



Universität Stuttgart

Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

[www.mechbau.uni-stuttgart.de](http://www.mechbau.uni-stuttgart.de)

**Ergänzung zur Vorlesung**

**Technische Mechanik III – Teil 1**

Formelsammlung

**Stand SS 2014**

letzte Änderung: 30.07.2014

## TEIL IV: Energiemethoden der linearen Elastostatik

### 11 Energiesatz und Arbeitssatz

#### Energiesatz der Mechanik

Für ein Gleichgewichtssystem gilt

$$d\mathcal{W}(\mathcal{B}) = d\mathcal{A}_a(\mathcal{B})$$

(innere Energie = äußere Energie)

Darin sind

$$d\mathcal{W} = -d\mathcal{A}_i = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (\text{Inkrement der Formänderungsarbeit})$$

$$d\mathcal{A}_a = \int_S \mathbf{t} \cdot d\mathbf{u} da + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot d\mathbf{u} dv \quad (\text{Ink. der äußeren Oberflächen- und Volumenkräfte})$$

#### Arbeitssatz der Mechanik

Integration der Inkremente von Formänderungsarbeit und äußerer Arbeit über den Deformations- bzw. Verschiebungsweg liefert zwischen den Zuständen ① und ②.

$\mathcal{W}(\mathcal{B})_{12} = -\mathcal{A}_i(\mathcal{B})_{12} = \int_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{ds} dv ds \quad : \text{Formänderungsarbeit}$
$\mathcal{A}_a(\mathcal{B})_{12} = \int_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} \int_S \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} da ds + \int_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} dv ds \quad : \text{äußere Arbeit}$

Arbeitssatz der Mechanik:

$\mathcal{W}(\mathcal{B})_{12} = \mathcal{A}_a(\mathcal{B})_{12}$
---

Für konservative mechanische Systeme können innere Spannungen und äußere Kräfte aus Potentialen hergeleitet werden. Es folgt für den Arbeitssatz:

$$U_i(\mathcal{B})_2 - U_i(\mathcal{B})_1 = \mathcal{A}_a(\mathcal{B})_{12}$$

Zustand 1 kann hier der natürliche undeformierte Zustand sein ( $U_i(\mathcal{B})_1 = 0$ ).

Energieerhaltungssatz für konservative Systeme:

$U_i(\mathcal{B})_2 + U_a(\mathcal{B})_2 = U_i(\mathcal{B})_1 + U_a(\mathcal{B})_1$
---

**Bem.:** Ein System ist konservativ, wenn die Formänderungsarbeit und die äußere Arbeit zwischen den Zuständen ① und ② nicht vom Weg abhängen, auf dem sie geleistet werden.

## Die gespeicherte elastische Energie

**Bem.:** Im Rahmen der linearen Elastizität sind die gespeicherte Energie  $u_i(\boldsymbol{\varepsilon})$  und die gespeicherte Komplementärenergie  $u_i^*(\boldsymbol{\sigma})$  identisch, d. h.

$$u_i(\boldsymbol{\varepsilon}) = u_i(\boldsymbol{\sigma}) = u_i^*(\boldsymbol{\sigma}).$$

Elastisches Potential:

$$u_i(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I})^2 \right]$$

Elastisches Komplémentärpotential:

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2E} \left[ (1+\nu)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \nu(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I})^2 \right]$$

Es gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{du_i(\boldsymbol{\varepsilon})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{du_i(\boldsymbol{\sigma})}{d\boldsymbol{\sigma}}$$

**Merke:** Für den elastischen Körper sind der spannungsfreie und der undeformierte Zustand identisch.

## Die Formänderungsarbeit bei geraden Stäben

Komplémentärpotential:

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2E} \sigma_{11}^2 + \frac{1}{2G} \tau^2$$

Formänderungsarbeit:

$$\mathcal{W}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \int_l \left( \frac{N_1^2}{EA_1} + \frac{M_2^2}{EJ_{22}} + \frac{M_3^2}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3^2}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_2^2}{GA_1} + \frac{M_T^2}{GJ_T} \right) dx_1$$

mit  $\kappa_{2,3}$  : Formbeiwerte des Querschnitt

Querschnitt	$\kappa$	Bemerkung
	1,2	
	1,33	
	2,0 - 2,4	$\kappa \approx \frac{A}{A_{Steg}}$
	3 - 5	
	3 - 4	
	2,0 - 2,4	

## Die Sätze von Castigliano

1. Satz von *Castigliano*:

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathcal{A}_a(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{F}_i} = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{F}_i}$$

$\mathcal{W}(\mathcal{B})$  wird hier durch die Schnittgrößen ausgedrückt (dargestellt als Funktion der Kräfte/Momente  $\mathbf{F}_i$ ).

Vorgehensweise bei der Berechnung von Verschiebungen und Verdrehungen in Systemen:

- Grad der statischen Unbestimmtheit ermitteln
- System gegebenenfalls statisch bestimmt machen  
→ Einführung einer statisch unbestimmten Kraft/Moment (meist an einem Auflager)
- Ermittlung der statisch unbestimmten Kraft/Moment  
→ Kompatibilitätsbedingung
- Berechnung von Verschiebungen/Verdrehungen  
→ Einführung einer Hilfskraft/Hilfsmoment, dort wo Verschiebung/Verdrehung gefragt ist  
→ Ableiten der Formänderungsarbeit nach der Hilfsgröße, dann Nullsetzen der Hilfsgröße

2. Satz von *Castigliano*:

$$\mathbf{F}_i = \frac{\partial \mathcal{A}_a(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{u}_i} = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathcal{B})}{\partial \mathbf{u}_i}$$

$\mathcal{W}(\mathcal{B})$  wird hier als Funktion der Verschiebungen/Verdrehungen  $\mathbf{u}_i$  ausgedrückt.

## Die Sätze von Betti und Maxwell

Satz von *Betti*:

Wirken 2 Kräftesysteme  $\mathcal{F}_i$  und  $\mathcal{F}_k$  auf einen linear-elastischen Körper, so ist die Arbeit  $\mathcal{A}_{ik}$ , die von  $\mathcal{F}_i$  auf den durch  $\mathcal{F}_k$  verursachten Verschiebungsweg geleistet wird, gleich der Arbeit  $\mathcal{A}_{ki}$ , die von  $\mathcal{F}_k$  auf den durch  $\mathcal{F}_i$  verursachten Weg geleistet wird:

$$\mathcal{A}_{ik} = \mathcal{A}_{ki}$$

Satz von *Maxwell*:

Die Verschiebung an der Stelle  $i$  infolge einer Kraft der Größe „1“ an der Stelle  $k$  ist gleich der Verschiebung an der Stelle  $k$  infolge einer Kraft der Größe „1“ an der Stelle  $i$ .

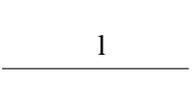
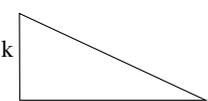
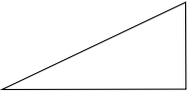
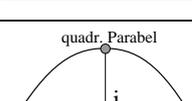
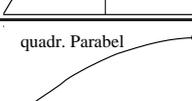
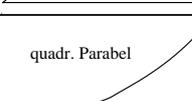
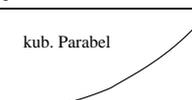
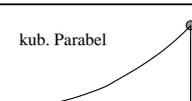
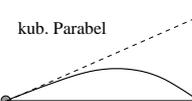
Mit der Verschiebungsformänderungsarbeit folgt für die Berechnung von Weggrößen

$$\mathcal{A}_{ik} = \mathcal{W}_{ik} = P_i f_{ik}$$

so dass für  $P_i = „1“$

$$„1“ f_i = f_{ik} = \mathcal{W}_{ik} = \int_l \left( \frac{N_i N_k}{EA_1} + \frac{M_{2i} M_{2k}}{EJ_{22}} + \frac{M_{3i} M_{3k}}{EJ_{33}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \kappa_3 \frac{Q_{3i} Q_{3k}}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_{2i} Q_{2k}}{GA_1} + \frac{M_{Ti} M_{Tk}}{GJ_T} \right) dx_1$$

Die Berechnung von  $f_{ik}$  kann hier mit Hilfe der Überlagerungstafel erfolgen.

<b>Überlagerungstafel / Koppeltafel</b>				
				
	$l i k$	$\frac{1}{2} l i k$	$\frac{1}{2} l i k$	$\frac{1}{2} l i (k_1 + k_2)$
	$\frac{1}{2} l i k$	$\frac{1}{3} l i k$	$\frac{1}{6} l i k$	$\frac{1}{6} l i (k_1 + 2 k_2)$
	$\frac{1}{2} l (i_1 + i_2) k$	$\frac{1}{6} l (i_1 + 2 i_2) k$	$\frac{1}{6} l (2 i_1 + i_2) k$	$\frac{1}{6} l (2 i_1 k_1 + i_1 k_2 + i_2 k_1 + 2 i_2 k_2)$
	$\frac{2}{3} l i k$	$\frac{1}{3} l i k$	$\frac{1}{3} l i k$	$\frac{1}{3} l i (k_1 + k_2)$
	$\frac{2}{3} l i k$	$\frac{5}{12} l i k$	$\frac{1}{4} l i k$	$\frac{1}{12} l i (3 k_1 + 5 k_2)$
	$\frac{1}{3} l i k$	$\frac{1}{4} l i k$	$\frac{1}{12} l i k$	$\frac{1}{12} l i (k_1 + 3 k_2)$
	$\frac{1}{4} l i k$	$\frac{1}{5} l i k$	$\frac{1}{20} l i k$	$\frac{1}{20} l i (k_1 + 4 k_2)$
	$\frac{3}{8} l i k$	$\frac{11}{40} l i k$	$\frac{1}{10} l i k$	$\frac{1}{40} l i (4 k_1 + 11 k_2)$
	$\frac{1}{4} l i k$	$\frac{2}{15} l i k$	$\frac{7}{60} l i k$	$\frac{1}{60} l i (7 k_1 + 8 k_2)$

- quadr. Parabel: Scheitelpunkt
- kub. Parabel: Nullstelle der Dreieckslast

## Das Prinzip der virtuellen Arbeit (PdvA)

### Das PdvA als Prinzip der virtuellen Verrückungen (PdvV)

In konservativen Systemen können  $\delta\mathcal{W}$  und  $\delta\mathcal{A}_a$  als Variation von Potentialen dargestellt werden.

$$\delta\mathcal{W}(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{du_i(\boldsymbol{\varepsilon})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} dv = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} dv$$

$$\delta\mathcal{A}_a(\mathcal{B}) = \frac{\partial\mathcal{A}_a(\mathcal{B})}{\partial\mathbf{u}} \cdot \delta\mathbf{u} = \mathbf{P}(\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \delta\boldsymbol{\varepsilon} & : \text{virtuelle Verzerrung} \\ \delta\mathbf{u} & : \text{virtuelle Verrückung} \end{cases}$$

### Eigenschaften der virtuellen Verzerrungen und Verschiebungen:

- gedacht,
- unendlich klein,
- mit den geometrischen Zwangsbedingungen des Systems verträglich.

### Das PdvA als Prinzip der virtuellen Kräfte (PdvK)

In konservativen Systemen können  $\delta\mathcal{W}$  und  $\delta\mathcal{A}_a$  als Variation von Komplementärpotentialen dargestellt werden.

$$\delta\mathcal{W}(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{du_i(\boldsymbol{\sigma})}{d\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma} dv = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma} dv$$

$$\delta\mathcal{A}_a(\mathcal{B}) = \frac{\partial\mathcal{A}_a(\mathcal{B})}{\partial\mathbf{P}} \cdot \delta\mathbf{P} = \mathbf{u}(\mathbf{P}) \cdot \delta\mathbf{P}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \delta\boldsymbol{\sigma} & : \text{virtuelle Spannung} \\ \delta\mathbf{P} & : \text{virtuelle Kraftgröße} \end{cases}$$

### Eigenschaften der virtuellen Spannungen und Kraftgrößen

- gedacht,
- unendlich klein,
- mit den statischen Zwangsbedingungen (Gleichgewichtsbedingungen) des Systems verträglich.

## Das PdvK in der Theorie der geraden Stäbe

Formulierung der Formänderungsarbeit in Schnittgrößen

$$\delta\mathcal{W}(\mathcal{B}) = \int_l \left( \frac{N_1 \delta N_1}{EA_1} + \frac{M_2 \delta M_2}{EJ_{22}} + \frac{M_3 \delta M_3}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3 \delta Q_3}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_2 \delta Q_2}{GA_1} + \frac{M_T \delta M_T}{GJ_T} \right) dx_1$$

Einführung eines virtuellen Kraftzustandes mit der Größe „1“:

$$\text{„1“ } f = \int_l \left( \frac{N_1 \bar{N}_1}{EA_1} + \frac{M_2 \bar{M}_2}{EJ_{22}} + \frac{M_3 \bar{M}_3}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3 \bar{Q}_3}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_2 \bar{Q}_2}{GA_1} + \frac{M_T \bar{M}_T}{GJ_T} \right) dx_1$$

$$\text{mit } \begin{cases} \delta N_1 =: \bar{N}_1, & \delta M_2 =: \bar{M}_2, & \text{usw.} \\ \delta P =: \bar{P} = \text{„1“} \end{cases}$$

## 12 Anwendungen des Arbeitssatzes (PdvK) auf Probleme der Stabtheorie

### Berücksichtigung von Temperaturänderungen

Unter Berücksichtigung von thermischen Anteilen folgt für die Formänderungsarbeit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathcal{B}) = & \frac{1}{2} \int_l \left( \frac{N_1^2}{EA_1} + \frac{M_2^2}{EJ_{22}} + \frac{M_3^2}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3^2}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_2^2}{GA_1} + \frac{M_T^2}{GJ_T} \right) dx_1 + \\ & + \alpha_{\vartheta} \int_l (N_1 \Delta\Theta_m + M_2 \Delta\Theta_3^* - M_3 \Delta\Theta_2^*) dx_1 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \Delta\Theta_m = \frac{\Delta\Theta_o + \Delta\Theta_u}{2} \\ \Delta\Theta_3^* = \frac{\Delta\Theta_u - \Delta\Theta_o}{h} \\ \Delta\Theta_2^* = \frac{\Delta\Theta_v - \Delta\Theta_h}{b} \end{cases}$$

Entsprechend folgt für die Stabtheorie unter Berücksichtigung von Temperaturänderungen für einen virtuellen Kraftzustand der Größe „1“

$$\begin{aligned} \text{„1“ } f = & \int_l \left( \frac{N_1 \bar{N}_1}{EA_1} + \frac{M_2 \bar{M}_2}{EJ_{22}} + \frac{M_3 \bar{M}_3}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3 \bar{Q}_3}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_2 \bar{Q}_2}{GA_1} + \frac{M_T \bar{M}_T}{GJ_T} \right) dx_1 + \\ & + \alpha_{\vartheta} \int_l (\bar{N}_1 \Delta\Theta_m + \bar{M}_2 \Delta\Theta_3^* - \bar{M}_3 \Delta\Theta_2^*) dx_1 \end{aligned}$$

## Statisch unbestimmte Systeme

### Berechnung eines einfach statisch unbestimmten Tragwerks mit Hilfe des PdvK durch Superposition von 0- und X-System

Zerlegung des einfach statisch unbestimmten Systems in ein 0-System (statisch bestimmtes Grundsystem) und ein X-System.

#### Vorgehen:

1. Auslösen einer Kraftgröße, so daß ein statisch bestimmtes Grundsystem entsteht. Die ausgelöste Kraftgröße wird als statisch unbestimmte Belastung  $X$  an der ausgelösten Stelle angetragen.
2. Berechnung aller relevanten Schnittgrößen im 0- und X-System

0-System  $\rightarrow X = 0$   
 $\rightarrow$  Aufbringen aller äußeren Belastungen  
 (Kraftlastfälle und Temperaturlastfälle)

X-System  $\rightarrow X = 1$   
 $\rightarrow$  keine weiteren Belastungen

3. Berechnung der Verschiebungswerte  $\delta_{ik}$   
 (Verschiebung an der Stelle  $i$  infolge Last an der Stelle  $k$ )  $\rightarrow$  hier:  $\delta_{10}, \delta_{11}$

$$\delta_{10} = \int_l \left( \frac{N_{10} \bar{N}_{11}}{EA_1} + \frac{M_{20} \bar{M}_{21}}{EJ_{22}} + \frac{M_{30} \bar{M}_{31}}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_{30} \bar{Q}_{31}}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_{20} \bar{Q}_{21}}{GA_1} + \frac{M_{T0} \bar{M}_{T1}}{GJ_T} \right) dx_1 +$$

$$+ \alpha_\vartheta \int_l (\bar{N}_{11} \Delta \Theta_m + \bar{M}_{21} \Delta \Theta_3^* - \bar{M}_{31} \Delta \Theta_2^*) dx_1$$

$$\delta_{11} = \int_l \left( \frac{\bar{N}_{11} \bar{N}_{11}}{EA_1} + \frac{\bar{M}_{21} \bar{M}_{21}}{EJ_{22}} + \dots \right) dx_1$$

**Bem.:** Alternativ können die Verschiebungswerte auch mit Überlagerungstafeln berechnet werden (Koppeln der Verläufe).

4. Aufstellen der Kompatibilitätsbedingung.  
 $\rightarrow$  Die Verschiebung an der ausgelösten Stelle muss sich zu Null ergeben.

$$f = \delta_1 = \delta_{10} + X \delta_{11} \stackrel{!}{=} 0$$

$$X = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\int_l \left( \frac{N_{10} \bar{N}_{11}}{EA_1} + \frac{M_{20} \bar{M}_{21}}{EJ_{22}} + \dots \right) dx_1}{\int_l \left( \frac{\bar{N}_{11} \bar{N}_{11}}{EA_1} + \frac{\bar{M}_{21} \bar{M}_{21}}{EJ_{22}} + \dots \right) dx_1}$$

5. Berechnung der gewünschten Schnittkraftverläufe durch Superposition, z. B.

$$N_1 = N_{10} + X \bar{N}_{11}$$

$$M_2 = M_{20} + X \bar{M}_{21}$$

## Berechnung diskreter Verschiebungsgrößen mit Hilfe des Reduktionssatzes

**Bem.:** Mit Hilfe des Reduktionssatzes können diskrete Verschiebungs- und Verdrehungsgrößen in statisch bestimmten sowie in statisch unbestimmten Tragwerken berechnet werden. Die Schnittgrößenverläufe des Systems müssen in einer vorhergegangenen Rechnung bestimmt werden. Zur Berechnung der Weggröße werden eine Einheitslast „1“ in einem beliebigen statisch bestimmten Grundsystem (i. d. R. das stat. best. Grundsystem der vorangegangenen Rechnung) an der Stelle der gewünschten Weggröße angesetzt und die daraus resultierenden Schnittkraftverläufe  $\tilde{N}_{10}$ ,  $\tilde{M}_{10}$  bestimmt. Die gesuchte Weggröße ergibt sich dann zu

$$„1“ f = \int_l \left( \frac{N_1 \tilde{N}_{10}}{EA_1} + \frac{M_2 \tilde{M}_{20}}{EJ_{22}} + \frac{M_3 \tilde{M}_{30}}{EJ_{33}} + \kappa_3 \frac{Q_3 \tilde{Q}_{30}}{GA_1} + \kappa_2 \frac{Q_2 \tilde{Q}_{20}}{GA_1} + \frac{M_T \tilde{M}_{T0}}{GJ_T} \right) dx_1$$

## TEIL V: Stabilitätsprobleme der linearen Elastostatik

### 13 Elementare Stabilitätsprobleme in der Elastostatik

#### Allgemeine Voraussetzungen

Gesamtpotential (gespeicherte Gesamtenergie) in konservativen Systemen:

$$U(\mathcal{B}) = U_i(\mathcal{B}) + U_a(\mathcal{B}) = \text{konst.}$$

$$\text{mit } \begin{cases} U(\mathcal{B}) & : \text{ Gesamtpotential} \\ U_i(\mathcal{B}) = \mathcal{W}(\mathcal{B}) & : \text{ in konservativen Systemen} \\ U_a(\mathcal{B}) = -\mathcal{A}_a(\mathcal{B}) & : \text{ in konservativen Systemen} \end{cases}$$

Gleichgewicht in konservativen Systemen durch die 1. Variation des Gesamtpotentials:

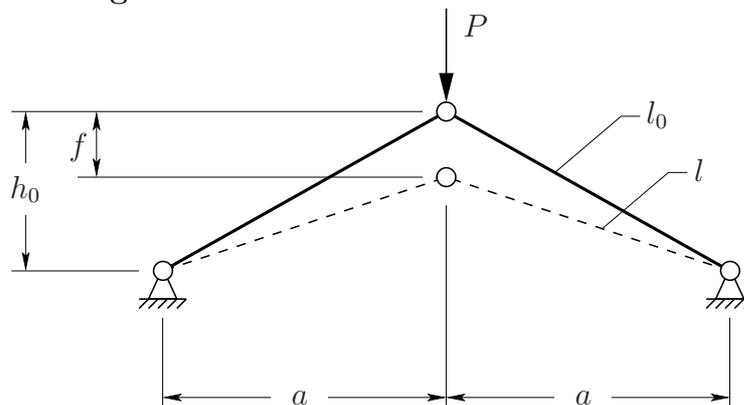
$$\delta U(\mathcal{B}) = \delta U_i(\mathcal{B}) + \delta U_a(\mathcal{B}) = 0$$

Stabilität in konservativen Systemen durch die 2. Variation des Gesamtpotentials:

$$\delta^2 U(\mathcal{B}) \begin{cases} > 0 & : \text{ stabiles Gleichgewicht} \\ = 0 & : \text{ indifferentes Gleichgewicht} \\ < 0 & : \text{ labiles Gleichgewicht} \end{cases}$$

#### Das Durchschlagproblem

Veranschaulichung:



Gesamtpotential:

$$U(\mathcal{B}) = 2EA \left( l_0 - \sqrt{(h_0 - f)^2 + a^2} \right) - \frac{EAf(2h_0 - f)}{l_0} - Pf$$

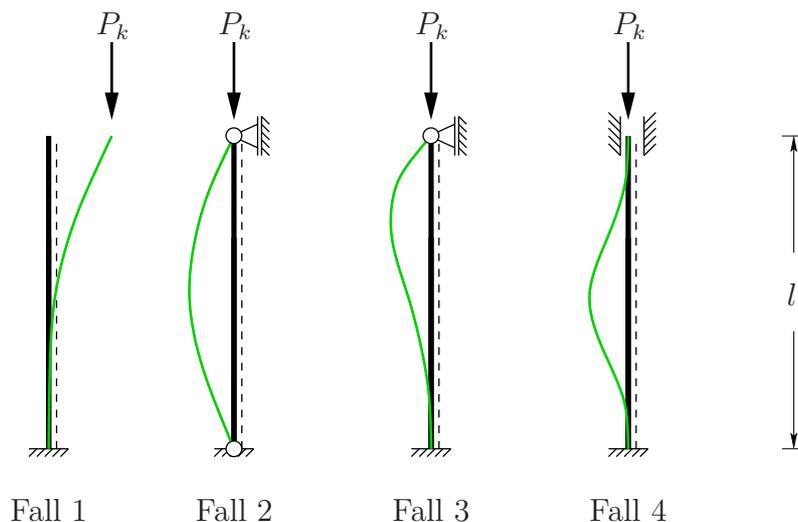
Gleichgewicht liefert:

$$P = 2EA \frac{h_0 - f}{l_0} \left( \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h_0 - f}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{a}{l_0}\right)^2}} - 1 \right)$$

### Knicken eines Druckstabs (Euler-Fälle)

**Bem.:** Das Knicken ist verbunden mit dem Ausbiegen der Stabachse eines Druckstabs in eine beliebige Richtung.

**Problemstellung:**



**Voraussetzung:**

- prismatische Stäbe mit gerader Stabachse
- Bezugssystem sei ein Trägheitshauptachsensystem  
→ Knicken verursacht gerade Biegung um die  $x_2$ - oder um die  $x_3$ -Achse
- zentrische, richtungstreue Belastung
- es gelten die *Bernoullischen* Annahmen

**Bem.:** Da die Knickrichtung a priori nicht bekannt ist, wird  $J$  anstelle von  $J_{22}$  bzw.  $J_{33}$  verwendet.

**Berechnung der Knicklast:**

$$P_k = \frac{\pi^2 E J_{min.}}{l_k^2}$$

$$\text{mit } \begin{cases} 1. \text{ Fall: } l_k = 2l \\ 2. \text{ Fall: } l_k = l \\ 3. \text{ Fall: } l_k = 0,7l \\ 4. \text{ Fall: } l_k = 0,5l \end{cases}$$

**Bem.:** Die kritische Last ist die kleinste Knicklast. Sie ergibt sich also für  $J_{min.}$ . Die Knicklänge  $l_k$  ist der  $x_1$ -Abstand zwischen den Wendepunkten der Biegelinie ( $w'' = 0 \rightarrow M(x_1) = 0$ ).

**Berechnung der Knickspannung:**

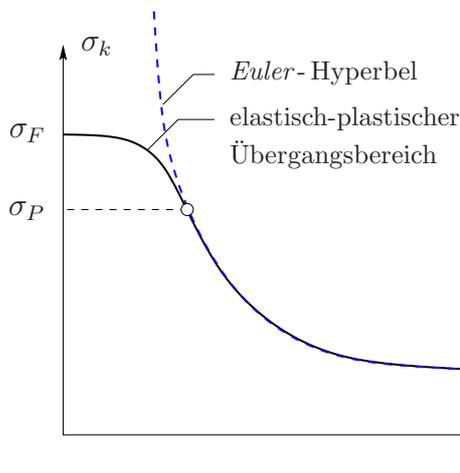
$$\sigma_k = \frac{P_k}{A} = \frac{\pi^2 E J_{min.}}{A l_k^2} = \frac{\pi^2 E i^2}{l_k^2}$$

$$\text{mit } i = i_{min.} = \sqrt{\frac{J_{min.}}{A}} : \text{Trägheitsradius}$$

**Einführung der Schlankheit  $\lambda$ :**

$$\lambda = \frac{l_k}{i_{min.}} = l_k \sqrt{\frac{A}{J_{min.}}}$$

$$\rightarrow \sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

**Darstellung der kritischen Spannung (Euler-Hyperbel):**

**Bem.:** Die *Euler-Hyperbel* setzt andauernde Elastizität voraus. Die zulässige Spannung soll die Fließspannung  $\sigma_F$  jedoch nicht überschreiten.

## TEIL VI: Festigkeitshypothesen

### 14 Elementare Festigkeitshypothesen

#### Diskussion von Festigkeitseigenschaften

**Bem.:** Die Grenze des elastischen Bereichs und damit die Grenze der Gültigkeit der Gesetze der Elastostatik kann erreicht werden durch:

- $\sigma_B$ : sofortiger Bruch  $\rightarrow$  spröde Werkstoffe
- $\sigma_F$ : idealplastisches bzw. verfestigendes Verhalten bis zum Bruch  $\rightarrow$  zähe Werkstoffe

#### Hypothese der maximalen Normalspannung

**Annahme:**

Das Material versagt, wenn eine der drei Hauptspannungen die einaxiale Vergleichsspannung  $\sigma_V$  (Fließspannung  $\sigma_F$  oder Bruchspannung  $\sigma_B$ ) erreicht.

**Lamé - Rankinesche Normalspannungshypothese:**

$$\boxed{|\sigma_1| \leq \sigma_V \quad ; \quad |\sigma_3| \leq \sigma_V} \quad \text{mit} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

#### Hypothese der maximalen Schubspannung

**Annahme:**

Das Material versagt, wenn die größte Hauptschubspannung einen kritischen Wert erreicht.

**Bem.:** Der kritische Wert ist mit Hilfe der einaxialen Vergleichsspannung  $\sigma_V$  festzulegen.

**Einaxiale Vergleichsspannung:**

$$\boxed{\tau = \frac{1}{2} \sigma_V}$$

**Festigkeitskriterium nach Tresca:**

$$\boxed{|\sigma_1 - \sigma_3| \leq \sigma_V} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \\ \tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \end{cases}$$

## Hypothese der maximalen Gestaltsänderungsarbeit

### Bemerkungen:

- Man sucht a priori ein 3-dimensionales Festigkeitskriterium.
- Das Kriterium sei unabhängig vom mittleren (hydrostatischen) Spannungszustand (Untersuchung kristalliner Stoffe).
- Das Kriterium begrenze den elastischen Bereich im Sinne eines Energie- bzw. Arbeitskriteriums.

### Gestalt- und Volumenänderungsarbeit:

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2E} [(1 + \nu) \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nu (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I})^2]$$

### Additive Zerlegung des Spannungstensors:

$$\boldsymbol{\sigma} =: \boldsymbol{\sigma}^D + \boldsymbol{\sigma}^K$$

$$\text{mit } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} & : \text{ Spannungsdeviator} \\ \boldsymbol{\sigma}^K = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} & : \text{ Kugeltensor} \end{cases}$$

### Formulierung mit Gleit- und Kompressionsmodul:

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4G} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D + \frac{1}{18k} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I})^2$$

$$\text{mit } \begin{cases} G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \\ k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \end{cases}$$

### Formulierung des Festigkeitskriteriums (von-Mises-Kriterium):

#### Annahme:

Das Material versagt, wenn die Gestaltsänderungsarbeit einen kritischen Wert erreicht.

$$\boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \leq \frac{2}{3} \sigma_V^2$$