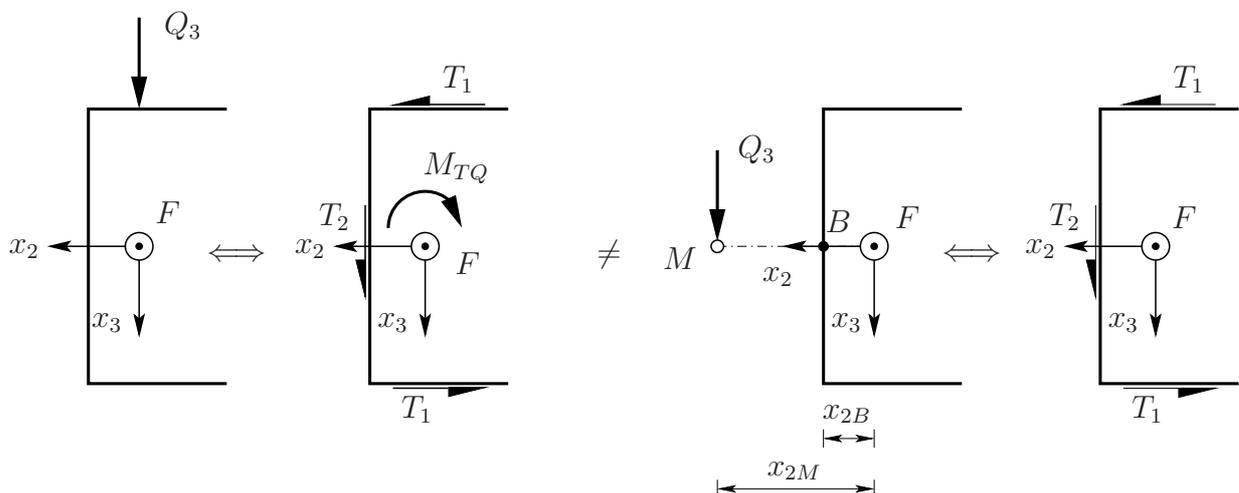
$$t(s = 0) = \tau(s = 0) \delta(s = 0) \equiv 0.$$

**Schubmittelpunkt bei einfach symmetrischen Profilen**

**Voraussetzung:**

- Schnittgrößen greifen im Schwerpunkt der Querschnittsfläche an.
- Äquivalenz zwischen äußerer Belastung und inneren Spannungen via Schnittgrößen.

**Definition:** Der Schubmittelpunkt  $M$  ist derjenige Querschnittspunkt, bzgl. dem die aus der Querkraft resultierenden Schubkräfte  $T$  kein Moment erzeugen.



**Lage des Schubmittelpunkts  $M$ :**

**Satz:** Symmetrieachsen des Querschnitts sind geometrische Orte für die Lage des Schubmittelpunkts.

- Bei doppelsymmetrischen Querschnitten fallen  $F$  und  $M$  zusammen.
- Schneiden sich bei einfach symmetrischen Querschnitten alle Schubkräfte in einem Punkt, so ist dieser Punkt der Schubmittelpunkt (gilt auch für nicht-symmetrische Querschnitte).

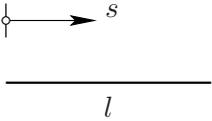
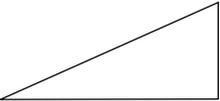
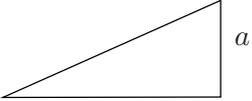
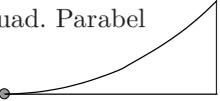
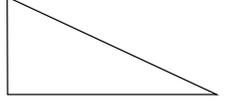
**Berechnung des Schubmittelpunkts  $M$  für einfach symmetrische, dünnwandige Profile:**

$$x_{2M} = x_{2B} - \frac{1}{J_{22}} \int_0^l S_2(s) \overset{\curvearrowright+}{r_t}(s) ds \quad \text{bzw.} \quad x_{2M} = x_{2B} + \frac{\sum_i \overset{\curvearrowright+}{r_{ti}} T_i}{Q_3}$$

- mit  $B$  : beliebiger Bezugspunkt,  
 $r_t$  : senkrechter Abstand der Schubflüsse bzw. Schubkräfte zum Bezugspunkt,  
 $x_{2B}$  : Abstand des Flächenschwerpunkts zum Bezugspunkt,  
 $T_i := \int_{s_i} t(s) ds = \int_{s_i} \tau(s) \delta(s) ds$  : Schubkräfte.

**Graphische Integration des Schubflusses und der Schubkraft mit Hilfe der Integrationstafeln:**

$$S_2(\tilde{s}) = \int_0^l x_3(s) \delta(s) ds, \quad T = \int_0^l \tau(s) \delta(s) ds$$

$x_3 \delta(s_i)$	$S_2(s_i) = \int x_3 \delta(s_i) ds$	$\int_l S_2(s_i) ds$
		$cl$
		$\frac{1}{2} a l^2 = \frac{1}{2} c l$
		$\frac{1}{6} a l^2 = \frac{1}{3} c l$
		$\frac{1}{3} a l^2 = \frac{2}{3} c l$

## Die schiefe Biegung des Balkens

### Voraussetzung:

- Bezugssystem ist Schwerpunktsystem,
- Vernachlässigung der Spannungen  $\{\sigma_{22}, \sigma_{33}\} \ll \sigma_{11}$ ,
- Last- und Verformungsebene müssen nicht identisch sein.

### Biegenormalspannung:

- bei schiefer Biegung im Schwerpunktsystem

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{A_1} + \frac{1}{J_{22}J_{33} - J_{23}^2} [(J_{33}M_2 - J_{32}M_3)x_3 + (J_{23}M_2 - J_{22}M_3)x_2],$$

- bei schiefer Biegung und Bezug auf Hauptträgheitsachsen ( $J_{23} = J_{32} = 0$ )

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{A_1} + \frac{M_2}{J_{22}}x_3 - \frac{M_3}{J_{33}}x_2.$$

### Lage der neutralen Faser:

- bei schiefer Biegung und Bezug auf Hauptträgheitsachsen ( $J_{23} = J_{32} = 0$ )

$$x_{3N} = -\frac{N_1 J_{22}}{A_1 M_2} + \frac{M_3 J_{22}}{J_{33} M_2} x_{2N}.$$

## Differentialgleichungen der schiefen Biegelinie

- bei schiefer Biegung im Schwerpunktsystem mit  $\{\Delta \Theta_2^*, \Delta \Theta_3^*\}$

$$w_3'' = \frac{1}{E (J_{22} J_{33} - J_{23}^2)} (-J_{33} M_2 + J_{23} M_3) - \alpha_\vartheta \Delta \Theta_3^*,$$

$$w_2'' = \frac{1}{E (J_{22} J_{33} - J_{23}^2)} (-J_{32} M_2 + J_{22} M_3) - \alpha_\vartheta \Delta \Theta_2^*.$$

Mit  $\{\Delta \Theta_2^*, \Delta \Theta_3^*\} = \text{konst. bzgl. } x_1$  folgt

$$E (J_{22} J_{33} - J_{23}^2) w_3^{IV} = J_{33} q_3 + J_{23} q_2,$$

$$E (J_{22} J_{33} - J_{23}^2) w_2^{IV} = J_{32} q_3 + J_{22} q_2.$$

- bei schiefer Biegung und Bezug auf Hauptträgheitsachsen ( $J_{23} = J_{32} = 0$ )

$$E J_{22} w_3^{IV} = q_3,$$

$$E J_{33} w_2^{IV} = q_2.$$

## Schubspannungsermittlung bei schiefer Biegung

**Bem.:** Schubspannungsermittlung bei schiefer Biegung wird erforderlich, wenn  $Q_2$  und  $Q_3$  im Hauptachsensystem oder  $Q_2$  und/oder  $Q_3$  im beliebigen Schwerpunktsystem existieren.

**Vor.:** dünnwandiger, offener Querschnitt:

- bei schiefer Biegung im Schwerpunktskoordinatensystem

$$\tau(s) = -\frac{1}{(J_{22} J_{33} - J_{23}^2) \delta(s)} [(J_{33} Q_3 + J_{23} Q_2) S_2(s) + (J_{32} Q_3 + J_{22} Q_2) S_3(s)]$$

- bei schiefer Biegung und Bezug auf Trägheitshauptachsen ( $J_{23} = J_{32} = 0$ )

$$\tau(s) = -\left( \frac{Q_3 S_2(s)}{J_{22} \delta(s)} + \frac{Q_2 S_3(s)}{J_{33} \delta(s)} \right)$$

## Schubmittelpunkt bei nicht-symmetrischen Querschnitten

- bei schiefer Biegung im Schwerpunktskoordinatensystem

$$x_{2M} = x_{2B} - \frac{J_{33} \int_0^l S_2(s) \overset{\curvearrowright}{r_t(s)} ds + J_{32} \int_0^l S_3(s) \overset{\curvearrowright}{r_t(s)} ds}{J_{22} J_{33} - J_{23}^2},$$

$$x_{3M} = x_{3B} + \frac{J_{23} \int_0^l S_2(s) \overset{\curvearrowright}{r_t(s)} ds + J_{22} \int_0^l S_3(s) \overset{\curvearrowright}{r_t(s)} ds}{J_{22} J_{33} - J_{23}^2}$$

- bei schiefer Biegung und Bezug auf Trägheitshauptachsen ( $J_{23} = J_{32} = 0$ )

$$x_{2M} = x_{2B} - \frac{1}{J_{22}} \int_0^l S_2(s) \overset{\curvearrowright}{r_t(s)} ds,$$

$$x_{3M} = x_{3B} + \frac{1}{J_{33}} \int_0^l S_3(s) \overset{\curvearrowright}{r_t(s)} ds$$

mit:

$$S_2(s_i) = \int_0^{s_i} x_3(\tilde{s}_i) \delta(\tilde{s}_i) d\tilde{s}_i + S_{20},$$

$$S_3(s_i) = \int_0^{s_i} x_2(\tilde{s}_i) \delta(\tilde{s}_i) d\tilde{s}_i + S_{30},$$

$x_{2,3}(s_i)$  : Abstand vom Schwerpunkt in  $x_{2,3}$ -Richtung zur Laufkoordinate  $s_i$ ,

$\delta(s_i)$  : Bauteildicke in Abhängigkeit von der Laufkoordinate  $s_i$ ,

$r_t(s)$  : senkrechter Abstand zwischen der Laufkoordinate und einem beliebigen Bezugspunkt.

## 9 Spezielle Probleme der Elastostatik der Stäbe und Balken

### Kernflächenberechnung

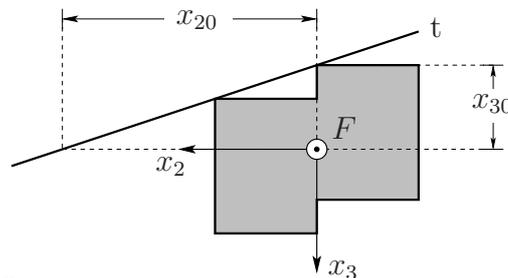
**Definition:** Der Kern ist derjenige Teil eines Querschnitts, in dem eine außermittige Normalkraft angreifen kann, so daß nur Spannungen eines Vorzeichens im Querschnitt auftreten.

1. Festlegen der Randtangente  $t$  (dürfen den Querschnitt nicht schneiden)
2. Bestimmung der Flächenträgheitsmomente  $J_{22}, J_{33}$
3. Berechnung der Achsenabschnitte:

$$x_{2P} = -\frac{J_{33}}{A_1 x_{20}} \quad \text{bzw.} \quad x_{2P} = -\frac{i_{33}^2}{x_{20}} \quad \text{mit} \quad i_{33} = \sqrt{\frac{J_{33}}{A_1}},$$

$$x_{3P} = -\frac{J_{22}}{A_1 x_{30}} \quad \text{bzw.} \quad x_{3P} = -\frac{i_{22}^2}{x_{30}} \quad \text{mit} \quad i_{22} = \sqrt{\frac{J_{22}}{A_1}}$$

Veranschaulichung:



### Verbundquerschnitte

**hier:** Bezug auf Hauptträgheitsachsen.

Berechnung des Steifigkeitsverhältnisses  $n$ :

$$n = \frac{E_S}{E_B} \quad \text{mit} \quad E_S > E_B \quad \text{und z. B.} \quad \begin{cases} S & : \text{ Stahl} \\ B & : \text{ Beton} \end{cases}$$

Stabproblem (zentrische Normalkraft):

$$N = N_S + N_B \quad \text{mit} \quad \begin{cases} N_S & = N \frac{n A_S}{A_i} \\ N_B & = N \frac{A_B}{A_i} \end{cases}$$

mit ideeller Querschnittsfläche  $A_i$ :

$$A_i = A_B + n A_S$$

Lage des ideellen Schwerpunkts  $F_i$ :

$$e_S = \frac{A_B}{A_i} e,$$

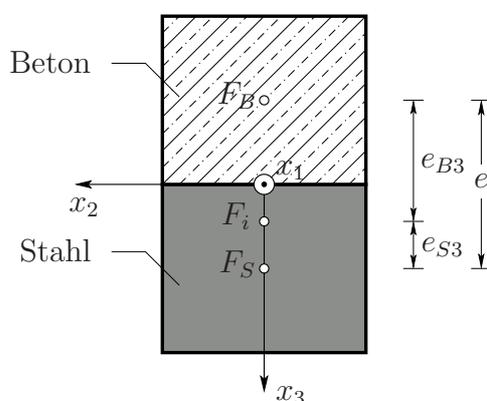
$$e_B = \frac{nA_S}{A_i} e.$$

ideelle Trägheitsmomente  $J_{22i}$  und  $J_{33i}$ :

$$J_{22i} = J_{22B} + e_{B3}^2 A_B + n (J_{22S} + e_{S3}^2 A_S),$$

$$J_{33i} = J_{33B} + e_{B2}^2 A_B + n (J_{33S} + e_{S2}^2 A_S).$$

**Veranschaulichung:**



Gerade Biegung des Verbundbalkens:

$$\sigma_{11i} = \frac{N_1}{A_i} + \frac{M_2}{J_{22i}} x_{3i}$$

Schiefe Biegung des Verbundbalkens:

$$\sigma_{11i} = \frac{N_1}{A_i} + \frac{M_2}{J_{22i}} x_{3i} - \frac{M_3}{J_{33i}} x_{2i}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \sigma_{11B} = \sigma_{11i}, \\ \sigma_{11S} = n \sigma_{11i}, \\ x_{3i}, x_{2i} : \text{ Abstand zum ideellen Schwerpunkt.} \end{cases}$$

**Differentialgleichung der schiefen Biegelinie des Verbundbalkens:**

- Differentialgleichung der Biegelinie bei Bezug auf Hauptträgheitsachsen bzgl. des ideellen Schwerpunkts (mit  $E_i = E_B$ ):

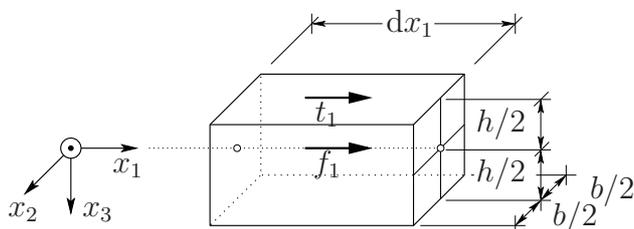
$$E_i J_{22i} w_3^{IV} = q_3,$$

$$E_i J_{33i} w_2^{IV} = q_2.$$

## Einfluß der Krafteinleitung auf die Spannungsverteilung

(a) Verteilt angreifende Längsbelastung:

Veranschaulichung:

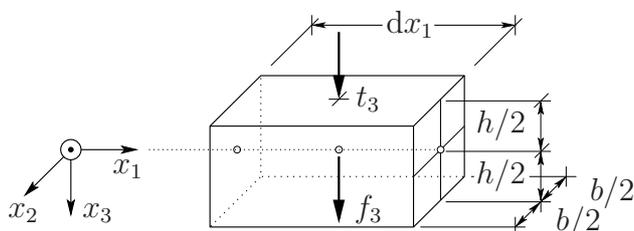


mit  $\begin{cases} t_1 & : \text{Oberflächenspannung in } \mathbf{e}_1 \text{- Richtung} \\ f_1 & : \text{Volumenkraft in } \mathbf{e}_1 \text{- Richtung} \end{cases}$

$$\sigma_{13} = -\frac{Q_3 S_2(x_3)}{J_{22} b} + \underbrace{t_1 \left( \frac{1}{4} + \frac{x_3}{h} - 3 \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right)}_{\text{Einfluß der Längsbelastung}}$$

(b) Verteilt angreifende Querbelastung:

Veranschaulichung:



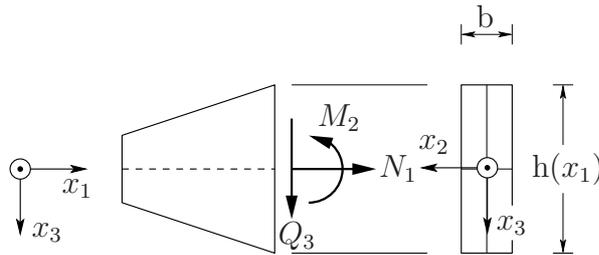
mit  $\begin{cases} t_3 & : \text{Oberflächenspannung in } \mathbf{e}_3 \text{- Richtung} \\ f_3 & : \text{Volumenkraft in } \mathbf{e}_3 \text{- Richtung} \end{cases}$

$$\sigma_{33} = \underbrace{-t_3 \left[ 2 \left( \frac{x_3}{h} \right)^3 - \frac{3}{2} \left( \frac{x_3}{h} \right) + \frac{1}{2} \right] - f_3 h \left[ 2 \left( \frac{x_3}{h} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{x_3}{h} \right) \right]}_{\text{Einfluß der Querbelastung}}$$

## Einfluß der Veränderung des Querschnitts auf die Spannungsverteilung

(a) Über  $x_1$  symmetrisch veränderliche Querschnittshöhe:

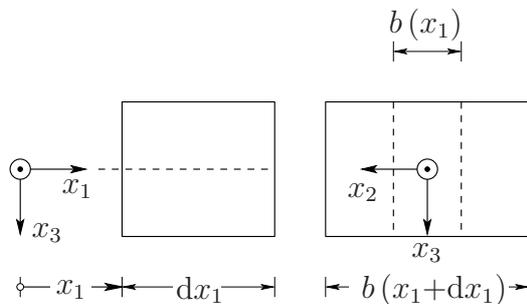
Veranschaulichung:



$$\sigma_{31} = -\frac{Q_3 S_2(x_1, x_3)}{J_{22}(x_1) b} - \underbrace{\frac{N_1}{b} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{A_{1R}(x_1, x_3)}{A_1(x_1)} \right) - \frac{M_2(x_1)}{b} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{S_2(x_1, x_3)}{J_{22}(x_1)} \right)}_{\text{Zusatzglieder infolge veränderter Querschnittshöhe}}$$

(b) Über  $x_1$  symmetrisch veränderliche Querschnittsbreite:

Veranschaulichung:



$$\sigma_{31} = -\frac{Q_3 S_2(x_1, x_3)}{J_{22}(x_1) b(x_1)} - \underbrace{\frac{N_1}{b(x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{A_{1R}(x_1, x_3)}{A_1(x_1)} \right) - \frac{M_2(x_1)}{b(x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{S_2(x_1, x_3)}{J_{22}(x_1)} \right)}_{\text{Zusatzglieder infolge veränderter Querschnittsbreite}}$$

## Hauptnormalspannungstrajektorien

1. Schnittgrößenverläufe berechnen
2. Spannungsverläufe  $\sigma_{11}(x_1, x_3)$  und  $\sigma_{13}(x_1, x_3)$  berechnen
3. implizite Formel ( $\sigma_{33} = 0$  bei gerader Biegung):

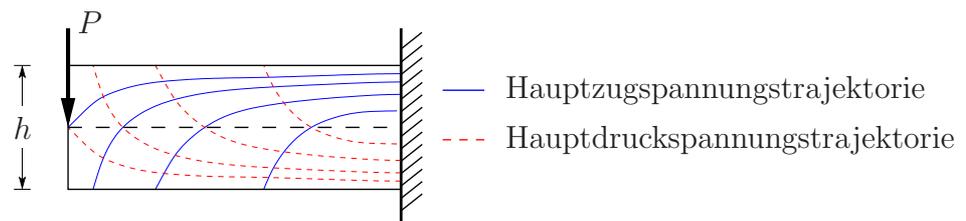
$$\tan 2\varphi_0(x_1, x_3) = \frac{2\sigma_{13}(x_1, x_3)}{\sigma_{11}(x_1, x_3) - \sigma_{33}(x_1, x_3)}$$

4. Differentialgleichung:

$$\frac{dx_3(x_1)}{dx_1} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2\sigma_{13}} \left[ \pm \sqrt{1 + \left( \frac{2\sigma_{13}}{\sigma_{11} - \sigma_{33}} \right)^2} - 1 \right].$$

DGL kann nicht geschlossen integriert werden.  $\rightarrow$  Man bestimmt das Richtungsfeld punktweise durch Einsetzen der Spannungen  $\sigma_{ik}(x_1, x_3)$ .

Veranschaulichung:



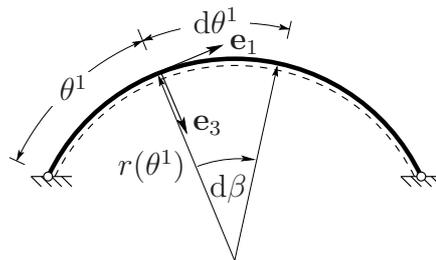
## Gerade Biegung des in der Ebene gekrümmten Balkens

**Vor.:** Es existieren die Belastungen  $n_1(\Theta^1), q_3(\Theta^1), m_2(\Theta^1)$ .

Differentialbeziehungen für Schnittgrößen:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{d\theta^1} &:= N_1' = -n_1(\theta^1) + \frac{1}{r(\theta^1)} Q_3(\theta^1), \\ \frac{dQ_3}{d\theta^1} &:= Q_3' = -q_3(\theta^1) - \frac{1}{r(\theta^1)} N_1(\theta^1), \\ \frac{dM_2}{d\theta^1} &:= M_2' = -m_2(\theta^1) + Q_3(\theta^1). \end{aligned}$$

Veranschaulichung:



Längsverzerrung der Balkenachse und des Balkenraums:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_0 + (\varepsilon_0 - \psi r) \frac{\theta^3}{r - \theta^3}$$

mit  $\begin{cases} r = \frac{d\theta^1}{d\beta} & \text{und } \psi = \frac{\Delta d\beta}{d\theta^1}, \\ \Delta d\beta & : \text{Änderung des inkrementellen Winkels } d\beta \text{ infolge Belastung.} \end{cases}$

Biegenormalspannung am gekrümmten Balken:

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{A_1} + \frac{M_2}{J_{22}^*} \left( \frac{\theta^3}{1 - \frac{\theta^3}{r}} - \frac{J_{22}^*}{A_1 r} \right)$$

mit  $J_{22}^* = r^2 \int_{A_1} \frac{\theta^3}{r - \theta^3} da_1$

Lage der neutralen Faser bei gerader Biegung des in der Ebene gekrümmten Balkens mit  $N_1 \equiv 0$ :

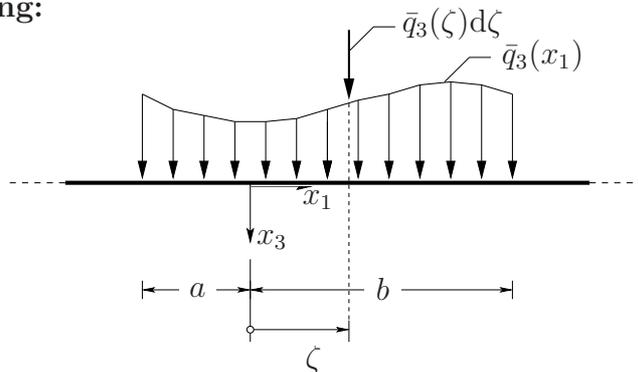
$$\Theta_N^3 = r \frac{J_{22}^*}{A_1 r + J_{22}^*}$$



- Lösung der inhomogenen Dgl. ( $\bar{q}_3 \neq 0$ ):

Inhomogene Lösungen müssen in der Regel für den speziell vorliegenden Fall entwickelt werden. Man erhält die Partikulärlösung unter Ausnutzung der homogenen Lösung und der Analogie  $P \rightarrow \bar{q}_3(\zeta) d\zeta$ , der Koordinatentransformation  $x_1 \rightarrow (x_1 - \zeta)$  sowie der Ausnutzung des Superpositionsprinzips.

**Veranschaulichung:**



$$w_p(x_1) = \frac{1}{8 E J_{22} \kappa^3} \int_{-a}^b e^{-\kappa |x_1 - \zeta|} [\cos(\kappa |x_1 - \zeta|) + \sin(\kappa |x_1 - \zeta|)] \bar{q}_3(\zeta) d\zeta$$

$$\text{für } x_1 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0$$

- Zusammenfassung:

$$w(x_1) = w_h(x_1) + w_p(x_1)$$

## 10 Torsion prismatischer Stäbe

**Merke:** Die Verdrillung gibt die Verdrehung des Querschnitts eines auf Torsion beanspruchten Stabs auf die Länge bezogen an.  
Die Verwölbung bezeichnet die Verformung von Querschnitten in Richtung der Stabachse bei der Torsion von Stäben. Bis auf wenige Ausnahmen (z. B. Kreisvollquerschnitt) verwölben sich alle Querschnittsformen bei Torsion.

### Voraussetzungen und Annahmen

- Vor.:**
- gerade, prismatische Stäbe
  - es existieren nur Schnittgrößen  $M_T = \text{konst.}$   
alle anderen Schnittgrößen verschwinden  $\rightarrow M_T = M_1$   
(im allgemeinen haben  $Q_2$  und  $Q_3$  einen Einfluß auf  $M_T$ )
  - konstante Temperatur  $\Delta\theta \equiv 0$
- Annahme:** Querschnitte können sich frei verwölben  
 $\rightarrow$  *De Saint Venantsche* Torsionstheorie

### Der gerade Stab mit Kreisvollquerschnitt

**Bem.:** Für den Stab mit Kreisvollquerschnitt tritt auch ohne Wölbbehinderung keine Verwölbung auf  $\rightarrow$  wölbfreier Querschnitt.

Berechnung der Schubspannung aus Torsion:

$$\tau_T = \frac{M_T}{J_P} r$$

$$\text{mit } \left\{ \begin{array}{ll} J_P = J_{11} = \int_S R^2 da = \frac{\pi}{2} R^4 & : \text{polares Trägheitsmoment} \\ r & : \text{Abstand vom Kreismittelpunkt} \\ R & : \text{Radius} \end{array} \right.$$

Maximale Schubspannung aus Torsion:

$$\max \tau_T = \frac{M_T}{J_P} R = \frac{M_T}{W_T}$$

$$\text{mit } W_T = \frac{J_P}{R} \quad : \quad \text{Torsionswiderstandsmoment}$$

Verdrillung:

$$\vartheta = \frac{M_T}{G J_P}$$

mit  $G$  : Schubmodul

Gesamtverdrehung:

$$\Delta\varphi = \vartheta l$$

Übertragung der Ergebnisse auf den Kreisringquerschnitt:

$$J_P = \int_0^{2\pi} \int_r^R \tilde{r}^3 d\tilde{r} d\varphi = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$$

mit  $\{r, R\}$  : innerer und äußerer Radius des Kreisrings

## Der gerade Stab mit dünnwandigem, geschlossenem Querschnitt

Schubspannung infolge Torsion

$$\tau(s) = \frac{M_T}{2 A_m \delta(s)}$$

1. *Bredtsche* Formel

$$|\tau(s)|_{max} = \frac{M_T}{W_T} \quad \text{mit} \quad W_T = 2 A_m \delta(s)_{min}$$

2. *Bredtsche* Formel

$$\vartheta = \frac{M_T}{G J_T} \quad \text{mit} \quad J_T = \frac{4 A_m^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}$$

Berechnung der Verwölbung:

$$u_1(s) = u_1(0) + \vartheta \left( 2 A_m \frac{\int_0^s \frac{d\tilde{s}}{\delta(\tilde{s})}}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}} - \int_0^s r_t(\tilde{s}) d\tilde{s} \right)$$

$$\text{mit} \begin{cases} u_1(0) & : \text{Anfangsbedingung (gegeben oder frei wählbar)} \\ \delta(s) & : \text{Dicke} \end{cases}$$

## Der gerade Stab mit dünnwändigem, offenen Querschnitt

Torsionsträgheitsmoment:

$$J_T = \beta \sum_i \frac{1}{3} \delta_i^3 h_i = \beta \int_s \frac{1}{3} \delta^3(s) ds$$

mit  $\left\{ \begin{array}{l} \delta : \text{Dicke} \\ h : \text{Länge des Abschnitts eines Polygonquerschnitts} \\ s : \text{Laufvariable entlang des Querschnitts} \\ \beta : \text{Korrekturfaktor in Abhängigkeit der Profilform} \end{array} \right.$

Profilform						
$\beta$	1,0	1,12	1,12	1,3	1,0	1,0

Verdrillung:

$$\vartheta = \frac{M_T}{GJ_T}$$

Maximale Schubspannung infolge Torsion:

$$|\tau_i|_{max} = \frac{|M_T|}{J_T} \delta_i = \frac{|M_T|}{W_T}$$

$$W_T = \frac{J_T}{\delta_i}$$

**Bem.:** Die Verwölbung kann prinzipiell aus den Beziehungen für dünnwandige, geschlossene Querschnitte hergeleitet werden. Bei dünnwandigen, offenen Profilen entfällt jedoch die Integration von  $\tau_i$  über die Dickenrichtung. Es folgt

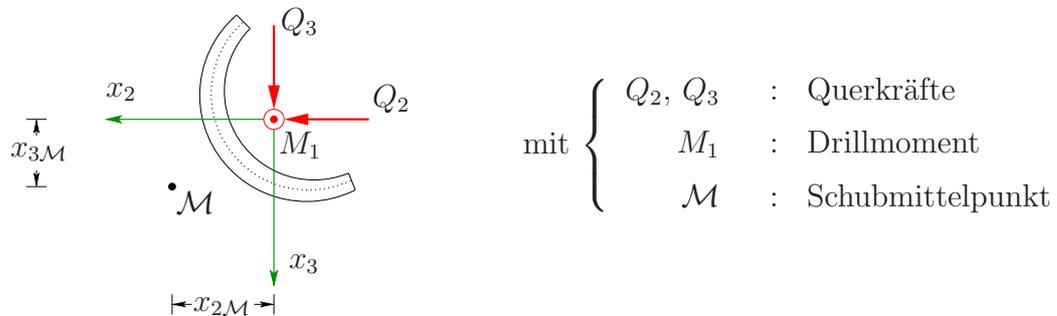
$$u_1(s) = u_1(0) - \vartheta \int_0^s r_t(\tilde{s}) d\tilde{s}$$

Wölbfunktion (auf die Drillung bezogene Verwölbung):

$$\xi(s) = \frac{u_1(s)}{\vartheta}$$

## Zusammenwirken von Querkraft und Drillmoment

Veranschaulichung:



$$M_T = M_1 - x_{2\mathcal{M}} Q_3 + x_{3\mathcal{M}} Q_2$$

**Bem.:** Alle Formeln der *Saint Venantschen* Torsionstheorie können auch allgemein benutzt werden, wenn  $M_T = \text{konst.}$  bzw.  $M_1 \approx \text{konst.}$  ist. Spannungen aus Querkraft und Torsion sind zu überlagern (Superposition).

## TEIL IV: Energiemethoden der linearen Elastostatik

### 11 Energiesatz und Arbeitssatz

#### Energiesatz der Mechanik

Für ein Gleichgewichtssystem gilt

$$d\mathcal{W}(\mathcal{B}) = d\mathcal{A}_a(\mathcal{B})$$

(innere Energie = äußere Energie)

Darin sind

$$d\mathcal{W} = -d\mathcal{A}_i = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (\text{Inkrement der Formänderungsarbeit})$$

$$d\mathcal{A}_a = \int_S \mathbf{t} \cdot d\mathbf{u} da + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot d\mathbf{u} dv \quad (\text{Ink. der äußeren Oberflächen- und Volumenkräfte})$$

#### Arbeitssatz der Mechanik

Integration der Inkremente von Formänderungsarbeit und äußerer Arbeit über den Deformations- bzw. Verschiebungsweg liefert zwischen den Zuständen ① und ②.

$\mathcal{W}(\mathcal{B})_{12} = -\mathcal{A}_i(\mathcal{B})_{12} = \int_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{ds} dv ds \quad : \text{Formänderungsarbeit}$
$\mathcal{A}_a(\mathcal{B})_{12} = \int_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} \int_S \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} da ds + \int_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} dv ds \quad : \text{äußere Arbeit}$

Arbeitssatz der Mechanik:

$\mathcal{W}(\mathcal{B})_{12} = \mathcal{A}_a(\mathcal{B})_{12}$
---

Für konservative mechanische Systeme können innere Spannungen und äußere Kräfte aus Potentialen hergeleitet werden. Es folgt für den Arbeitssatz:

$$U_i(\mathcal{B})_2 - U_i(\mathcal{B})_1 = \mathcal{A}_a(\mathcal{B})_{12}$$

Zustand 1 kann hier der natürliche undeformierte Zustand sein ( $U_i(\mathcal{B})_1 = 0$ ).

Energieerhaltungssatz für konservative Systeme:

$U_i(\mathcal{B})_2 + U_a(\mathcal{B})_2 = U_i(\mathcal{B})_1 + U_a(\mathcal{B})_1$
---

**Bem.:** Ein System ist konservativ, wenn die Formänderungsarbeit und die äußere Arbeit zwischen den Zuständen ① und ② nicht vom Weg abhängen, auf dem sie geleistet werden.

## Die gespeicherte elastische Energie

**Bem.:** Im Rahmen der linearen Elastizität sind die gespeicherte Energie  $u_i(\boldsymbol{\varepsilon})$  und die gespeicherte Komplementärenergie  $u_i^*(\boldsymbol{\sigma})$  identisch, d. h.

$$u_i(\boldsymbol{\varepsilon}) = u_i(\boldsymbol{\sigma}) = u_i^*(\boldsymbol{\sigma}).$$

Elastisches Potential:

$$u_i(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I})^2 \right]$$

Elastisches Komplémentärpotential:

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2E} \left[ (1+\nu)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \nu(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I})^2 \right]$$

Es gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{du_i(\boldsymbol{\varepsilon})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{du_i(\boldsymbol{\sigma})}{d\boldsymbol{\sigma}}$$

**Merke:** Für den elastischen Körper sind der spannungsfreie und der undeformierte Zustand identisch.

## Die Formänderungsarbeit bei geraden Stäben

Komplémentärpotential:

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2E} \sigma_{11}^2 + \frac{1}{2G} \tau^2$$

Formänderungsarbeit:

$$\mathcal{W}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \int_l \left( \frac{N_1^2}{EA_1} + \frac{M_2^2}{EJ_{22}} + \frac{M_3^2}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3^2}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_2^2}{GA_1} + \frac{M_T^2}{GJ_T} \right) dx_1$$

mit  $\kappa_{2,3}$  : Formbeiwerte des Querschnitt

Querschnitt	$\kappa$	Bemerkung
	1,2	
	1,33	
	2,0 - 2,4	$\kappa \approx \frac{A}{A_{Steg}}$
	3 - 5	
	3 - 4	
	2,0 - 2,4	

## Die Sätze von Castigliano

1. Satz von *Castigliano*:

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathcal{A}_a(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{F}_i} = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{F}_i}$$

$\mathcal{W}(\mathcal{B})$  wird hier durch die Schnittgrößen ausgedrückt (dargestellt als Funktion der Kräfte/Momente  $\mathbf{F}_i$ ).

Vorgehensweise bei der Berechnung von Verschiebungen und Verdrehungen in Systemen:

- Grad der statischen Unbestimmtheit ermitteln
- System gegebenenfalls statisch bestimmt machen  
→ Einführung einer statisch unbestimmten Kraft/Moment (meist an einem Auflager)
- Ermittlung der statisch unbestimmten Kraft/Moment  
→ Kompatibilitätsbedingung
- Berechnung von Verschiebungen/Verdrehungen  
→ Einführung einer Hilfskraft/Hilfsmoment, dort wo Verschiebung/Verdrehung gefragt ist  
→ Ableiten der Formänderungsarbeit nach der Hilfsgröße, dann Nullsetzen der Hilfsgröße

2. Satz von *Castigliano*:

$$\mathbf{F}_i = \frac{\partial \mathcal{A}_a(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{u}_i} = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{u}_i}$$

$\mathcal{W}(\mathcal{B})$  wird hier als Funktion der Verschiebungen/Verdrehungen  $\mathbf{u}_i$  ausgedrückt.

## Die Sätze von Betti und Maxwell

Satz von *Betti*:

Wirken 2 Kräftesysteme  $\mathcal{F}_i$  und  $\mathcal{F}_k$  auf einen linear-elastischen Körper, so ist die Arbeit  $\mathcal{A}_{ik}$ , die von  $\mathcal{F}_i$  auf den durch  $\mathcal{F}_k$  verursachten Verschiebungsweg geleistet wird, gleich der Arbeit  $\mathcal{A}_{ki}$ , die von  $\mathcal{F}_k$  auf den durch  $\mathcal{F}_i$  verursachten Weg geleistet wird:

$$\mathcal{A}_{ik} = \mathcal{A}_{ki}$$

Satz von *Maxwell*:

Die Verschiebung an der Stelle  $i$  infolge einer Kraft der Größe „1“ an der Stelle  $k$  ist gleich der Verschiebung an der Stelle  $k$  infolge einer Kraft der Größe „1“ an der Stelle  $i$ .

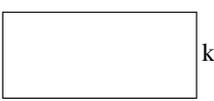
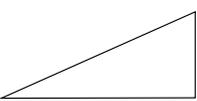
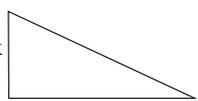
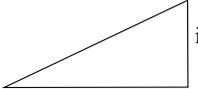
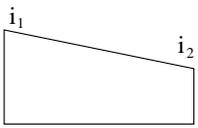
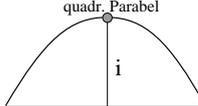
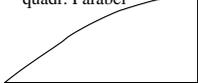
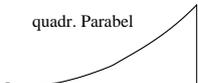
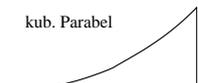
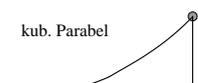
Mit der Verschiebungsformänderungsarbeit folgt für die Berechnung von Weggrößen

$$A_{ik} = W_{ik} = P_i f_{ik}$$

so dass für  $P_i = „1“$

$$„1“ f_i = f_{ik} = W_{ik} = \int_l \left( \frac{N_i N_k}{EA_1} + \frac{M_{2i} M_{2k}}{EJ_{22}} + \frac{M_{3i} M_{3k}}{EJ_{33}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \kappa_3 \frac{Q_{3i} Q_{3k}}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_{2i} Q_{2k}}{GA_1} + \frac{M_{Ti} M_{Tk}}{GJ_T} \right) dx_1$$

Die Berechnung von  $f_{ik}$  kann hier mit Hilfe der Überlagerungstafel erfolgen.

Überlagerungstafel / Koppeltafel				
l	 k	 k	 k	 k <sub>1</sub> k <sub>2</sub>
 i	l i k	$\frac{1}{2} l i k$	$\frac{1}{2} l i k$	$\frac{1}{2} l i (k_1 + k_2)$
 i	$\frac{1}{2} l i k$	$\frac{1}{3} l i k$	$\frac{1}{6} l i k$	$\frac{1}{6} l i (k_1 + 2 k_2)$
 i <sub>1</sub> i <sub>2</sub>	$\frac{1}{2} l (i_1 + i_2) k$	$\frac{1}{6} l (i_1 + 2 i_2) k$	$\frac{1}{6} l (2 i_1 + i_2) k$	$\frac{1}{6} l (2 i_1 k_1 + i_1 k_2 + i_2 k_1 + 2 i_2 k_2)$
 quadr. Parabel i	$\frac{2}{3} l i k$	$\frac{1}{3} l i k$	$\frac{1}{3} l i k$	$\frac{1}{3} l i (k_1 + k_2)$
 quadr. Parabel i	$\frac{2}{3} l i k$	$\frac{5}{12} l i k$	$\frac{1}{4} l i k$	$\frac{1}{12} l i (3 k_1 + 5 k_2)$
 quadr. Parabel i	$\frac{1}{3} l i k$	$\frac{1}{4} l i k$	$\frac{1}{12} l i k$	$\frac{1}{12} l i (k_1 + 3 k_2)$
 kub. Parabel i	$\frac{1}{4} l i k$	$\frac{1}{5} l i k$	$\frac{1}{20} l i k$	$\frac{1}{20} l i (k_1 + 4 k_2)$
 kub. Parabel i	$\frac{3}{8} l i k$	$\frac{11}{40} l i k$	$\frac{1}{10} l i k$	$\frac{1}{40} l i (4 k_1 + 11 k_2)$
 kub. Parabel i	$\frac{1}{4} l i k$	$\frac{2}{15} l i k$	$\frac{7}{60} l i k$	$\frac{1}{60} l i (7 k_1 + 8 k_2)$

- quadr. Parabel: Scheitelpunkt
- kub. Parabel: Nullstelle der Dreieckslast

## Das Prinzip der virtuellen Arbeit (PdvA)

### Das PdvA als Prinzip der virtuellen Verrückungen (PdvV)

In konservativen Systemen können  $\delta\mathcal{W}$  und  $\delta\mathcal{A}_a$  als Variation von Potentialen dargestellt werden.

$$\delta\mathcal{W}(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{du_i(\boldsymbol{\varepsilon})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} dv = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} dv$$

$$\delta\mathcal{A}_a(\mathcal{B}) = \frac{\partial\mathcal{A}_a(\mathcal{B})}{\partial\mathbf{u}} \cdot \delta\mathbf{u} = \mathbf{P}(\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \delta\boldsymbol{\varepsilon} & : \text{virtuelle Verzerrung} \\ \delta\mathbf{u} & : \text{virtuelle Verrückung} \end{cases}$$

### Eigenschaften der virtuellen Verzerrungen und Verschiebungen:

- gedacht,
- unendlich klein,
- mit den geometrischen Zwangsbedingungen des Systems verträglich.

### Das PdvA als Prinzip der virtuellen Kräfte (PdvK)

In konservativen Systemen können  $\delta\mathcal{W}$  und  $\delta\mathcal{A}_a$  als Variation von Komplementärpotentialen dargestellt werden.

$$\delta\mathcal{W}(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{du_i(\boldsymbol{\sigma})}{d\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma} dv = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma} dv$$

$$\delta\mathcal{A}_a(\mathcal{B}) = \frac{\partial\mathcal{A}_a(\mathcal{B})}{\partial\mathbf{P}} \cdot \delta\mathbf{P} = \mathbf{u}(\mathbf{P}) \cdot \delta\mathbf{P}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \delta\boldsymbol{\sigma} & : \text{virtuelle Spannung} \\ \delta\mathbf{P} & : \text{virtuelle Kraftgröße} \end{cases}$$

### Eigenschaften der virtuellen Spannungen und Kraftgrößen

- gedacht,
- unendlich klein,
- mit den statischen Zwangsbedingungen (Gleichgewichtsbedingungen) des Systems verträglich.

## Das PdvK in der Theorie der geraden Stäbe

Formulierung der Formänderungsarbeit in Schnittgrößen

$$\delta\mathcal{W}(\mathcal{B}) = \int_l \left( \frac{N_1 \delta N_1}{EA_1} + \frac{M_2 \delta M_2}{EJ_{22}} + \frac{M_3 \delta M_3}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3 \delta Q_3}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_2 \delta Q_2}{GA_1} + \frac{M_T \delta M_T}{GJ_T} \right) dx_1$$

Einführung eines virtuellen Kraftzustandes mit der Größe „1“:

$$\text{„1“ } f = \int_l \left( \frac{N_1 \bar{N}_1}{EA_1} + \frac{M_2 \bar{M}_2}{EJ_{22}} + \frac{M_3 \bar{M}_3}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3 \bar{Q}_3}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_2 \bar{Q}_2}{GA_1} + \frac{M_T \bar{M}_T}{GJ_T} \right) dx_1$$

$$\text{mit } \begin{cases} \delta N_1 =: \bar{N}_1, & \delta M_2 =: \bar{M}_2, & \text{usw.} \\ \delta P =: \bar{P} = \text{„1“} \end{cases}$$

## 12 Anwendungen des Arbeitssatzes (PdvK) auf Probleme der Stabtheorie

### Berücksichtigung von Temperaturänderungen

Unter Berücksichtigung von thermischen Anteilen folgt für die Formänderungsarbeit

$$\mathcal{W}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \int_l \left( \frac{N_1^2}{EA_1} + \frac{M_2^2}{EJ_{22}} + \frac{M_3^2}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3^2}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_2^2}{GA_1} + \frac{M_T^2}{GJ_T} \right) dx_1 +$$

$$+ \alpha_{\vartheta} \int_l (N_1 \Delta\Theta_m + M_2 \Delta\Theta_3^* - M_3 \Delta\Theta_2^*) dx_1$$

$$\text{mit } \begin{cases} \Delta\Theta_m = \frac{\Delta\Theta_o + \Delta\Theta_u}{2} \\ \Delta\Theta_3^* = \frac{\Delta\Theta_u - \Delta\Theta_o}{h} \\ \Delta\Theta_2^* = \frac{\Delta\Theta_v - \Delta\Theta_h}{b} \end{cases}$$

Entsprechend folgt für die Stabtheorie unter Berücksichtigung von Temperaturänderungen für einen virtuellen Kraftzustand der Größe „1“

$$\text{„1“ } f = \int_l \left( \frac{N_1 \bar{N}_1}{EA_1} + \frac{M_2 \bar{M}_2}{EJ_{22}} + \frac{M_3 \bar{M}_3}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3 \bar{Q}_3}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_2 \bar{Q}_2}{GA_1} + \frac{M_T \bar{M}_T}{GJ_T} \right) dx_1 +$$

$$+ \alpha_{\vartheta} \int_l (\bar{N}_1 \Delta\Theta_m + \bar{M}_2 \Delta\Theta_3^* - \bar{M}_3 \Delta\Theta_2^*) dx_1$$

## Statisch unbestimmte Systeme

### Berechnung eines einfach statisch unbestimmten Tragwerks mit Hilfe des PdvK durch Superposition von 0- und X-System

Zerlegung des einfach statisch unbestimmten Systems in ein 0-System (statisch bestimmtes Grundsystem) und ein X-System.

#### Vorgehen:

1. Auslösen einer Kraftgröße, so daß ein statisch bestimmtes Grundsystem entsteht. Die ausgelöste Kraftgröße wird als statisch unbestimmte Belastung  $X$  an der ausgelösten Stelle angetragen.

2. Berechnung aller relevanten Schnittgrößen im 0- und X-System

0-System  $\rightarrow X = 0$   
 $\rightarrow$  Aufbringen aller äußeren Belastungen  
 (Kraftlastfälle und Temperaturlastfälle)

X-System  $\rightarrow X = 1$   
 $\rightarrow$  keine weiteren Belastungen

3. Berechnung der Verschiebungswerte  $\delta_{ik}$

(Verschiebung an der Stelle  $i$  infolge Last an der Stelle  $k$ )  $\rightarrow$  hier:  $\delta_{10}, \delta_{11}$

$$\delta_{10} = \int_l \left( \frac{N_{10} \bar{N}_{11}}{EA_1} + \frac{M_{20} \bar{M}_{21}}{EJ_{22}} + \frac{M_{30} \bar{M}_{31}}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_{30} \bar{Q}_{31}}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_{20} \bar{Q}_{21}}{GA_1} + \frac{M_{T0} \bar{M}_{T1}}{GJ_T} \right) dx_1 +$$

$$+ \alpha_\vartheta \int_l (\bar{N}_{11} \Delta \Theta_m + \bar{M}_{21} \Delta \Theta_3^* - \bar{M}_{31} \Delta \Theta_2^*) dx_1$$

$$\delta_{11} = \int_l \left( \frac{\bar{N}_{11} \bar{N}_{11}}{EA_1} + \frac{\bar{M}_{21} \bar{M}_{21}}{EJ_{22}} + \dots \right) dx_1$$

**Bem.:** Alternativ können die Verschiebungswerte auch mit Überlagerungstafeln berechnet werden (Koppeln der Verläufe).

4. Aufstellen der Kompatibilitätsbedingung.

$\rightarrow$  Die Verschiebung an der ausgelösten Stelle muss sich zu Null ergeben.

$$f = \delta_1 = \delta_{10} + X \delta_{11} \stackrel{!}{=} 0$$

$$X = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\int_l \left( \frac{N_{10} \bar{N}_{11}}{EA_1} + \frac{M_{20} \bar{M}_{21}}{EJ_{22}} + \dots \right) dx_1}{\int_l \left( \frac{\bar{N}_{11} \bar{N}_{11}}{EA_1} + \frac{\bar{M}_{21} \bar{M}_{21}}{EJ_{22}} + \dots \right) dx_1}$$

5. Berechnung der gewünschten Schnittkraftverläufe durch Superposition, z. B.

$$N_1 = N_{10} + X \bar{N}_{11}$$

$$M_2 = M_{20} + X \bar{M}_{21}$$

## Berechnung diskreter Verschiebungsgrößen mit Hilfe des Reduktionssatzes

**Bem.:** Mit Hilfe des Reduktionssatzes können diskrete Verschiebungs- und Verdrehungsgrößen in statisch bestimmten sowie in statisch unbestimmten Tragwerken berechnet werden. Die Schnittgrößenverläufe des Systems müssen in einer vorhergegangenen Rechnung bestimmt werden. Zur Berechnung der Weggröße werden eine Einheitslast „1“ in einem beliebigen statisch bestimmten Grundsystem (i. d. R. das stat. best. Grundsystem der vorangegangenen Rechnung) an der Stelle der gewünschten Weggröße angesetzt und die daraus resultierenden Schnittkraftverläufe  $\tilde{N}_{10}$ ,  $\tilde{M}_{10}$  bestimmt. Die gesuchte Weggröße ergibt sich dann zu

$$„1“ f = \int_l \left( \frac{N_1 \tilde{N}_{10}}{EA_1} + \frac{M_2 \tilde{M}_{20}}{EJ_{22}} + \frac{M_3 \tilde{M}_{30}}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3 \tilde{Q}_{30}}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_2 \tilde{Q}_{20}}{GA_1} + \frac{M_T \tilde{M}_{T0}}{GJ_T} \right) dx_1$$

## TEIL V: Stabilitätsprobleme der linearen Elastostatik

### 13 Elementare Stabilitätsprobleme in der Elastostatik

#### Allgemeine Voraussetzungen

Gesamtpotential (gespeicherte Gesamtenergie) in konservativen Systemen:

$$U(\mathcal{B}) = U_i(\mathcal{B}) + U_a(\mathcal{B}) = \text{konst.}$$

$$\text{mit } \begin{cases} U(\mathcal{B}) & : \text{ Gesamtpotential} \\ U_i(\mathcal{B}) = \mathcal{W}(\mathcal{B}) & : \text{ in konservativen Systemen} \\ U_a(\mathcal{B}) = -\mathcal{A}_a(\mathcal{B}) & : \text{ in konservativen Systemen} \end{cases}$$

Gleichgewicht in konservativen Systemen durch die 1. Variation des Gesamtpotentials:

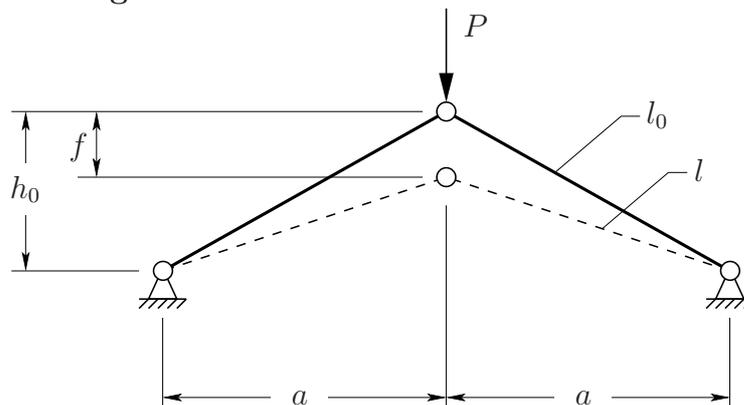
$$\delta U(\mathcal{B}) = \delta U_i(\mathcal{B}) + \delta U_a(\mathcal{B}) = 0$$

Stabilität in konservativen Systemen durch die 2. Variation des Gesamtpotentials:

$$\delta^2 U(\mathcal{B}) \begin{cases} > 0 & : \text{ stabiles Gleichgewicht} \\ = 0 & : \text{ indifferentes Gleichgewicht} \\ < 0 & : \text{ labiles Gleichgewicht} \end{cases}$$

#### Das Durchschlagproblem

Veranschaulichung:



Gesamtpotential:

$$U(\mathcal{B}) = 2EA \left( l_0 - \sqrt{(h_0 - f)^2 + a^2} \right) - \frac{EAf(2h_0 - f)}{l_0} - Pf$$

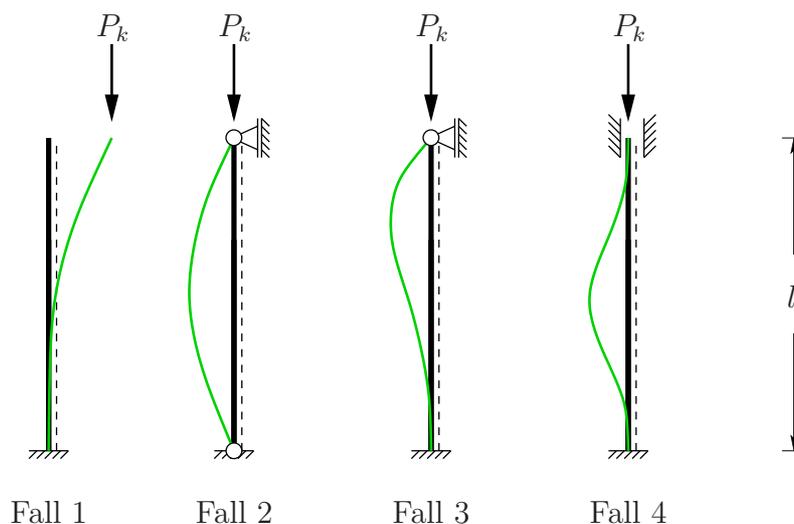
Gleichgewicht liefert:

$$P = 2EA \frac{h_0 - f}{l_0} \left( \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h_0 - f}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{a}{l_0}\right)^2}} - 1 \right)$$

### Knicken eines Druckstabs (Euler-Fälle)

**Bem.:** Das Knicken ist verbunden mit dem Ausbiegen der Stabachse eines Druckstabs in eine beliebige Richtung.

**Problemstellung:**



**Voraussetzung:**

- prismatische Stäbe mit gerader Stabachse
- Bezugssystem sei ein Trägheitshauptachsensystem  
→ Knicken verursacht gerade Biegung um die  $x_2$ - oder um die  $x_3$ -Achse
- zentrische, richtungstreue Belastung
- es gelten die *Bernoullischen* Annahmen

**Bem.:** Da die Knickrichtung a priori nicht bekannt ist, wird  $J$  anstelle von  $J_{22}$  bzw.  $J_{33}$  verwendet.

**Berechnung der Knicklast:**

$$P_k = \frac{\pi^2 E J_{min.}}{l_k^2}$$

$$\text{mit } \begin{cases} 1. \text{ Fall: } l_k = 2l \\ 2. \text{ Fall: } l_k = l \\ 3. \text{ Fall: } l_k = 0,7l \\ 4. \text{ Fall: } l_k = 0,5l \end{cases}$$

**Bem.:** Die kritische Last ist die kleinste Knicklast. Sie ergibt sich also für  $J_{min.}$ . Die Knicklänge  $l_k$  ist der  $x_1$ -Abstand zwischen den Wendepunkten der Biegelinie ( $w'' = 0 \rightarrow M(x_1) = 0$ ).

**Berechnung der Knickspannung:**

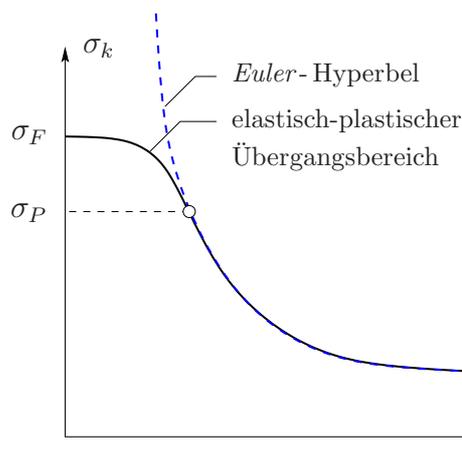
$$\sigma_k = \frac{P_k}{A} = \frac{\pi^2 E J_{min.}}{A l_k^2} = \frac{\pi^2 E i^2}{l_k^2}$$

$$\text{mit } i = i_{min.} = \sqrt{\frac{J_{min.}}{A}} : \text{Trägheitsradius}$$

**Einführung der Schlankheit  $\lambda$ :**

$$\lambda = \frac{l_k}{i_{min.}} = l_k \sqrt{\frac{A}{J_{min.}}}$$

$$\rightarrow \sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

**Darstellung der kritischen Spannung (Euler-Hyperbel):**

**Bem.:** Die *Euler-Hyperbel* setzt andauernde Elastizität voraus. Die zulässige Spannung soll die Fließspannung  $\sigma_F$  jedoch nicht überschreiten.

## TEIL VI: Festigkeitshypothesen

### 14 Elementare Festigkeitshypothesen

#### Diskussion von Festigkeitseigenschaften

**Bem.:** Die Grenze des elastischen Bereichs und damit die Grenze der Gültigkeit der Gesetze der Elastostatik kann erreicht werden durch:

- $\sigma_B$ : sofortiger Bruch  $\rightarrow$  spröde Werkstoffe
- $\sigma_F$ : idealplastisches bzw. verfestigendes Verhalten bis zum Bruch  $\rightarrow$  zähe Werkstoffe

#### Hypothese der maximalen Normalspannung

**Annahme:**

Das Material versagt, wenn eine der drei Hauptspannungen die einaxiale Vergleichsspannung  $\sigma_V$  (Fließspannung  $\sigma_F$  oder Bruchspannung  $\sigma_B$ ) erreicht.

**Lamé - Rankinesche Normalspannungshypothese:**

$$\boxed{|\sigma_1| \leq \sigma_V \quad ; \quad |\sigma_3| \leq \sigma_V} \quad \text{mit} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

#### Hypothese der maximalen Schubspannung

**Annahme:**

Das Material versagt, wenn die größte Hauptschubspannung einen kritischen Wert erreicht.

**Bem.:** Der kritische Wert ist mit Hilfe der einaxialen Vergleichsspannung  $\sigma_V$  festzulegen.

**Einaxiale Vergleichsspannung:**

$$\boxed{\tau = \frac{1}{2} \sigma_V}$$

**Festigkeitskriterium nach Tresca:**

$$\boxed{|\sigma_1 - \sigma_3| \leq \sigma_V} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \\ \tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \end{cases}$$

## Hypothese der maximalen Gestaltsänderungsarbeit

### Bemerkungen:

- Man sucht a priori ein 3-dimensionales Festigkeitskriterium.
- Das Kriterium sei unabhängig vom mittleren (hydrostatischen) Spannungszustand (Untersuchung kristalliner Stoffe).
- Das Kriterium begrenze den elastischen Bereich im Sinne eines Energie- bzw. Arbeitskriteriums.

### Gestalt- und Volumenänderungsarbeit:

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2E} [(1 + \nu) \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nu (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I})^2]$$

### Additive Zerlegung des Spannungstensors:

$$\boldsymbol{\sigma} =: \boldsymbol{\sigma}^D + \boldsymbol{\sigma}^K$$

$$\text{mit } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} & : \text{ Spannungsdeviator} \\ \boldsymbol{\sigma}^K = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} & : \text{ Kugeltensor} \end{cases}$$

### Formulierung mit Gleit- und Kompressionsmodul:

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4G} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D + \frac{1}{18k} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I})^2$$

$$\text{mit } \begin{cases} G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \\ k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \end{cases}$$

### Formulierung des Festigkeitskriteriums (von-Mises-Kriterium):

#### Annahme:

Das Material versagt, wenn die Gestaltsänderungsarbeit einen kritischen Wert erreicht.

$$\boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \leq \frac{2}{3} \sigma_V^2$$