Universität Stuttgart

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers
www.mechbau.uni-stuttgart.de

Ergänzung zur Vorlesung

Technische Mechanik I

Vektorrechnung
Eine Einführung

WS 2015/16

Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik, Pfaffenwaldring 7, D - 70 569 Stuttgart, Tel.: (0711) 685 - 66346

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Voraussetzungen

Bem.: Es werden an dieser Stelle nur die absolut notwendigen Grundzüge der Vektoralgebra in bezug auf ein orthonormiertes Basissystem dargestellt.

1.1 Grundzüge der Vektorrechnung

(a) Symbole, Summenkonvention, Kronecker-δ

ein- bzw. mehrfach indizierte Symbole

$$
\begin{array}{lcl}
u_i & \longrightarrow & u_1,\, u_2,\, u_3,\, \dots \\
u_i\, v_k & \longrightarrow & u_1\, v_1,\, u_1\, v_2,\, u_1\, v_3,\, \dots \\
 & & u_2\, v_1,\, u_2\, v_2,\, \dots \\
 & & \dots \\
t_{ik} & \longrightarrow & t_{11},\, t_{12},\, \dots \\
 & & \dots
\end{array}
$$

Einsteinsche **Summenkonvention**

Definition:	Bei „doppelter" Indizierung ist über den doppelten (stummen) Index zu summieren.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
u_j\, v_j &= u_1\, v_1,\, + u_2\, v_2,\, + \dots + u_n\, v_n, \\
&= \sum_{j=1}^{n} u_j\, v_j
\end{aligned}
$$

Kronecker**-Symbol**

Definition: Ex. ein Symbol δ_{ik} mit der Eigenschaft

$$
\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k \end{cases}
$$

Anwendungsbeispiel:

$$
\begin{aligned}
u_i\, \delta_{ik} &= u_1\, \delta_{1k} + u_2\, \delta_{2k} + \dots + u_n\, \delta_{nk} \\
\text{mit} \quad u_1\, \delta_{1k} &= \begin{cases} u_1\, \delta_{11} = u_1 \\ u_1\, \delta_{12} = 0 \\ \vdots \\ u_1\, \delta_{1n} = 0 \end{cases} \\
\longrightarrow \quad & u_i\, \delta_{ik} = u_k
\end{aligned}
$$

Wird das Kronecker-Symbol über einen stummen Index mit einer indizierten Größe multipliziert, so entfällt das KRONECKER-Symbol, der stumme Index verschwindet und der freie Index bleibt erhalten.

Bem.: Stumme Indizes können beliebig umbenannt werden.

(b) Begriffe und Definitionen der Vektoralgebra

Bem.: Alle folgenden Darstellungen beziehen sich auf den 3-d Anschauungsraum unserer physikalischen Erfahrung; d. h. auf den eigentlich EUKLIDschen Vektorraum $\mathcal{V}^3$.

hier: RAUM ist ein Mengenbegriff aus der Mathematik und hat nicht unmittelbar mit dem 3-d Punktraum $\mathcal{E}^3$ und dem 3-d Vektorraum $\mathcal{V}^3$ zu tun.

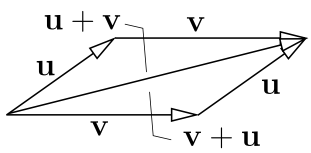
A: Vektoraddition

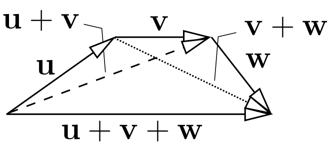
Vor.: ex. $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, ...\} \in \mathcal{V}^3$

Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{u} && : \text{kommutatives Gesetz} \\
\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} && : \text{assoziatives Gesetz} \\
\mathbf{u} + \mathbf{0} &= \mathbf{u} && : \ \mathbf{0}\ : \text{Identisches Element bzgl. der Vektoraddition} \\
\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) &= \mathbf{0} && : \ -\mathbf{u}\ : \text{inverses Element bzgl. der Vektoraddition}
\end{aligned}$$

Beispiele zum kommutativen und assoziativen Gesetz:





B: Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Vor.: ex. $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, ...\} \in \mathcal{V}^3$; $\{\alpha, \beta, ...\} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
1\,\mathbf{v} &= \mathbf{v} && : 1\text{: identisches Element} \\
\alpha\,(\beta\,\mathbf{v}) &= (\alpha\,\beta)\,\mathbf{v} && : \text{assoziatives Gesetz} \\
(\alpha + \beta)\,\mathbf{v} &= \alpha\,\mathbf{v} + \beta\,\mathbf{v} && : \text{distributives Gesetz (skalare Addition)} \\
\alpha\,(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \alpha\,\mathbf{v} + \alpha\,\mathbf{w} && : \text{distributives Gesetz (Vektoraddition)} \\
\alpha\,\mathbf{v} &= \mathbf{v}\,\alpha && : \text{kommutatives Gesetz}
\end{aligned}$$

Bem.: In der allgemeinen Vektorrechnung legen die Definitionen A und B den „affinen Vektorraum“ fest.

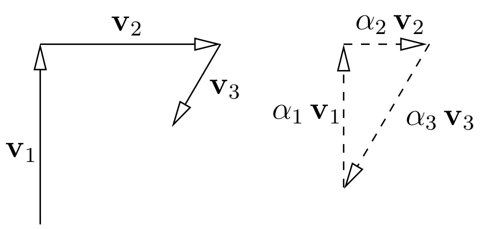
Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Bem.: Im $\mathcal{V}^3$ sind je 3 nicht-komplanare Vektoren linear unabhängig; d. h. jeder weitere Vektor kann als Vielfaches dieser Vektoren dargestellt werden.

Satz: Die Vektoren $\mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ sind linear abhängig, wenn reelle Zahlen α_i existieren, die nicht alle gleich Null sind, so daß gilt

$$\alpha_i\,\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_1\,\mathbf{v}_1 + \alpha_2\,\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\,\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Beispiel (ebener Fall):



$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$

aber: $\alpha_1\,\mathbf{v}_1 + \alpha_2\,\mathbf{v}_2 + \alpha_3\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$

$\longrightarrow$ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$: linear abhängig

$\longrightarrow$ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$: linear unabhängig

Bem.: Die α_i können mit einem beliebigen Faktor λ multipliziert werden.

Basisvektoren im $\mathcal{V}^3$

ex. : $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$: linear unabhängig

dann : $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}\}$: linear abhängig

es folgt

$$\alpha_1\,\mathbf{v}_1 + \alpha_2\,\mathbf{v}_2 + \alpha_3\,\mathbf{v}_3 + \lambda\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\longrightarrow \quad \lambda\,\mathbf{v} = -\alpha_i\,\mathbf{v}_i$$

$$\text{bzw.} \quad \mathbf{v} = \frac{-\alpha_i}{\lambda}\,\mathbf{v}_i =: \beta_i\,\mathbf{v}_i$$

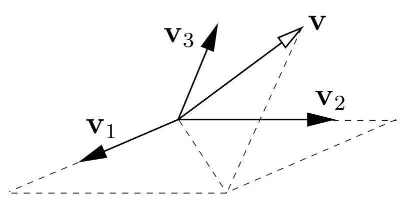
$$\text{mit} \begin{cases} \beta_i = \dfrac{-\alpha_i}{\lambda} & : \quad \text{Koeffizienten (der Vektorkomponenten)} \\ \mathbf{v}_i & : \quad \text{Basisvektoren von } \mathbf{v} \end{cases}$$

Wahl eines speziellen Basissystems

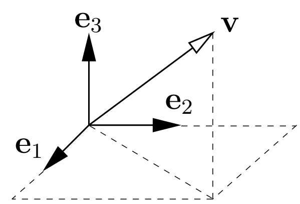
Bem.: Im $\mathcal{V}^3$ kann jedes System von 3 linear unabhängigen Vektoren als Basissystem gewählt werden; z. B.

$\mathbf{v}_i$: allgemeines Basissystem

$\mathbf{e}_i$: spezielles, orthonormiertes Basissystem (Rechtssystem)



Basissystem $\mathbf{v}_i$



Basissystem $\mathbf{e}_i$

Darstellung des Vektors $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \beta_i \, \mathbf{v}_i \\ \gamma_i \, \mathbf{e}_i \end{cases}$$

hier: Spezielle Wahl der orthonormierten Basis $\mathbf{e}_i$

Bezeichnungen

$$\mathbf{v} \; = \; v_i \, \mathbf{e}_i \; = \; v_1 \, \mathbf{e}_1 + v_2 \, \mathbf{e}_2 + v_3 \, \mathbf{e}_3$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} v_i \, \mathbf{e}_i & : \; \text{Vektorkomponenten} \\ v_i & : \; \text{Koeffizienten der Vektorkomponenten} \end{cases}$$

C: Skalarprodukt von Vektoren

Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} && : \text{kommutatives Gesetz} \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} && : \text{distributives Gesetz} \\ \alpha \, (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot (\alpha \, \mathbf{v}) = \; (\alpha \, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} && : \text{assoziatives Gesetz} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 0 \qquad \forall \, \mathbf{u}, \text{ wenn } \; \mathbf{v} \equiv \mathbf{0} \\ \longrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &\neq 0 \qquad , \text{ wenn } \; \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Bem.: Die Definitionen A, B und C legen den „EUKLIDschen Vektorraum“ fest. Gilt anstelle von $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \neq 0$ speziell

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 \;\; , \text{ wenn } \; \mathbf{u} \neq \mathbf{0},$$

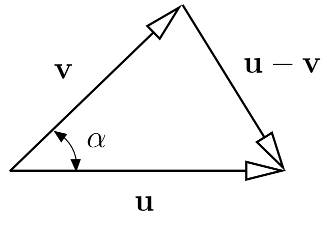
dann legen A, B und C den „eigentlich EUKLIDschen Vektorraum $\mathcal{V}^3$“ (Anschauungsraum) fest.

Quadrat und Norm eines Vektors

$$\mathbf{v}^2 := \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad , \quad v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^2}$$

Bem.: Die Norm ist der Betrag bzw. die positive Quadratwurzel des Vektors.

Winkel zwischen zwei Vektoren



$$\sphericalangle(\mathbf{u} \, ; \, \mathbf{v}) =: \alpha$$

Kosinussatz (vgl. z. B. BRONSTEIN-SEMENDJAJEW, Taschenbuch der Mathematik)

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\alpha$$

$$\longrightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 - (\mathbf{u}-\mathbf{v})^2}{2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$

$$\text{bzw.} \qquad \cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$

$$\text{oder} \qquad \boxed{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\alpha}$$

Skalarprodukte (innere Produkte) in Basisdarstellung

Skalarprodukt der Basisvektoren $\mathbf{e}_i$:

$$\sphericalangle(\mathbf{e}_i\,;\,\mathbf{e}_k) \begin{cases} 90^\circ & \text{für } i \neq k \quad : \quad \cos 90^\circ = 0 \\ 0^\circ & \text{für } i = k \quad : \quad \cos 0^\circ = 1 \end{cases}$$

so daß

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k &= |\mathbf{e}_i|\,|\mathbf{e}_k| \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_i\,;\,\mathbf{e}_k) \\ &= \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_i\,;\,\mathbf{e}_k) \end{aligned}$$

Es folgt mit dem KRONECKER-δ

$$\boxed{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}}$$

Skalarprodukt von zwei Vektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (u_i\,\mathbf{e}_i)\cdot(v_k\,\mathbf{e}_k) \\ &= u_i\,v_k\,(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k) \\ &= u_i\,v_k\,\delta_{ik} \\ &= u_i\,v_i = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3 \end{aligned}$$

D: Kreuzprodukt (äußeres Produkt) von Vektoren

Man definiert das folgende Vektorprodukt

$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \sin \sphericalangle(\mathbf{u}\,;\,\mathbf{v})\,\mathbf{n}$

mit $\mathbf{n}$: Einheitsvektor $\perp \mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}$ (Rechtsschraubenregel, vgl. S. 7)

Aus o. g. Definition erhält man die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\times\mathbf{v} &= -\mathbf{v}\times\mathbf{u} && : \underline{\text{kein}} \text{ kommutatives Gesetz} \\ \mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \mathbf{u}\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{w} && : \text{distributives Gesetz} \\ \alpha\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (\alpha\,\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times(\alpha\,\mathbf{v}) && : \text{assoziatives Gesetz} \end{aligned}$$

Dreifaches skalares Produkt (Spatprodukt):

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

Rechenregeln für das äußere Produkt (ohne Beweis)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = 0 \end{aligned}$$

Entwicklungssatz:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{w}$$

LAGRANGEsche Identität (Jean Louis Lagrange: 1736-1813):

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{z})\, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$$

Norm des äußeren Produkts:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\, |\mathbf{v}| \sin \measuredangle(\mathbf{u}\,;\,\mathbf{v})$$

Kreuzprodukt in Basisdarstellung

hier: vereinfachte Darstellung im Matrizenschema

Berechnung von

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= (v_2\, w_3 - v_3\, w_2)\, \mathbf{e}_1 - (v_1\, w_3 - v_3\, w_1)\, \mathbf{e}_2 + (v_1\, w_2 - v_2\, w_1)\, \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Bem.: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}, \mathbf{w}$; d. h. es muß gelten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$

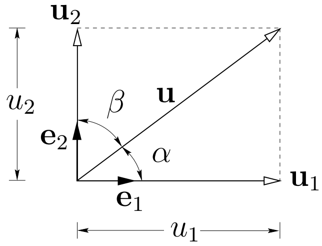
Beispiel:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i\, v_i = (v_2\, w_3 - v_3\, w_2)\, v_1 - (v_1\, w_3 - v_3\, w_1)\, v_2 + (v_1\, w_2 - v_2\, w_1)\, v_3 = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

Bemerkungen zu den Produkten von Vektoren

• zum Skalarprodukt

Zerlegung eines Vektors (Beispiel: in der Ebene):



$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

mit $\mathbf{u}_i = u_i\, \mathbf{e}_i$

$\mathbf{u}_i$: Vektorkomponeneten

u_i : Koeffizienten der Vektorkomponenten

Projektion von $\mathbf{u}$ auf die Richtungen von $\mathbf{e}_i$:

$$\boxed{u_i \;=\; \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i}$$

Bestätigung der Projektionsregel:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i \;&=\; (u_k\,\mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i \\ &=\; u_k\,\delta_{ki} \;=\; u_i \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

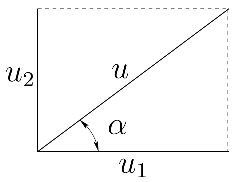
Berechnung der Projektionen:

$$\begin{aligned} u_1 \;&=\; |\mathbf{u}|\,|\mathbf{e}_1|\,\cos\alpha \\ &=\; |\mathbf{u}|\,\cos\alpha \;=\; u\,\cos\alpha \end{aligned}$$

$$\text{mit } u \;=\; |\mathbf{u}|$$

$$\begin{aligned} u_2 \;&=\; u\,\cos\beta \\ &=\; u\,\cos(90^\circ - \alpha) \;=\; u\,\sin\alpha \end{aligned}$$

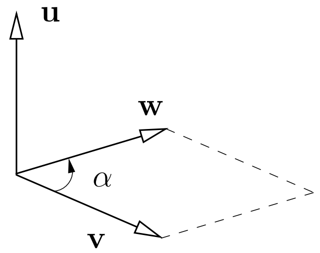
Merke: Für die Beträge von Vektorkomponenten gilt



$$\begin{aligned} u_1 \;&=\; u\,\cos\alpha \\ u_2 \;&=\; u\,\sin\alpha \end{aligned}$$

• **zum Kreuzprodukt**

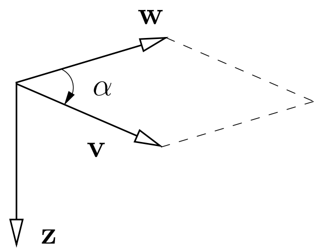
Orientierung des Vektors $\mathbf{u} \;=\; \mathbf{v} \times \mathbf{w}$:



(1) $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}\,,\ \mathbf{w}$

(2) Rechtsschraubenregel (Rechtshandregel)

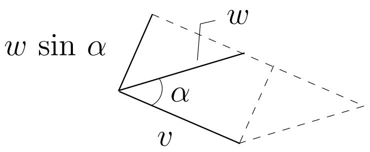
Es ist offensichtlich, daß



$$\mathbf{z} \;=\; \mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

$$\longrightarrow \quad \mathbf{v} \times \mathbf{w} \;=\; -\,\mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

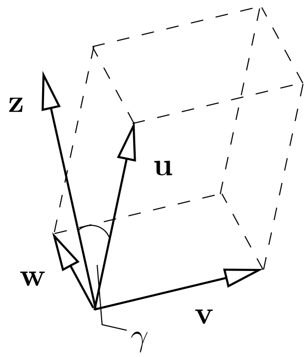
Betrag des Kreuzprodukts:



$$\begin{aligned} |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \;&=\; |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\sin\alpha \\ &=\; v\,(w\,\sin\alpha) \end{aligned}$$

Merke:	Der Vektor $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ steht senkrecht auf $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ (Rechtsschraubenorientierung); sein Betrag entspricht der von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Fläche.

dreifach skalares Produkt (Spatprodukt):



$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) \;=:\; [\,\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}\,]$$

mit $\mathbf{z} = \mathbf{v}\times\mathbf{w}$

folgt
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{z} &= |\mathbf{u}|\,|\mathbf{z}|\cos\gamma\\ &= z\,(u\cos\gamma)\end{aligned}$$

mit $(u\cos\gamma)$: Projektion von $\mathbf{u}$ auf Richtung von $\mathbf{z}$

Bem.: Spatprodukt liefert das Volumen des von $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ gebildeten Parallelepipeds (Spat).

Bemerkung:	Die in diesem Skript dargestellten Beziehungen gelten grundsätzlich in jedem beliebigen Basissystem. Zur Vereinfachung werden die folgenden Basisdarstellungen stets bezüglich einer orthonormierten Basis angegeben. Eine allgemeinere Darstellung findet sich u. a. bei de Boer, R.: Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure. Springer-Verlag, Berlin 1982.