

**Theorie und Numerik
finiter elastischer Deformationen
in fluidgesättigten porösen Festkörpern**

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von
Dipl.-Ing. Gernot Eipper
aus
Herrenberg

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Karl Schweizerhof
Tag der mündlichen Prüfung: 23. Juni 1998

Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart
1998

Bericht Nr. II-1 aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II,
Universität Stuttgart

Herausgeber:

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

© Gernot Eipper
Institut für Mechanik (Bauwesen)
Lehrstuhl II
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7
70550 Stuttgart

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise
auf fotomechanischem Wege zu vervielfältigen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers für die Anregung zu dieser Arbeit, seine Unterstützung und Förderung sowie für die Übernahme des Hauptberichts.

Herrn Professor Dr.-Ing. Karl Schweizerhof danke ich für die intensive Auseinandersetzung mit meiner Arbeit und für die freundliche Übernahme des Mitberichts.

Schließlich gilt mein Dank allen Mitarbeitern des Instituts für Mechanik (Bauwesen) für die freundschaftliche Zusammenarbeit und die hilfreichen Diskussionen, durch die sie zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Stuttgart, im Juni 1998

Gernot Eipper

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Zielsetzung	1
1.2	Gliederung und Umfang der Arbeit	3
1.3	Notation	6
2	Kontinuumsmechanische Grundlagen	7
2.1	Theorie Poröser Medien	7
2.2	Kinematik	10
2.2.1	Bewegung	10
2.2.2	Transportbeziehungen	12
2.2.3	Deformations- und Verzerrungsmaße	14
2.2.4	Deformations- und Verzerrungsgeschwindigkeiten	16
2.3	Spannungsmaße	17
2.4	Bilanzgleichungen	18
2.4.1	Massenbilanz	20
2.4.2	Impulsbilanz	20
2.4.3	Drallbilanz	22
2.4.4	Energiebilanz	22
2.4.5	Entropiebilanz	23
3	Das inkompressible Zweiphasenmodell	25
3.1	Kinematik	26
3.1.1	Spektrale Zerlegung der Festkörperdeformation	26
3.2	Stoffunabhängige Grundgleichungen	29
3.3	Konstitutivgleichungen	30
3.3.1	Auswertung der Entropieungleichung	30

3.3.2	Ergebnisse	31
3.4	Hyperelastisches Festkörperskelett	32
3.4.1	Objektivität und Isotropie	33
3.4.2	Spannungstensoren	33
3.4.3	Elastizitätstensoren	34
3.5	Deformationsabhängige Permeabilität	36
3.5.1	Deformationsabhängiger Durchlässigkeitsparameter	36
3.5.2	Anisotrope Permeabilitätseigenschaften	37
3.6	Schwache Form der Bilanzgleichungen	39
3.7	Der Sonderfall des leeren Festkörperskeletts	41
4	Finite isotrope Hyperelastizitätsgesetze	43
4.1	Skalare Deformationsmaße	44
4.2	Spannungsberechnung	46
4.3	Elastizitätsgesetze	49
4.3.1	Inkompressibles Materialverhalten	49
4.3.2	Konstruktion kompressibler Materialgesetze	51
4.4	Einaxialer Spannungsversuch	54
4.5	Lösung der impliziten Dehnungsbeziehungen	56
4.6	Diskussion der Ergebnisse	59
5	Ein neues Elastizitätsgesetz	61
5.1	Physikalische Anforderungen	63
5.2	Ein neuer volumetrischer Erweiterungsterm	66
5.3	Ein <i>Neo-Hooke</i> -Modell für poröse Festkörper	67
5.3.1	Spannungstensoren	67
5.3.2	Elastizitätstensoren	68
5.4	Ein <i>Ogden</i> -Modell für poröse Festkörper	68
5.4.1	Spannungstensoren	69
5.4.2	Elastizitätstensoren	70
5.5	Linearisierung der Elastizitätsgesetze	72

6	Konsistente Linearisierung	73
6.1	Grundlagen	74
6.1.1	Linearisierung	74
6.1.2	<i>Newton</i> -Verfahren	75
6.2	Systematische Darstellung der Gleichungen	76
6.2.1	Schwache Form der Bilanzgleichungen	76
6.2.2	Formale Linearisierung des Funktionenvektors	77
6.3	Bereitstellung wichtiger Linearisierungen	78
6.3.1	Linearisierung bezüglich der Festkörperdeformation	78
6.3.2	Linearisierung bezüglich des Porenfluiddrucks	82
6.3.3	Linearisierung bezüglich der Verschiebungsgeschwindigkeit	82
6.4	Linearisierung der Bilanzgleichungen	82
6.4.1	Impulsbilanz der Mischung	83
6.4.2	Volumenbilanz der Mischung	84
7	Diskretisierung der Bilanzgleichungen	87
7.1	Semidiskretisierung im Ort mit finiten Elementen	87
7.1.1	Grundlagen	87
7.1.2	Ortsdiskretisierung der Bilanzgleichungen	91
7.2	Zeitdiskretisierung und Lösungsalgorithmus	92
7.2.1	Implizites <i>Euler</i> -Verfahren	92
7.2.2	<i>Runge-Kutta</i> -Verfahren	94
8	Beispiele	97
8.1	Zugversuch am leeren Festkörperskelett	97
8.2	Stauhen eines fluidgesättigten Schwammes	99
8.2.1	Konsolidationsproblem	101
8.2.2	Deformation auf den Kompressionspunkt	102
8.2.3	Deformationsabhängiger <i>Darcy</i> -Parameter	106
8.3	Konvergenzstudie	107
8.4	Anisotrope Permeabilitätseigenschaften	109
8.5	Deformation eines porösen Würfels	111
9	Zusammenfassung und Ausblick	113
9.1	Zusammenfassung	113
9.2	Ausblick	115

Literaturverzeichnis	117
A Tensoroperationen	123
A.1 Allgemeine Beziehungen	123
A.2 Tensoranalysis	124
A.3 Ableitungen nach Tensoren zweiter Stufe	126
A.4 Tensoren höherer Stufe	126

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Zielsetzung

Bei der Behandlung vieler relevanter Probleme der Ingenieurpraxis besteht ein zunehmendes Interesse an der Modellierung fluidgefüllter, poröser deformierbarer Festkörper. Diese Werkstoffe bestehen aus einem porösen Festkörperskelett, das mit einem oder mehreren Fluiden gefüllt sein kann. Solche Materialien treten in vielen praktischen Anwendungsbeispielen verschiedener Ingenieurdisziplinen auf, z. B. beim Konsolidationsproblem fluidgesättigter Böden in der Bodenmechanik oder bei Fragen der Rohstoffgewinnung aus öl- bzw. gasgefülltem Gestein in der Petroindustrie. Im Maschinenbau werden poröse Polymerschäume als Werkstoffe in Stoßdämpfern und Schockabsorbieren eingesetzt. Auch blutdurchströmtes, biologisches Gewebe weist eine deformierbare, poröse Struktur auf. Das Spektrum praxisrelevanter Anwendungsbeispiele für poröse Werkstoffe ließe sich noch beliebig erweitern. Neuere Bestrebungen der Werkstoffwissenschaften zielen darauf hin, poröse Metallschäume durch gezieltes Aufschäumen eines metallischen Grundmaterials mit einem Inertgas herzustellen. So kann z. B. ein gasgefüllter Aluminiumschaum hergestellt werden, der aufgrund seiner geringer Dichte schwimmfähig ist. Diese Werkstoffe sind von großem Interesse für die Leichtbauweise im Fahrzeugbau oder in der Flugzeugindustrie.

Fluidgefüllte poröse Werkstoffe können durch eine Modellierung im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik häufig nicht genau genug beschrieben werden. Ein solches volumengekoppeltes Festkörper-Fluid-Problem läßt sich nicht eindeutig den klassischen Disziplinen der Festkörpermechanik oder der Fluidmechanik zuordnen. Vielmehr ist hier eine ganzheitliche Betrachtung des gekoppelten Problems erforderlich. Ein Zugang hierzu ist die Theorie Poröser Medien (TPM), die aus der Mischungstheorie der Mehrkomponentenkontinua unter Berücksichtigung des Konzepts der Volumenanteile entwickelt wurden, siehe *Bowen* [12, 13], *de Boer & Ehlers* [9], *Ehlers* [24]. Hierbei liegt die Modellvorstellung eines statistisch gemittelten „verschmierten“ Mehrphasenkontinuums zugrunde, bei dem alle Teilkörper gleichzeitig das Gesamtvolumen eines Kontrollraums einnehmen. Dies ermöglicht eine kontinuumsmechanische Beschreibung des volumengekoppelten Mehrfeldproblems mit Hilfe

von Feldgleichungen. Damit kann das gekoppelte Festkörper- und Fluidverhalten eines deformierbaren, fluidgesättigten porösen Festkörpers unter äußerer Belastung berechnet werden. Der Sonderfall eines leeren porösen Festkörperskeletts ist bei der Modellierung automatisch eingeschlossen.

Insbesondere bei der Belastung von Elastomerschäumen können finite elastische Deformationen im Festkörperskelett auftreten. Ein Ziel dieser Arbeit ist die Beschreibung finiter elastischer Deformationen in der Festkörpermatrix sowie die Berücksichtigung des nichtlinearen Verhaltens des gekoppelten Mehrfeldproblems. Hierzu sind geeignete Materialgesetze zu entwickeln. Dabei müssen besonders die poröse Struktur des Festkörpermaterials und die sich daraus ergebenden physikalischen Effekte berücksichtigt werden. Bei der Entwicklung eines neuen Elastizitätsgesetzes wird sehr großer Wert auf die thermodynamische Konsistenz des Materialmodells gelegt. Vor der Konstruktion eines neuen Elastizitätsgesetzes für poröse Festkörper ist zunächst zu untersuchen, welche physikalischen Effekte beschrieben werden müssen und inwiefern sich diese von der finiten Elastizitätstheorie der klassischen Festkörpermechanik unterscheiden bzw. mit diesen übereinstimmen.

Wegen der möglichen großen Deformationen im Festkörperskelett können sich die Durchströmungseigenschaften des Fluids durch die Festkörpermatrix ändern, und es kann nicht mehr ohne weiteres von der Gültigkeit des bekannten *Darcyschen* Filtergesetzes ausgegangen werden, das bei der Durchströmung starrer poröser Festkörper verwendet wird. Daher müssen geeignete Modifikationen des *Darcy*-Gesetzes entwickelt werden.

Eine geeignete Ortsdiskretisierung des gekoppelten Mehrfeldproblems mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) führt zu einem nichtlinearen Gleichungssystem, das sich numerisch lösen läßt. Die rasante Entwicklung der Computertechnik in den letzten Jahren erlaubt eine Modellierung immer komplexerer Problemgeometrien bzw. eine feinere räumliche Auflösung des Problems bei vertretbarer Rechenzeit. Aufgrund der Fluiddurchströmung des porösen Festkörpers erhält man selbst unter quasi-statischer Belastung ein zeitabhängiges Anfangs-Randwertproblem. Dies erfordert eine geeignete Zeitdiskretisierung und Zeitintegration des Problems. Bei der Behandlung nichtlinearer Gleichungen der Kontinuumsmechanik spielt die konsistente Linearisierung der Gleichungen eine äußerst wichtige Rolle bei der Formulierung effizienter numerischer Lösungsalgorithmen. Unter konsistenter Linearisierung ist hierbei die Linearisierung aller in das Problem eingehenden Gleichungen bezüglich aller unbekanntem Größen bis zur gleichen Ordnung zu verstehen.

In der Literatur sind meist nur numerische Berechnungsbeispiele zur Behandlung kleiner Deformationen in fluidgesättigten porösen Festkörpern zu finden. Die Berechnung finiter Deformationen, die Verwendung nichtlinearer Materialgesetze sowie die konsistente Linearisierung der nichtlinearen beschreibenden Gleichungen für fluidgesättigte poröse Festkörper wurde in der Literatur bisher jedoch nicht umfassend behandelt. Die Behandlung dieser Probleme ist Zielsetzung dieser Arbeit.

1.2 Gliederung und Umfang der Arbeit

In **Kapitel 2** werden die Grundlagen zur kontinuumsmechanischen Beschreibung poröser Medien erläutert. Hierzu wird zunächst ein allgemeines Mehrphasenkontinuum betrachtet, das aus beliebig vielen Konstituierenden bestehen kann. Im ersten Abschnitt wird zuerst auf die Theorie Poröser Medien (TPM) und das Konzept der Volumenanteile eingegangen. Hierbei wird von einem „verschmierten“ Kontinuumsmodell ausgegangen, bei dem jede Konstituierende eine eigene ein-eindeutige Bewegungsfunktion besitzt. Aufgrund der in dieser Arbeit zu behandelnden großen Deformationen wird sehr ausführlich auf die Kinematik und die Transportbeziehungen zwischen der Referenz- und der Momentankonfiguration eingegangen. Außerdem werden verschiedene nichtlineare Deformations- und Verzerrungsmaße sowie deren Geschwindigkeitsgrößen eingeführt, da diese eine wichtige Rolle bei der Beschreibung finiter Deformationen spielen. Weiterhin werden die Bilanzgleichungen für ein Mehrkomponentenkontinua vorgestellt. Hierzu wird von einer allgemeinen Masterbilanz für jede einzelne Konstituierende sowie für die Mischung als Ganzes ausgegangen, die dann für die Größen Masse, Impuls, Drall, Energie und Entropie spezifiziert wird. Bei Mehrphasenkontinua sind grundsätzlich Kopplungsmechanismen zwischen den Konstituierenden vorzusehen. Durch Vergleich der Bilanzgleichung für den gesamten Körper mit der Summe der Bilanzgleichungen der Konstituierenden lassen sich Zwangsbedingungen für die Kopplungsgrößen angeben.

In **Kapitel 3** werden die zuvor hergeleiteten allgemeinen Modellgleichungen für ein Zweiphasenmodell mit materiell inkompressiblen Konstituierenden näher spezifiziert. Damit soll das Verhalten eines flüssigkeitsgesättigten, elastisch deformierbaren, porösen Festkörpers beschrieben werden. Dieser besteht aus einem porösen Festkörperskelett (der Festkörpermatrix), dessen Porenraum mit dem Porenfluid gefüllt ist. Trotz der angenommenen materiellen Inkompressibilität für das Festkörperskelett können volumetrische Deformationen als Folge der Deformation des Porenraums auftreten. Ausgehend von der Entropieungleichung für die Mischung werden thermodynamisch konsistente Konstitutivgleichungen für das betrachtete Modell hergeleitet. Die Forderung nach materieller Inkompressibilität wird hierbei als Zwangsbedingung aufgefaßt und in geeigneter Weise behandelt. Die Auswertung der Konstitutivgleichungen für die Festkörperphase liefert allgemeine Beziehungen für die nichtlinearen Spannungs- und Elastizitätstensoren zur Beschreibung finiter elastischer Deformationen im Festkörperskelett. Für den Festkörper wird dabei von einem hyperelastischen Materialverhalten ausgegangen. Mit zunehmender Deformation der Festkörpermatrix ändern sich die Permeabilitätseigenschaften, die die Fluiddurchströmung durch das Festkörperskelett maßgeblich beeinflussen. Zur Berücksichtigung dieses Sachverhalts wird das *Darcy*-Filtergesetz derart modifiziert, daß deformationsabhängige Permeabilitätseigenschaften beschrieben werden können. Damit können auch deformationsinduzierte anisotrope Permeabilitätseffekte berücksichtigt werden. Zum Abschluß des Kapitels werden die schwachen Formen der Volumenbilanz der Mischung und der Impulsbilanz der Mischung in einer Verschiebungs-Druck-Formulierung angegeben. Diese dient als Grundlage zur weiteren numerischen Behandlung des gekoppelten Festkörper-Fluid-Problems.

Kapitel 4 ist der Untersuchung verschiedener finiter isotroper Hyperelastizitätsgesetze gewidmet. Bei der Behandlung finiter elastischer Deformationen von nicht-porösen Festkörpern sind in der Literatur in letzter Zeit Formulierungen zu finden, die von einer additiven Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion in einen rein isochoren (volumenerhaltenden) und einen rein volumetrischen Anteil ausgehen. Diese Zerlegung der Verzerrungsenergiefunktion ist jedoch eine konstitutive Vorgabe und nicht eine Folge der geometrischen Zerlegung der Deformation in einen deviatorischen und einen hydrostatischen Anteil. Diese Formulierungen werden meist nur für den Fall nahezu inkompressiblen Materialverhaltens angewandt. In porösen Festkörperskeletten können jedoch große Volumendehnungen auftreten, die mit dem jeweiligen Elastizitätsgesetz beschrieben werden müssen. Deshalb ist es notwendig, finite Elastizitätsgesetze auf ihre Eignung zur Beschreibung finiter Deformationen zu untersuchen. In diesem Kapitel wird eine systematische Untersuchung verschiedener Formulierungstypen für die Verzerrungsenergiefunktion (in Invarianten, in Eigenwerten, in modifizierten Invarianten bzw. in modifizierten Eigenwerten) vorgenommen. Durch Auswertung der Spannungsbeziehung an einem einaxialen Zug-/Druckversuch erhält man eine implizite Beziehung zwischen der Längs- und Querdehnung in einer Versuchsprobe. Diese implizite Beziehung kann für die verschiedenen Elastizitätsgesetze numerisch gelöst werden. Hieraus erhält man das Ergebnis, daß Materialgesetze, die eine additive Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion in rein isochore und rein volumetrische Anteile vornehmen, prinzipiell zu einem unphysikalischen Verhalten im Bereich finiter Deformationen führen. Materialgesetze, die diese Aufspaltung nicht vornehmen, liefern auch im Bereich finiter Deformationen physikalisch sinnvolle Ergebnisse.

Bei nicht-porösen Festkörpern ist theoretisch eine Volumenkompression des Körpers auf einen singulären Punkt möglich. Bei einem porösen Festkörperskelett aus materiell inkompressiblem Matrixmaterial ist die Volumendeformation auf den sogenannten Kompressionspunkt beschränkt. Dieser Deformationszustand ist erreicht, wenn alle Poren geschlossen sind und dann eine weitere Volumenkompression aufgrund der Inkompressibilität des Festkörpermaterials nicht möglich ist. In **Kapitel 5** wird dazu ein neues finites Hyperelastizitätsgesetz entwickelt, mit dem dieser Effekt modelliert werden kann. Dazu wird ein neuer volumetrischer Erweiterungsterm für die Verzerrungsenergiefunktion hergeleitet, der alle physikalischen Anforderungen für ein finites Elastizitätsgesetz für poröse Festkörper erfüllt. Dieser Erweiterungsterm wird mit einem inkompressiblen Basisgesetz vom *Neo-Hooke*-Typ bzw. vom *Ogden*-Typ kombiniert. Damit erhält man jeweils ein Materialgesetz zur Beschreibung finiter elastischer Deformationen in porösen Festkörpern aus materiell inkompressiblem Matrixmaterial. Außerdem werden für diese beiden Materialmodelle die konsistenten elastischen Tangentenoperatoren in der Referenz- und Momentankonfiguration hergeleitet. Das *Neo-Hooke*-Modell bietet den Vorteil einer einfachen isotropen Tangente in der Momentankonfiguration. Beim *Ogden*-Modell ist zur Spannungsbeziehung und zur Berechnung der elastischen Tangente eine spektrale Zerlegung der Deformation erforderlich. Eine Linearisierung der Elastizitätsgesetze für den Bereich kleiner Deformationen liefert das bekannte *Hookesche* Gesetz.

Zur effizienten numerischen Behandlung der nichtlinearen beschreibenden Gleichungen des volumengekoppelten Festkörper-Fluid-Problems ist eine konsistente Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen bezüglich aller unbekanntem Feldgrößen erforderlich. Diese wird in **Kapitel 6** zur Verfügung gestellt. Die Linearisierung der orts- und zeitkontinuierlichen schwachen Formen der Bilanzgleichungen steht in engem Zusammenhang mit der Linearisierung der diskreten Gleichungen, die man nach einer Semidiskretisierung im Ort mit der Finite-Elemente-Methode und einer anschließenden Zeitdiskretisierung erhält. Zunächst wird die Linearisierung einiger wichtiger Größen bezüglich der unbekanntem Feldgrößen Festkörperverschiebung, Porenfluiddruck und Verschiebungsgeschwindigkeit bereitgestellt. Damit läßt sich die konsistente Linearisierung der schwachen Formen der Volumenbilanz der Mischung und der Impulsbilanz der Mischung angeben.

Die Diskretisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen wird in **Kapitel 7** vorgestellt. Dazu wird zunächst eine Semidiskretisierung der Gleichungen im Ort mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) vorgenommen. Dabei ist es wichtig, daß die Feldgrößen in geeigneter Weise approximiert werden. In dieser Arbeit werden quadratische Verschiebungsansätze und lineare Ansätze für den Druck verwendet. Es werden sowohl zwei- als auch dreidimensionale Elemente vorgestellt. Das nach der Ortsdiskretisierung entstehende zeitkontinuierliche Gleichungssystem wird durch ein Differenzenverfahren in der Zeit diskretisiert. Aufgrund der materiellen Inkompressibilität der Konstituierenden erhält man ein differential-algebraisches Gleichungssystem (DAE) erster Ordnung in der Zeit. Hierfür werden die Zeitintegration des Gleichungssystems mit Hilfe des impliziten *Euler*-Verfahrens sowie ein globaler numerischer Algorithmus zur Lösung des Gesamtproblems vorgestellt. Außerdem wird ein kurzer Überblick über *Runge-Kutta*-Verfahren zur Zeitintegration gegeben.

Anhand von Beispielrechnungen wird in **Kapitel 8** die Wirksamkeit der in dieser Arbeit entwickelten Materialmodelle und Formulierungen gezeigt. Hierzu werden die Elastizitätsgesetze zur Beschreibung finiter Deformationen in porösen Festkörpern und die Formulierungen zur Berücksichtigung der deformationsabhängigen Permeabilität an geeigneten Modellproblemen untersucht. An einer Konvergenzstudie wird die Effizienz der entwickelten numerischen Formulierungen, insbesondere der konsistenten Linearisierung der Bilanzgleichungen, gezeigt.

Abschließend erfolgt in **Kapitel 9** eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse. Außerdem wird ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen in diesem umfangreichen Forschungsgebiet gegeben.

1.3 Notation

In dieser Arbeit werden Vektoren durch fette Kleinbuchstaben und Tensoren durch fette Großbuchstaben gekennzeichnet. Tensoren höherer Stufe sind durch die hochgestellte Stufenzahl des Tensors gekennzeichnet. Grundsätzlich werden alle verwendeten Bezeichnungen und Symbole im Text erklärt.

Alle mathematischen Operationen der Vektor- und Tensorrechnung sind im absoluten Tensorkalkül dargestellt. Bezüglich der Grundlagen der verwendeten Vektor- und Tensorrechnung sei auf *de Boer* [8] verwiesen. Im Anhang A ist eine Übersicht über die wichtigsten, in dieser Arbeit verwendeten Tensoroperationen angefügt.

Der Begriff ko- bzw. kontravarianter Tensor bezieht sich auf die Stellung der Indizes der Basisvektoren eines Tensors. In diesem Sprachgebrauch besitzt ein kovarianter Tensor demnach ein kovariantes Basissystem und ein kontravariantes Koeffizientenschema.

Kapitel 2

Kontinuumsmechanische Beschreibung poröser Medien

Poröse fluidgefüllte Festkörpermaterialien können mit Hilfe der Theorie Poröser Medien (TPM) behandelt werden. Diese Vorgehensweise basiert auf einer kontinuumsmechanischen Beschreibung eines mehrphasigen Materials auf der Grundlage der Mischungstheorie, die um das Konzept der Volumenanteile erweitert wurde.

Die Mischungstheorie behandelt heterogen zusammengesetzte Kontinua mit inneren Wechselwirkungen. Bei der Behandlung poröser Medien wird zusätzlich vom Konzept der Volumenanteile Gebrauch gemacht, da die Mischungstheorie kein volumetrisches Maß für die Anteile der eine Mischung konstituierenden Teilkörper enthält. Die Theorie Poröser Medien stellt eine phänomenologische Theorie dar, d. h. die Beschreibung erfolgt in einem makroskopischen Rahmen, ohne auf mikroskopische Betrachtungsweisen einzugehen.

In dieser Arbeit werden poröse Medien als Mischung aus unvermischbaren Konstituierenden aufgefaßt. Deshalb wird ein poröses Medium häufig auch als „Mischung“ und seine Konstituierenden als „Phasen“ bezeichnet. Im weiteren sollen die grundlegenden Konzepte der Theorie Poröser Medien, der Kinematik und der Bilanzgleichungen vorgestellt werden. Für eine detailliertere Darstellung sei auf *Bowen* [12, 13], *de Boer & Ehlers* [9] sowie *Ehlers* [24, 27] verwiesen. Die Theorie Poröser Medien kann formal als Ergebnis eines Durchschnittsbildungsprozesses verstanden werden, siehe z. B. *Hassanizadeh & Gray* [36], *Plischka* [57]. Auf diese Vorgehensweise wird in dieser Arbeit aber nicht weiter eingegangen.

2.1 Theorie Poröser Medien

Bei der Modellbildung in der Theorie Poröser Medien wird davon ausgegangen, daß alle n am Gesamtmodell beteiligten Konstituierenden in einem Kontrollraum statistisch gleich verteilt sind. Diese Annahme setzt die Betrachtung eines hinreichend

großen Bereichs voraus. Die de facto gegeneinander abgegrenzten Teilkörper werden im Kontrollraum „verschmiert“, siehe Abbildung 2.1. Der betrachtete Kontrollraum wird häufig auch als Repräsentatives Elementarvolumen (REV) bezeichnet.

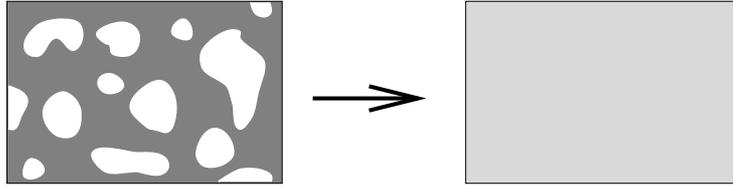


Abbildung 2.1: Geometrischer Aufbau und „verschmiertes“ Ersatzmodell für ein poröses Medium

Aus dieser Betrachtungsweise ergibt sich, daß alle Konstituierenden gleichzeitig das gesamte Volumen eines Kontrollraums \mathcal{B} einnehmen (superponierte Kontinua). Ein Mehrphasenkontinuum φ besteht demzufolge aus der Summe seiner Konstituierenden φ^α :

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^n \varphi^\alpha . \quad (2.1)$$

Folglich sind alle geometrischen und physikalischen Größen der n Konstituierenden φ^α im ganzen Kontrollraum \mathcal{B} definiert und als statistische Mittelwerte der tatsächlich auftretenden Größen zu verstehen. Hierbei ist α ein Zeiger für die jeweilige Konstituierende.

Die innere Struktur eines porösen Mediums wird bei dieser Modellierung nicht erfaßt. Sie ist in der Regel auch nicht bekannt. Damit ist implizit die Einschränkung auf eine isotrope Verteilung der Konstituierenden im Kontrollraum verbunden. Die Berücksichtigung von Anisotropieeigenschaften ist deshalb, wie in der klassischen Kontinuumsmechanik, nicht Aufgabe der kontinuumsmechanischen Modellbildung sondern Gegenstand konstitutiver Gleichungen.

Durch die Definition der Volumenanteile

$$n^\alpha = n^\alpha(\mathbf{x}, t) , \quad (2.2)$$

die im allgemeinen Funktionen des Ortes \mathbf{x} und der Zeit t sind, wird ein Zusammenhang zwischen einem Volumenelement dv der Mischung und den partialen Volumenelementen dv^α der Konstituierenden φ^α in der aktuellen Konfiguration durch

$$dv^\alpha = n^\alpha dv \quad (2.3)$$

hergestellt. Das Gesamtvolumen V der Mischung erhält man aus

$$V = \int_{\mathcal{B}} dv = \int_{\mathcal{B}} \sum_{\alpha=1}^n dv^\alpha = \int_{\mathcal{B}} \sum_{\alpha=1}^n n^\alpha dv . \quad (2.4)$$

Die Volumenanteile genügen dabei der Sättigungsbedingung

$$\sum_{\alpha=1}^n n^{\alpha} = 1 , \quad (2.5)$$

d. h. das Gesamtvolumen der Mischung wird vollständig von den Konstituierenden ausgefüllt. Bei einer Beschreibung ungesättigter Medien sind die Porenräume teilweise materiefrei, und es gilt $\sum_{\alpha=1}^n n^{\alpha} < 1$. In dieser Arbeit werden nur gesättigte Medien betrachtet.

Eine zu (2.3) analoge Aussage ergibt sich auch für den Zusammenhang zwischen einem Oberflächenelement da des Gesamtkörpers φ und einem partialen Oberflächenelement da^{α} einer Konstituierenden φ^{α} , es gilt:

$$da^{\alpha} = n^{\alpha} da . \quad (2.6)$$

Die Voraussetzung superponierter Kontinua bedingt weiterhin

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}^{\alpha} &= \mathbf{n} da^{\alpha} , \\ d\mathbf{a} &= \mathbf{n} da , \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei \mathbf{n} der nach außen orientierte Normaleneinheitsvektor auf die Oberfläche ist.

Aufgrund des Konzepts der Volumenanteile werden zwei verschiedene Dichtefunktionen für eine Konstituierende eingeführt. Ist dm^{α} ein Massenelement einer Phase φ^{α} , so ist die Partialdichte durch das Verhältnis des lokalen Massenelements zum Gesamtvolumen definiert:

$$\rho^{\alpha} = \frac{dm^{\alpha}}{dv} . \quad (2.8)$$

Die effektive Dichte (bzw. realistische Dichte) ist das Verhältnis des lokalen Massenelements einer Phase zu ihrem Partialvolumen:

$$\rho^{\alpha R} = \frac{dm^{\alpha}}{dv^{\alpha}} . \quad (2.9)$$

Durch Vergleich erhält man den Zusammenhang zwischen Partialdichte und realistischer Dichte über die entsprechenden Volumenanteile:

$$\rho^{\alpha} = n^{\alpha} \rho^{\alpha R} . \quad (2.10)$$

Die Partialdichte und die realistische Dichte sind wie die Volumenanteile als Feldfunktionen zu verstehen. Sie sind das Ergebnis einer gedachten Mittelung über die Mikrostruktur. Aus (2.10) kann unmittelbar geschlossen werden, daß materielle Inkompressibilität einer Konstituierenden ($\rho^{\alpha R} = \text{konst.}$) nicht gleichbedeutend ist mit der Eigenschaft globaler Inkompressibilität dieser Konstituierenden, da sich die Partialdichte durch Änderung des Volumenanteils n^{α} noch ändern kann.

Anmerkung: Die Kontinuumsmechanik von Mehrphasenmaterialien läßt sich durch Reduktion der Anzahl der Konstituierenden von n auf 1 in die klassische Kontinuumsmechanik von Einphasenmaterialien überführen. In den folgenden Überlegungen ist also die Kontinuumsmechanik von Einphasenmaterialien automatisch eingeschlossen.

2.2 Kinematik

Die Annahme superponierter Kontinua bedingt, daß zu einem Zeitpunkt t jeder Raumpunkt \mathbf{x} der aktuellen Konfiguration (Momentankonfiguration) mit materiellen Punkten X^α aller Konstituierenden φ^α besetzt ist. Da unabhängige Bewegungszustände der Konstituierenden vorausgesetzt werden, bedeutet dies, daß dieselben materiellen Punkte an der Stelle \mathbf{x} aus unterschiedlichen Referenzlagen \mathbf{X}_α zum Zeitpunkt $t = t_0$ (Referenzkonfiguration) stammen, siehe Abbildung 2.2.

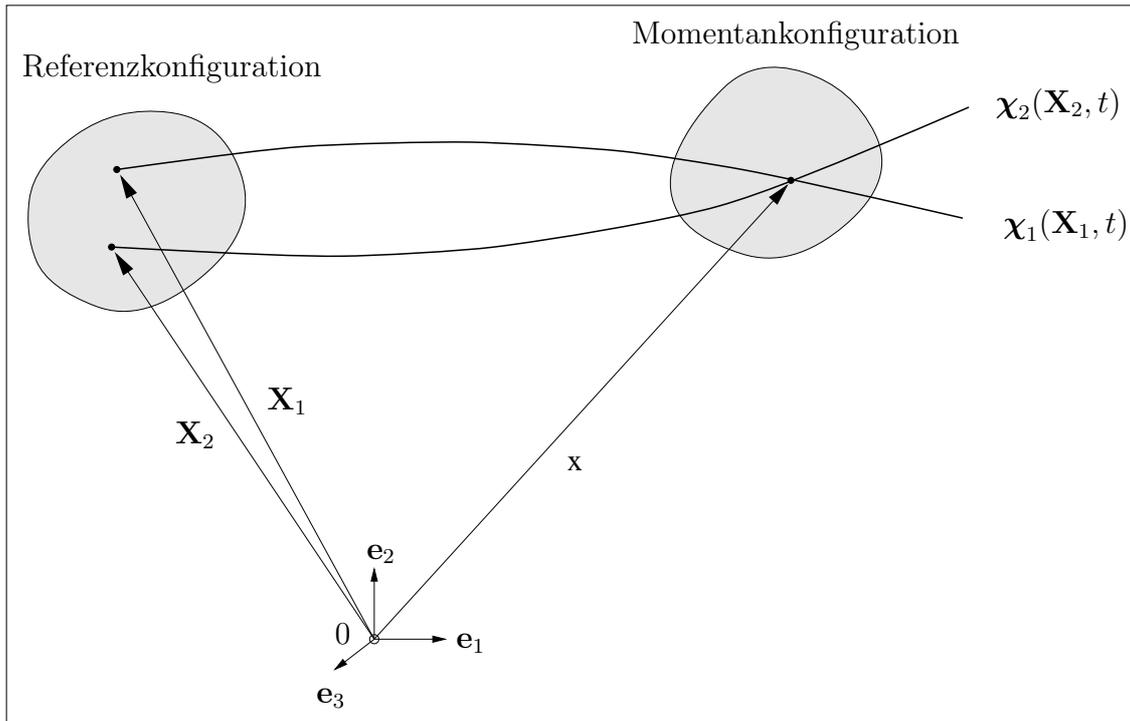


Abbildung 2.2: Bewegungszustand eines Mehrphasenmodells (hier für 2 Phasen dargestellt)

Die Ortsvektoren \mathbf{X}_α und \mathbf{x} lassen sich durch Koordinaten bezüglich einer raumfesten kartesischen Basis mit den Basisvektoren \mathbf{e}_i darstellen (*Einsteinsche* Summenkonvention für i):

$$\mathbf{X}_\alpha = X_\alpha^i \mathbf{e}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i . \quad (2.11)$$

2.2.1 Bewegung

Jede Konstituierende φ^α besitzt eine eigene eindeutige Bewegungsfunktion (Plazierungsfunktion)

$$\mathbf{x} = \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t) , \quad (2.12)$$

so daß sich an einem räumlichen Punkt \mathbf{x} des dreidimensionalen *Euklidischen* Raums \mathbb{E}^3 zu einer Zeit t nur ein materieller Punkt X^α jeweils einer Konstituierenden

φ^α befinden kann (zusammen mit materiellen Punkten anderer Konstituierenden \rightsquigarrow superponierte Kontinua). Die Forderung nach einer ein-eindeutigen Bewegung bedingt, daß sich jeder materielle Punkt X^α durch seine Referenzlage \mathbf{X}_α zur Zeit $t = t_0$ identifizieren läßt. Dies setzt eine inverse Bewegungsfunktion

$$\mathbf{X}_\alpha = \boldsymbol{\chi}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.13)$$

voraus, deren Existenz durch nichtsinguläre *Jacobische* Determinanten

$$J_\alpha = \det \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_\alpha}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \neq 0 \quad (2.14)$$

gesichert ist. Aus der Bewegungsfunktion (2.12) folgt, daß jeder Konstituierenden ein eigenes Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld zugeordnet ist:

$$\overset{\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial t}, \quad \overset{\cdot\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Mit Hilfe der inversen Bewegungsfunktion (2.13) läßt sich das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld in einer räumlichen Darstellung angeben:

$$\overset{\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha = \overset{\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad \overset{\cdot\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha = \overset{\cdot\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (2.16)$$

Die Mischungsgeschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha \overset{\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha \quad (2.17)$$

kennzeichnet die baryzentrische Schwerpunktsgeschwindigkeit der Mischung, wobei die durch

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha \quad (2.18)$$

definierte Mischungsdichte die Dichte des Gesamtkörpers darstellt. Die Diffusionsgeschwindigkeit

$$\mathbf{d}_\alpha = \overset{\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}} \quad (2.19)$$

einer Konstituierenden wird als die Relativgeschwindigkeit der Konstituierenden zur Mischungsgeschwindigkeit definiert. Aus (2.17) und (2.18) folgt für die Diffusionsmassenströme die Bedingung

$$\sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha \mathbf{d}_\alpha = \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

d. h. die Summe der lokalen Diffusionsmassenströme muß verschwinden.

Die Einführung der Geschwindigkeiten $\overset{\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha$ und $\dot{\mathbf{x}}$ bedingt die Existenz unterschiedlicher materieller Zeitableitungen. Ist $\Gamma = \Gamma(\mathbf{x}, t)$ eine stetige und hinreichend oft stetig differenzierbare skalarwertige Funktion, so lautet die materielle Zeitableitung

von Γ , die mit der Geschwindigkeit von φ^α gebildet wird (der Konstituierenden φ^α folgend):

$$(\Gamma)'_\alpha = \frac{d_\alpha}{dt} \Gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Gamma + \text{grad } \Gamma \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha, \quad (2.21)$$

wobei der Differentialoperator „grad“ die partielle Ableitung nach dem Ortsvektor \mathbf{x} der Momentankonfiguration kennzeichnet:

$$\text{grad} (..) = \frac{\partial(..)}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.22)$$

Entsprechend bildet man die materielle Zeitableitung der Mischung durch

$$\dot{\Gamma} = \frac{d}{dt} \Gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Gamma + \text{grad } \Gamma \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.23)$$

Materielle Zeitableitungen von vektor- und tensorwertigen Funktionen ergeben sich analog.

Aus der Bewegungsfunktion (2.12) läßt sich der materielle Deformationsgradient einer Phase φ^α bilden,

$$\mathbf{F}_\alpha = \text{Grad}_\alpha \mathbf{x}, \quad (2.24)$$

wobei der Differentialoperator „Grad $_\alpha$ “ die partielle Ableitung nach dem Ortsvektor \mathbf{X}_α der Referenzkonfiguration darstellt:

$$\text{Grad}_\alpha (..) = \frac{\partial(..)}{\partial \mathbf{X}_\alpha}. \quad (2.25)$$

Die Einführung eines Deformationsgradienten für die Mischung φ ist nicht möglich, da keine einheitliche Bewegungsfunktion der Mischung existiert.

Für den inversen Deformationsgradienten gilt

$$\mathbf{F}_\alpha^{-1} = \text{grad } \mathbf{X}_\alpha. \quad (2.26)$$

Dessen Existenz ist gesichert, wenn die *Jacobische Determinante* (2.14) von Null verschieden ist. Außerdem ist der Bereich von $\det \mathbf{F}_\alpha$ wegen $\det \mathbf{F}_\alpha(t_0) = 1$ auf positive Werte beschränkt:

$$\det \mathbf{F}_\alpha > 0. \quad (2.27)$$

2.2.2 Transportbeziehungen

Bei Verwendung konvektiver krummliniger Koordinaten θ_α^i ($i = 1, 2, 3$) für jede Phase φ^α , entsprechend Abbildung 2.3, läßt sich der Ortsvektor in der Referenz- und Momentankonfiguration durch

$$\mathbf{X}_\alpha = \mathbf{X}_\alpha(\theta_\alpha^i, t_0), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta_\alpha^i, t) \quad (2.28)$$

angeben. Dabei wird gefordert, daß eine eindeutige Umkehrung dieser Funktionen existiert. Die natürlichen kovarianten Basisvektoren $\mathbf{h}_{\alpha i}$ der Referenzkonfiguration bzw. $\mathbf{a}_{\alpha i}$ der aktuellen Konfiguration von φ^α ergeben sich dann als Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien, siehe z. B. *de Boer* [8]:

$$\mathbf{h}_{\alpha i} = \frac{\partial \mathbf{X}_\alpha}{\partial \theta_\alpha^i}, \quad \mathbf{a}_{\alpha i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_\alpha^i}. \quad (2.29)$$

Die dazugehörigen dualen (kontravarianten) Basisvektoren ergeben sich aus den Bedingungen

$$\mathbf{h}_\alpha^i \cdot \mathbf{h}_{\alpha j} = \delta_j^i, \quad \mathbf{a}_\alpha^i \cdot \mathbf{a}_{\alpha j} = \delta_j^i, \quad (2.30)$$

wobei δ_j^i das *Kronecker-Symbol* ist. Die dualen Basisvektoren lassen sich auch durch Ableitungen der Koordinatenlinien direkt berechnen:

$$\mathbf{h}_\alpha^i = \frac{\partial \theta_\alpha^i}{\partial \mathbf{X}_\alpha}, \quad \mathbf{a}_\alpha^i = \frac{\partial \theta_\alpha^i}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.31)$$

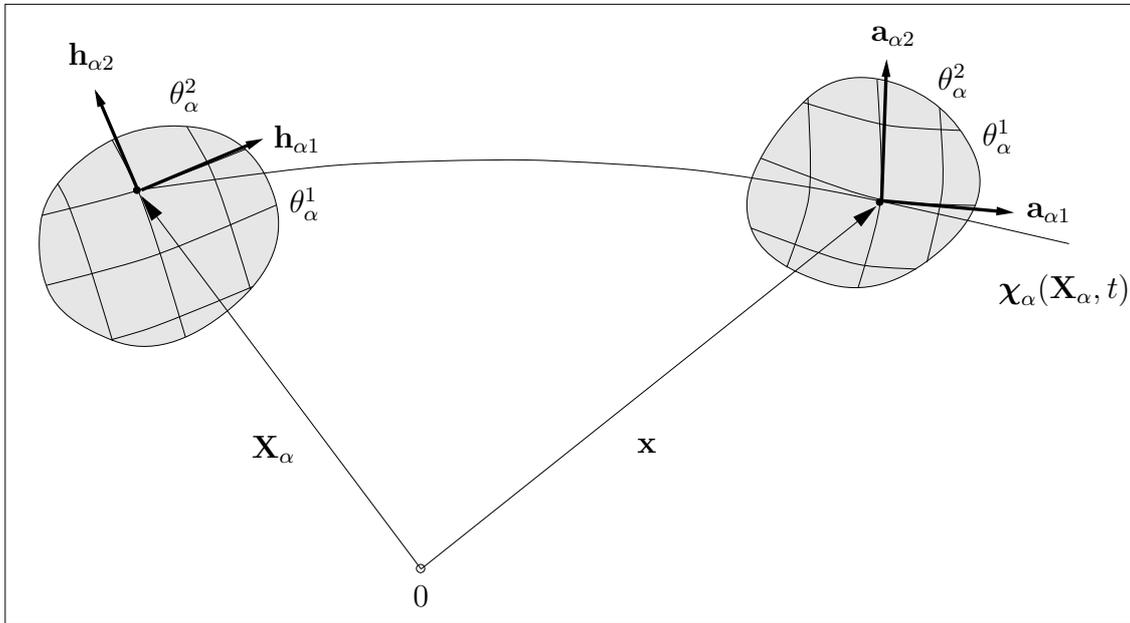


Abbildung 2.3: Krummlinige Koordinaten und natürliche Basisvektoren für eine Phase φ^α (andere Phasen sind hier nicht dargestellt)

Durch Verwendung der natürlichen Basisvektoren erhält man unter Anwendung der Kettenregel (unter Berücksichtigung der *Einsteinschen* Summenkonvention für die Indizes i) für den Deformationsgradienten einer Phase φ^α :

$$\mathbf{F}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_\alpha^i} \otimes \frac{\partial \theta_\alpha^i}{\partial \mathbf{X}_\alpha} = \mathbf{a}_{\alpha i} \otimes \mathbf{h}_\alpha^i \quad (2.32)$$

sowie für die Inverse des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_\alpha^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}_\alpha}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{X}_\alpha}{\partial \theta_\alpha^i} \otimes \frac{\partial \theta_\alpha^i}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{h}_{\alpha i} \otimes \mathbf{a}_\alpha^i. \quad (2.33)$$

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß \mathbf{F}_α und \mathbf{F}_α^{-1} sogenannte „Zweifeldtensoren“ sind.

Aus diesen Beziehungen lassen sich die Vorwärts- und Rückwärtstransportmechanismen für kovariante Basisvektoren

$$\mathbf{a}_{\alpha i} = \mathbf{F}_\alpha \mathbf{h}_{\alpha i} \longleftrightarrow \mathbf{h}_{\alpha i} = \mathbf{F}_\alpha^{-1} \mathbf{a}_{\alpha i} \quad (2.34)$$

sowie für kontravariante Basisvektoren

$$\mathbf{a}_\alpha^i = \mathbf{F}_\alpha^{T-1} \mathbf{h}_\alpha^i \longleftrightarrow \mathbf{h}_\alpha^i = \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{a}_\alpha^i \quad (2.35)$$

ableiten. Diese Transportmechanismen werden häufig auch als Push-forward- und Pull-back-Operationen bezeichnet, siehe *Marsden & Hughes* [44]. Die Anwendung der Transportmechanismen auf Vektoren bzw. Tensoren bewirkt demnach einen Wechsel der natürlichen Basisvektoren unter Beibehaltung der Vektor- bzw. Tensor-koeffizienten.

Weiterhin lassen sich die Transporttheoreme für Linienelemente, Flächenelemente und Volumenelemente angeben:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha, \quad (2.36)$$

$$d\mathbf{a} = \det \mathbf{F}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{T-1} d\mathbf{A}_\alpha, \quad (2.37)$$

$$dv = \det \mathbf{F}_\alpha dV_\alpha, \quad (2.38)$$

wobei $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{a}$ und dv Elemente der Momentankonfiguration und $d\mathbf{X}_\alpha$, $d\mathbf{A}_\alpha$ und dV_α Elemente in der Referenzkonfiguration bezüglich der Konstituierenden φ^α bezeichnen. Die Größen $d\mathbf{A}_\alpha$ und dV_α kennzeichnen also Elemente der Mischung in der Referenzlage \mathbf{X}_α von φ^α .

Anmerkung: Die *Jacobische* Determinante $\det \mathbf{F}_\alpha$ transportiert mit der Bewegung von φ^α das Volumenelement dv der Mischung und nicht ein Volumenelement $dv^\alpha = n^\alpha dv$ einer Konstituierenden φ^α .

Allgemein gelten für einen Tensor (...) zweiter Stufe folgende Transportmechanismen:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{F}_\alpha^{T-1} \quad (..) \quad \mathbf{F}_\alpha^{-1} & \text{kontravarianter Vorwärtstransport,} \\ \mathbf{F}_\alpha^T \quad (..) \quad \mathbf{F}_\alpha & \text{kontravarianter Rückwärtstransport} \end{array} \quad (2.39)$$

bzw.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{F}_\alpha \quad (..) \quad \mathbf{F}_\alpha^T & \text{kovarianter Vorwärtstransport,} \\ \mathbf{F}_\alpha^{-1} \quad (..) \quad \mathbf{F}_\alpha^{T-1} & \text{kovarianter Rückwärtstransport.} \end{array} \quad (2.40)$$

2.2.3 Deformations- und Verzerrungsmaße

Deformations- und Verzerrungsmaße lassen sich über die Quadrate von Linienelementen bzw. deren Differenz einführen. Durch die polare Zerlegung

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{U}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha \mathbf{R}_\alpha \quad (2.41)$$

ist eine multiplikative Zerlegung von \mathbf{F}_α in den eigentlich orthogonalen Rotationstensor \mathbf{R}_α und den Rechtsstrecktensor \mathbf{U}_α bzw. den Linksstrecktensor \mathbf{V}_α möglich. Sowohl \mathbf{U}_α als auch \mathbf{V}_α sind positiv definit und symmetrisch. Man erhält für ein Linienelement entsprechend (2.36)

$$d\mathbf{x} = \mathbf{R}_\alpha (\mathbf{U}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha) = \mathbf{V}_\alpha (\mathbf{R}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha) . \quad (2.42)$$

Die Verformung eines Linienelements $d\mathbf{X}_\alpha$ der Referenzkonfiguration von φ^α kann also als Kombination aus Streckung / Drehung bzw. Drehung / Streckung aufgefaßt werden.

Mit Hilfe der Symmetriegruppe für Fluide (isotrope Nichtfestkörper) läßt sich zeigen, daß der Deformationsgradient \mathbf{F}_β für die Fluidphasen φ^β nur die Form

$$\mathbf{F}_\beta = (\det \mathbf{F}_\beta)^{1/3} \mathbf{I} \quad (2.43)$$

annehmen kann. Die folgenden Größen sind deshalb eigentlich nur bei Festkörpern sinnvoll zu verwenden.

Durch die lineare Abbildung zwischen den Quadraten der Linienelemente

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X}_\alpha \cdot \mathbf{C}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha , \quad (2.44)$$

$$d\mathbf{X}_\alpha \cdot d\mathbf{X}_\alpha = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_\alpha^{-1} d\mathbf{x} \quad (2.45)$$

lassen sich der rechte und der linke *Cauchy-Green-Deformationstensor* definieren:

$$\mathbf{C}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{U}_\alpha \mathbf{U}_\alpha , \quad (2.46)$$

$$\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^T = \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha . \quad (2.47)$$

Hierbei kann \mathbf{C}_α als ein Tensor mit kontravarianten natürlichen Basen in der Referenzkonfiguration und \mathbf{B}_α als ein Tensor mit kovarianten natürlichen Basen in der Momentankonfiguration dargestellt werden. Beide Deformationstensoren sind positiv definit und symmetrisch. Durch Vorwärtsrotation kann \mathbf{C}_α in \mathbf{B}_α überführt werden

$$\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{C}_\alpha \mathbf{R}_\alpha^T . \quad (2.48)$$

Aus der Differenz der Quadrate der Linienelemente ($d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X}_\alpha \cdot d\mathbf{X}_\alpha$) können mit (2.44) und (2.45) der *Greensche Verzerrungstensor* \mathbf{E}_α und der *Almansische Verzerrungstensor* \mathbf{A}_α durch

$$\mathbf{E}_\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{I}) , \quad (2.49)$$

$$\mathbf{A}_\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha^{-1}) \quad (2.50)$$

definiert werden. Das Transportverhalten zwischen dem *Greenschen-* und dem *Almansischen* Verzerrungstensor ist durch ein kontravariantes Transportverhalten gekennzeichnet; so gilt für der Vorwärtstransport:

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{T-1} \mathbf{E}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1} . \quad (2.51)$$

In der Literatur ist eine Vielzahl weiterer Verzerrungsmaße bekannt, siehe z. B. *Truesdell & Noll* [68], *Ogden* [53], die aber in dieser Arbeit keine Verwendung finden.

2.2.4 Deformations- und Verzerrungsgeschwindigkeiten

Mit der Definition der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ entsprechend (2.15)₁ bzw. (2.16)₁ lassen sich der materielle Geschwindigkeitsgradient

$$(\mathbf{F}_\alpha)' = \text{Grad}_\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \quad (2.52)$$

und der räumliche Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{L}_\alpha = \text{grad } \dot{\mathbf{x}}_\alpha = (\mathbf{F}_\alpha)'_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1} \quad (2.53)$$

eingeführen. Der symmetrische Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten wird als Deformationsgeschwindigkeitstensor

$$\mathbf{D}_\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\alpha^T) \quad (2.54)$$

bezeichnet, während der antimetrische Anteil

$$\mathbf{W}_\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_\alpha - \mathbf{L}_\alpha^T) \quad (2.55)$$

als Drehgeschwindigkeitstensor bzw. Wirbeltensor bezeichnet wird.

Mit dem Transportverhalten (2.38) eines Volumenelements und wegen

$$\text{div } \dot{\mathbf{x}}_\alpha = (\text{grad } \dot{\mathbf{x}}_\alpha) \cdot \mathbf{I} = \mathbf{L}_\alpha \cdot \mathbf{I} , \quad (2.56)$$

läßt sich der Transport der Geschwindigkeit eines Volumenelements durch

$$(dv)'_\alpha = (\mathbf{L}_\alpha \cdot \mathbf{I}) dv \quad (2.57)$$

beschreiben. Hierbei ist „div“ der zu „grad“ gehörige Divergenzoperator.

Die obere *Oldroyd*-Ableitung (*Lie*-Ableitung) eines kontravarianten Tensors zweiter Stufe (..) erhält man durch

$$(\cdot)_\alpha^\Delta = (\cdot)'_\alpha + \mathbf{L}_\alpha^T (\cdot) + (\cdot) \mathbf{L}_\alpha , \quad (2.58)$$

siehe *Oldroyd* [54]. Die *Lie*-Ableitung läßt sich als relative Zeitableitung einer räumlichen Größe interpretieren (Zeitableitung der Tensorkomponenten bei festgehaltenen natürlichen Basisvektoren der Momentankonfiguration). Damit kann ein Zusammenhang zwischen der oberen *Oldroyd*-Ableitung des *Almansischen* Verzerrungstensors

$$(\mathbf{A}_\alpha)_\alpha^\Delta = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\alpha^T) = \mathbf{D}_\alpha \quad (2.59)$$

und der Verzerrungsgeschwindigkeit des *Greenschen* Verzerrungstensors

$$(\mathbf{E}_\alpha)'_\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_\alpha)'_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{D}_\alpha \mathbf{F}_\alpha \quad (2.60)$$

durch einen kontravarianten Vorwärtstransportmechanismus

$$(\mathbf{A}_\alpha)_\alpha^\Delta = \mathbf{F}_\alpha^{T-1} (\mathbf{E}_\alpha)'_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1} \quad (2.61)$$

hergestellt werden.

2.3 Spannungsmaße

Oberflächenkräfte wirken auf die materiellen Punkte X^α der Oberfläche $\partial\mathcal{B}$ eines Mischungskörpers. Der Oberflächenspannungsvektor \mathbf{t}^α erfaßt alle Kraftwirkungen, die infolge Nahwirkung (Kontakt) auf eine Phase φ^α einwirken. Durch das *Cauchy*-Theorem

$$\mathbf{t}^\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}^\alpha \mathbf{n} \quad (2.62)$$

wird der partielle *Cauchy*sche Spannungstensor \mathbf{T}^α definiert. Dabei ist \mathbf{n} der nach außen orientierte Normaleneinheitsvektor der aktuellen Konfiguration. Der *Cauchy*sche Spannungstensor wird auch als wahrer Spannungstensor bezeichnet, da er die in der Momentankonfiguration wirkenden Spannungen auf das aktuelle Oberflächenelement bezieht. Über die Darstellung der differentiellen Oberflächenkraft

$$d\mathbf{k}^\alpha = \mathbf{t}^\alpha da = \mathbf{T}^\alpha d\mathbf{a} \quad (2.63)$$

lassen sich für eine Konstituierende φ^α weitere partielle Spannungstensoren definieren.

Durch Bezug der Oberflächenkraft $d\mathbf{k}^\alpha$ einer Konstituierenden auf ein gewichtetes Oberflächenelement $d\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \det \mathbf{F}_\alpha^{-1} d\mathbf{a}$ ergibt sich der *Kirchhoff*-Spannungstensor

$$\boldsymbol{\tau}^\alpha = \det \mathbf{F}_\alpha \mathbf{T}^\alpha, \quad (2.64)$$

der einen gewichteten *Cauchy*-Tensor darstellt. Durch Bezug der Oberflächenkraft auf ein Oberflächenelement der Referenzkonfiguration erhält man den 1. *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensor \mathbf{P}^α , für den der Zusammenhang

$$d\mathbf{k}^\alpha = \mathbf{P}^\alpha d\mathbf{A}_\alpha = \boldsymbol{\tau}^\alpha \mathbf{F}_\alpha^{T-1} d\mathbf{A}_\alpha \quad (2.65)$$

gilt. Durch Rückwärtstransformation der ersten Tensorbasis von \mathbf{P}^α erhält man den 2. *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensor zu

$$\mathbf{S}^\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{-1} \mathbf{P}^\alpha. \quad (2.66)$$

Sowohl \mathbf{S}^α als auch $\boldsymbol{\tau}^\alpha$ sind reine Rechengrößen, die keine physikalische Bedeutung besitzen. Sie spielen aber eine ausgezeichnete Rolle bei der Konstituierung von Materialgesetzen. Zwischen diesen Spannungstensoren gilt die kovariante Transportbeziehung

$$\boldsymbol{\tau}^\alpha = \mathbf{F}_\alpha \mathbf{S}^\alpha \mathbf{F}_\alpha^T. \quad (2.67)$$

Aus der unteren *Oldroyd*-Ableitung (*Lie*-Ableitung) eines kovarianten Tensors (..)

$$(\cdot)_\alpha^\nabla = (\cdot)_\alpha' - \mathbf{L}_\alpha (\cdot) - (\cdot) \mathbf{L}_\alpha^T, \quad (2.68)$$

siehe *Oldroyd* [54], ergibt sich damit der *Oldroydsche* Spannungsfluß der *Kirchhoff*-spannungen

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau}^\alpha)_\alpha^\nabla &= (\boldsymbol{\tau}^\alpha)_\alpha' - \mathbf{L}_\alpha \boldsymbol{\tau}^\alpha - \boldsymbol{\tau}^\alpha \mathbf{L}_\alpha^T \\ &= \mathbf{F}_\alpha (\mathbf{S}^\alpha)_\alpha' \mathbf{F}_\alpha^T, \end{aligned} \quad (2.69)$$

der einen objektiven Spannungsfluß darstellt. Der Spannungsfluß der *Kirchhoff*-spannungen weist dasselbe Transformationsverhalten wie die *Kirchhoff*spannungen selbst auf.

2.4 Bilanzgleichungen

Die Struktur der Bilanzgleichungen für Mehrphasenmaterialien basiert auf den von Truesdell eingeführten „Metaphysischen Prinzipien“, siehe Truesdell [69]:

1. *All properties of the mixture must be mathematical consequences of properties of the constituents.*
2. *So as to describe the motion of a constituent, we may in imagination isolate it from the rest of the mixture, provided we allow properly for the actions of the other constituents upon it.*
3. *The motion of a mixture is governed by the same equations as is a single body.*

Demzufolge ergibt sich die Bilanzgleichung der Mischung durch Summation der Bilanzgleichungen der Konstituierenden, da sich die Mischung aus der Summe der Konstituierenden zusammensetzt. Da die Mischung nicht „weiß“, ob sie eine Mischung ist oder nicht, muß die Bilanzgleichung der Mischung φ dieselbe Form haben wie die entsprechende Bilanz der klassischen Kontinuumsmechanik der Einphasenmaterialien. Die Bilanzgleichungen für die Konstituierenden φ^α lassen sich in Analogie zu den Bilanzgleichungen der klassischen Kontinuumsmechanik darstellen, wenn man Kopplungsmechanismen zwischen den Phasen zuläßt.

Die globalen Bilanzgleichungen für die Mischung als Ganzes lassen sich durch eine allgemeine Masterbilanz darstellen, siehe z. B. Hutter [41], Haupt [37]. Hierbei wird die zeitliche Änderung einer volumenspezifischen mechanischen Größe ψ mit dem Ausfluß $\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n}$ über die Oberfläche $\partial\mathcal{B}$ infolge äußerer Nahwirkung (\mathbf{n} : nach außen orientierter Oberflächennormaleneinheitsvektor), der Zufuhr der mechanischen Größe σ in den Körper \mathcal{B} infolge äußerer Fernwirkung sowie der Produktion $\hat{\psi}$ infolge Kopplung mit der Umgebung bilanziert:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi \, dv = \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{\mathcal{B}} \sigma \, dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\psi} \, dv . \quad (2.70)$$

Unter den üblichen Voraussetzungen von Stetigkeit und stetiger Differenzierbarkeit läßt sich durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes für das Oberflächenintegral die lokale Form der allgemeinen Bilanzgleichung erzeugen:

$$\dot{\psi} + \psi \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} + \sigma + \hat{\psi} . \quad (2.71)$$

Entsprechend Truesdells Prinzipien lassen sich die Bilanzgleichungen für eine Konstituierende φ^α in Analogie zu (2.70) darstellen. Für eine ausführliche Darstellung grundlegender Konzepte der Bilanzrelationen für Mehrphasenkontinua sei auf Ehlers [27] verwiesen. Die globale Bilanzgleichung für eine Konstituierende φ^α lautet:

$$\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha \, dv = \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\phi}^\alpha \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{\mathcal{B}} \sigma^\alpha \, dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\psi}^\alpha \, dv . \quad (2.72)$$

Die entsprechenden mechanischen Größen $(\cdot)^\alpha$ haben dieselbe Bedeutung wie beim Mischungskörper φ . Der Produktionsterm $\hat{\psi}^\alpha$ berücksichtigt eine Kopplung der Konstituierenden φ^α mit der Umgebung und mit anderen Konstituierenden der Mischung. In analoger Weise zu (2.71) läßt sich die lokale Form der Bilanzgleichung für eine Konstituierende darstellen:

$$(\psi^\alpha)'_\alpha + \psi^\alpha \operatorname{div} \mathbf{x}'_\alpha = \operatorname{div} \phi^\alpha + \sigma^\alpha + \hat{\psi}^\alpha . \quad (2.73)$$

Summenrelationen

Truesdells Prinzipien bedingen, daß die lokalen Bilanzrelationen des Mischungskörpers φ durch (2.71) dargestellt werden können. Andererseits müssen sich diese Bilanzen auch als Summe der lokalen Bilanzrelationen (2.73) über alle Konstituierenden ergeben. Durch Summation von (2.73) über alle n Konstituierenden und Vergleich mit (2.71) lassen sich Zwangsbedingungen für die Produktionsterme $\hat{\psi}^\alpha$ angeben. Außerdem können die in den Bilanzen der Konstituierenden auftretenden Größen mit den entsprechenden Größen der Mischung in Verbindung gebracht werden. Dadurch erhält man folgende Aussagen:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{\alpha=1}^n \psi^\alpha && \text{(mechanische Größe) ,} \\ \phi &= \sum_{\alpha=1}^n (\phi^\alpha - \psi^\alpha \mathbf{d}_\alpha) && \text{(Ausflußvektor) ,} \\ \sigma &= \sum_{\alpha=1}^n \sigma^\alpha && \text{(Zufuhr) ,} \\ \hat{\psi} &= \sum_{\alpha=1}^n \hat{\psi}^\alpha && \text{(Produktion) .} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Solange kein Diffusionsprozeß existiert ($\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{0}$), entsprechen die angegebenen Größen der Mischung der Summe der entsprechenden Größen der Konstituierenden. Für den Mischungskörper als Ganzes gibt es in der Regel keine Produktionsterme $\hat{\psi}$ (Ausnahme: Entropiebilanz).

Die hier angegebenen Gleichungen gelten für skalarwertige physikalische Größen ψ bzw. ψ^α . Sie lassen sich in analoger Weise aber auch für vektorwertige physikalische Größen $\boldsymbol{\psi}$ bzw. $\boldsymbol{\psi}^\alpha$ angeben.

Durch Spezifizierung der entsprechenden Größen können spezielle Bilanzgleichungen gewonnen werden. Die speziellen Bilanzrelationen für Masse, Impuls, Drall, Energie und Entropie werden axiomatisch eingeführt. Entsprechend *Truesdells* Prinzipien sind sie sowohl für die Konstituierenden φ^α als auch für die Mischung φ zu postulieren.

2.4.1 Massenbilanz

Betrachtet man zunächst die Mischung als einheitlichen Mischungskörper, so kann die Massenbilanz in der für Einkomponentenkontinua bekannten Form

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \, dv = 0 \quad (2.75)$$

angegeben werden. Hieraus findet man die lokale Form

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 . \quad (2.76)$$

Für eine Konstituierende φ^α müssen Massenaustauschterme $\hat{\rho}^\alpha$ (infolge Phasenumwandlungen oder chemischer Reaktionen) zwischen den Konstituierenden zugelassen werden:

$$\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho^\alpha \, dv = \int_{\mathcal{B}} \hat{\rho}^\alpha \, dv , \quad (2.77)$$

woraus man die lokale Form

$$(\rho^\alpha)'_\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = \hat{\rho}^\alpha \quad (2.78)$$

gewinnen kann.

Vergleicht man die lokalen Bilanzgleichungen mit den allgemeinen Bilanzen (2.71) bzw. (2.73), so stellt man fest, daß die zu bilanzierende mechanische Größe die Dichte ist ($\psi = \rho$ bzw. $\psi^\alpha = \rho^\alpha$). Fluß- und Zufuhrgrößen treten nicht auf. Ein Produktionsterm $\hat{\psi}^\alpha = \hat{\rho}^\alpha$ existiert nur für die Konstituierenden φ^α .

Aus der Summe der lokalen Bilanzen der Phasen über alle n Konstituierenden und im Vergleich mit (2.76) erhält man die bereits bekannten Beziehungen für die Mischungsdichte (2.18) und die Diffusionsmassenströme (2.20) sowie zusätzlich die Zwangsbedingung

$$\sum_{\alpha=1}^n \hat{\rho}^\alpha = 0 , \quad (2.79)$$

d. h. Massenaustauschprozesse innerhalb der Mischung heben sich gegenseitig auf.

2.4.2 Impulsbilanz

Aus der globalen Form der Impulsbilanz für die Mischung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{T} \, da + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \, dv \quad (2.80)$$

erhält man unter Verwendung der Massenbilanz die lokale Aussage

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} , \quad (2.81)$$

wobei für die äußere Volumenkraft infolge Fernwirkung üblicherweise *a priori* $\rho \mathbf{b}$ als Gravitation eingeführt wird.

Die globale Impulsbilanz für eine Konstituierende lautet:

$$\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \, dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{T}^\alpha \, da + \int_{\mathcal{B}} \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha \, dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{s}}^\alpha \, dv , \quad (2.82)$$

wobei $\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$ die äußere Volumenkraft auf φ^α ist, und $\hat{\mathbf{s}}^\alpha$ die Impulsproduktion ist, die sich als innere Interaktionskraft der restlichen Konstituierenden auf φ^α interpretieren läßt. Unter Berücksichtigung der Massenbilanz für φ^α läßt sich die Impulsbilanz für φ^α in der lokalen Form

$$\rho^\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \operatorname{div} \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha \quad (2.83)$$

angeben. Die gesamte Impulsproduktion $\hat{\mathbf{s}}^\alpha$ läßt sich in einen direkten Anteil $\hat{\mathbf{p}}^\alpha$ und einen Anteil aus der Dichteproduktion zerlegen:

$$\hat{\mathbf{s}}^\alpha = \hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha . \quad (2.84)$$

Durch Vergleich mit den allgemeinen Bilanzgleichungen (2.70) bzw. (2.72) findet man für die mechanische Größe, den Flußtensor, die Zufuhr und die Produktion:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi} &= \rho \dot{\mathbf{x}} , & \boldsymbol{\Phi} &= \mathbf{T} , & \boldsymbol{\sigma} &= \rho \mathbf{b} , & \hat{\boldsymbol{\psi}} &= \mathbf{0} , \\ \boldsymbol{\psi}^\alpha &= \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha , & \boldsymbol{\Phi}^\alpha &= \mathbf{T}^\alpha , & \boldsymbol{\sigma}^\alpha &= \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha , & \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha &= \hat{\mathbf{s}}^\alpha . \end{aligned} \quad (2.85)$$

Durch Summation der Impulsbilanzen der Konstituierenden und Vergleich mit der Impulsbilanz der gesamten Mischung erhält man einen Zusammenhang für die Volumenkraftdichte

$$\rho \mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha \quad (2.86)$$

und für den *Cauchy*schen Spannungstensor

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^n (\mathbf{T}^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\alpha) . \quad (2.87)$$

Der gesamte Spannungszustand setzt sich demnach aus der Summe der partialen Spannungstensoren \mathbf{T}^α sowie aus durch Diffusion verursachten Spannungseinflüssen zusammen. Die Summe der partialen Spannungstensoren wird auch als innerer Anteil des Spannungstensors \mathbf{T} bezeichnet. Der durch Diffusion verursachte Anteil der Gesamtspannungstensors ist für jede Konstituierende vergleichbar mit der *Reynolds*-Spannung bei der turbulenten Strömung eines Einphasenfluids.

Als Zwangsbedingung für die Impulsproduktionsterme erhält man

$$\sum_{\alpha=1}^n \hat{\mathbf{s}}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^n (\hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha) = \mathbf{0} . \quad (2.88)$$

2.4.3 Drallbilanz

Auf eine detaillierte Darstellung der Drallbilanz wird in dieser Arbeit verzichtet, stattdessen sei auf *de Boer & Ehlers* [9] verwiesen. Die Auswertung der Drallbilanz für die Mischung φ liefert als bekanntes Ergebnis die Symmetrie des *Cauchy'schen* Spannungstensors

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T . \quad (2.89)$$

Betrachtet man die Drallbilanz für eine Konstituierende φ^α , so muß eine Drallkopplung zwischen den Konstituierenden zugelassen werden. Nach Auswertung der lokalen Drallbilanz findet man

$$(\mathbf{T}^\alpha)^T = \mathbf{T}^\alpha + \hat{\mathbf{M}}^\alpha , \quad (2.90)$$

wobei $\hat{\mathbf{M}}^\alpha$ der schiefsymmetrische Drallkopplungstensor ist. Die Partialspannungen \mathbf{T}^α sind also nur für $\hat{\mathbf{M}}^\alpha = \mathbf{0}$ symmetrische Tensoren. Die prinzipiell mögliche Unsymmetrie von \mathbf{T}^α ist die Folge des Drallkopplungsprozesses zwischen den Konstituierenden und nicht mit der Einführung von unsymmetrischen Spannungstensenoren innerhalb einer *Cosserat*-Theorie vergleichbar.

Anmerkung: Da in dieser Arbeit nur nicht-polare Konstituierenden betrachtet werden sollen und sich die einzelnen Komponenten in ihrem Mikrobereich prinzipiell wie ein Einkomponentenmodell verhalten, wird im weiteren ein verschwindender Drallkopplungstensor $\hat{\mathbf{M}}^\alpha$ vorausgesetzt. Daraus ergibt sich die Symmetrie des partialen *Cauchy'schen* Spannungstensors \mathbf{T}^α und damit auch die Symmetrie von \mathbf{S}^α und $\boldsymbol{\tau}^\alpha$. Der partiale *1. Piola-Kirchhoff*-Spannungstensor \mathbf{P}^α hingegen ist im allgemeinen unsymmetrisch.

Hassanizadeh & Gray führen in [36] eine detaillierte Untersuchung der Mikrostruktur nicht-polarer Materialien durch Mittelwertbildung auf der Mikroskala durch und folgern daraus die Symmetrie des *Cauchy'schen* Spannungstensors \mathbf{T}^α . Grundlegende Konzepte zur Behandlung mehrphasiger mikropolarer Materialien werden bei *Diebels & Ehlers* [22] behandelt.

2.4.4 Energiebilanz

Als weitere stoffunabhängige Gleichung in der Kontinuumsmechanik tritt die Energiebilanz auf. Die lokale Form der Energiebilanz für die Mischung lautet:

$$\rho \dot{\varepsilon} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r , \quad (2.91)$$

wobei ε die spezifische innere Energie, \mathbf{q} der Wärmezufußvektor infolge äußerer Nahwirkung und r die Wärmezufuhr infolge äußerer Fernwirkung ist.

Die lokale Form der Energiebilanz für eine Konstituierende findet man zu

$$\rho^\alpha (\varepsilon^\alpha)'_\alpha = \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{L}_\alpha - \operatorname{div} \mathbf{q}^\alpha + \rho^\alpha r^\alpha + \hat{\varepsilon}^\alpha . \quad (2.92)$$

Hierbei sind ε^α , \mathbf{q}^α und r^α die entsprechenden Partialgrößen der Konstituierenden φ^α . Die gesamte Energieproduktion \hat{e}^α beinhaltet den Energietransfer zwischen einer Konstituierenden φ^α und den restlichen Konstituierenden der Mischung. Sie enthält einen direkten Anteil $\hat{\varepsilon}^\alpha$, einen Anteil aus direkter Impulsproduktion und einen Anteil, der aus Dichteproduktion resultiert:

$$\hat{e}^\alpha = \hat{\varepsilon}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \hat{\rho}^\alpha \left(\varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha \right). \quad (2.93)$$

Aus einem Vergleich der Bilanzgleichungen der Summe der Konstituierenden mit der Energiebilanz der Mischung als Ganzes erhält man die folgenden Aussagen für die innere Energie, den Wärmezuflußvektor und die Wärmequelle der Mischung:

$$\begin{aligned} \rho \varepsilon &= \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha \left(\varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha \right), \\ \mathbf{q} &= \sum_{\alpha=1}^n \left(\mathbf{q}^\alpha - (\mathbf{T}^\alpha)^T \mathbf{d}_\alpha + \rho^\alpha \varepsilon^\alpha \mathbf{d}_\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha (\mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha) \mathbf{d}_\alpha \right), \\ \rho r &= \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha (r^\alpha + \mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Die innere Energie $\rho \varepsilon$ setzt sich demzufolge aus einem inneren Anteil (Summe der Partialgrößen) und der Summe der kinetischen Diffusionsenergien aller Konstituierenden zusammen. Der Wärmezuflußvektor \mathbf{q} des Mischungskörpers φ wird gebildet aus der Summe der partialen Wärmezuflüsse der Konstituierenden, Zuflüsse infolge Diffusionsarbeit der partialen Kontaktkräfte sowie Zuflußvektoren der durch Diffusion erzeugten inneren und kinetischen Energie. Die Wärmequelle ρr setzt sich zusammen aus einem inneren Anteil und der Summe der Diffusionsarbeiten der äußeren Volumenkräfte.

Aus dem Vergleich der Energiebilanz der Mischung als Ganzes mit der Summe der Bilanzgleichungen der Konstituierenden erhält man weiterhin eine Zwangsbedingung für die Energieproduktionsgrößen:

$$\sum_{\alpha=1}^n \hat{e}^\alpha = 0. \quad (2.95)$$

2.4.5 Entropiebilanz

In der Literatur wurde lange über die richtige Form der Entropiebilanz für Mischungen diskutiert. Die Forderung, daß die Entropieproduktion für eine Phase niemals negativ sein darf, ist zwar hinreichend aber nicht notwendig, da sie zu einer sehr starken, einschränkenden Restriktion an die Konstitutivgleichungen führt. Durch die

Forderung, daß die Entropieproduktion einer Mischung niemals negativ sein darf, ergibt sich die Form einer Entropieungleichung für die gesamte Mischung. Korrekte Formen der Entropieungleichung für Mischungen wurden erstmals von *Bowen* [11] und *Müller* [49] angegeben. Eine ausführliche Diskussion der Entropieungleichung sowie deren geschichtliche Entwicklung ist bei *de Boer & Ehlers* [9] sowie *Ehlers* [24] zu finden.

Das Entropieprinzip für eine Mischung kann in der folgenden Form

$$\sum_{\alpha=1}^n \left[\rho^\alpha (\eta^\alpha)'_\alpha + \hat{\rho}^\alpha \eta^\alpha + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\Theta^\alpha} \mathbf{q}^\alpha \right) - \frac{1}{\Theta^\alpha} \rho^\alpha r^\alpha \right] \geq 0 \quad (2.96)$$

dargestellt werden, wobei mit η^α die spezifische Entropie und mit Θ^α die absolute *Kelvinsche* Temperatur einer Phase φ^α bezeichnet wird. Unterschiedliche Temperaturen der φ^α innerhalb einer Mischung sind allerdings in der Regel nur für sehr kurze Zeiten möglich, deshalb ist es häufig gerechtfertigt, von einer gemeinsamen Temperatur $\Theta^\alpha \equiv \Theta$ aller Konstituierenden auszugehen.

Zur Auswertung der Entropieungleichung ist es üblich, die freie *Helmholtzsche* Energie einer Konstituierenden, in Analogie zur *Legendre*-Transformation bei Einphasenmaterialien, einzuführen. Die freie *Helmholtzsche* Energie einer Konstituierenden wird dann durch

$$\psi^\alpha = \varepsilon^\alpha - \Theta^\alpha \eta^\alpha \quad (2.97)$$

definiert.

Kapitel 3

Das inkompressible Zweiphasenmodell

In diesem Kapitel werden die Modellgleichungen für ein fluidgesättigtes poröses Festkörperskelett zusammengestellt. Dabei wird ein Zweiphasenmodell betrachtet, das aus einer elastisch deformierbaren Festkörpermatrix φ^S (**S**olid) und einer viskosen Porenflüssigkeit φ^F (**F**luid) besteht. Beide Konstituierenden werden als materiell inkompressibel betrachtet. Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß die Begriffe „Phase“ und „Konstituierende“ in dieser Arbeit synonym verwendet werden.

Die Kompressibilität des Matrixmaterials ist bei nahezu allen realen porösen Festkörpern wesentlich geringer als die Kompressibilität des Porenraums. Insofern ist die Annahme einer materiell inkompressiblen Festkörperkonstituierenden gerechtfertigt. Viele Flüssigkeiten können im Bereich moderater Drücke ebenfalls als inkompressibel betrachtet werden. Die materielle Inkompressibilität der Konstituierenden φ^α ($\alpha \in S, F$) auf der Mikroebene (die realistischen Dichten ρ^{SR} und ρ^{FR} sind konstant) bedingt allerdings keine makroskopische Inkompressibilität. Die Partialdichten ρ^α der Konstituierenden können sich immer noch durch Änderungen der Volumenanteile n^α ändern. Massenaustauschprozesse zwischen dem Festkörper und der Flüssigkeit (infolge Phasenumwandlung bzw. chemischer Reaktionen) werden bei den weiteren Betrachtungen ausgeschlossen. Weiterhin wird von einem isothermen Prozeßverlauf ausgegangen, die Wirkung von Trägheitskräften wird vernachlässigt. Durch die Vernachlässigung der Trägheitskräfte wird die Behandlung von Wellenausbreitungs- bzw. Schwingungsproblemen ausgeschlossen.

Ausgehend von der in Kapitel 2 vorgestellten Beschreibung eines Mehrphasenkontinuums werden die kinematischen Beziehungen und die Bilanzgleichungen für das Zweiphasenmodell angegeben. Die Auswertung der Entropieungleichung unter den getroffenen Annahmen liefert Restriktionen bei der Aufstellung von Konstitutivgleichungen. Unter Berücksichtigung zusätzlicher Annahmen und Vereinfachungen können dann die Konstitutivgleichungen für ein inkompressibles Zweiphasenmodell angegeben werden.

3.1 Kinematik

Zur Beschreibung der Bewegung des Festkörpers (Index S) wird eine *Lagrangesche* (materielle) Darstellungsweise gewählt. Dazu wird der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{x} - \mathbf{X}_S \quad (3.1)$$

eingeführt. Für die Festkörperverschiebungsgeschwindigkeit ergibt sich dann

$$(\mathbf{u}_S)'_S = \dot{\mathbf{x}}_S \quad (3.2)$$

Die Bewegung des Porenfluids (Index F) wird mit einer modifizierten *Eulerschen* (feldlichen) Darstellung durch die Sickergeschwindigkeit

$$\mathbf{w}_F = \dot{\mathbf{x}}_F - \dot{\mathbf{x}}_S \quad (3.3)$$

beschrieben. Die Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_F stellt die Geschwindigkeit des Porenfluids relativ zum sich deformierenden Festkörperskelett dar.

Entsprechend den in Kapitel 2.2 eingeführten Definitionen lassen sich der materielle Deformationsgradient des Festkörpers

$$\mathbf{F}_S = \text{Grad}_S \mathbf{x} = \mathbf{I} + \text{Grad}_S \mathbf{u}_S \quad (3.4)$$

sowie dessen *Jacobische* Determinante

$$J_S = \det \mathbf{F}_S \quad (3.5)$$

eingeführen. Den rechten bzw. linken *Cauchy-Green-Deformationstensor* erhält man dann zu

$$\mathbf{C}_S = \mathbf{F}_S^T \mathbf{F}_S, \quad \mathbf{B}_S = \mathbf{F}_S \mathbf{F}_S^T. \quad (3.6)$$

Den *Greenschen* Verzerrungstensor sowie den *Almansischen* Verzerrungstensor findet man zu

$$\mathbf{E}_S = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_S - \mathbf{I}), \quad \mathbf{A}_S = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_S^{-1}). \quad (3.7)$$

3.1.1 Spektrale Zerlegung der Festkörperdeformation

In einigen Materialgesetzen zur Beschreibung der Festkörperdeformation wird von der spektralen Zerlegung der Deformationstensoren Gebrauch gemacht. Da nur eine Zerlegung der Festkörperdeformation von Interesse ist, und bei den entstehenden Größen häufig noch Zählindizes ($i = 1, 2, 3$) auftreten, wird zur besseren Übersicht bei den im folgenden eingeführten Invarianten, Eigenwerten und Eigenvektoren bzw. Eigentensoren auf den Index S zur Kennzeichnung der Festkörperphase verzichtet.

Die drei Grundinvarianten der Deformationstensoren \mathbf{C}_S bzw. \mathbf{B}_S sind durch

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbf{C}_S \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{I} , \\ I_2 &= \frac{1}{2} (I_1^2 - \mathbf{C}_S^T \cdot \mathbf{C}_S) &= \frac{1}{2} (I_1^2 - \mathbf{B}_S^T \cdot \mathbf{B}_S) , \\ I_3 &= \det \mathbf{C}_S &= \det \mathbf{B}_S = J_S^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

definiert. Die Grundinvarianten beider Deformationstensoren stimmen überein.

Aus der charakteristischen Gleichung

$$\det (\mathbf{C}_S - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \det (\mathbf{B}_S - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (3.9)$$

zur Bestimmung der Eigenwerte λ der Deformationstensoren \mathbf{C}_S bzw. \mathbf{B}_S erhält man das charakteristische Polynom

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 . \quad (3.10)$$

Hiermit können die reellen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bestimmt werden. Eigenwerte von \mathbf{C}_S sind auch Eigenwerte von \mathbf{B}_S . Eine geschlossene Lösung von (3.10) ist durch die *Cardanosche* Formel möglich ($i = 1, 2, 3$):

$$\lambda_i = \frac{1}{3} \left\{ I_1 + 2 \sqrt{I_1^2 - 3 I_2} \cos \left[\frac{1}{3} (\theta + 2 \pi i) \right] \right\} , \quad (3.11)$$

mit

$$\theta = \arccos \frac{2 I_1^3 - 9 I_1 I_2 + 27 I_3}{2 (I_1^2 - 3 I_2)^{3/2}} . \quad (3.12)$$

Die berechneten Eigenwerte der *Cauchy-Greenschen* Deformationstensoren sind die Quadrate der Hauptstreckungen (Eigenwerte von \mathbf{F}_S). Da es im weiteren genügt, die Eigenwerte der Deformationstensoren zu betrachten, werden die Hauptstreckungen formelmäßig nicht eingeführt.

Es läßt sich nun eine spektrale Zerlegung der Deformationstensoren in Eigenwerte und dazugehörige Eigentensoren \mathbf{M}_i (Referenzkonfiguration) bzw. \mathbf{N}_i (Momentan-konfiguration) durchführen:

$$\mathbf{C}_S = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{M}_i , \quad \mathbf{B}_S = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i . \quad (3.13)$$

Die Eigentensoren werden jeweils aus dem dyadischen Produkt der orthonormierten Eigenvektoren gebildet (keine Summation über i):

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i , \quad \mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i . \quad (3.14)$$

Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaft ist keine Unterscheidung in ko- und kontravariante Eigenvektoren bzw. Eigentensoren notwendig. Der Deformationsgradient läßt sich mit Hilfe der Eigenvektoren durch

$$\mathbf{F}_S = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{m}_i \quad (3.15)$$

darstellen, woraus sofort der in Kapitel 2.2 erwähnte Zweifeldcharakter des Deformationsgradienten ersichtlich wird.

Morman zeigt in [48], daß die Eigentensoren direkt, ohne explizite Berechnung der Eigenvektoren, aus den Beziehungen

$$\mathbf{M}_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{(\mathbf{C}_S - \lambda_j \mathbf{I})}{(\lambda_i - \lambda_j)}, \quad \mathbf{N}_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{(\mathbf{B}_S - \lambda_j \mathbf{I})}{(\lambda_i - \lambda_j)} \quad (3.16)$$

gewonnen werden können.

Für den Fall eines ebenen Problems (ebener Verzerrungszustand, Rotationssymmetrie) vereinfacht sich die analytische Berechnung der Eigenwerte und die Berechnung der Eigentensoren erheblich, siehe z. B. *Miehe* [45]. Der Deformationstensor \mathbf{B}_S läßt sich dann in einen ebenen Anteil \mathbf{B}_S^{eben} und einen dazu senkrechten Anteil zerlegen:

$$\mathbf{B}_S = \mathbf{B}_S^{eben} + \lambda_3 \mathbf{N}_3, \quad (3.17)$$

wobei $\mathbf{N}_3 = \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3$ ein bekannter konstanter Eigentensor ist, dessen zugehöriger Eigenvektor \mathbf{n}_3 senkrecht auf der betrachteten Ebene steht. Die Eigenwerte λ_1 und λ_2 des ebenen Anteils $\mathbf{B}_S^{eben} = \lambda_1 \mathbf{N}_1 + \lambda_2 \mathbf{N}_2$ lassen sich aus einer einfachen quadratischen Gleichung bestimmen. Die Eigentensoren erhält man mit

$$\mathbf{N}_1 = \frac{\mathbf{B}_S - \lambda_2 \mathbf{I} - (\lambda_3 - \lambda_2) \mathbf{I}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_3. \quad (3.18)$$

Analoges gilt für die Zerlegung von \mathbf{C}_S .

Die Beziehung (3.16) bzw. (3.18) zur Berechnung der Eigentensoren gilt nur für den Fall unterschiedlicher Eigenwerte. Für den Fall doppelter oder dreifacher Eigenwerte können die Eigentensoren auch mittels spezieller Lösungen für diese Sonderfälle berechnet werden, siehe *Simo & Taylor* [63], *Barthold* [3]. Innerhalb einer numerischen Berechnung erweist es sich jedoch als wesentlich effizienter, gleiche Eigenwerte durch eine numerische Störung im Rahmen einer vorgegebenen Toleranz auf den allgemeinen Fall unterschiedlicher Eigenwerte zurückzuführen, siehe *Miehe* [45, 46].

Aufgrund der Orthonormalität der Eigentensoren gelten die folgenden Beziehungen:

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i = \mathbf{I}, \quad \mathbf{N}_i \mathbf{B}_S = \mathbf{B}_S \mathbf{N}_i = \lambda_i \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j = \delta_{ij}, \quad (3.19)$$

wobei δ_{ij} das *Kronecker-Symbol* ist. Entsprechendes gilt für \mathbf{M}_i . Hiermit lassen sich allgemeine Beziehungen für Tensorpotenzen herleiten ($m \in \mathbb{R}$):

$$(\mathbf{C}_S)^m = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^m \mathbf{M}_i, \quad (\mathbf{B}_S)^m = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^m \mathbf{N}_i. \quad (3.20)$$

3.2 Stoffunabhängige Grundgleichungen

Die Sättigungsbedingung für das Zweiphasenmodell lautet

$$n^S + n^F = 1 . \quad (3.21)$$

Durch Bilden der materiellen Zeitableitung von n^F bezüglich der Festkörper- und der Fluidbewegung erhält man die Beziehung

$$(n^F)'_F - (n^F)'_S = \text{grad } n^F \cdot (\dot{\mathbf{x}}_F - \dot{\mathbf{x}}_S) = \text{grad } n^F \cdot \mathbf{w}_F . \quad (3.22)$$

Unter Voraussetzung von materiell inkompressiblen Konstituierenden ($\rho^{SR} = \text{konst.}$, $\rho^{FR} = \text{konst.}$) und unter Ausschluß von Massenaustauschprozessen ($\hat{\rho}^\alpha = 0$) reduziert sich die Massenbilanz (2.78) zu einer Volumenbilanz ($\alpha \in S, F$):

$$(n^\alpha)'_\alpha + n^\alpha \text{div } \dot{\mathbf{x}}_\alpha = 0 . \quad (3.23)$$

Durch Integration der Volumenbilanz für die Festkörperphase kann der Festkörpervolumenanteil direkt durch

$$n^S = \det \mathbf{F}_S^{-1} n_{0S}^S = \frac{1}{J_S} n_{0S}^S \quad (3.24)$$

angegeben werden, wobei n_{0S}^S den Anfangsvolumenanteil des Festkörpers bezüglich der Festkörperreferenzkonfiguration bezeichnet.

Die Kombination der Volumenbilanzen für die Festkörper- und die Fluidphase ergibt zusammen mit der Sättigungsbedingung und der Beziehung (3.22) die Volumenbilanz des Zweiphasenmodells:

$$\text{div} (n^F \mathbf{w}_F + (\mathbf{u}_S)'_S) = 0 . \quad (3.25)$$

Diese Gleichung stellt eine Zwangsbedingung an die Mischung dar.

Unter Annahme quasi-statischer Prozesse (Trägheitsterme $\rho^\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha$ entfallen) lautet die Impulsbilanz einer Konstituierenden φ^α

$$\text{div } \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}^\alpha = \mathbf{0} , \quad (3.26)$$

wobei hier davon ausgegangen wird, daß auf beide Konstituierende φ^S und φ^F dieselbe eingeprägte Beschleunigung (Erdbeschleunigung) wirkt ($\mathbf{b} = \mathbf{b}^S = \mathbf{b}^F$). Für die Behandlung dynamischer Effekte sei auf *Diebels & Ehlers* [21] sowie *Widjajakusuma* [71] verwiesen. Im Fall des Zweiphasenmodells läßt sich der Impulsproduktionsterm $\hat{\mathbf{p}}^\alpha$ direkt als volumenbezogene lokale Interaktionskraft zwischen dem Festkörper und der Porenflüssigkeit interpretieren. Entsprechend der allgemeinen Impulsbilanz (2.88) lautet die Zwangsbedingung für die Interaktionskraft

$$\hat{\mathbf{p}}^S + \hat{\mathbf{p}}^F = \mathbf{0} . \quad (3.27)$$

Wie bereits in Kapitel 2.4.3 dargestellt, liefert die Drallbilanz unter Voraussetzung nicht-polarer Konstituierender die Symmetrie der *Cauchy*schen Spannungstensoren:

$$\mathbf{T}^S = (\mathbf{T}^S)^T, \quad \mathbf{T}^F = (\mathbf{T}^F)^T. \quad (3.28)$$

Auf die Auswertung der Energiebilanz wird hier verzichtet, da im weiteren von isothermer Prozeßführung ausgegangen wird.

3.3 Konstitutivgleichungen

Zur Lösung konkreter Problemstellungen muß der Satz der stoffunabhängigen Gleichungen um konstitutive Ansätze für die Partialspannungen \mathbf{T}^S , \mathbf{T}^F und den Interaktionsterm $\hat{\mathbf{p}}^F = -\hat{\mathbf{p}}^S$ ergänzt werden.

3.3.1 Auswertung der Entropiegleichung

Unter Berücksichtigung der bekannten Prinzipie der rationalen Thermodynamik (Determinismus, Äquipräsenz, lokale Wirkungen, Bezugsinvarianz, Dissipation), siehe *Truesdell & Toupin* [67] sowie *Truesdell & Noll* [68], lassen sich aus der Entropiegleichung der Mischung thermodynamische Restriktionen herleiten, die den Rahmen für die Menge der zulässigen konstitutiven Gleichungen bilden. Im weiteren wird von einer gemeinsamen Temperatur von Festkörper und Fluid ausgegangen, die sich aufgrund der angenommenen isothermen Verhältnisse nicht ändert ($\dot{\Theta} = 0$). Außerdem wird eine homogene Temperaturverteilung vorausgesetzt ($\text{grad } \Theta = \mathbf{0}$). Dadurch reduziert sich die allgemeine Form (2.96) der Entropiegleichung erheblich.

Durch materielle Zeitableitung der Sättigungsbedingung ergibt sich unter Berücksichtigung von (3.22) und der Volumenbilanzen (3.23) für φ^S und φ^F eine Zwangsbedingung zur Gewährleistung der Sättigungs- und Inkompressibilitätsforderung:

$$n^S \text{div } \dot{\mathbf{x}}_S + n^F \text{div } \dot{\mathbf{x}}_F + \text{grad } n^F \cdot \mathbf{w}_F = 0. \quad (3.29)$$

Diese Zwangsbedingung wird mit einem *Lagrange*-Multiplikator p in die Entropiegleichung für das Zweiphasenmodell eingebracht und man erhält:

$$\begin{aligned} & -\rho^F (\psi^F)'_F - \rho^S (\psi^S)'_S + (\mathbf{T}^F + n^F p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{L}_F \\ & + (\mathbf{T}^S + n^S p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{L}_S - (\hat{\mathbf{p}}^F - p \text{grad } n^F) \cdot \mathbf{w}_F \geq 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Partialspannungen \mathbf{T}^S und \mathbf{T}^F sowie die Impulsproduktion $\hat{\mathbf{p}}^F$ aufgrund der Forderung nach materieller Inkompressibilität nur bis auf einen gewissen Anteil bestimmbar sind. Dies legt die Einführung sogenannter Extragrößen (Index $_E$) nahe,

$$\mathbf{T}_E^S = \mathbf{T}^S + n^S p \mathbf{I}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{T}_E^F = \mathbf{T}^F + n^F p \mathbf{I}, \quad (3.32)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_E^F = \hat{\mathbf{p}}^F - p \text{grad } n^F, \quad (3.33)$$

für die konstitutive Ansätze gefunden werden müssen. Die Festkörperextraspansung \mathbf{T}_E^S wird nach *Terzaghi* [65] häufig auch als effektive Spannung bezeichnet.

Geht man weiterhin davon aus, daß die freien Energiefunktionen ψ^S und ψ^F Potentialcharakter haben (es besteht keine explizite Zeitabhängigkeit), so lassen sich die in der Entropieungleichung auftretenden materiellen Zeitableitungen $(\psi^S)'_S$ und $(\psi^F)'_F$ durch die Kettenregel auflösen. Die Auswertung der Entropieungleichung für beliebige zulässige Prozesse in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts nach der Methode von *Coleman & Noll* [19] liefert Restriktionen für zulässige Ansätze der Auswirkungsfunktionen für \mathbf{T}_E^S , \mathbf{T}_E^F und $\hat{\mathbf{p}}^F$.

3.3.2 Ergebnisse

In einem vereinfachten Modell, siehe *Ehlers* [24, 26], wird vom Prinzip der Phasentrennung ausgegangen. Dies bedingt, daß die freie Energiefunktion des Festkörpers nur von der Festkörperdeformation abhängen darf:

$$\psi^S = \psi^S(\mathbf{F}_S) . \quad (3.34)$$

Die daraus resultierenden Ergebnisse der Konstitutivtheorie sind im folgenden kurz dargestellt. Für Details sei auf die angegebenen Literaturstellen verwiesen.

Der Extraanteil der Festkörperspannungen ergibt sich zu

$$\mathbf{T}_E^S = \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\mathbf{F}_S} \mathbf{F}_S^T , \quad (3.35)$$

was formal mit Ergebnissen der klassischen Festkörpermechanik übereinstimmt, siehe z. B. *Truesdell & Toupin* [67].

Unter der Annahme, daß sich das materiell inkompressible Fluid auch makroskopisch inkompressibel verhält (Vernachlässigung der Volumenviskosität), also keine effektive Volumendehnung erfährt, findet man für den Extraanteil der Fluidspannungen

$$\mathbf{T}_E^F = 2 \mu^F \mathbf{D}_F^D , \quad (3.36)$$

wobei μ^F die Scherviskosität des Fluids ist und \mathbf{D}_F^D den deviatorischen Anteil des Deformationsgeschwindigkeitstensors kennzeichnet. In vielen Anwendungsfällen ist aber der Einfluß der Zähigkeitskraft $\mathbf{z}^F = \operatorname{div} \mathbf{T}_E^F$ sehr gering. Dies führt zu der häufig angewandten Vorgehensweise, die Fluidextraspansung *a priori* zu vernachlässigen:

$$\mathbf{T}_E^F \approx \mathbf{0} . \quad (3.37)$$

Hiervon wird im weiteren ausgegangen. Die innere Reibung zwischen dem porösen Festkörperskelett und der viskosen Porenflüssigkeit wird durch den Impulsaustauschterm $\hat{\mathbf{p}}_E^F$ erfaßt.

Für den Extraanteil der volumenbezogenen Interaktionskraft erhält man

$$\hat{\mathbf{p}}_E^F = -\frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{S}_v \mathbf{w}_F, \quad (3.38)$$

wobei $\gamma^{FR} = \rho^{FR} |\mathbf{b}|$ die reale Wichte der Porenflüssigkeit und k^F der sogenannte *Darcysche* Permeabilitätsparameter ist. Durch den zweistufigen, positiv definiten Tensor \mathbf{S}_v wird der Einfluß anisotroper Permeabilitätseigenschaften erfaßt. Im Falle isotroper Permeabilitätseigenschaften ist $\mathbf{S}_v = \mathbf{I}$ und man erhält

$$\hat{\mathbf{p}}_E^F = -\frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{w}_F. \quad (3.39)$$

Der *Darcy*-Parameter (Dimension: m/s) ist ein makroskopischer Parameter und hängt sowohl von der Größe und der Struktur des Porenraums als auch von der Viskosität der Porenflüssigkeit ab. Die Permeabilitätseigenschaften, die mit k^F und \mathbf{S}_v berücksichtigt werden, können im allgemeinen deformationsabhängig sein.

Weiterhin läßt sich der auftretende *Lagrange*-Multiplikator p als effektiver Porenfluiddruck interpretieren.

Zusammenfassend erhält man für die Partialspannungen und die Interaktionskraft:

$$\mathbf{T}^S = -n^S p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S \quad \text{mit} \quad \mathbf{T}_E^S = \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\mathbf{F}_S} \mathbf{F}_S^T, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{T}^F = -n^F p \mathbf{I}, \quad (3.41)$$

$$\hat{\mathbf{p}}^F = p \text{grad } n^F - \frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{S}_v \mathbf{w}_F. \quad (3.42)$$

3.4 Hyperelastisches Festkörperskelett

Bei der Modellierung des Festkörperskeletts wird von einem hyperelastischen Materialverhalten des Matrixmaterials ausgegangen. Der aktuelle Extraspannungszustand hängt somit nur vom aktuellen Deformationszustand ab. Entsprechend (3.35) lassen sich die Extraspannungen durch Ableitung der Potentialfunktion $\psi^S(\mathbf{F}_S)$ berechnen. Zum Begriff der Hyperelastizität sei z. B. auf *Truesdell & Noll* [68], *Ogden* [53], *Beatty* [6] verwiesen.

Im weiteren wird davon ausgegangen, daß eine hyperelastische Verzerrungsenergiefunktion (Funktion der gespeicherten elastischen Energie) für das Matrixmaterial des Festkörperskeletts existiert, die durch

$$W^S = \rho_{0S}^S \psi^S, \quad (3.43)$$

definiert ist. Hierbei stellt $\rho_{0S}^S = n_{0S}^S \rho^{SR}$ die Partialdichte des Festkörpermateriale bezüglich dessen Referenzkonfiguration dar.

3.4.1 Objektivität und Isotropie

Aufgrund der Forderung nach materieller Objektivität (Bezugsinvarianz) darf die Verzerrungsenergie nicht vom Deformationsgradienten \mathbf{F}_S selbst, sondern speziell vom rechten *Cauchy-Green-Deformationstensor* \mathbf{C}_S abhängen, so daß gilt:

$$W^S = W^S(\mathbf{C}_S) . \quad (3.44)$$

Aus der Forderung nach Isotropie (Sonderfall der materiellen Symmetrie) der Festkörperkonstituierenden erhält man eine Abhängigkeit der Verzerrungsenergie vom linken *Cauchy-Green-Deformationstensor* \mathbf{B}_S , so daß gilt:

$$W^S = W^S(\mathbf{B}_S) . \quad (3.45)$$

Für die Herleitung dieser Beziehungen sei auf die angegebenen Literaturstellen zur Hyperelastizität verwiesen.

Damit die Forderungen nach Objektivität und Isotropie gleichzeitig erfüllt werden können, darf die Verzerrungsenergiefunktion nur noch von den Invarianten I_1, I_2, I_3 bzw. den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der *Cauchy-Green-Deformationstensoren* abhängen:

$$W^S = \hat{W}^S(I_1, I_2, I_3) = \tilde{W}^S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) , \quad (3.46)$$

bzw. von daraus abgeleiteten Größen.

Aus physikalischen Gründen muß der undeformierte Zustand ($\mathbf{E}_S = \mathbf{0}$) spannungsfrei sein ($\mathbf{T}_E^S = \mathbf{0}$) und darf keine gespeicherte elastische Energie enthalten ($W^S = 0$). Außerdem muß für jeden Deformationszustand $\mathbf{E}_S \neq \mathbf{0}$ Energie aufgewandt werden, so daß die Forderung $W^S \geq 0$ besteht. Anschaulich läßt sich dies als „Potentialtopf“ interpretieren.

Konkrete Formen für Verzerrungsenergiefunktionen werden in Kapitel 4 vorgestellt sowie deren Eigenschaften untersucht. Auf weitere physikalische Forderungen an W^S , insbesondere für finite Deformationen in porösen Festkörpern, wird in Kapitel 5 eingegangen.

3.4.2 Spannungstensoren

Für den *Cauchy*schen Extraspannungstensor erhält man entsprechend (3.35)

$$\mathbf{T}_E^S = \rho^S \frac{\partial \psi^S}{\partial \mathbf{F}_S} \mathbf{F}_S^T = \frac{1}{J_S} \frac{\partial W^S}{\partial \mathbf{F}_S} \mathbf{F}_S^T , \quad (3.47)$$

woraus man unter Berücksichtigung der Rechenregeln der Tensorrechnung für den *Kirchhoff*schen Extraspannungstensor ($\boldsymbol{\tau}_E^S = J_S \mathbf{T}_E^S$) findet:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_E^S &= \left(\frac{\partial \mathbf{C}_S}{\partial \mathbf{F}_S} \right)^T \frac{\partial W^S}{\partial \mathbf{C}_S} \mathbf{F}_S^T \\ &= \mathbf{F}_S \left(2 \frac{\partial W^S}{\partial \mathbf{C}_S} \right) \mathbf{F}_S^T . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dies stellt einen kovarianten Vorwärtstransport für den Extraanteils des 2. *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensors

$$\mathbf{S}_E^S = 2 \frac{\partial W^S}{\partial \mathbf{C}_S} = \frac{\partial W^S}{\partial \mathbf{E}_S} \quad (3.49)$$

dar. Der *Greensche* Verzerrungstensor \mathbf{E}_S ist die zu \mathbf{S}_E^S konjugierte Größe.

Eine alternative Berechnungsmöglichkeit für den *Kirchhoff*schen Extraspannungstensor erhält man zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_E^S &= \left(\frac{\partial \mathbf{B}_S}{\partial \mathbf{F}_S} \right)^T \frac{\partial W^S}{\partial \mathbf{B}_S} \mathbf{F}_S^T \\ &= 2 \frac{\partial W^S}{\partial \mathbf{B}_S} \mathbf{B}_S . \end{aligned} \quad (3.50)$$

3.4.3 Elastizitätstensoren

Über die Spannungsgeschwindigkeit des 2. *Piola-Kirchhoff*-Extraspannungstensors

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_E^S)'_S &= \frac{\partial \mathbf{S}_E^S}{\partial \mathbf{E}_S} (\mathbf{E}_S)'_S = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_E^S}{\partial \mathbf{C}_S} (\mathbf{E}_S)'_S \\ &=: \overset{4}{\mathbf{B}} (\mathbf{E}_S)'_S \end{aligned} \quad (3.51)$$

läßt sich der vierstufige Elastizitätstensor (elastischer Tangentenoperator) der Referenzkonfiguration definieren:

$$\overset{4}{\mathbf{B}} = \frac{\partial^2 W^S}{\partial \mathbf{E}_S \otimes \partial \mathbf{E}_S} = 4 \frac{\partial^2 W^S}{\partial \mathbf{C}_S \otimes \partial \mathbf{C}_S} . \quad (3.52)$$

Durch kovarianten Vorwärtstransport der Spannungsgeschwindigkeit $(\mathbf{S}_E^S)'_S$ in die Momentankonfiguration erhält man mit der Abkürzung

$$(\boldsymbol{\tau}_E^S)^\nabla := (\boldsymbol{\tau}_E^S)^\nabla_S \quad (3.53)$$

für die *Lie*-Ableitung eine Beziehung für den *Oldroydschen* Spannungsfluß:

$$(\boldsymbol{\tau}_E^S)^\nabla = \overset{4}{\mathbf{C}} \mathbf{D}_S . \quad (3.54)$$

Aus den Transportbeziehungen läßt sich der Elastizitätstensor der Momentankonfiguration durch einen kovarianten Vorwärtstransport in der Form

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = (\mathbf{F}_S \otimes \mathbf{F}_S)^{\overset{23}{T}} \overset{4}{\mathbf{B}} (\mathbf{F}_S^T \otimes \mathbf{F}_S^T)^{\overset{23}{T}} \quad (3.55)$$

berechnen, siehe *Ehlers* [25]. Hierbei kennzeichnet die Transposition $(\cdot)^{\overset{ik}{T}}$ einen Austausch der i -ten und der k -ten Basissysteme bei einem Tensor höherer Stufe.

Den Deformationsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D}_S erhält man durch einen kontravarianten Vorwärtstransport der Verzerrungsgeschwindigkeit $(\mathbf{E}_S)'_S$, siehe (2.60).

Die Elastizitätstensoren stellen außerdem einen Zusammenhang zwischen den Verzerrungsinkrementen und den Spannungsinkrementen in der Referenzkonfiguration her:

$$\Delta \mathbf{S}_E^S = \overset{4}{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{E}_S \quad . \quad (3.56)$$

Sie spielen deshalb eine ausgezeichnete Rolle bei der Linearisierung von Materialgesetzen.

In der geometrisch linearen Theorie wird ein Zusammenhang zwischen dem linearen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}_S = 1/2 (\text{Grad}_S \mathbf{u}_S + \text{Grad}_S^T \mathbf{u}_S)$ und dem linearisierten Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}_E^S \approx \mathbf{T}_E^S \approx \boldsymbol{\tau}_E^S$ durch

$$\boldsymbol{\sigma}_E^S = \overset{4}{\mathbf{B}}_{lin} \boldsymbol{\varepsilon}_S \quad (3.57)$$

hergestellt.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß sich nur in der geometrisch linearen Theorie die Spannungen direkt aus dem vierstufigen Elastizitätstensor berechnen lassen. Für den geometrisch nichtlinearen Fall erhält man lediglich eine Beziehung zwischen Verzerrungs- und Spannungsinkrementen. Die Spannungen selbst müssen aus einem Materialgesetz direkt berechnet werden. Der inkrementelle Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung wird z. B. bei der Berechnung der tangentialen Steifigkeitsmatrix im Rahmen der Finite-Elemente-Methode benötigt.

Anmerkung: Die direkte Berechnung des Spannungstensors und des Elastizitätstensors in der Momentankonfiguration durch Ableitung nach dem *Almansischen* Verzerrungstensors in der Form

$$\boldsymbol{\tau}_E^S = \frac{\partial W^S}{\partial \mathbf{A}_S} \quad (3.58)$$

und

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = \frac{\partial^2 W^S}{\partial \mathbf{A}_S \otimes \partial \mathbf{A}_S} \quad (3.59)$$

wird häufig auch als Erweiterung der *Doyle-Ericksen-Formeln* bezeichnet, siehe *Doyle & Ericksen* [23], *Marsden & Hughes* [44]. Der *Almansi-Tensor* \mathbf{A}_S stellt die zu $\boldsymbol{\tau}_E^S$ gehörige konjugierte Verzerrungsgröße dar. Da die Verzerrungsenergiefunktion im allgemeinen in Größen von \mathbf{C}_S bzw. \mathbf{B}_S definiert ist, wird diese direkte Berechnungsweise meist nicht konkret angewandt.

Anmerkung: *Miehe* zeigt in [46], daß der Elastizitätstensor der Referenzkonfiguration für isotropes Werkstoffverhalten auch direkt durch die Beziehung

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = 4 \left[\left(\mathbf{B}_S \frac{\partial^2 W^S}{\partial \mathbf{B}_S \otimes \partial \mathbf{B}_S} \right) \overset{4}{\mathbf{B}}_S \right] \overset{4}{\quad} \quad (3.60)$$

berechnet werden kann. Hierbei kennzeichnet $(\cdot)^4$, daß das Ergebnis der anzuwendenden Tensoroperationen einen vierstufigen Tensor ergibt.

3.5 Deformationsabhängige Permeabilität

Kombiniert man die Impulsbilanz (3.26) für das Fluid mit dem konstitutiven Ansatz (3.41) für die Fluidspannung \mathbf{T}^F und dem Ansatz (3.42) für die volumenbezogene Interaktionskraft $\hat{\mathbf{p}}^F$, so erhält man nach einigen Umformungen

$$n^F \mathbf{w}_F = -\mathbf{S}_v^{-1} \frac{k^F}{\gamma^{FR}} (\text{grad } p - \rho^{FR} \mathbf{b}) \quad (3.61)$$

und für den Fall isotroper Permeabilitätseigenschaften

$$n^F \mathbf{w}_F = -\frac{k^F}{\gamma^{FR}} (\text{grad } p - \rho^{FR} \mathbf{b}) . \quad (3.62)$$

Diese Beziehung ist in der Literatur als *Darcysches Filtergesetz* bekannt, siehe z. B. *Bear* [5], und wurde bereits 1856 von *Darcy* [20] aufgrund von experimentellen Beobachtungen in vereinfachter Form aufgestellt.

In der verallgemeinerten Form (3.61) bzw. (3.62) des Gesetzes wird ein Zusammenhang zwischen der Filtergeschwindigkeit ($n^F \mathbf{w}_F$), die ein Maß für die Durchflußrate durch ein poröses Medium ist, und dem (dimensionslosen) hydraulischen Gefälle $\mathbf{i} = -1/\gamma^{FR} (\text{grad } p - \rho^{FR} \mathbf{b})$ hergestellt. Die Gültigkeit des *Darcyschen* Gesetzes ist auf laminare Strömungen beschränkt. Im allgemeinen, insbesondere in Bereich großer Deformationen der Festkörpermatrix, zeigen der *Darcy-Parameter* k^F und der Tensor \mathbf{S}_v eine starke Deformationsabhängigkeit.

3.5.1 Deformationsabhängiger Durchlässigkeitsparameter

Bei der Berücksichtigung deformationsabhängiger Permeabilitätseigenschaften wird zunächst von isotropen Permeabilitätseigenschaften ausgegangen ($\mathbf{S}_v = \mathbf{I}$). In diesem Fall kann eine Abhängigkeit des *Darcy-Parameters* k^F von der Volumendehnung im Festkörperskelett und damit von der Porosität

$$n^F = 1 - n^S = 1 - \frac{1}{J_S} n_{0S}^S \quad (3.63)$$

angenommen werden. Die Durchflußmenge durch eine poröse Festkörpermatrix verringert sich, je kleiner das Porenvolumen wird. Demzufolge muß auch k^F abnehmen, wenn die Porosität n^F abnimmt. Wenn alle Poren geschlossen sind ($n^F = 0$), darf auch keine Durchströmung mehr erfolgen und der Wert des Durchlässigkeitsparameters k^F muß Null sein.

Dieses Verhalten muß durch eine deformationsabhängige Permeabilitätsfunktion modelliert werden. Dies kann mit einer Potenzfunktion der Form

$$k^F(n^F) = k_0^F \left(\frac{n^F}{n_{0S}^F} \right)^\kappa \quad (3.64)$$

geschehen. Dabei ist k_0^F die Anfangspermeabilität, die bei der Anfangsporosität $n_{0S}^F = 1 - n_{0S}^S$ auftritt. Mit dem positiven Parameter κ kann eine Gewichtung der Deformationsabhängigkeit vorgenommen werden. Für $\kappa = 0$ ist k^F konstant.

Alternativ zu dem hier vorgeschlagenen Ansatz verwenden *Lai & Mow* in [42] einen Exponentialansatz zur Berücksichtigung der deformationsabhängigen Permeabilität. Dieser Ansatz beruht auf experimentellen Ergebnissen an eindimensional flüssigkeitsdurchströmten Knorpelstrukturen. Er ist allerdings nur für den Bereich kleiner Volumendehformationen geeignet, da hier bei geschlossenen Poren immer noch eine Durchströmung der porösen Struktur möglich ist. *Holmes & Mow* [39] verändern diesen Ansatz dahingehend, daß auch große Volumendehnungen im Festkörperskelett möglich sind. Diese exponentielle Beziehung enthält zusätzlich zu den Größen k_0^F und n_{0S}^F zwei weitere Materialparameter, die aus Versuchen bestimmt werden müssen. Im Gegensatz dazu kommt die in dieser Arbeit vorgeschlagene Funktion $k^F(n^F)$ (3.64) mit *einem* zusätzlichen Parameter κ aus.

3.5.2 Anisotrope Permeabilitätseigenschaften

Mit der Definition des zweistufigen Permeabilitätstensors

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{S}_v^{-1} \quad (3.65)$$

lautet das *Darcysche* Filtergesetz

$$n^F \mathbf{w}_F = -\mathbf{K}_v \frac{k^F}{\gamma_{FR}} (\text{grad } p - \rho^{FR} \mathbf{b}) \quad , \quad (3.66)$$

wobei \mathbf{K}_v eine deformationsabhängige Größe sein kann. Sollen auch anisotrope Permeabilitätseffekte im Referenzzustand berücksichtigt werden, z. B. in geschichteten Materialien, läßt sich \mathbf{K}_v multiplikativ in einen deformationsabhängigen und einen deformationsunabhängigen Anteil zerlegen. Im weiteren sollen mit dem Tensor \mathbf{K}_v nur deformationsinduzierte Anisotropieeffekte beschreiben werden. Es wird somit von isotropen Permeabilitätseigenschaften im undeforinierten Zustand ausgegangen.

Im folgenden soll nun ein Ansatz für einen Permeabilitätstensor entwickelt werden, mit dem es möglich ist, deformationsinduzierte, anisotrope Permeabilitätseffekte zu beschreiben. Um diese Anisotropieeffekte zu erfassen, wird der Permeabilitätstensor an den aktuellen Deformationszustand gekoppelt. Mit einem Ansatz der Form

$$\mathbf{K}_v = \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{N}_i = \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (3.67)$$

stimmen die Eigenrichtungen von \mathbf{K}_v mit den Eigenrichtungen des aktuellen Deformationszustandes $\mathbf{B}_S = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i$ überein. Die Werte k_i sind die Eigenwerte von \mathbf{K}_v , für die noch ein geeigneter Ansatz gefunden werden muß.

Zur konstitutiven Festlegung der Eigenwerte k_i soll zunächst ein einfaches Beispiel betrachtet werden. Hierzu wird ein flüssigkeitsgesättigter poröser Würfel in vertikaler Richtung zusammengedrückt, während die Breite und die Tiefe des Würfels unverändert bleiben, siehe Abbildung 3.1. Die Hauptrichtungen \mathbf{n}_i der Deformation stimmen somit mit den kartesischen Koordinatenrichtungen \mathbf{e}_i überein. Der Darcy-Parameter k^F wird zunächst als konstant angenommen.

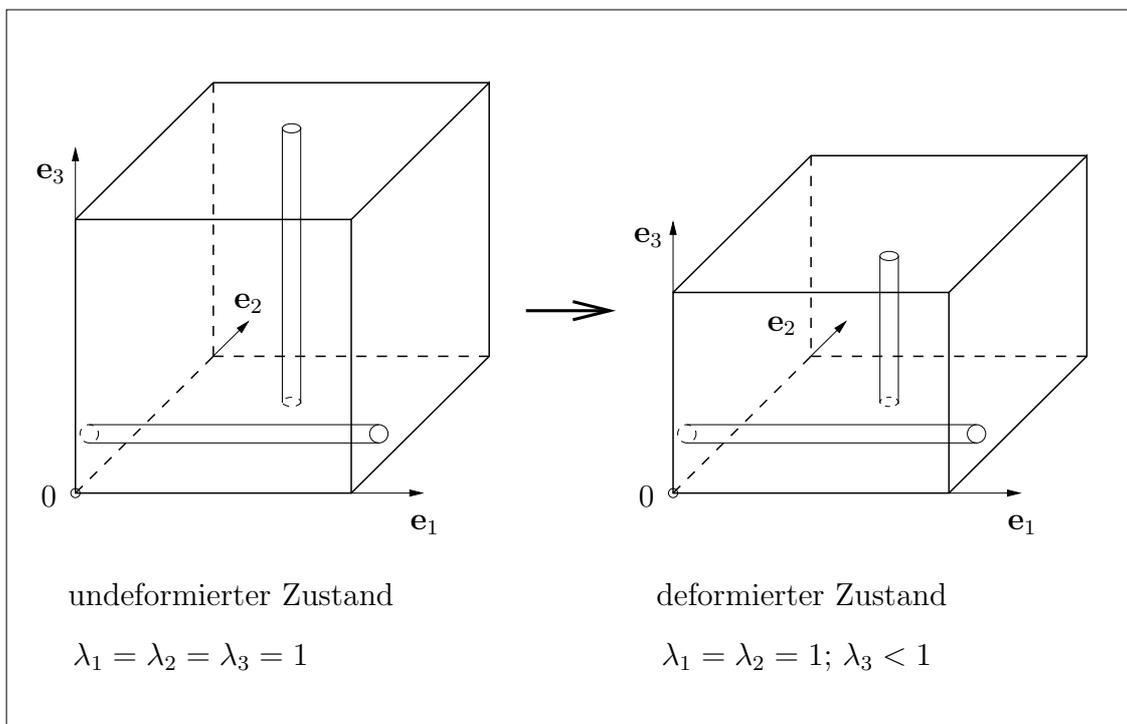


Abbildung 3.1: Porenkapillarmodell an einem porösen Würfel

In einer Modellvorstellung kann man nun von vielen kleinen Porenkanälen ausgehen, durch die Flüssigkeit infolge eines vorgegebenen (deformationsunabhängigen) Druckgradienten gepreßt wird (Kapillar-Modell, siehe z. B. Bear [5]). Hierbei handelt es sich natürlich nur um eine Modellvorstellung. Die formelmäßige Beschreibung eines porösen Festkörpers erfolgt selbstverständlich auf der Basis der Kontinuumsmechanik.

In der Modellvorstellung sollen nun Querschnitte von Porenkanälen entlang der Hauptrichtungen der Deformation (in diesem Fall den Koordinatenrichtungen \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3) betrachtet werden. Konsolidationseffekte durch Auspressen der Flüssigkeit aufgrund der Matrixdeformation sind Folge des Randwertproblems und nicht der deformationsabhängigen Permeabilität, deshalb wird hier nur ein stationärer Zustand betrachtet. Man stellt fest, daß eine Deformation des Würfels in \mathbf{e}_3 -Richtung keinen Einfluß auf die Durchströmung in dieser Richtung hat, da der Querschnitt des Porenkanals unverändert bleibt. Jedoch verringert sich der Durchfluß in \mathbf{e}_1 - und \mathbf{e}_2 -Richtung bei einer Stauchung des Würfels in \mathbf{e}_3 -Richtung infolge des kleineren

denden Porenquerschnitts. Daraus folgert man einen Zusammenhang der Form

$$k_3 = k_3(\lambda_1, \lambda_2) \neq k_3(\lambda_3) , \quad (3.68)$$

wobei λ_i die Eigenwerte des Deformationstensors \mathbf{B}_S sind. Analoges gilt für k_1 und k_2 . Dieses Verhalten kann durch einen allgemeinen Ansatz der Form

$$k_i = \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_i} \right)^\xi = \left(\frac{\det \mathbf{B}_S}{\lambda_i} \right)^\xi \quad (3.69)$$

beschrieben werden. Damit erhält man für den Permeabilitätstensor (3.67)

$$\mathbf{K}_v = (\det \mathbf{B}_S)^\xi \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\lambda_i} \right)^\xi \mathbf{N}_i , \quad (3.70)$$

was sich mit den Rechenregeln der spektralen Zerlegung eines Tensors als

$$\mathbf{K}_v = (\det \mathbf{B}_S)^\xi \mathbf{B}_S^{-\xi} \quad (3.71)$$

schreiben läßt. Mit der Darstellung der Inversen eines Tensors $(\cdot)^{-1} = \det(\cdot)^{-1} (\cdot)^{+T}$ läßt sich dieses Ergebnis auch durch die Adjungierte (\mathbf{B}_S^+) des symmetrischen Tensors \mathbf{B}_S angeben, und man erhält:

$$\mathbf{K}_v = \left(\mathbf{B}_S^+ \right)^\xi . \quad (3.72)$$

Mit dem eingeführten positiven Parameter ξ läßt sich prinzipiell die Deformationsabhängigkeit von \mathbf{K}_v steuern, wobei die Berechnung von Tensorpotenzen im allgemeinen sehr aufwendig ist. Deshalb wird man bei der Verwendung eines anisotropen Permeabilitätstensors häufig nur den Fall $\xi = 1$ verwenden. Für $\xi = 0$ ist $\mathbf{K}_v = \mathbf{I}$ und man erhält den Sonderfall eines deformationsunabhängigen isotropen Permeabilitätstensors.

Die hier entwickelte Darstellung hat den Vorteil, daß sie die aktuellen Eigenrichtungen der Deformation enthält, ohne daß diese explizit durch eine spektrale Zerlegung berechnet werden müssen. Im allgemeinen können die Ansätze (3.64) für k^F und (3.72) für \mathbf{K}_v kombiniert werden. Der Darcy-Parameter k^F in (3.66) ist dann ebenfalls eine deformationsabhängige Größe. Zur Bestimmung der Materialparameter κ in (3.64) bzw. ξ in (3.72) sind geeignete Versuche an realen, fluiddurchströmten porösen Festkörpern durchzuführen.

3.6 Schwache Form der Bilanzgleichungen

Durch Kombination der Impulsbilanzen (3.26) für den Festkörper und das Fluid erhält man unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung (3.27) für die Interaktionskraft und der Konstitutivgleichungen (3.40) und (3.41) die Impulsbilanz des Zweiphasenmodells:

$$\operatorname{div} (\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I}) + (\rho^S + \rho^F) \mathbf{b} = \mathbf{0} . \quad (3.73)$$

Die Volumenbilanz für die Mischung lautet entsprechend (3.25)

$$\operatorname{div} (n^F \mathbf{w}_F + (\mathbf{u}_S)'_S) = 0 .$$

Für das quasi-statische Problem, das in dieser Arbeit betrachtet wird, läßt sich die Sickergeschwindigkeit direkt aus den Bilanzgleichungen eliminieren. Setzt man das allgemeine Darcysche Filtergesetz (3.66), das aus der Impulsbilanz des Fluids resultiert, in die Volumenbilanz der Mischung ein, so erhält man

$$\operatorname{div} \left(\frac{k^F}{\gamma^{FR}} \mathbf{K}_v (\rho^{FR} \mathbf{b} - \operatorname{grad} p) + (\mathbf{u}_S)'_S \right) = 0 . \quad (3.74)$$

Damit ist \mathbf{w}_F keine unabhängige Feldgröße mehr. Als unabhängige Feldgrößen verbleiben damit noch die Festkörperverschiebung \mathbf{u}_S und der effektive Porenfluiddruck p . Die Festkörperextraspansung \mathbf{T}_E^S wird aus einem hyperelastischen Materialgesetz berechnet.

Zur numerischen Behandlung des volumengekoppelten Festkörper-Fluid-Problems im Rahmen der Finite-Elemente-Methode (FEM) werden die schwachen Formen der Feldgleichungen (3.73) und (3.74) benötigt. Diese erhält man durch Multiplikation der Gleichungen mit unabhängigen Testfunktionen und anschließender Integration über das Volumen des Kontrollraums \mathcal{B} mit der Oberfläche $\partial\mathcal{B}$. Da die betrachtete Mischung in dieser Form nur in der aktuellen Konfiguration existiert, erweist sich eine Darstellung in der Momentankonfiguration als sinnvoll.

Durch Anwendung des Divergenztheorems und des Gaußschen Integralsatzes erhält man die schwache Form der Impulsbilanz der Mischung:

$$\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I}) \cdot \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S \, dv - \int_{\mathcal{B}} (n^S \rho^{SR} + n^F \rho^{FR}) \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv = \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, da , \quad (3.75)$$

wobei die Testfunktion $\delta \mathbf{u}_S$ als virtuelle Verschiebung aufgefaßt werden kann, die den geometrischen Randbedingungen des Randwertproblems genügen muß. Außerdem ist $\mathbf{t} = (\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I}) \mathbf{n}$ der auf beide Konstituierenden einwirkende Spannungsvektor, der aus der Oberflächenlast resultiert (\mathbf{n} ist der nach außen orientierte Oberflächennormaleneinheitsvektor). Auf einem Teil der Oberfläche kann die Oberflächenlast \mathbf{t} und alternativ auf einem anderen Teil die Verschiebung \mathbf{u}_S als Randbedingung vorgegeben werden.

Durch analoges Vorgehen erhält man für die schwache Form der Volumenbilanz der Mischung mit der Testfunktion δp (virtuelles Druckfeld):

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} (\mathbf{u}_S)'_S \delta p \, dv + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{K}_v \frac{k^F}{\gamma^{FR}} (\operatorname{grad} p - \rho^{FR} \mathbf{b}) \cdot \operatorname{grad} \delta p \, dv = - \int_{\partial\mathcal{B}} q \delta p \, da . \quad (3.76)$$

Dabei ist $q = (n^F \mathbf{w}_F) \cdot \mathbf{n}$ die Filtergeschwindigkeit der durch einen Teil der Oberfläche austretenden Flüssigkeit. Auf dem anderen Teil der Oberfläche kann alternativ

der Porenfluiddruck p als Randbedingung vorgegeben werden. Zur Behandlung von Randbedingungen erweist es sich als sinnvoll, nur den Sickergeschwindigkeitsterm mit Hilfe des *Gaußschen* Integralsatzes auf den Rand zu transformieren. Der Ausdruck $\text{div}(\mathbf{u}_S)'_S$ verbleibt im Volumenintegral.

Für den Fall isotroper Permeabilitätseigenschaften erhält man für die schwache Form der Volumenbilanz des Zweiphasenmodells:

$$\int_{\mathcal{B}} \text{div}(\mathbf{u}_S)'_S \delta p \, dv + \int_{\mathcal{B}} \frac{k^F}{\gamma^{FR}} (\text{grad } p - \rho^{FR} \mathbf{b}) \cdot \text{grad } \delta p \, dv = - \int_{\partial \mathcal{B}} q \delta p \, da . \quad (3.77)$$

Mit den schwachen Formen der Bilanzgleichungen (3.75) und (3.76) bzw. (3.77) erhält man eine Verschiebungs-Druck-Formulierung der beschreibenden Gleichungen des gekoppelten Mehrfeldproblems.

Anmerkung: In einigen Anwendungsfällen kann es von Interesse sein, die Sickergeschwindigkeit explizit als Randbedingung vorzugeben. In diesem Fall wird die Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_F nicht aus den Feldgleichungen eliminiert, sondern als unabhängige Feldgröße im Satz der beschreibenden Gleichungen belassen. Zur Bestimmung von \mathbf{w}_F benötigt man dann zusätzlich die schwache Form der Impulsbilanz des Fluids:

$$\int_{\mathcal{B}} p \text{div } \delta \mathbf{w}_F \, dv + \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{n^F \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{K}_v^{-1} \mathbf{w}_F - \rho^{FR} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{w}_F \right) \, dv = - \int_{\partial \mathcal{B}} p \delta \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n} \, da . \quad (3.78)$$

Hierbei ist $\delta \mathbf{w}_F$ eine unabhängige Testfunktion, die als virtuelles Feld der Sickergeschwindigkeit interpretiert werden kann. Durch diese Gleichung läßt sich die Sickergeschwindigkeit am Rand explizit vorgeben. Allerdings führt die Diskretisierung dieser Gleichung im Rahmen der Finite-Elemente-Methode zu einer erhöhten Anzahl von Knotenvariablen, was den Rechenaufwand erheblich vergrößert. In diesem Fall wird das Mehrfeldproblem in einer Verschiebungs-Druck-Sickergeschwindigkeits-Formulierung beschrieben.

Im allgemeinen genügt es jedoch, den Volumenstrom durch die Oberfläche durch das Randintegral in der schwachen Form (3.76) bzw. (3.77) der Volumenbilanz vorzugeben und die Werte für die Sickergeschwindigkeit in einer Nachlaufrechnung aus dem *Darcyschen* Filtergesetz zu berechnen.

3.7 Der Sonderfall des leeren Festkörperskeletts

Prinzipiell stellt ein leeres poröses Festkörperskelett ein ungesättigtes poröses Medium dar. Dieser Sonderfall läßt sich jedoch auch durch Vernachlässigung der mechanischen Eigenschaften des Porenfluids in einem gesättigten Zweiphasenmodell behandeln. In diesem Fall liefert die Sättigungsbedingung mit der Größe n^F die

Porosität des leeren Festkörperskeletts. Im leeren porösen Festkörper treten keine Porenfluiddrücke p auf. Damit reduziert sich die Spannungsbeziehung (3.40) auf den Extraspannungsterm. Als beschreibende Gleichung für das Festkörperskelett verbleibt die Impulsbilanz (3.26) für den Festkörper unter Vernachlässigung der Interaktionskraft $\hat{\mathbf{p}}^\alpha$. Für die schwache Form der Impulsbilanz erhält man somit

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{T}_E^S \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S \, dv - \int_{\mathcal{B}} n^S \rho^{SR} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, da . \quad (3.79)$$

Diese Gleichung stimmt mit der schwachen Form der Bilanzgleichung für einen nicht-porösen Festkörper überein.

Da auch für den leeren porösen Festkörper von materieller Inkompressibilität des Matrixmaterials ausgegangen werden muß, erhält man aus der Volumenbilanz (3.24) den Volumenanteil des Festkörpers zu

$$n^S = \frac{1}{J_S} n_{0S}^S . \quad (3.80)$$

Das in (3.75) bzw. (3.79) verwendete Elastizitätsgesetz zur Berechnung der Extraspannung muß die Forderung nach materieller Inkompressibilität des Festkörpermaterials gewährleisten. Dies bedeutet insbesondere, daß der sogenannte Kompressionspunkt im Bereich finiter Volumendeformationen im Kompressionsbereich nicht überschritten werden darf. Hierauf wird speziell in Kapitel 5 eingegangen und eine geeignete Formulierung für das Elastizitätsgesetz entwickelt.

Kapitel 4

Finite isotrope Hyperelastizitätsgesetze

In einem porösen Festkörper können trotz der angenommenen materiellen Inkompressibilität des Festkörpermaterials große Volumendehnungen im Festkörperskelett auftreten. Diese Volumendehnungen resultieren aus Porositätsänderungen in der Festkörpermatrix. Da das jeweilige Materialgesetz die Deformation der Struktur des Festkörperskeletts beschreibt, muß hier ein von der Gleichungsstruktur kompressibles Elastizitätsgesetz verwendet werden. Die in einem solchen Materialgesetz auftretenden Materialparameter sind makroskopische Parameter des Festkörperskeletts, die durch Messungen an der Gesamtstruktur bestimmt werden können. Jüngste Forschungsvorhaben zielen darauf hin, durch die Modellierung eines Mikro-Makro-Übergangs die Materialparameter des porösen Festkörpermaterials aus den Materialparametern des Matrixmaterials zu bestimmen.

Kompressible Elastizitätsgesetze erhält man im allgemeinen durch Erweiterung bekannter inkompressibler Materialgesetze. Die Spannungsbeziehung inkompressibler Elastizitätsgesetze enthält einen Term, der einen *Lagrange*-Multiplikator beinhaltet. Dieser sichert die Erfüllung der Inkompressibilitätsforderung. Die Erweiterung für kompressible Materialgesetze besteht nun darin, auf die Inkompressibilitätsforderung zu verzichten und den Term, der den *Lagrange*-Multiplikator enthält, durch einen geeigneten Ausdruck zu ersetzen. Diese Modifikation wird im allgemeinen auf der Basis der Verzerrungsenergiefunktion vorgenommen. Dabei gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten. Die erste Möglichkeit besteht darin, zur unveränderten Verzerrungsenergiefunktion des inkompressiblen Elastizitätsgesetzes einen Zusatzterm zur Behandlung von Kompressibilitätseffekten hinzuzufügen. Bei der zweiten Möglichkeit wird zusätzlich eine Umformulierung der Verzerrungsenergiefunktion des inkompressiblen Elastizitätsgesetzes vorgenommen. Dabei werden skalare Deformationsmaße verwendet, die auf einer Zerlegung der Deformation in einen isochoren (volumenerhaltenden) und einen volumetrischen (volumenverändernden) Anteil beruhen. Derartige Deformationsmaße können z. B. modifizierte Invarianten oder modifizierte Eigenwerte der *Cauchy-Green*-Deformationstensoren sein. Dieses Vorgehen führt zu

einer Aufspaltung des Spannungstensors in einen deviatorischen und einen hydrostatischen Anteil. Im Rahmen dieser Vorgehensweise, insbesondere bei der Beschreibung nahezu inkompressibler Materialien, werden häufig Formulierungen verwendet, die eine additive Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil verwenden. Diese Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion ist allerdings eine konstitutive Vorgabe und folgt nicht aus der Zerlegung der Deformation in isochore und volumetrische Anteile. Diese Formulierung weist einige Vorteile bei der numerischen Berechnung von finiten elastischen Problemen auf, siehe z. B. *Miehe* [46]. Vorteile ergeben sich durch die daraus resultierende direkte Aufspaltung der Spannungen in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil, was zu einer einfacheren Struktur der Gleichungen führt. Vorteile ergeben sich auch bei der Behandlung elasto-plastischer Probleme bei angenommener plastischer Inkompressibilität. In diesem Fall kann der hydrostatische Anteil der Deformation direkt aus dem Elastizitätsgesetz berechnet werden.

Allerdings weist bereits *Penn* [56] darauf hin, daß das Materialverhalten, das mit dieser Art von Elastizitätsgesetzen berechnet wird, nicht mit experimentellen Ergebnissen an gummiartigen Materialien in Einklang zu bringen ist. Aus Versuchsergebnissen folgerte er, daß eine additive Zerlegung der Verzerrungsenergiefunktion in einen rein isochoren und einen rein hydrostatischen Anteil im allgemeinen nicht möglich ist.

Bei vielen Werkstoffen sind die elastischen Deformationen nicht auf den Bereich kleiner Volumendehnungen beschränkt. So können bei der Deformation poröser Festkörperskelette große Volumendehnungen auftreten, obwohl von materieller Inkompressibilität des Festkörpermaterials ausgegangen werden kann. Aus diesem Grund ist es notwendig, Elastizitätsgesetze auf ihre Eignung zur Beschreibung finiter Deformationen zu untersuchen, vergleiche auch *Ehlers & Eipper* [28]. Dies wird besonders dann wichtig, wenn eine Beschränkung auf den Fall nahezu inkompressiblen Materialverhaltens nicht möglich ist und damit auch große Volumendehnungen auftreten können.

Die folgenden Untersuchungen gelten sowohl für die Extraspannungen in einem leeren oder fluidgesättigten porösen Festkörperskelett als auch für die Spannungen, die in einem kompressiblen nicht-porösen Festkörper auftreten. Deshalb wird in diesem Kapitel auf die Kennzeichnung der Extraspannung durch den Index E verzichtet. Die gewonnenen Ergebnisse sind jedoch für alle genannten Anwendungsfälle gültig.

4.1 Skalare Deformationsmaße

Im folgenden werden skalare Deformationsmaße bereitgestellt, die sich aus dem linken *Cauchy-Green-Deformationstensor* \mathbf{B}_S berechnen. Entsprechende Beziehungen gelten für \mathbf{C}_S .

Für die drei Grundinvarianten des symmetrischen Tensors \mathbf{B}_S gilt entsprechend (3.8)

mit dem Spuroperator $\text{tr}(\cdot) = (\cdot) \cdot \mathbf{I}$:

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{B}_S) , \quad I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{B}_S^2)) , \quad I_3 = \det \mathbf{B}_S = J_S^2 . \quad (4.1)$$

Weiterhin sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von \mathbf{B}_S und damit die Quadrate der Eigenstreckungen (Eigenwerte von \mathbf{F}_S). Die Invarianten lassen sich durch die Eigenwerte ausdrücken:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 , \quad I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 , \quad I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 . \quad (4.2)$$

In einigen Fällen kann es sinnvoll sein, die Deformation in einen volumenerhaltenden (isochoren) und einen volumenverändernden (volumetrischen) Anteil aufzuspalten, siehe *Flory* [33]. Dazu wird eine multiplikative Zerlegung des linken *Cauchy-Green*-Deformationstensors in

$$\mathbf{B}_S = \bar{\mathbf{B}}_S (J_S^{2/3} \mathbf{I}) \quad (4.3)$$

vorgenommen, wobei der volumenerhaltende Anteil durch

$$\det \bar{\mathbf{B}}_S \equiv 1 \quad (4.4)$$

gekennzeichnet ist. Die Volumendeformation wird durch die *Jacobi*-Determinante $J_S = \det \mathbf{F}_S$ beschrieben. Analog zur Definition der Invarianten von \mathbf{B}_S lassen sich auch die sogenannten modifizierten Invarianten als die Grundinvarianten von $\bar{\mathbf{B}}_S$ einführen:

$$\bar{I}_1 = \text{tr}(\bar{\mathbf{B}}_S) , \quad \bar{I}_2 = \frac{1}{2} (\bar{I}_1^2 - \text{tr}(\bar{\mathbf{B}}_S^2)) . \quad (4.5)$$

Aufgrund der Bedingung (4.4) gilt $\bar{I}_3 \equiv 1$. Die modifizierte dritte Invariante liefert somit keine zusätzliche Information. Als Variable zur Beschreibung der Volumendeformation bietet sich daher J_S an. Die sogenannten modifizierten Eigenwerte können als die Eigenwerte von $\bar{\mathbf{B}}_S$ eingeführt werden. Für diese gilt ($i = 1, 2, 3$):

$$\bar{\lambda}_i = J_S^{-2/3} \lambda_i . \quad (4.6)$$

Die modifizierten Eigenwerte sind nicht unabhängig voneinander. Wegen (4.4) muß die Beziehung

$$\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \equiv 1 \quad (4.7)$$

immer erfüllt sein. Analog zu (4.2) lassen sich die modifizierten Invarianten durch die modifizierten Eigenwerte darstellen:

$$\bar{I}_1 = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 , \quad \bar{I}_2 = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 . \quad (4.8)$$

Weiterhin lassen sich die modifizierten Invarianten durch die Invarianten von \mathbf{B}_S ausdrücken:

$$\bar{I}_1 = J_S^{-2/3} I_1 , \quad \bar{I}_2 = J_S^{-4/3} I_2 . \quad (4.9)$$

Ableitungen nach dem Deformationstensor

Bei der direkten Berechnung des *Kirchhoffschen* Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}^S$ müssen die Ableitungen der Verzerrungsenergiefunktion W^S nach dem Deformationstensor \mathbf{B}_S gebildet werden, siehe (3.50). Die Anwendung der Kettenregel führt auf Ableitungen der vorgestellten skalaren Deformationsmaße nach \mathbf{B}_S . Diese sollen hier kurz zusammengestellt werden. Analoge Beziehungen gelten für Ableitungen nach \mathbf{C}_S .

Im weiteren wird statt der dritten Invarianten I_3 die *Jacobi-Determinante* $J_S = \sqrt{I_3}$ verwendet. Für die Ableitungen der Invarianten und der *Jacobi-Determinante* gilt:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{B}_S} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{B}_S} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{B}_S, \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{B}_S} = \frac{1}{2} J \mathbf{B}_S^{-1}. \quad (4.10)$$

Weiterhin liefert die Ableitung eines Eigenwerts nach dem Tensor selbst den dazugehörigen Eigentensor, siehe *Ogden* [53]:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{B}_S} = \mathbf{N}_i. \quad (4.11)$$

Die Ableitungen der modifizierten Invarianten und Eigenwerte läßt sich mit Hilfe des vierstufigen Projektionstensors

$$\overset{4}{\mathbf{D}} := \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}_S}{\partial \mathbf{B}_S} \right)^T = J^{-2/3} \left(\overset{4}{\mathbf{I}} - \frac{1}{3} \mathbf{B}_S^{-1} \otimes \mathbf{B}_S \right) \quad (4.12)$$

in einer kompakten Form darstellen. Damit haben die Ableitungen der modifizierten Größen eine ähnliche Struktur wie die Ableitungen der Invarianten und Eigenwerte. Im einzelnen erhält man für die Ableitungen der ersten und zweiten modifizierten Invarianten:

$$\frac{\partial \overline{I}_1}{\partial \mathbf{B}_S} = \overset{4}{\mathbf{D}} \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \overline{I}_2}{\partial \mathbf{B}_S} = \overset{4}{\mathbf{D}} (\overline{I}_1 \mathbf{I} - \overline{\mathbf{B}}_S). \quad (4.13)$$

Die Ableitung eines modifizierten Eigenwerts läßt sich durch

$$\frac{\partial \overline{\lambda}_i}{\partial \mathbf{B}_S} = \overset{4}{\mathbf{D}} \mathbf{N}_i \quad (4.14)$$

darstellen. Aufgrund der Orthonormalitätseigenschaft der Eigentensoren stimmen die Eigentensoren von \mathbf{B}_S und $\overline{\mathbf{B}}_S$ überein. Deshalb ist es nicht notwendig, einen modifizierten Eigentensor $\overline{\mathbf{N}}_i$ einzuführen.

4.2 Spannungsberechnung

Aufgrund der Forderung nach Objektivität und Isotropie des Materialgesetzes darf die Verzerrungsenergiefunktion W^S nur von den Invarianten oder den Eigenwerten der *Cauchy-Green-Deformationstensen* bzw. von daraus abgeleiteten Größen

abhängen. In den folgenden Betrachtungen wird die dritte Invariante I_3 durch die *Jacobi*-Determinante J_S ersetzt. Die Verzerrungsenergiefunktion läßt sich demnach in den Formen

$$W^S = W_I^S(I_1, I_2, J_S), \quad W^S = W_\lambda^S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

darstellen. Die Formulierung in Eigenwerten muß dabei invariant gegenüber einer Vertauschung der Argumente sein:

$$W^S = W_\lambda^S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W_\lambda^S(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2) = W_\lambda^S(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2).$$

Da sich die modifizierten Invarianten (4.5) und modifizierten Eigenwerte (4.6) direkt aus den Invarianten und Eigenwerten berechnen lassen, ist auch eine Darstellung in der Form

$$W^S = \overline{W}_I^S(\overline{I}_1, \overline{I}_2, J_S), \quad W^S = \overline{W}_\lambda^S(\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_3, J_S)$$

möglich. Bei der Formulierung in modifizierten Eigenwerten sind die Argumente nicht unabhängig. Die Zwangsbedingung (4.4) muß erfüllt sein. Ausgehend von der Spannungsbeziehung

$$\boldsymbol{\tau}^S = 2 \frac{\partial W^S}{\partial \mathbf{B}_S} \mathbf{B}_S \quad (4.15)$$

zur Berechnung der *Kirchhoff*-Spannung werden nun die Spannungstensoren berechnet, die sich aus den unterschiedlichen Formulierungen der Verzerrungsenergiefunktionen ergeben.

Formulierung von W^S in Invarianten

Mit den Ableitungen (4.10) der Invarianten läßt sich der *Kirchhoff*-Spannungstensor, der sich aus einer Verzerrungsenergiefunktion der Form $W = W_I^S(I_1, I_2, J_S)$ ergibt, durch

$$\boldsymbol{\tau}^S = 2 \varphi_0 \mathbf{I} + 2 \varphi_1 \mathbf{B}_S + 2 \varphi_2 (\mathbf{B}_S \mathbf{B}_S) \quad (4.16)$$

angeben, wobei

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} J_S \frac{\partial W_I^S}{\partial J_S}, \quad \varphi_1 = \frac{\partial W_I^S}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W_I^S}{\partial I_2}, \quad \varphi_2 = -\frac{\partial W_I^S}{\partial I_2}. \quad (4.17)$$

Da in \mathbf{B}_S auch hydrostatische Anteile enthalten sind, liefert diese Formulierung keine Aufspaltung des Spannungstensors in deviatorische und hydrostatische Anteile.

Formulierung von W^S in modifizierten Invarianten

Wird die Verzerrungsenergiefunktion in Abhängigkeit der modifizierten Invarianten formuliert ($W^S = \overline{W}_I^S(\overline{I}_1, \overline{I}_2, J_S)$), so läßt sich der *Kirchhoff*sche Spannungstensor unter Anwendung der Ableitungsregeln (4.13) in der Form

$$\boldsymbol{\tau}^S = 2 \overline{\varphi}_0 \mathbf{I} + 2 \overline{\varphi}_1 \overline{\mathbf{B}}_S^D + 2 \overline{\varphi}_2 (\overline{\mathbf{B}}_S \overline{\mathbf{B}}_S)^D, \quad (4.18)$$

darstellen, wobei

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{1}{2} J_S \frac{\partial \bar{W}_I^S}{\partial J_S}, \quad \bar{\varphi}_1 = \frac{\partial \bar{W}_I^S}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial \bar{W}_I^S}{\partial \bar{I}_2}, \quad \bar{\varphi}_2 = -\frac{\partial \bar{W}_I^S}{\partial \bar{I}_2}. \quad (4.19)$$

Hierbei ist $(\cdot)^D$ der deviatorische Anteil eines Tensors (\cdot) . Diese Art der Formulierung der Verzerrungsenergiefunktion liefert auf natürliche Weise eine Zerlegung des Spannungstensors in einen deviatorischen und in einen hydrostatischen Anteil.

Formulierung von W^S in Eigenwerten

Bei Formulierung der Verzerrungsenergie in Eigenwerten, $W^S = W_\lambda^S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, erhält man den Spannungstensor unter Berücksichtigung von (3.13) und der Ableitungsregel (4.11) zu

$$\boldsymbol{\tau}^S = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W_\lambda^S}{\partial \lambda_i} \lambda_i \mathbf{N}_i. \quad (4.20)$$

Formulierung von W^S in modifizierten Eigenwerten

Wird die Verzerrungsenergiefunktion in modifizierten Eigenwerten formuliert, so gilt $W^S = \bar{W}_\lambda^S(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, J_S)$. Dabei sind nur zwei der modifizierten Eigenwerte und J_S unabhängige Größen. Die Berücksichtigung der Zwangsbedingung (4.7) kann durch explizites Eliminieren der abhängigen Größe geschehen. Eine zweite Möglichkeit liegt in der Einführung eines *Lagrange*-Multiplikators q , der gewährleistet, daß die Zwangsbedingung erfüllt ist. Diese zweite Möglichkeit wird hier angewandt, da sie zu einer eleganteren Darstellung führt. Dazu wird zur ursprünglichen Verzerrungsenergiefunktion die Zwangsbedingung (4.7), versehen mit dem *Lagrange*-Multiplikator q , addiert:

$$\tilde{W}^S = \bar{W}_\lambda^S(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, J_S) + q(\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 - 1). \quad (4.21)$$

Durch Anwendung der Ableitungsregel (4.14) und unter Verwendung des vierstufigen Projektionstensors (4.12) findet man jedoch:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{B}_S} (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 - 1) = \mathbf{D} \sum_{i=1}^3 (\bar{\lambda}_i)^{-1} \mathbf{N}_i = \mathbf{D} (\bar{\mathbf{B}}_S)^{-1} \equiv \mathbf{0}. \quad (4.22)$$

Somit verschwindet der Term, der den *Lagrange*-Multiplikator enthält, und man findet für den *Kirchhoff*-Spannungstensor die Beziehung

$$\boldsymbol{\tau}^S = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{W}_\lambda^S}{\partial \bar{\lambda}_i} \bar{\lambda}_i \mathbf{N}_i^D + J_S \frac{\partial \bar{W}_\lambda^S}{\partial J_S} \mathbf{I}, \quad (4.23)$$

hierbei ist \mathbf{N}_i^D der deviatorische Anteil des Eigentensors \mathbf{N}_i . Die hier gewählte Formulierung der Verzerrungsenergie führt zu einer natürlichen Aufspaltung des Spannungszustands in einen deviatorischen und einen hydrostatischen Anteil.

4.3 Elastizitätsgesetze

Ausgehend von Ansätzen für die Verzerrungsenergiefunktion bei inkompressiblem Materialverhalten werden verschiedene bekannte Elastizitätsgesetze für kompressibles Materialverhalten angegeben. Die verschiedenen Materialgesetze lassen sich jeweils einem der vorgestellten Formulierungstypen zuordnen.

Ball [2] zeigte, daß die Forderung nach Eindeutigkeit einer Lösung in der Elastizitätstheorie die Polykonvexität der Verzerrungsenergiefunktion erfordert. Eine Funktion mehrerer Argumente ist polykonvex, wenn sie in ihren Argumenten konvex ist. Die Polykonvexitätsbedingung kann nicht aus dem Entropieprinzip hergeleitet werden. Sie stellt sicher, daß sich Wellen in einem Körper mit reeller Wellengeschwindigkeit ausbreiten. Die Forderung nach einer konvexen Verzerrungsenergiefunktion stellt hingegen eine zu strenge Anforderung dar, da hiermit z. B. Knickphänomene nicht beschrieben werden können, siehe *Hill* [38]. Außerdem ist eine konvexe Verzerrungsenergiefunktion unverträglich mit dem Prinzip der materiellen Objektivität, siehe *Ciarlet* [18]. Ein Überblick über konstitutive Ungleichungen und Materialstabilitätskriterien sowie deren geschichtliche Entwicklung ist bei *Reese* [58] zu finden.

4.3.1 Inkompressibles Materialverhalten

Verzerrungsenergiefunktionen für inkompressible Festkörpermaterialien können allgemein durch unendliche Potenzreihen in den Invarianten oder Eigenwerten dargestellt werden, siehe *Ogden* [53]. In einer Invariantendarstellung findet man

$$W^S = \sum_{p,q=0}^{\infty} c_{pq} (I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q, \quad (4.24)$$

wobei $c_{00} = 0$ gelten muß. Der einfachste hieraus resultierende Ansatz mit zwei Materialparametern ist der *Mooney-Rivlin*-Ansatz

$$W^S = c_{10} (I_1 - 3) + c_{01} (I_2 - 3), \quad (4.25)$$

siehe *Mooney* [47] und *Rivlin* [59]. Eine weitere Vereinfachung liefert den bekannten *Neo-Hooke*-Ansatz

$$W^S = c_{10} (I_1 - 3), \quad c_{10} = \frac{1}{2} \mu^S, \quad (4.26)$$

wobei die *Lamé*-Konstante $\mu^S > 0$ auch als Schermodul bezeichnet wird.

Eine allgemeine Eigenwertdarstellung läßt sich in der Form

$$W^S = \sum_{p,q=0}^{\infty} a_{pq} [\lambda_1^p (\lambda_2^q + \lambda_3^q) + \lambda_2^p (\lambda_1^q + \lambda_3^q) + \lambda_3^p (\lambda_1^q + \lambda_2^q)] \quad (4.27)$$

angeben, siehe *Ogden* [53]. Auch hier muß $a_{00} = 0$ gelten. In dieser Darstellung werden die Eigenwerte zunächst als voneinander unabhängig betrachtet. Eine Berücksichtigung der Abhängigkeit der Eigenwerte (aufgrund der Inkompressibilitätsforderung) erfolgt erst bei der Spannungsberechnung. Die *Valanis-Landel*-Hypothese [70] fordert eine Separabilität der Verzerrungsenergiefunktion in der Form

$$W^S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \tilde{W}^S(\lambda_1) + \tilde{W}^S(\lambda_2) + \tilde{W}^S(\lambda_3) , \quad (4.28)$$

was anhand von Versuchen verifiziert wurde. Beschränkt man sich in (4.27) zudem nicht auf ganzzahlige Exponenten, so kann die Verzerrungsenergiefunktion in der Form

$$W^S = \mu^S \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j^*}{\alpha_j} \left(\lambda_1^{\alpha_j/2} + \lambda_2^{\alpha_j/2} + \lambda_3^{\alpha_j/2} - 3 \right) \quad (4.29)$$

angegeben werden. Die reellen Parameter μ_j^* und α_j müssen die Bedingung

$$\sum_{j=1}^N \mu_j^* \alpha_j = 2 \quad (4.30)$$

erfüllen. Diese Bedingung gewährleistet Abwärtskompatibilität zu einem linearen Elastizitätsgesetz vom *Hooke*schen Typ. Die Erfüllung von Stabilitätskriterien erfordert weiterhin

$$\mu_j^* \alpha_j > 0 . \quad (4.31)$$

Eine detaillierte Untersuchung des Stabilitätsverhaltens beim *Ogden*-Modell wird bei *Reese* [58] durchgeführt.

Der Ansatz (4.29) wurde von *Ogden* [50] für $N = 3$ zur Beschreibung von Versuchen an gummiartigen Materialien verwendet. Mit diesem Modell konnten die Versuchsergebnisse in sehr guter Übereinstimmung nachgerechnet werden. Im allgemeinen wird dieser Ansatz in der Literatur deshalb auch als inkompressibles *Ogden*-Modell bezeichnet. Dieses *Ogden*-Modell nimmt in der nichtlinearen Elastizitätstheorie eine ausgezeichnete Rolle ein, da in diesem Modell viele andere Materialgesetze enthalten sind. Für $N = 1$, $\alpha_1 = 2$ und $\mu_1^* = 1$ erhält man den *Neo-Hooke*-Ansatz und für $N = 2$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$ und $\mu_1 - \mu_2 = 1$ erhält man den *Mooney-Rivlin*-Ansatz.

Anmerkung: In der Literatur wird das *Ogden*-Modell häufig in Eigenstreckungen (Eigenwerte des Deformationsgradienten) formuliert. In dieser Arbeit werden die Eigenwerte der *Cauchy-Green*schen Deformationstensoren verwendet, die die Quadrate der Eigenstreckungen sind. Um eine mit der Literatur konsistente Darstellung zu erhalten, taucht deshalb hier ein Faktor $1/2$ beim Exponenten auf.

Spannungsberechnung

Bei der Berechnung inkompressiblen Materialverhaltens genügt es nicht allein, keine Abhängigkeit der Verzerrungsenergiefunktion von der *Jacobi*-Determinanten J_S

zuzulassen. Vielmehr muß die Inkompressibilitätsforderung ($J_S \equiv 1$) explizit sichergestellt werden. Dies kann dadurch geschehen, daß zur Verzerrungsenergiefunktion des inkompressiblen Materials ein mit einem *Lagrange*-Multiplikator q versehener Term ($J_S - 1$) addiert wird. Aus dieser modifizierten Energiefunktion wird dann die Spannung berechnet. Der *Lagrange*-Multiplikator garantiert dann die Erfüllung der Inkompressibilitätsforderung.

Im inkompressiblen Fall stimmen die *Cauchy*-Spannungen \mathbf{T}^S und die *Kirchhoff*-Spannungen $\boldsymbol{\tau}^S$ überein. Die Spannungsberechnung bei inkompressiblem Materialverhalten liefert für eine in der ersten und zweiten Invarianten formulierte Verzerrungsenergiefunktion entsprechend (4.16) und (4.17)

$$\mathbf{T}^S = 2 \varphi_1 \mathbf{B}_S + 2 \varphi_2 (\mathbf{B}_S \mathbf{B}_S) + q \mathbf{I} . \quad (4.32)$$

Aus einer in Eigenwerten formulierten Verzerrungsenergiefunktion erhält man unter Berücksichtigung der Inkompressibilitätsforderung mit (4.20):

$$\mathbf{T}^S = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W_\lambda^S}{\partial \lambda_i} \lambda_i \mathbf{N}_i + q \mathbf{I} . \quad (4.33)$$

Zur physikalischen Interpretation des *Lagrange*-Parameters q wird der hydrostatische Druck \tilde{p} gebildet:

$$\tilde{p} = \frac{1}{3} (\mathbf{T}^S \cdot \mathbf{I}) . \quad (4.34)$$

Eliminiert man nun den Parameter q mit Hilfe des hydrostatischen Drucks \tilde{p} aus den Spannungsbeziehungen, so erhält man aus der Formulierung (4.32) in einer Deviatorardarstellung:

$$\mathbf{T}^S = 2 \varphi_1 \mathbf{B}_S^D + 2 \varphi_2 (\mathbf{B}_S \mathbf{B}_S)^D + \tilde{p} \mathbf{I} . \quad (4.35)$$

Die Eigenwertformulierung (4.33) liefert mit den deviatorischen Eigentensoren:

$$\mathbf{T}^S = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W_\lambda^S}{\partial \lambda_i} \lambda_i \mathbf{N}_i^D + \tilde{p} \mathbf{I} . \quad (4.36)$$

Der hydrostatische Druck \tilde{p} (nicht zu verwechseln mit dem Porenfluiddruck p in einem fluidgesättigten porösen Festkörper) läßt sich ebenfalls als *Lagrange*-Parameter zur Gewährleistung der Inkompressibilitätsforderung interpretieren. Dieser Parameter ist eine zunächst unbestimmte Größe, die nicht aus dem Materialgesetz, sondern aus dem jeweiligen Randwertproblem berechnet werden muß.

4.3.2 Konstruktion kompressibler Materialgesetze

Elastizitätsgesetze für kompressible Materialien können durch Modifikation der angegebenen Ansätze konstruiert werden. Hierbei bestehen zwei prinzipielle Möglichkeiten. Zum einen kann zur unveränderten Verzerrungsenergiefunktion des inkompressiblen Modells ein Zusatzterm addiert werden. Zum anderen kann die Verzerrungsenergiefunktion des inkompressiblen Materialgesetzes mit Hilfe modifizierter

Invarianten oder Eigenwerte umformuliert werden. Zu diesem modifizierten Ansatz wird dann ein Zusatzterm zur Berücksichtigung der Kompressibilität addiert. Im Fall der Inkompressibilität stimmen die Invarianten und die modifizierten Invarianten überein. Entsprechendes gilt für die Eigenwerte und die modifizierten Eigenwerte. Die zweite Möglichkeit führt zu einer Aufspaltung von W^S in einen rein isochoren und einen rein volumetrischen Anteil. Diese Aufspaltung ist allerdings rein konstitutiver Art und resultiert nicht aus der geometrischen Zerlegung der Deformationsmaße. Prinzipiell könnten auch Kopplungsterme zwischen dem isochoren und dem volumetrischen Anteil eingeführt werden.

Im folgenden werden vier verschiedene Verzerrungsenergiefunktionen und die daraus resultierenden Spannungen angegeben. Hierbei läßt sich jeder Ansatz einem in Kapitel 4.2 vorgestellten Formulierungstyp zuordnen. Jeweils zwei dieser Materialgesetze weisen ähnliche Strukturen in der Verzerrungsenergiefunktion auf.

Gesetz von *Simo & Pister*

Das Elastizitätsgesetz von *Simo & Pister* [61] stellt eine Erweiterung des inkompressiblen *Neo-Hooke*-Modells dar. Die Verzerrungsenergiefunktion des *Simo & Pister*-Gesetzes ist in Invarianten formuliert und lautet

$$W_{SP}^S = \frac{1}{2} \mu^S (I_1 - 3) - \mu^S \ln J_S + \frac{1}{2} \Lambda^S (\ln J_S)^2 . \quad (4.37)$$

Die positiven Materialparameter μ^S und Λ^S sind als *Lamésche* Konstanten bekannt. Der zweite Term in der Verzerrungsenergiefunktion gewährleistet, daß der undeformierte Zustand spannungsfrei ist. Wie leicht nachgewiesen werden kann, erfüllt dieses Gesetz für Volumendehnungen im Bereich $J_S > \exp(1 + \frac{\mu^S}{\Lambda^S})$ die Forderung nach Polykonvexität der Verzerrungsenergiefunktion nicht mehr. Der Spannungstensor berechnet sich entsprechend (4.16) und (4.17) zu

$$\boldsymbol{\tau}_{SP}^S = \mu^S \mathbf{B}_S + (\Lambda^S \ln J_S - \mu^S) \mathbf{I} . \quad (4.38)$$

Gesetz vom *Flory*-Typ

Das Elastizitätsgesetz vom *Flory*-Typ verwendet statt der ersten Invarianten im *Neo-Hooke*-Ansatz die modifizierte erste Invariante \bar{I}_1 . Zur Berücksichtigung der Volumenkompression wird ein Zusatzterm eingeführt und man erhält:

$$W_{Fl}^S = \frac{1}{2} \mu^S (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{2} k^S (\ln J_S)^2 . \quad (4.39)$$

Dieser Zusatzterm enthält statt der *Lamé*-Konstanten Λ^S den Kompressionsmodul k^S . Im Gegensatz zum *Simo & Pister*-Ansatz (4.37) muß dieser Zusatzterm keinen Anteil ($-\mu^S \ln J_S$) enthalten, da hier der undeformierte Zustand automatisch spannungsfrei ist. Bei diesem Elastizitätsgesetz wird die Forderung nach Polykonvexität

der Verzerrungsenergiefunktion für Volumendehnungen $J_S > \exp(1)$ verletzt. Die Spannungen erhält man mit (4.18) und (4.19) zu

$$\boldsymbol{\tau}_{Fl}^S = \mu^S \overline{\mathbf{B}}_S^D + k^S \ln J_S \mathbf{I}. \quad (4.40)$$

Ogden-Modell

Zur Berücksichtigung von Kompressibilitätseffekten kombinierte *Ogden* [51] einen Erweiterungsterm mit dem in Eigenwerten formulierten Modell (4.29):

$$W_{O1}^S = \mu^S \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\mu_j^*}{\alpha_j} \left(\lambda_1^{\alpha_j/2} + \lambda_2^{\alpha_j/2} + \lambda_3^{\alpha_j/2} - 3 \right) - \mu_j^* \ln J_S \right] + \frac{\Lambda^S}{\beta^2} \left(J_S^{-\beta} - 1 + \beta \ln J_S \right). \quad (4.41)$$

Dabei wird mit $\beta \neq 0$ ein weiterer reeller Parameter zur Steuerung des volumetrischen Verhaltens eingeführt. Mit (4.20) erhält man den Spannungstensor zu

$$\boldsymbol{\tau}_{O1}^S = \mu^S \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_j^* \left(\lambda_i^{\alpha_j/2} - 1 \right) \mathbf{N}_i + \frac{\Lambda^S}{\beta} \left(1 - J_S^{-\beta} \right) \mathbf{I}. \quad (4.42)$$

Anmerkung: In einigen Arbeiten wird mit Hinweis auf die Originalliteratur [51] fälschlicherweise eine Forderung $\beta > 0$ eingeführt. Eine derartige Beschränkung wurde von *Ogden* in [51] nur eingeführt, um eine analytische Untersuchung im Kompressionsbereich einfacher durchzuführen zu können. Sie stellt aber keine notwendige Bedingung dar. So verwendet z. B. *Simo* in [64] eine Erweiterungsfunktion mit $\beta = -2$.

Modifiziertes Ogden-Modell

Formuliert man ein entsprechendes Gesetz in modifizierten Eigenwerten und kombiniert dieses mit einem analogen Erweiterungsterm, so erhält man die Verzerrungsenergiefunktion eines modifizierten *Ogden*-Modells:

$$W_{O2}^S = \mu^S \sum_{j=1}^3 \frac{\mu_j^*}{\alpha_j} \left(\overline{\lambda}_1^{\alpha_j/2} + \overline{\lambda}_2^{\alpha_j/2} + \overline{\lambda}_3^{\alpha_j/2} - 3 \right) + \frac{k^S}{\beta^2} \left(J_S^{-\beta} - 1 + \beta \ln J_S \right). \quad (4.43)$$

Unter Verwendung von (4.23) ergibt sich der *Kirchhoffsche* Spannungstensor zu

$$\boldsymbol{\tau}_{O2}^S = \mu^S \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_j^* \overline{\lambda}_i^{\alpha_j/2} \mathbf{N}_i^D + \frac{k^S}{\beta} \left(1 - J_S^{-\beta} \right) \mathbf{I}. \quad (4.44)$$

Die in (4.41) bzw. (4.43) eingeführte Erweiterungsfunktion erfüllt die Forderung nach Polykonvexität in jedem beliebigen Deformationsbereich.

Beim *Simo & Pister*-Gesetz (4.37) und beim *Ogden*-Modell (4.41) lassen sich die Verzerrungsenergiefunktionen nicht in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil zerlegen, da sich sowohl die erste Invariante I_1 als auch die Eigenwerte λ_i bei einer Volumendeformation ändern. Beim Gesetz vom *Flory*-Typ (4.39) und beim modifizierten *Ogden*-Modell (4.43) liefert der erste Term von W^S jeweils einen rein isochoren Spannungszustand, da \bar{I}_1 und $\bar{\lambda}_i$ unabhängig von einer Volumendeformation sind. Der zweite Ausdruck liefert jeweils nur bei einer rein volumetrischen Deformation einen Spannungsbeitrag.

4.4 Einaxialer Spannungsversuch

Mit Hilfe eines einfachen Zug-/Druckversuchs können die vorgestellten Materialgesetze untersucht werden. Hierbei tritt nur ein einaxialer Spannungszustand auf. Die Untersuchung des Knickproblems im Druckbereich ist nicht Gegenstand dieser Untersuchung. Da bei diesem einfachen Versuch nur homogene Spannungs- und Deformationszustände auftreten, kann der Deformationsgradient direkt angegeben werden:

$$\mathbf{F}_S = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \epsilon_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k, \quad (4.45)$$

wobei ϵ_1 und $\epsilon_2 = \epsilon_3$ die Hauptwerte der Ingenieurdehnungen und \mathbf{e}_i die Basisvektoren eines kartesischen Koordinatensystems sind. Die Belastungsrichtung ist in diesem Fall die \mathbf{e}_1 -Richtung, siehe Abbildung 4.1. Untersucht man den Deformationsgradienten, so stellt man fest, daß sowohl ein isochorer als auch ein volumetrischer Deformationsanteil auftritt.

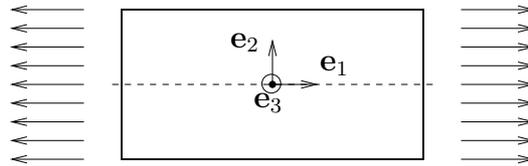


Abbildung 4.1: Koordinatenrichtungen und Belastung beim Zug-/Druckversuch

Implizite Beziehungen zwischen Längs- und Querdehnung

Im vorliegenden einaxialen Spannungszustand müssen die Spannungskomponenten quer zur Versuchsprobe (in \mathbf{e}_2 - bzw. \mathbf{e}_3 -Richtung) verschwinden. Diese Forderung erlaubt es, aus den Spannungsrelationen (4.38), (4.40), (4.42) bzw. (4.44) für die verschiedenen Materialgesetze eine implizite Beziehung zwischen der Längsdehnung ϵ_1 und der Querdehnung ϵ_2 herzuleiten. Da die *Kirchhoff*-Spannungen und die *Cauchy*-Spannungen nur über die stets positive *Jacobi*-Determinante J_S zusammenhängen,

spielt es keine Rolle, aus welchem der beiden Spannungstensoren diese implizite Dehnungsbeziehung hergeleitet wird. Die Dehnungsbeziehung kann in der Form $f(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0$ angegeben werden. Bei vorgegebener Längsdehnung läßt sich dann die Querdehnung durch numerische Nullstellenbestimmung berechnen.

Die implizite Beziehung der zwischen Längsdehnung ϵ_1 und der Querdehnung ϵ_2 lautet für das Elastizitätsgesetz von *Simo & Pister* (4.38)

$$f_{SP}(\epsilon_1, \epsilon_2) = 2\mu^S \left(\epsilon_2 + \frac{1}{2} \epsilon_2^2 \right) + \Lambda^S \ln [(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)^2] = 0, \quad (4.46)$$

für das Gesetz vom *Flory*-Typ (4.40)

$$\begin{aligned} f_{Fl}(\epsilon_1, \epsilon_2) &= 2\mu^S [(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)^2]^{-2/3} \left[(\epsilon_2 - \epsilon_1) + \frac{1}{2}(\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2) \right] \\ &+ 3k^S \ln [(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)^2] = 0, \end{aligned} \quad (4.47)$$

für das *Ogden*-Modell (4.42)

$$f_{O1}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \mu^S \sum_{j=1}^3 \mu_j^* [(1 + \epsilon_2)^{\alpha_j} - 1] + \frac{\Lambda^S}{\beta} \left\{ 1 - [(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)^2]^{-\beta} \right\} = 0, \quad (4.48)$$

und für das modifizierte *Ogden*-Modell (4.44)

$$\begin{aligned} f_{O2}(\epsilon_1, \epsilon_2) &= \mu^S \sum_{j=1}^3 \frac{\mu_j^*}{3} [(1 + \epsilon_1)^{(-1/3\alpha_j)} (1 + \epsilon_2)^{(1/3\alpha_j)}] \\ &- \mu^S \sum_{j=1}^3 \frac{\mu_j^*}{3} [(1 + \epsilon_1)^{(2/3\alpha_j)} (1 + \epsilon_2)^{(-2/3\alpha_j)}] \\ &+ \frac{k^S}{\beta} \left\{ 1 - [(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)^2]^{-\beta} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Im Rahmen der geometrisch linearen Elastizitätstheorie ist die Querkontraktionszahl (*Poissonzahl*) ν_0^S eine Materialkonstante. Bei inkompressiblem Materialverhalten gilt $\nu_0^S = \frac{1}{2}$. In der finiten Elastizitätstheorie läßt sich über das Verhältnis der Hauptwerte der Ingenieurdehnungen eine nichtlineare Querkontraktionsfunktion

$$\nu^S = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (4.50)$$

definieren, siehe *Beatty & Stalnaker* [7]. Es ist sofort ersichtlich, daß diese nichtlineare Querkontraktionsfunktion keinen konstanten Wert mehr liefert. Allerdings müssen beim Übergang zur geometrisch linearen Elastizitätstheorie wieder die bekannten Beziehungen zwischen der linearen Querkontraktionszahl und den übrigen

Materialparametern gelten. Um dies zu zeigen, wird eine Linearisierung (*Taylor-Reihenentwicklung* bis zur ersten Ordnung) der impliziten Beziehung $f(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0$ um den undeformierten Zustand vorgenommen:

$$\underbrace{f(\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = 0)}_0 + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_1} \Big|_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0} \cdot \epsilon_{1,lin} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_2} \Big|_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0} \cdot \epsilon_{2,lin} = 0 . \quad (4.51)$$

Dies führt für die impliziten Dehnungsbeziehungen (4.46) (*Simo & Pister* Gesetz) bzw. (4.48) (*Ogden-Modell*) auf:

$$\Lambda^S \epsilon_{1,lin} + 2(\mu^S + \Lambda^S) \epsilon_{2,lin} = 0 . \quad (4.52)$$

Hieraus folgt die bekannte Beziehung zwischen den *Lamé*-Konstanten und der (konstanten) Querkontraktionszahl der linearen Elastizität, siehe z. B. *Leipholz* [43]:

$$\nu_0^S = \frac{\Lambda^S}{2(\mu^S + \Lambda^S)} . \quad (4.53)$$

Führt man eine Linearisierung der impliziten Beziehungen (4.47) (Gesetz vom *Flory*-Typ) bzw. (4.49) (modifiziertes *Ogden-Modell*) durch, so findet man:

$$(3k^S - 2\mu^S) \epsilon_{1,lin} + (6k^S + 2\mu^S) \epsilon_{2,lin} = 0 . \quad (4.54)$$

In diesem Fall erhält man die bekannte Beziehung zwischen den Materialparametern μ^S, k^S und der Querkontraktionszahl ν_0^S :

$$\nu_0^S = \frac{3k^S - 2\mu^S}{6k^S + 2\mu^S} . \quad (4.55)$$

4.5 Lösung der impliziten Dehnungsbeziehungen

Zur konkreten Auswertung der impliziten Dehnungsbeziehungen werden folgende Materialparameter gewählt: $\Lambda^S = \mu^S$. Daraus ergibt sich aus (4.53) eine Querkontraktionszahl von $\nu_0^S = \frac{1}{4}$. Damit diese bei allen Materialgesetzen auftritt, wird entsprechend (4.55) ein Kompressionsmodul von $k^S = \frac{5}{3}\mu^S$ gewählt. Trägt man die Querdehnung in einem Diagramm über der Längsdehnung auf, so stimmen die Steigungen der Kurven im undeformierten Zustand überein, da diese der Querkontraktionszahl ν_0^S der linearen Elastizitätstheorie entspricht. Die Parameter für die *Ogden-Modelle* werden [53] entnommen:

$$\begin{aligned} \mu_1^* &= 1,4911; & \mu_2^* &= 0,0028; & \mu_3^* &= -0,0237; \\ \alpha_1 &= 1,3; & \alpha_2 &= 5,0; & \alpha_3 &= -2,0. \end{aligned}$$

Sie wurden von *Ogden* aus Versuchen an Gummi bestimmt und erfüllen die Bedingungen (4.30) und (4.31).

Löst man die impliziten Beziehungen zwischen der Längsdehnung ϵ_1 und der Querdehnung ϵ_2 bei vorgegebenem ϵ_1 numerisch, so können die vorgestellten Materialgesetze beurteilt werden. Die absoluten Zahlenwerte der Materialparameter μ^S , Λ^S und k^S sind nicht von Interesse. Lediglich das Verhältnis der Parameter ist entscheidend für die Ergebnisse.

Bei den Materialgesetzen, die eine Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion in isochore und volumetrische Anteile verwenden, stellt man unphysikalische Effekte fest, siehe Abbildung 4.2.

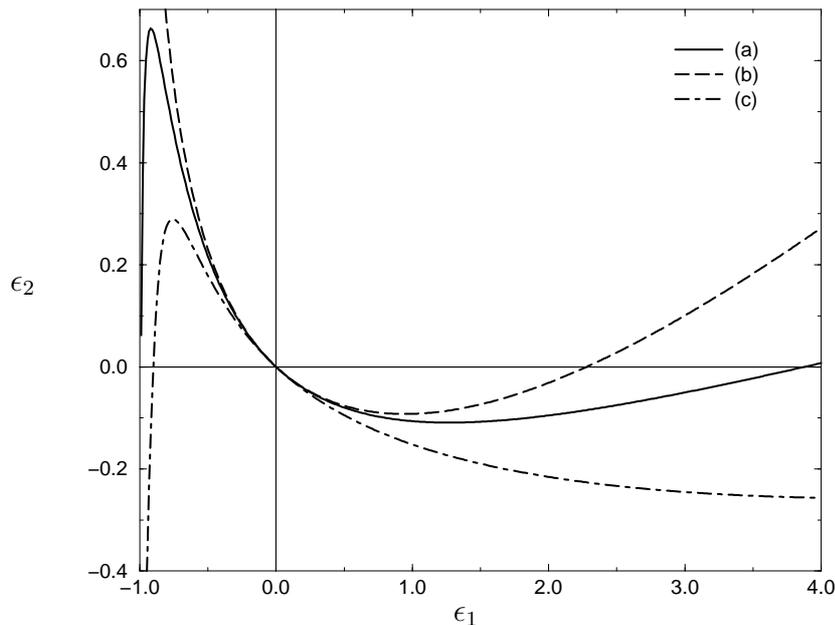


Abbildung 4.2: Querdehnung über Längsdehnung (a) beim Gesetz vom *Flory*-Typ, (b) modifizierten *Ogden*-Modell ($\beta = +1$), (c) modifizierten *Ogden*-Modell ($\beta = -1$)

Beim Gesetz vom *Flory*-Typ und beim modifizierten *Ogden*-Modell mit gewähltem Parameter $\beta = +1$ nimmt der Betrag der Querdehnung nach Erreichen eines Maximums im Zugbereich ab. Dies bedeutet, daß ab dort ein Zugstab bei zunehmender Längsdehnung wieder dicker würde. Bei weiterer Längsdehnung wird die Querdehnung sogar positiv, womit die in (4.50) definierte nichtlineare Querkontraktion negativ wird. Dies würde bedeuten, daß sich eine Probe sogar über ihre Ausgangsdicke „aufblasen“ würde. Betrachtet man das modifizierte *Ogden*-Modell mit gewähltem Parameter $\beta = -1$, so findet man hier unphysikalische Effekte im Druckbereich. Nach Erreichen einer maximalen Querdehnung nimmt diese bei zunehmender Verkürzung der Probe wieder ab. Dieses unphysikalische Verhalten bei finiten Deformationen ist typisch für diese Art von Materialgesetzen, die eine additive Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion verwenden. Diese Problematik tritt auch bei anderer Wahl der Materialparameter auf. Die beschriebenen Effekte treten

beim Gesetz vom *Flory*-Typ weit vor Erreichen der Polykonvexitätsgrenze auf, so daß der Verlust der Polykonvexität nicht der Grund für dieses Verhalten ist. Die modifizierten *Ogden*-Modelle sind in allen Deformationsbereichen polykonvex.

Derartige Effekte treten nicht bei den Elastizitätsgesetzen auf, die auf eine additive Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion in isochore und volumetrische Anteile verzichten (*Simo & Pister*-Gesetz, *Ogden*-Modell), siehe Abbildung 4.3.

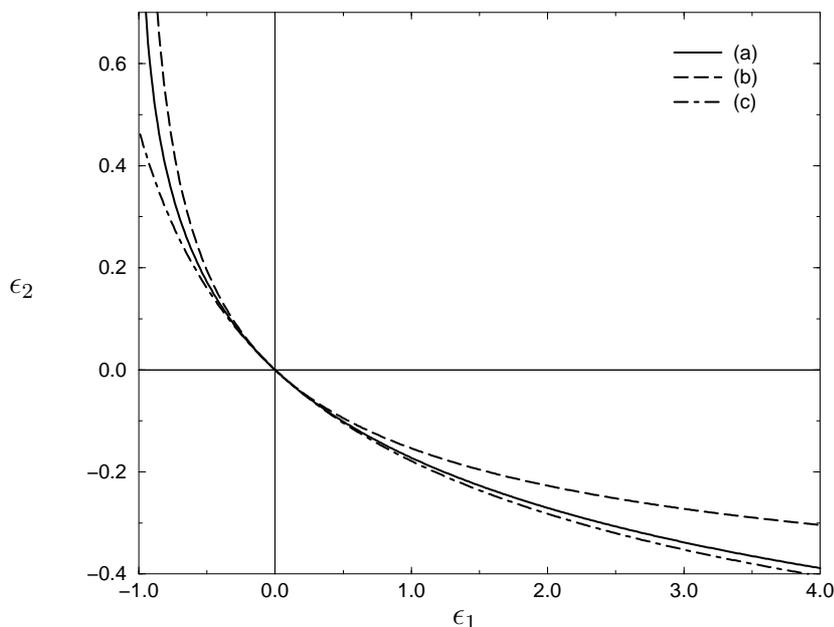


Abbildung 4.3: Querdehnung über Längsdehnung (a) beim Gesetz von *Simo & Pister*, (b) *Ogden*-Modell ($\beta = +1$), (c) *Ogden*-Modell ($\beta = -1$)

Da die Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil häufig bei Materialgesetzen zur Beschreibung nahezu inkompressiblen Materialverhaltens verwendet wird, soll zum Abschluß noch eine Untersuchung dieser Materialgesetze bei Variation der Querkontraktionszahl ν_0^S durchgeführt werden. Bei vorgegebenem ν_0^S läßt sich aus (4.55) ein Verhältnis zwischen k^S und μ^S berechnen. Abbildung 4.4 zeigt die Ergebnisse beim Elastizitätsgesetz vom *Flory*-Typ. Hieraus ist ersichtlich, daß die Extrema der Querdehnung ϵ_2 mit abnehmender Kompressibilität ($\nu_0^S \rightarrow \frac{1}{2}$) gegen betragsmäßig größere Längsdehnungen wandern. Dies bedeutet, daß für gering kompressible Werkstoffe die unrealistischen Querdehnungen zwar immer noch auftreten, dies jedoch erst bei sehr großen Längsdehnungen, die im allgemeinen nicht mehr von praktischem Interesse sind. Die Untersuchung des modifizierten *Ogden*-Modells liefert vergleichbare Ergebnisse.

Interessant ist, daß bei $\nu_0^S = 0$ und Vorgabe einer Längsdehnung ϵ_1 im Zugbereich beim Gesetz vom *Flory*-Typ und beim modifizierten *Ogden*-Modell sofort unphysikalische Querdehnungen ϵ_2 auftreten. Beim Gesetz von *Simo & Pister* und beim *Ogden*-Modell verschwinden die Querdehnungen für $\nu_0^S = 0$ (hier gilt dann $\Lambda^S = 0$)

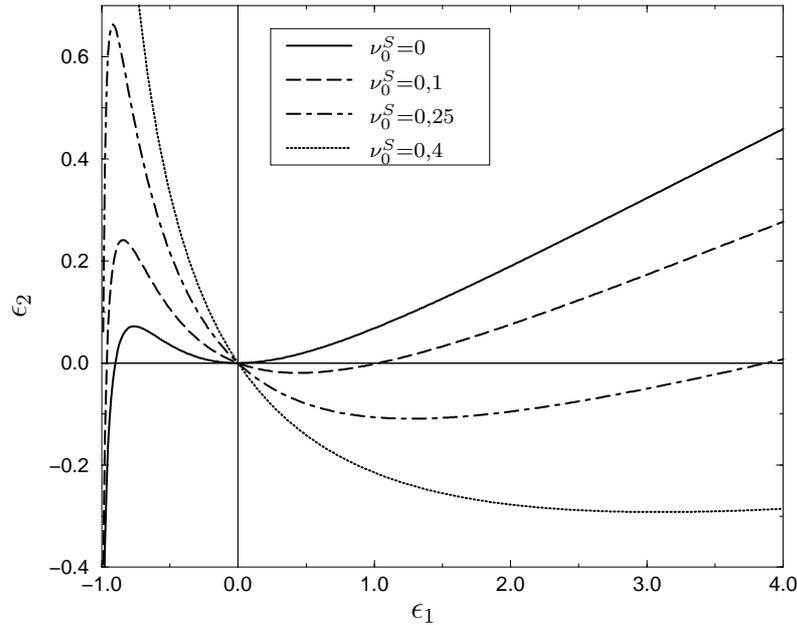


Abbildung 4.4: Querdehnung über Längsdehnung bei verschiedener Wahl der Querkontraktionszahl ν_0^S beim Gesetz vom *Flory*-Typ

bei jeder beliebigen Längsdehnung, wie aus den entsprechenden Gleichungen (4.46) bzw. (4.48) leicht abzulesen ist.

Anmerkung: Durch grafisches Auftragen der Werte der impliziten Dehnungsbeziehungen bei vorgegebener Längsdehnung ϵ_1 und Variation der Querdehnung ϵ_2 stellt man leicht fest, daß bei allen Materialmodellen nur eine Nullstelle im physikalisch relevanten Bereich $\epsilon_2 > -1$ auftritt. Demnach existiert bei gegebenem ϵ_1 nur eine einzige interessierende Lösung für ϵ_2 . Der umgekehrte Fall gilt jedoch nicht. Beim Gesetz vom *Flory*-Typ und beim modifizierten *Ogden*-Modell existieren bei vorgegebener Querdehnung ϵ_2 mehrere relevante Lösungen für ϵ_1 , siehe Abbildung 4.2.

4.6 Diskussion der Ergebnisse

Mit der hier durchgeführten Untersuchung konnte gezeigt werden, daß Elastizitätsgesetze, die eine konstitutive Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion in rein isochore und rein volumetrische Anteile verwenden, im einaxialen Zug-/Druckversuch bei größeren volumetrischen Dehnungen prinzipiell unphysikalische Effekte aufweisen. Hierbei wurde das in modifizierten Invarianten formulierte Gesetz vom *Flory*-Typ und das in modifizierten Eigenwerten formulierte modifizierte *Ogden*-Modell untersucht. Bei diesen beiden Materialgesetzen unterscheiden sich die Erweiterungsfunktionen zur Berücksichtigung der Kompressibilität, so daß diese Effekte nicht auf die Wahl des volumetrischen Erweiterungsterms zurückzuführen ist. Untersucht man einen reinen Kompressionsversuch oder einen reinen Scherungsversuch (isochore

Deformation), so treten diese unrealistischen Deformationen nicht auf. Ein allgemeiner Deformationszustand setzt sich jedoch sowohl aus isochoren als auch aus volumetrischen Anteilen zusammen, so daß zu erwarten ist, daß die beobachteten unphysikalischen Effekte auch dort auftreten.

Aufgrund der einfacheren Struktur der sich ergebenden Spannungs- und Elastizitätstensoren werden die Materialgesetze, die eine Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion vornehmen, bei der numerischen Behandlung nahezu inkompressibler Materialien häufig eingesetzt. Für nahezu inkompressible bzw. moderat kompressible Materialien treten die festgestellten unphysikalischen Effekte erst in Deformationsbereichen auf, die nicht mehr von praktischem Interesse sind. Deshalb lassen sich diese Elastizitätsgesetze bei der numerische Berechnung dieser Materialien einsetzen.

Sollen jedoch stark kompressible Materialien beschrieben werden, eignen sich die Materialgesetze, die von einer isochoren/volumetrischen Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion ausgehen, aufgrund ihrer physikalischen Unzulänglichkeiten nicht für die Behandlung finiter Deformationen. Die untersuchten Materialgesetze, die nicht von dieser Aufspaltung ausgehen, wie z. B. das Gesetz von *Simo & Pister* oder das *Ogden-Modell*, liefern auch bei finiten Deformationen physikalisch sinnvolle Ergebnisse. Dies gilt sowohl für nahezu inkompressible als auch für stark kompressible Materialien.

Eine Möglichkeit, die beschriebenen Probleme zu vermeiden, besteht darin, einen Kopplungsterm zwischen dem isochoren und dem volumetrischen Anteil der Verzerrungsenergiefunktion einzuführen. Allgemeine Ansätze dieser Art sind bei *Peng & Landel* [55] und *Ogden* [52] zu finden. Konkrete Ansätze werden von *van den Bogert* [10] vorgestellt und miteinander verglichen. Allerdings macht ein solcher Koppelterm den Vorteil der automatischen Aufspaltung der Spannungs- und Elastizitätstensoren in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil zunichte. Außerdem ist die Bestimmung der Materialparameter, die in diesem Kopplungsterm auftreten, sehr schwierig. Deshalb erscheint diese Vorgehensweise für konkrete Aufgabenstellungen nicht praktikabel.

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung finiter elastischer Deformationen in porösen Festkörperskeletten. Aufgrund ihrer Matrixstruktur können diese Festkörperskelette große volumetrische Deformationen erfahren. Eine Anwendung der Elastizitätsgesetze, die von der beschriebenen isochoren/volumetrischen Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion ausgehen, ist deshalb hier nicht möglich. Zur Behandlung finiter Deformationen in porösen Festkörperskeletten wird deshalb im weiteren eine Verzerrungsenergiefunktion vom *Neo-Hooke-Typ* (4.26) bzw. vom *Ogden-Typ* (4.29) in Kombination mit einer geeigneten Erweiterungsfunktion verwendet. Diese Erweiterungsfunktion muß dabei in der Lage sein, finite Volumendeformationen im porösen Festkörperskelett zu beschreiben. Das Festkörpermaterial selbst wird als materiell inkompressibel betrachtet.

Kapitel 5

Ein neues Elastizitätsgesetz für poröse Festkörper

Trotz der angenommenen materiellen Inkompressibilität des Festkörpermaterials können große Volumendehnungen im porösen Festkörperskelett auftreten. Volumenänderungen entstehen dabei durch Porositätsänderungen, d. h. durch Deformation der Porenstruktur. Die in den Porenräumen enthaltene Flüssigkeit kann in Porenkanälen durch das Festkörperskelett transportiert werden. Betrachtet man zunächst einen leeren porösen Festkörper, so ist dessen mechanisches Verhalten einem nicht-porösen kompressiblen Festkörper sehr ähnlich. Der Extraspannungstensor eines elastischen porösen Festkörpers weist deshalb eine ähnliche Struktur auf wie der Spannungstensor eines kompressiblen nicht-porösen elastischen Festkörpers.

Während bei einem nicht-porösen kompressiblen Festkörper theoretisch eine Volumenkompression bis auf einen singulären Punkt möglich ist, ist dies bei einem porösen Festkörper mit materiell inkompressiblem Festkörpermaterial nicht möglich. Hier existiert der sogenannte **Kompressionspunkt**. Dieser Deformationszustand ist erreicht, wenn durch eine Volumenkompression alle Poren des Festkörperskeletts geschlossen sind. Eine weitere Volumenkompression ist dann aufgrund der Inkompressibilität des Festkörpermaterials nicht mehr möglich, vergleiche hierzu auch *Ehlers & Eipper* [29]. Andererseits können die Poren aber theoretisch unendlich aufgeweitet werden, so daß sehr große Volumendehformationen in Extensionsbereich auftreten können. Die theoretischen Grenzzustände der Volumenkompression auf den Kompressionspunkt bzw. der unendlichen Porenaufweitung sind jedoch nur mit betragsmäßig unendlich großen hydrostatischen Spannungen erreichbar. Dieser Sachverhalt wird in Abbildung 5.1 näher erläutert.

Mit der integrierten Volumenbilanz (3.24) der Festkörperphase und der Bedingung $0 < n^S < 1$ für den Volumenanteil des Festkörpers ist der Wertebereich für die *Jacobi*-Determinante des Deformationsgradienten somit auf den Bereich

$$n_{0S}^S < J_S < \infty \quad (5.1)$$

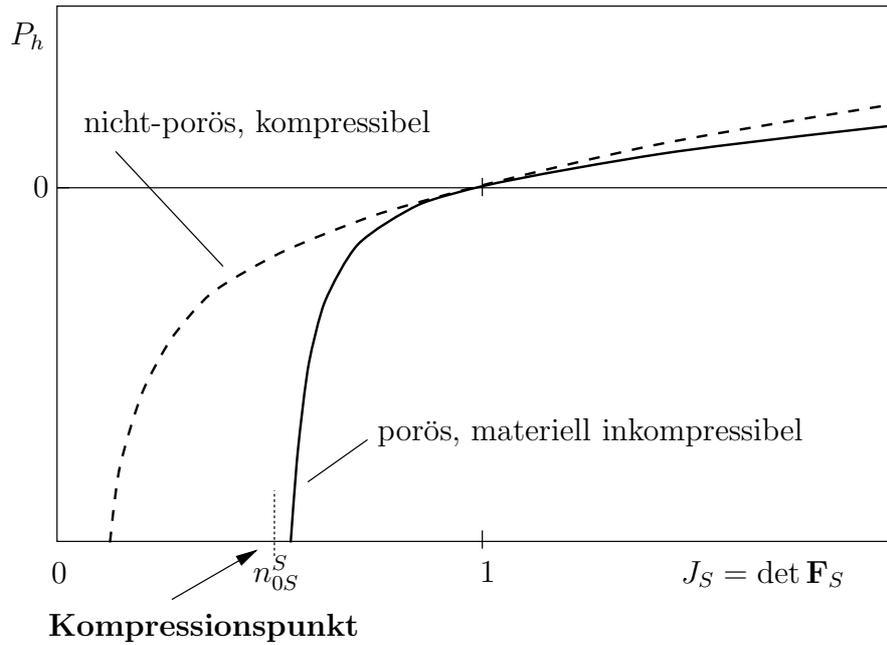


Abbildung 5.1: Hydrostatische Extraspannung $P_h = \frac{1}{3} \mathbf{T}_E^S \cdot \mathbf{I}$ bei reiner Volumendehnung; beim nicht-porösen Festkörper entsprechen die Extraspannungen den Gesamtspannungen \mathbf{T}^S

begrenzt. Der Kompressionspunkt wird demnach gerade dann erreicht, wenn die *Jacobi*-Determinante den Wert des Festkörperanfangsvolumenanteils n_{0S}^S annimmt. In diesem Fall verschwindet gerade die Porosität $n^F = 1 - n^S$ der Festkörpermatrix.

Dieses mechanische Verhalten der Festkörperstruktur muß mit einem geeigneten Elastizitätsgesetz berücksichtigt werden. Ein wichtiger Punkt bei der Entwicklung eines neuen Materialgesetzes zur Beschreibung poröser Festkörper (unter Berücksichtigung des Kompressionspunktes) ist die thermodynamische Konsistenz der Modellformulierung. Der Weg über die Einführung deformationsabhängiger Materialparameter in ein bekanntes Elastizitätsgesetz wird in dieser Arbeit nicht besprochen, da dieses Vorgehen im allgemeinen thermodynamische Restriktionen verletzt. Die Behandlung des elastischen Materialverhaltens in porösen Festkörpern erfordert vielmehr die Konstruktion einer geeigneten Verzerrungsenergiefunktion, die alle physikalischen Anforderungen erfüllt.

Würde man direkt ein aus der Mechanik nicht-poröser Festkörper bekanntes Materialgesetz zur Berechnung poröser Festkörper verwenden, so könnte der Kompressionspunkt bei großer volumetrischen Deformationen überschritten werden. Wobei dann die Forderung nach materieller Inkompressibilität des Festkörpermaterials verletzt würde.

Da große Volumendehnungen im Festkörperskelett auftreten können, ist auch eine Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion in einen rein isochoren und einen rein volumetrischen Anteil nicht sinnvoll, da dies bei finiten Deformationen zu unphysi-

kalischen Deformationszuständen führen kann, siehe Kapitel 4. Im weiteren werden deshalb ein kompressibles *Neo-Hooke*-Modell mit der Verzerrungsenergiefunktion

$$W^S = \frac{1}{2} \mu^S (I_1 - 3) - \mu^S \ln J_S + U^S(J_S) \quad (5.2)$$

und ein kompressibles *Ogden*-Modell mit der Verzerrungsenergiefunktion

$$W^S = \mu^S \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\mu_j^*}{\alpha_j} \left(\lambda_1^{\alpha_j/2} + \lambda_2^{\alpha_j/2} + \lambda_3^{\alpha_j/2} - 3 \right) - \mu_j^* \ln J_S \right] + U^S(J_S) \quad (5.3)$$

betrachtet. Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß mit λ_i die Eigenwerte der *Cauchy-Green*-Deformationstensoren \mathbf{C}_S bzw. \mathbf{B}_S bezeichnen werden. Diese sind die Eigenstreckungen (Eigenwerte des Deformationsgradienten \mathbf{F}_S). Dies führt zum Faktor $\frac{1}{2}$ beim Exponenten in der Verzerrungsenergiefunktion des *Ogden*-Modells. Ein Vorteil dieser Darstellung liegt in der einfacheren Form der entstehenden Gleichungen, was im folgenden ersichtlich wird. Der Term $(-\mu^S \ln J_S)$ bzw. $(-\mu_j^* \ln J_S)$ in der Verzerrungsenergiefunktion W^S garantiert jeweils Spannungsfreiheit im undeformierten Zustand. Volumetrische Deformationen werden hauptsächlich in der Erweiterungsfunktion $U^S(J_S)$ berücksichtigt. Es muß aber festgestellt werden, daß aber auch die übrigen Terme in (5.2) und (5.3) noch volumetrische Deformationsanteile enthalten, da keine Aufspaltung der Verzerrungsenergiefunktion in rein isochore und rein volumetrische Anteile vorgenommen wird. Mit der Funktion $U^S(J_S)$ muß dann auch der physikalische Effekt des Kompressionspunktes und damit der Beschränkung (5.1) für J_S beschrieben werden. Hierbei sind noch diverse physikalische Anforderungen an U^S und die daraus abgeleiteten Spannungen zu erfüllen.

Die im weiteren vorgestellten Elastizitätsgesetze eignen sich sowohl zur Berechnung fluidgesättigter poröser Festkörper als auch zur Berechnung leerer poröser Festkörperskelette. Im zweiten Fall kann das mechanische Verhalten der Fluidkomponente in den Bilanzgleichungen vernachlässigt werden. Das Matrixmaterial wird jeweils als materiell inkompressibel angesehen.

5.1 Physikalische Anforderungen an den volumetrischen Erweiterungsterm

Ausgehend von der Spannungsbeziehung (3.47) und der Ableitungsregel (4.10) für die *Jacobi*-Determinante erhält man mit dem Ausdruck $\partial U^S / \partial J_S$ die hydrostatischen *Cauchy*-Spannungen, die sich aus dem Erweiterungsterm U^S ergeben. Mit dem volumetrischen Erweiterungsterm U^S und den daraus resultierenden hydrostatischen Spannungen lassen sich physikalisch relevante Anforderungen an das Materialmodell formulieren.

Undeformierter Zustand

Die Verzerrungsenergie im natürlichen (undeformierten) Zustand muß verschwinden. Außerdem muß dieser Zustand spannungsfrei sein. Dies führt auf die auch für nicht-poröse Festkörper geltende Forderung

$$\left. \begin{array}{l} U^S = 0 \\ \frac{\partial U^S}{\partial J_S} = 0 \end{array} \right\} \text{ für } J_S = 1 . \quad (5.4)$$

Kompressionspunkt

Der zum Kompressionspunkt gehörende Deformationszustand darf nur mit einer unendlich großen Verzerrungsenergie und mit einer unendlich großen hydrostatischen Druckspannung erreichbar sein, so daß

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} U^S \rightarrow +\infty \\ \frac{\partial U^S}{\partial J_S} \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \text{ für } J_S \rightarrow n_{0S}^S} \quad (5.5)$$

gelten muß. Dies ist die zentrale Forderung bei der Beschreibung poröser Festkörper mit materiell inkompressiblem Matrixmaterial. Diese Forderung ersetzt entsprechende Grenzwertbeziehungen im Bereich finiter Volumenkompression ($J_S \rightarrow 0$) bei nicht-porösen kompressiblen Festkörpern.

Betrachtet man ein gewähltes repräsentatives Volumenelement eines porösen Festkörperskeletts, so nimmt der anfängliche Festkörpervolumenanteil bei Vorgabe eines kleiner werdenden n_{0S}^S ab. Damit vergrößert sich das Porenvolumen. Für $n_{0S}^S \rightarrow 0$ wird der Kompressionspunkt demzufolge erst bei einer Volumenkompression auf einen singulären Punkt erreicht. In diesem Fall muß das Elastizitätsgesetz formal mit finiten Elastizitätsgesetzen für kompressible nicht-poröse Festkörper übereinstimmen, da diese im Grenzfall unendlich großen hydrostatischen Drucks eine Volumendeformation auf einen Punkt liefern. Der volumetrische Erweiterungsterm U^S muß aus Kompatibilitätsgründen deshalb für $n_{0S}^S = 0$ formal mit bekannten Ansätzen der Festkörpermechanik übereinstimmen, wie z. B. dem Ansatz von *Ogden* [51], der auch in (4.41) enthalten ist. Weiterhin bedingt die Grenzwertforderung (5.5), daß bei Vorgabe von $n_{0S}^S \rightarrow 1$ ein „einseitig inkompressibles“ Elastizitätsgesetz für das Festkörperskelett entstehen muß. In diesem Fall ist eine Volumendeformation im Kompressionsbereich nicht mehr möglich. Eine Volumenextension durch Aufweitung der Poren kann hingegen trotzdem auftreten.

Unendliche Porenaufweitung

Eine unendliche Volumenaufweitung eines porösen Festkörpers darf nur mit unendlich großer Verzerrungsenergie und einer unendlich großen hydrostatischen Spannung

möglich sein:

$$\left. \begin{array}{l} U^S \rightarrow +\infty \\ \frac{\partial U^S}{\partial J_S} \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \text{ für } J_S \rightarrow +\infty . \quad (5.6)$$

Definition der Materialparameter

Weiterhin muß bei der Konstruktion des volumetrischen Erweiterungsterms U^S die übliche Definition der *Lamésche* Konstanten Λ^S durch

$$\Lambda^S = \left. \frac{\partial^2 U^S}{\partial J_S^2} \right|_{J_S=1} \quad (5.7)$$

aus Kompatibilitätsgründen berücksichtigt werden. Damit ergibt sich aus der Auswertung der zweifachen Ableitung der gesamten Verzerrungsenergiefunktion W^S im undeformierten Zustand die übliche Definition des Kompressionsmoduls durch

$$k^S = \left. \frac{\partial^2 W^S}{\partial J_S^2} \right|_{J_S=1} = \frac{2}{3} \mu^S + \Lambda^S .$$

Dies ermöglicht den Übergang zu einem Elastizitätsgesetz vom *Hookeschen* Typ bei einer Linearisierung der Materialgesetze für den Bereich kleiner Deformationen.

Die auftretenden Materialparameter müssen noch experimentell ermittelt werden. Sie sind Parameter der porösen Festkörperstruktur und nicht des Matrixmaterials. Versuchsproben mit unterschiedlicher Anfangsporosität n_{0S}^S weisen demnach ein unterschiedliches mechanisches Verhalten auf. Die Materialparameter können deshalb bei identischem Festkörpermateriale, aber unterschiedlicher Porosität des Festkörperskeletts erheblich differieren.

Konvexitätsbedingung

Um Eindeutigkeit der Lösung des Materialmodells zu gewährleisten, wird gefordert, daß die gesamte Verzerrungsenergiefunktion W^S polykonvex ist.

Die zweite Ableitung der Terme $(-\mu^S \ln J_S)$ in der Verzerrungsenergiefunktion des *Neo-Hooke*-Modells (5.2) bzw. $(-\sum_{j=1}^3 \mu_j^* \ln J_S)$ im *Ogden*-Modell (5.3) bezüglich J_S liefert einen stets positiven Wert. Damit stellt die Forderung nach einer konvexen Funktion $U^S(J_S)$ eine hinreichende Bedingung zur Erfüllung der Polykonvexität von W^S dar:

$$\frac{\partial^2 U^S}{\partial J_S^2} > 0 \quad \forall \quad J_S > n_{0S}^S . \quad (5.8)$$

Konvexität von U^S bedeutet anschaulich, daß die hieraus resultierenden hydrostatischen Spannungen keine Extrema besitzen: $\frac{\partial}{\partial J_S} \left(\frac{\partial U^S}{\partial J_S} \right) \neq 0$.

5.2 Ein neuer volumetrischer Erweiterungsterm

Ogden [51] schlug zur Beschreibung finiter Elastizität gummiartiger, nicht-poröser Festkörper einen volumetrischen Erweiterungsterm der Form

$$\tilde{U}^S = \frac{\Lambda^S}{\gamma^2} \left((J_S)^\gamma - 1 - \gamma \ln J_S \right) \quad (5.9)$$

vor. Dieser Ansatz wurde bereits im Ogden-Modell (4.41) für nicht-poröse Festkörper mit $\gamma := -\beta$ verwendet.

Basierend auf diesem Ansatz läßt sich durch Hinzufügen und Modifikation bestehender Terme ein volumetrischer Erweiterungsterm konstruieren, der alle gestellten Anforderungen (5.4) - (5.8) erfüllt.

Eine Modifikation des *Logarithmus*-Terms in (5.9) durch einen Ausdruck

$$\ln \frac{J_S - n_{0S}^S}{1 - n_{0S}^S}$$

erfüllt zwar die geforderten Bedingungen für die Verzerrungsenergiefunktion (unendliche Verzerrungsenergie am Kompressionspunkt, Verschwinden der Verzerrungsenergie im undeformierten Zustand). Zur Erfüllung der Forderung nach Spannungsfreiheit im undeformierten Zustand ist jedoch die Hinzunahme eines weiteren Terms notwendig, siehe (5.10). Die Definition der Materialparameter entsprechend (5.7) erfordert weiterhin die Modifikation des Vorfaktors in (5.9).

Zur Beschreibung finiter elastischer Deformationen in porösen Festkörpern aus materiell inkompressiblem Festkörpermaterial erhält man damit den volumetrischen Erweiterungsterm der Verzerrungsenergiefunktion

$$U^S = \frac{\Lambda^S}{\gamma \left(\gamma - 1 + \frac{1}{(1 - n_{0S}^S)^2} \right)} \left((J_S)^\gamma - 1 - \gamma \ln \frac{J_S - n_{0S}^S}{1 - n_{0S}^S} + \gamma n_{0S}^S \frac{J_S - 1}{1 - n_{0S}^S} \right). \quad (5.10)$$

Die Forderung nach Konvexität von U^S bedingt $\gamma \geq 1$. Deshalb erweist sich auch die Einführung des positiven Parameters γ statt β in (4.41) als vorteilhaft.

Die sich aus dem volumetrischen Erweiterungsterm (5.10) ergebenden hydrostatischen *Cauchy*-Spannungen erhält man zu

$$\frac{\partial U^S}{\partial J_S} = \frac{\Lambda^S}{\left(\gamma - 1 + \frac{1}{(1 - n_{0S}^S)^2} \right)} \left((J_S)^{\gamma-1} - \frac{1}{J_S - n_{0S}^S} + \frac{n_{0S}^S}{1 - n_{0S}^S} \right). \quad (5.11)$$

Wie aus (5.11) leicht ersichtlich ist, ist der undeformierte Zustand spannungsfrei und der Kompressionspunkt läßt sich nur mit einer unendlich großen hydrostatischen Spannung erreichen.

Durch Wahl der Anfangsporosität $n_{0S}^S = 0$ erhält man die ursprüngliche Form (5.9) des volumetrischen Erweiterungsterms und die daraus resultierenden Spannungen für ein nicht-poröses, kompressibles Materialmodell.

Anmerkung: Der Ansatz $\tilde{U}^S = \frac{1}{2}\Lambda^S(\ln J_S)^2$ von *Simo & Pister* (siehe auch (4.37)) verliert bei kompressiblen nicht-porösen Festkörpern (dies entspricht formal $n_{0S}^S = 0$, siehe Erläuterung zum Kompressionspunkt) seine Konvexität bei $J_S = \exp(1)$. Derartig große Volumendehnungen im Extensionsbereich treten in der praktischen Berechnung nicht-poröser Materialien im allgemeinen aber nicht auf. Jegliche Modifikation des *Simo & Pister*-Ansatzes zur Berücksichtigung des Kompressionspunktes in porösen Festkörpern führt zu einer Verschiebung der Konvexitätsgrenze zu kleineren Volumendehnungen J_S . Der Verlust der Konvexität kann dann auch bei praktisch relevanten Volumendehnungen im Extensionsbereich auftreten. Aufgrund dieser Eigenschaft wird eine Modifikation eines solchen Ansatzes hier nicht verwendet.

5.3 Ein Neo-Hooke-Modell für poröse Festkörper

In diesem Abschnitt wird der neu entwickelte volumetrische Erweiterungsterm (5.10) mit dem *Neo-Hooke*-Ansatz (5.2) kombiniert. Damit erhält man die Verzerrungsenergiefunktion eines kompressiblen *Neo-Hooke*-Modells zur Beschreibung großer Deformationen in porösen Festkörpern mit materiell inkompressiblem Matrixmaterial. Dieses Elastizitätsgesetz wird im weiteren kurz als *Neo-Hooke*-Modell für poröse Festkörper bezeichnet. Die Berücksichtigung des Kompressionspunktes wird durch den vorgestellten volumetrischen Erweiterungsterm gewährleistet. Zur Vereinfachung und um die Struktur der Gleichungen möglichst einfach zu halten, wird bei diesem Modell der Materialparameter $\gamma = 1$ fest gewählt. Die Auswirkung dieses Parameters auf das mechanische Verhalten wird im nächsten Abschnitt bei der Kombination des volumetrischen Erweiterungsterms mit dem *Ogden*-Modell ersichtlich.

Die Verzerrungsenergiefunktion des *Neo-Hooke*-Modells für poröse Medien ergibt sich zu

$$W^S = \frac{1}{2}\mu^S(I_1 - 3) - \mu^S \ln J_S + \Lambda^S(1 - n_{0S}^S)^2 \left(\frac{J_S - 1}{1 - n_{0S}^S} - \ln \frac{J_S - n_{0S}^S}{1 - n_{0S}^S} \right). \quad (5.12)$$

5.3.1 Spannungstensoren

Daraus enthält man entsprechend der Spannungsbeziehung (3.49) den Extraanteil des 2. *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensors zu

$$\mathbf{S}_E^S = \mu^S(\mathbf{I} - \mathbf{C}_S^{-1}) + \Lambda^S(1 - n_{0S}^S)^2 \left(\frac{J_S}{1 - n_{0S}^S} - \frac{J_S}{J_S - n_{0S}^S} \right) \mathbf{C}_S^{-1} \quad (5.13)$$

und den Extraanteil des *Kirchhoffschen* Spannungstensors aus (3.50) bzw. durch kovarianten Vorwärtstransport von \mathbf{S}_E^S zu

$$\boldsymbol{\tau}_E^S = \mu^S (\mathbf{B}_S - \mathbf{I}) + \Lambda^S (1 - n_{0S}^S)^2 \left(\frac{J_S}{1 - n_{0S}^S} - \frac{J_S}{J_S - n_{0S}^S} \right) \mathbf{I}. \quad (5.14)$$

5.3.2 Elastizitätstensoren

Der Elastizitätstensor der Referenzkonfiguration berechnet sich durch zweifache Ableitung der Verzerrungsenergiefunktion entsprechend (3.52) zu:

$$\overset{4}{\mathbf{B}} = 2 c_1 (\mathbf{C}_S^{-1} \otimes \mathbf{C}_S^{-1})^{\overset{23}{T}} + c_2 (\mathbf{C}_S^{-1} \otimes \mathbf{C}_S^{-1}). \quad (5.15)$$

Durch kovarianten Vorwärtstransport (3.55) dieses vierstufigen Tensors ergibt sich der Elastizitätstensor der Momentankonfiguration:

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = 2 c_1 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{23}{T}} + c_2 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}). \quad (5.16)$$

Die Koeffizienten c_1 und c_2 sind deformationsabhängige Größen:

$$\begin{aligned} c_1(J_S) &= \left(\mu^S - J_S \frac{\partial U^S}{\partial J_S} \right) \\ &= \left(\mu^S - \Lambda^S (1 - n_{0S}^S) J_S \frac{J_S - 1}{J_S - n_{0S}^S} \right), \\ c_2(J_S) &= \left(J_S \frac{\partial U^S}{\partial J_S} + J_S^2 \frac{\partial^2 U^S}{\partial J_S^2} \right) \\ &= \Lambda^S \left((1 - n_{0S}^S) J_S \frac{J_S^2 - 2 n_{0S}^S J_S + n_{0S}^S}{(J_S - n_{0S}^S)^2} \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Das *Neo-Hooke*-Modell besitzt den Vorteil, daß der elastische Tangentenoperator der Momentankonfiguration aus vierstufigen Fundamentaltensoren aufgebaut werden kann. Lediglich die Koeffizienten c_1 und c_2 sind deformationsabhängig. Dies ermöglicht eine sehr effiziente Auswertung des Elastizitätstensors im Rahmen einer numerischen Berechnung.

5.4 Ein *Ogden*-Modell für poröse Festkörper

Kombiniert man den volumetrischen Erweiterungsterm (5.10) der Verzerrungsenergiefunktion mit dem *Ogden*-Ansatz (5.3), so erhält man die Verzerrungsenergiefunktion eines kompressiblen *Ogden*-Modells für poröse Medien. Mit diesem Elastizitätsgesetz können finite Deformationen in porösen Festkörpern unter Berücksichtigung

des Kompressionspunktes beschrieben werden. Die Verzerrungsenergiefunktion für dieses Modell findet man zu

$$\begin{aligned}
W^S &= \mu^S \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\mu_j^*}{\alpha_j} \left(\lambda_1^{\alpha_j/2} + \lambda_2^{\alpha_j/2} + \lambda_3^{\alpha_j/2} - 3 \right) - \mu_j^* \ln J_S \right] \\
&+ \frac{\Lambda^S}{\gamma \left(\gamma - 1 + \frac{1}{(1 - n_{0S}^S)^2} \right)} \left((J_S)^\gamma - 1 - \gamma \ln \frac{J_S - n_{0S}^S}{1 - n_{0S}^S} + \gamma n_{0S}^S \frac{J_S - 1}{1 - n_{0S}^S} \right).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

5.4.1 Spannungstensoren

Aus der Spannungsbeziehung (3.49) und mit der Ableitungsregel

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{C}_S} = \mathbf{M}_i ,$$

erhält man für das in Eigenwerten formulierte Elastizitätsgesetz den Extraanteil des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors zu

$$\mathbf{S}_E^S = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W^S}{\partial \lambda_i} \mathbf{M}_i . \tag{5.19}$$

Dabei ist \mathbf{M}_i ein zu \mathbf{C}_S gehöriger Eigentensor. Unter Berücksichtigung der Ableitungsregel

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{B}_S} = \mathbf{N}_i ,$$

wobei \mathbf{N}_i ein zu \mathbf{B}_S gehöriger Eigentensor ist, läßt sich der Kirchhoffsche Extra-Spannungstensor direkt aus (3.50) berechnen:

$$\boldsymbol{\tau}_E^S = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W^S}{\partial \lambda_i} \lambda_i \mathbf{N}_i . \tag{5.20}$$

Hieraus ist auch sofort das kovariante Transportverhalten der Eigentensoren ersichtlich:

$$\mathbf{F}_S \mathbf{M}_i \mathbf{F}_S^T = \lambda_i \mathbf{N}_i . \tag{5.21}$$

Die Verwendung der Eigenwerte der *Cauchy-Green-Deformationstensenoren* liefert hier einfache und übersichtliche Ergebnisse. Dies gilt insbesondere bei der Ableitung der Eigenwerte nach den Deformationstensenoren. Bei Verwendung der Eigenstreckungen (Eigenwerte von \mathbf{F}_S) würden die Ableitungen ein entsprechend komplizierteres Aussehen haben.

Die konkrete Darstellung der hergeleiteten Spannungsbeziehung für den *Kirchhoff-Extraspannungstensor* liefert für das *Ogden-Modell* für poröse Festkörper mit der Ableitung der *Jacobi-Determinanten*

$$\frac{\partial J_S}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{1}{2 \lambda_i} J_S$$

den *Kirchhoffschen Extraspannungstensor* zu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^S &= \mu^S \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_j^* \left(\lambda_i^{\alpha_j/2} - 1 \right) \mathbf{N}_i \\ &+ \frac{1}{\gamma - 1 + \frac{1}{(1 - n_{0S}^S)^2}} \left((J_S)^\gamma - \frac{J_S}{J_S - n_{0S}^S} + \frac{n_{0S}^S J_S}{1 - n_{0S}^S} \right) \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

An dieser konkreten Spannungsbeziehung läßt sich auch der Einfluß des zusätzlichen Materialparameters γ auf die Spannungen untersuchen.

5.4.2 Elastizitätstensoren

Die Berechnung des Elastizitätstensors (3.52)

$$\mathbf{B}^4 = 4 \frac{\partial^2 W^S}{\partial \mathbf{C}_S \otimes \partial \mathbf{C}_S}$$

der Referenzkonfiguration wird für eine in Eigenwerten formulierte Verzerrungsenergiefunktion zu:

$$\mathbf{B}^4 = 4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 W^S}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} (\mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}_j) + 4 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W^S}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial \mathbf{C}_S}. \quad (5.23)$$

Die Ableitung eines Eigentensors \mathbf{M}_i nach dem rechten *Cauchy-Green-Deformations-tensor* \mathbf{C}_S läßt sich aus der von *Morman* [48] angegebenen Form (3.16) unter Beachtung der Rechenregeln für Eigenwerte und Eigentensoren sowie einiger algebraischer Umformungen direkt angeben. Man erhält:

$$\frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial \mathbf{C}_S} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k} \left((\mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}_k)^{\frac{23}{T}} + (\mathbf{M}_k \otimes \mathbf{M}_i)^{\frac{23}{T}} \right). \quad (5.24)$$

Diese Darstellung läßt sich durch einige Umformungen in die von *Simo & Taylor* [63] bzw. *Miehe* [45] angegebene Form überführen und stimmt mit dieser auch exakt überein. In [16, 17] geben *Chadwick & Ogden* eine in Eigenvektoren formulierte Darstellung an, die ebenfalls in die angegebene Form überführt werden kann.

Betrachtet man einen ebenen Verzerrungszustand, bei dem der Eigenvektor \mathbf{m}_3 senkrecht auf der betrachteten Ebene steht, so ist $\mathbf{M}_3 = \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3$ ein bekannter und konstanter Tensor. Für die Ableitung der Eigentensoren sind dann nur noch die in der betrachteten Ebene liegenden Anteile interessant, und man erhält die vereinfachte Beziehung

$$\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \mathbf{C}_S} = -\frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial \mathbf{C}_S} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left((\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2)^{23} + (\mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1)^{23} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{M}_3}{\partial \mathbf{C}_S} = \mathbf{0}. \quad (5.25)$$

Dieses Ergebnis läßt sich sowohl direkt aus (5.24) als auch durch Ableitung der zu (3.18) analogen Darstellung für die Eigentensoren \mathbf{M}_i im ebenen Fall herleiten. Auch dieses Ergebnis läßt sich in die von *Miehe* [45, 46] angegebene Darstellung überführen.

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß die angegebenen Beziehungen für die Eigentensoren und deren Ableitungen sich auf den Fall unterschiedlicher Eigenwerte beschränken. Der Sonderfall gleicher Eigenwerte läßt sich durch numerische Störung der Eigenwerte sehr effizient auf den allgemeinen Fall unterschiedlicher Eigenwerte zurückführen, wie bereits in Kapitel 3.1.1 erläutert wurde. Eine direkte Methode zur Berechnung von Eigentensoren und deren Ableitung für den Fall gleicher Eigenwerte wird von *Carlson & Hoger* [15] vorgestellt. *Chadwick & Ogden* [17] leiten diesen Spezialfall durch eine Grenzwertuntersuchung des allgemeinen Falls her.

Der kovariante Vorwärtstransport (3.55) des referentiellen Elastizitätstensors liefert den Elastizitätstensor der Momentankonfiguration. Mit dem Transportverhalten (5.21) für die Eigentensoren erhält man

$${}^4\mathbf{C} = 4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 W^S}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \lambda_i \lambda_j (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j) + 4 \sum_{i=1}^3 4 \frac{\partial W^S}{\partial \lambda_i} \mathbf{N}_i, \quad (5.26)$$

wobei ${}^4\mathbf{N}_i$ der Vorwärtstransport der Eigentensorableitung ist:

$$\begin{aligned} {}^4\mathbf{N}_i &= (\mathbf{F}_S \otimes \mathbf{F}_S)^{23} \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial \mathbf{C}_S} (\mathbf{F}_S^T \otimes \mathbf{F}_S^T)^{23} \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{\lambda_i \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} \left((\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_k)^{23} + (\mathbf{N}_k \otimes \mathbf{N}_i)^{23} \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Für den ebenen Verzerrungszustand ergeben sich entsprechende Vereinfachungen:

$${}^4\mathbf{N}_1 = -{}^4\mathbf{N}_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left((\mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_2)^{23} + (\mathbf{N}_2 \otimes \mathbf{N}_1)^{23} \right), \quad {}^4\mathbf{N}_3 = \mathbf{0}. \quad (5.28)$$

Auf eine konkrete Darstellung der Ableitungen der Verzerrungsenergiefunktion in den Elastizitätstensoren für das *Ogden-Modell* für poröse Medien wird hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

5.5 Linearisierung der Elastizitätsgesetze

Für den Fall kleiner Deformationen müssen die vorgestellten Materialgesetze in das bekannte Elastizitätsgesetz vom *Hookeschen* Typ überführbar sein. Führt man eine Linearisierung (*Taylor-Reihenentwicklung*) des 2. *Piola-Kirchhoff*-Extraspannungstensors um den undeformierten Zustand durch, so erhält man

$$(\mathbf{S}_E^S)_{lin} = \underbrace{\mathbf{S}_E^S|_{\mathbf{E}_S=\mathbf{0}}}_{\mathbf{0}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{S}_E^S}{\partial \mathbf{E}_S}}_{\mathbf{B}_{lin}^4}|_{\mathbf{E}_S=\mathbf{0}} (\mathbf{E}_S)_{lin} . \quad (5.29)$$

Für geometrisch lineare Betrachtungen läßt sich der Extraspannungszustand damit direkt mit Hilfe des konstanten linearen Elastizitätstensors aus der Verzerrung berechnen.

In der geometrisch linearen Theorie wird außerdem keine Unterscheidung zwischen den Spannungstensoren vorgenommen, so daß

$$\boldsymbol{\sigma}_E^S = (\mathbf{S}_E^S)_{lin} = (\mathbf{T}_E^S)_{lin} = (\boldsymbol{\tau}_E^S)_{lin} . \quad (5.30)$$

Für den linearisierten *Greenschen* Verzerrungstensor findet man

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S = (\mathbf{E}_S)_{lin} = \frac{1}{2} (\text{Grad}_S \mathbf{u}_S + \text{Grad}_S^T \mathbf{u}_S) . \quad (5.31)$$

Weiterhin stimmen die linearen Elastizitätstensoren der Referenzkonfiguration und der Momentankonfiguration überein, da diese jeweils für den undeformierten Zustand ausgewertet werden:

$$\mathbf{B}_{lin}^4 = \mathbf{C}_{lin}^4 . \quad (5.32)$$

Wertet man die entsprechenden Elastizitätstensoren für das vorgestellte *Neo-Hooke*-Modell für poröse Festkörper bzw. das *Ogden*-Modell für poröse Festkörper im undeformierten Zustand aus, so erhält man jeweils

$$\mathbf{B}_{lin}^4 = 2 \mu^S (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{23} + \Lambda^S (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) . \quad (5.33)$$

Der Materialparameter γ , der im *Ogden*-Modell enthalten ist, taucht im linearisierten Elastizitätstensor nicht mehr auf.

Damit erhält man die bekannte Spannungsbeziehung vom *Hookeschen* Typ:

$$\boldsymbol{\sigma}_E^S = \mathbf{B}_{lin}^4 \boldsymbol{\varepsilon}_S = 2 \mu^S \boldsymbol{\varepsilon}_S + \Lambda^S (\boldsymbol{\varepsilon}_S \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} . \quad (5.34)$$

Diese Spannungsbeziehung stimmt mit der Beziehung für nicht-poröse Festkörper überein. In der geometrisch linearen Theorie existiert demnach kein Unterschied im Aufbau der Elastizitätsgesetze für materiell inkompressible, poröse- und kompressible, nicht-poröse Materialien.

Kapitel 6

Konsistente Linearisierung der Bilanzgleichungen

In diesem Kapitel wird die Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen bereitgestellt. Die Linearisierung der orts- und zeitkontinuierlichen Gleichungen steht in engem Zusammenhang mit der Linearisierung der diskreten Gleichungen, die man nach einer Ortsdiskretisierung mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) und einer Zeitdiskretisierung erhält. Bei den hier behandelten elastischen Problemen erhält man die Linearisierung der diskreten Gleichungen direkt durch eine Orts- und Zeitdiskretisierung der Linearisierung der kontinuierlichen schwachen Formen der Bilanzgleichungen. Bei Problemen mit inneren Variablen (Plastizität, Viskoelastizität) ist eine Linearisierung eines auf Elementebene arbeitenden Algorithmus' notwendig.

Die Linearisierung der zu lösenden nichtlinearen Gleichungen ist eine Voraussetzung zur Formulierung effizienter Lösungsalgorithmen, die auf einer *Newton*-Iteration beruhen. Dabei ist es wichtig, daß die Linearisierung in konsistenter Weise durchgeführt wird. Hiermit wird eine Linearisierung aller in das Problem eingehenden Gleichungen bezüglich der unbekanntenen Größen bis zur gleichen Ordnung verstanden. Der Begriff der konsistenten Linearisierung wurde von *Hughes & Pister* [40] eingeführt. Bei *Marsden & Hughes* [44] wird dieses Konzept auf einige ausgesuchte Gleichungen angewandt. Die konsequente Anwendung der konsistenten Linearisierung auf das Gebiet der Kontinuumsmechanik und deren Anwendung im Rahmen der Finite-Elemente-Methode wird von *Wriggers* [72] behandelt.

Die schwachen Formen (3.75) und (3.76) der Bilanzgleichungen stellen die beschreibenden Gleichungen eines volumengekoppelten Mehrfeldproblems dar. Bei der Behandlung schwach gekoppelter Probleme, z. B. in der Thermomechanik, wird häufig eine unter dem Begriff „staggered solution“ bekannte Lösungsstrategie angewandt, siehe *Felippa & Park* [31]. Hierbei wird das gekoppelte System entkoppelt, beispielsweise in einen mechanischen und in einen thermischen Anteil. Diese beiden Teile werden dann gegeneinander iteriert. Bei der Lösung der mechanischen Gleichungen

werden die thermischen Größen konstant gehalten und umgekehrt. Man erhält dadurch den Vorteil, daß kleinere zu lösende Gleichungssysteme entstehen. Außerdem entfällt die konsistente Linearisierung der gegenseitigen Kopplung. Allerdings ist dieses Vorgehen nur bei schwacher gegenseitiger Kopplung sinnvoll anzuwenden, da zwei iterativ gelöste Gleichungssysteme gegeneinander relaxiert werden müssen.

Bei dem in dieser Arbeit behandelten volumengekoppelten Festkörper-Fluid-Problem handelt es sich jedoch um ein stark gekoppeltes System. Deshalb ist eine entkoppelte Berechnung des Deformationszustands und des Porenfluiddrucks nicht sinnvoll. Die beschreibenden Gleichungen des Problems werden deshalb simultan gelöst. Dies erfordert die konsistente Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen bezüglich aller unbekanntenen Feldgrößen.

6.1 Grundlagen

6.1.1 Linearisierung

Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik beruhen auf der Tatsache, daß sich eine *Taylor*-Reihenentwicklung auch auf Funktionsräume (*Banach*-Räume) ausdehnen läßt. Formal wird dies mit Hilfe eines *Gateaux*- oder *Frechet*-Differentials durchgeführt. Dies setzt voraus, daß die betrachteten Funktionen stetig und einmal stetig differenzierbar sind, was im weiteren angenommen wird. Bezüglich der mathematischen Grundlagen sei hier auf *Abraham, Marsden & Ratiu* [1] sowie *Marsden & Hughes* [44] verwiesen.

Eine zentrale Rolle beim Prozeß der Linearisierung spielt die Richtungsableitung (*Gateaux*-Ableitung) einer Funktion. Die Richtungsableitung einer skalarwertigen Funktion $f(\mathbf{z})$ eines Vektors \mathbf{z} an der Entwicklungsstelle $\bar{\mathbf{z}}$ in Richtung von $\Delta\mathbf{z}$ ist durch

$$Df(\bar{\mathbf{z}}) \cdot \Delta\mathbf{z} = \frac{d}{d\epsilon} \left[f(\bar{\mathbf{z}} + \epsilon \Delta\mathbf{z}) \right]_{\epsilon=0} \quad (6.1)$$

definiert, wobei ϵ ein skalarer Parameter ist. Die Richtungsableitung ist ein linearer Operator. Deshalb lassen sich die üblichen Rechenregeln der Differentialrechnung anwenden. Durch Anwendung der Kettenregel erhält man:

$$\begin{aligned} Df(\bar{\mathbf{z}}) \cdot \Delta\mathbf{z} &= \left[\frac{\partial f(\bar{\mathbf{z}} + \epsilon \Delta\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \cdot \frac{\partial(\bar{\mathbf{z}} + \epsilon \Delta\mathbf{z})}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=0} \\ &= \frac{\partial f(\bar{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{z}} \cdot \Delta\mathbf{z} . \end{aligned} \quad (6.2)$$

In analoger Weise läßt sich die Richtungsableitung für vektorwertige oder tensorwertige Funktionen \mathbf{f} definieren. Außerdem kann das vektorwertige Argument \mathbf{z} durch eine skalare Variable z ersetzt werden. Aus dem Zusammenhang wird dann die Bedeutung des Produkts „ \cdot “ ersichtlich. Entsprechendes gilt für Funktionen mit mehreren unabhängigen skalar- oder vektorwertigen Argumenten.

Mit Hilfe der Richtungsableitung läßt sich die Funktion $f(\mathbf{z})$ durch eine *Taylor-Reihe*

$$f(\mathbf{z}) = f(\bar{\mathbf{z}}) + Df(\bar{\mathbf{z}}) \cdot \Delta\mathbf{z} + R(\Delta\mathbf{z}) \quad (6.3)$$

approximieren, wobei für das Restglied

$$\lim_{|\Delta\mathbf{z}| \rightarrow 0} \frac{R}{|\Delta\mathbf{z}|} = 0 \quad \text{mit} \quad |\Delta\mathbf{z}|^2 = \Delta\mathbf{z} \cdot \Delta\mathbf{z} \quad (6.4)$$

gelten muß. Den linearen Anteil von $f(\mathbf{z})$ an der Entwicklungsstelle $\bar{\mathbf{z}}$ erhält man durch

$$Lf(\mathbf{z}) = f(\bar{\mathbf{z}}) + Df(\bar{\mathbf{z}}) \cdot \Delta\mathbf{z} . \quad (6.5)$$

Dies ist in Abbildung 6.1 für eine skalarwertige Funktion $f(z)$ dargestellt.

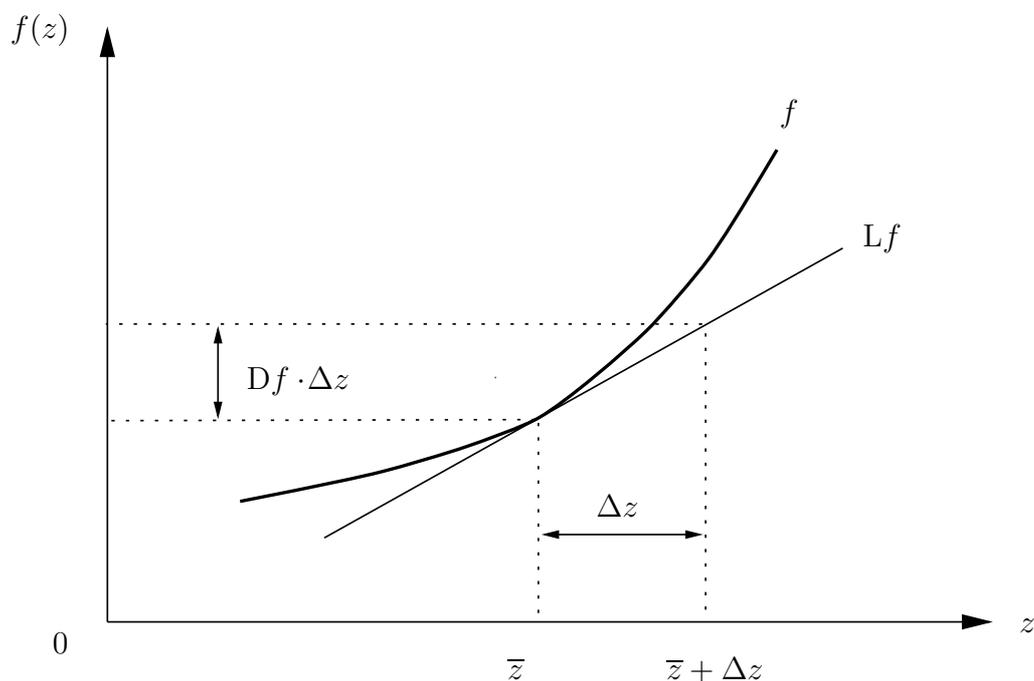


Abbildung 6.1: Geometrische Interpretation der Linearisierung einer Funktion $f(z)$

6.1.2 Newton-Verfahren

Der Linearisierungsprozeß ist Grundlage zur iterativen Lösung eines Gleichungssystems $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ mit Hilfe des *Newton-Verfahrens* (es können natürlich nur so viele Unbekannte in \mathbf{z} berechnet werden, wie Gleichungen in \mathbf{F} zur Verfügung stehen). Die Iterationsvorschrift (*Newton-Iterationsindex k*)

$$D\mathbf{F}(\mathbf{z}^k) \cdot \Delta\mathbf{z}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{z}^k) \quad (6.6)$$

zur Berechnung des Inkrements $\Delta \mathbf{z}^k$ mit anschließender Aufdatierung des Lösungsvektors

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \Delta \mathbf{z}^k \quad (6.7)$$

wird dann so lange wiederholt, bis Konvergenz der Lösung erreicht ist, d. h. das Residuum $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ im Rahmen einer vorgegebenen Toleranz erfüllt wird. Das *Newton*-Verfahren besitzt in der Nähe der Lösung eine quadratische Konvergenzordnung. Bei einer modifizierten Klasse von Verfahren, den vereinfachten *Newton*-Verfahren, wird die Tangente $D\mathbf{F}$ nicht in jedem Iterationsschritt neu berechnet, sondern über mehrere Iterationsschritte beibehalten. Ist die Funktion \mathbf{F} außerdem zeitabhängig, so muß in jedem Zeitschritt eines Zeitintegrationsverfahrens eine *Newton*-Iteration bis zur Konvergenz durchgeführt werden.

6.2 Systematische Darstellung der Gleichungen

Das in Kapitel 3 vorgestellte Zweiphasenmodell beschreibt ein nichtlineares volumengekoppeltes Mehrfeldproblem. Zur systematischen Darstellung der konsistenten Linearisierung werden die schwachen Formen der Bilanzgleichungen in einem Funktionenvektor zusammengefaßt. Die schwachen Formen werden generell bezüglich der Momentankonfiguration angegeben. Das Zusammenfassen der Bilanzgleichungen in einem Funktionenvektor erlaubt die formale Linearisierung der beschreibenden Gleichungen in einer kompakten Schreibweise. Das bei der formalen Linearisierung entstehende Matrixschema läßt sich dann in einfacher Weise durch Orts- und Zeitdiskretisierung in die bei einer numerischen Berechnung benötigten Tangente integrieren.

6.2.1 Schwache Form der Bilanzgleichungen

Die schwache Form der Impulsbilanz der Mischung (3.75) lautet unter Vernachlässigung der Volumenkräfte

$$g_1(\mathbf{u}_S, p) = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I}) \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S \, dv - \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, da = 0. \quad (6.8)$$

Dabei müssen die Festkörperextraspansungen \mathbf{T}_E^S aus einem geeigneten hyperelastischen Materialgesetz berechnet werden. Entsprechende Materialgesetze wurden in Kapitel 5 entwickelt. Im weiteren wird davon ausgegangen, daß die Oberflächenkräfte und somit das Oberflächenintegral deformationsunabhängig ist.

Die Volumenbilanz der Mischung (3.77) kann bei Vernachlässigung der Volumenkraftdichte mit der Abkürzung $\mathbf{v}_S = (\mathbf{u}_S)'_S$ für die Festkörperverschiebungsgeschwindigkeit in der Form

$$g_2(\mathbf{u}_S, p, \mathbf{v}_S) = \int_{\mathcal{B}} \text{div } \mathbf{v}_S \, \delta p \, dv + \int_{\mathcal{B}} \frac{k^F}{\gamma_{FR}} \text{grad } p \cdot \text{grad } \delta p \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}} q \, \delta p \, da = 0 \quad (6.9)$$

angegeben werden. Hierbei sind die Differentialoperatoren, die Volumenintegration sowie die Permeabilität k^F deformationsabhängig. Auch hier wird im folgenden davon ausgegangen, daß das Oberflächenintegral, das den Flüssigkeitsstrom q durch die Oberfläche beschreibt, deformationsunabhängig ist.

Die schwachen Formen der Bilanzgleichungen lassen sich in einem Funktionenvektor

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_S, p, \mathbf{v}_S) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{u}_S, p) \\ g_2(\mathbf{u}_S, p, \mathbf{v}_S) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.10)$$

zusammenfassen. Damit erhält man eine kompakte Darstellung der problembeschreibenden Bilanzgleichungen. Die im Vektor der Bilanzgleichungen enthaltenen Gleichungen sind sowohl orts- als auch zeitkontinuierliche Gleichungen. Eine Orts- und Zeitdiskretisierung der Gleichungen wird in Kapitel 7 durchgeführt.

6.2.2 Formale Linearisierung des Funktionenvektors

Mit dem Funktionenvektor der Bilanzgleichungen (6.10) läßt sich eine formale Linearisierung der Gleichungen in kompakter Form durchführen. Die entstehende Gleichungsstruktur läßt sich in einfacher Weise auf die orts- und zeitdiskreten Gleichungen übertragen.

Im folgenden bezeichnet die Abkürzung

$$\bar{\mathbf{G}} := \mathbf{G}(\bar{\mathbf{u}}_S, \bar{p}, \bar{\mathbf{v}}_S) \quad (6.11)$$

die Auswertung des Funktionenvektors der Bilanzgleichungen an einer bekannten Entwicklungsstelle $(\bar{\mathbf{u}}_S, \bar{p}, \bar{\mathbf{v}}_S)$ und

$$D\mathbf{G} \cdot \Delta(\cdot) := D\mathbf{G}(\bar{\mathbf{u}}_S, \bar{p}, \bar{\mathbf{v}}_S) \cdot \Delta(\cdot) \quad (6.12)$$

die Richtungsableitung von \mathbf{G} an der Entwicklungsstelle in Richtung von $\Delta(\cdot)$. Die Auswertung der Beziehungen erfolgt immer bei festgehaltener Zeit. Das Inkrement $\Delta(\cdot)$ stellt also einen Zuwachs im Sinne eines *Newton*-Verfahrens zu einem festgehaltenen Zeitpunkt dar. Wird nun eine konsistente Linearisierung des Vektors \mathbf{G} bezüglich der unbekanntenen Feldgrößen $(\mathbf{u}_S, p, \mathbf{v}_S)$ durchgeführt, so erhält man für den linearen Anteil von \mathbf{G} gemäß (6.5)

$$\bar{\mathbf{G}} + D_u \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{u}_S + D_p \mathbf{G} \cdot \Delta p + D_v \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{v}_S = \mathbf{0} . \quad (6.13)$$

Faßt man die Verschiebung \mathbf{u}_S und den Porenfluiddruck p in einem Prozeßvektor der unbekanntenen Feldgrößen \mathbf{z} zusammen, so läßt sich die linearisierte Form von \mathbf{G} in einer Form darstellen, die in analoger Weise bei der Behandlung des ortsdiskretisierten Gleichungssystems im Rahmen der Finite-Elemente-Methode auftritt. Für den Prozeßvektor und dessen zeitliche Ableitung erhält man zunächst formal

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{pmatrix} (\mathbf{u}_S)'_S \\ \dot{p}_S \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Allerdings taucht die Zeitableitung \dot{p}_S des Porenfluiddrucks in den Bilanzgleichungen nicht auf. Die Zeitableitung des Prozeßvektors wird bei der numerischen Behandlung des Gesamtproblems durch ein geeignetes Zeitintegrationsverfahren zeitdiskretisiert. Damit läßt sich die zeitliche Ableitung von \mathbf{z} durch eine zeitinkrementelle Form darstellen. Auf dieses Vorgehen wird in Kapitel 7 näher eingegangen.

Für die Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen erhält man mit dem Prozeßvektor und dessen Zeitableitung

$$\bar{\mathbf{G}} + D_z \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{z} + D_{z'} \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{z}' = \mathbf{0} . \quad (6.15)$$

Die Richtungsableitung von \mathbf{G} in Richtung von $\Delta \mathbf{z} = (\Delta \mathbf{u}_S^T, \Delta p)^T$ kann in einem Matrixschema der Form

$$D_z \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{z} = \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \mathbf{z}} \cdot \Delta \mathbf{z} = \begin{pmatrix} D_u g_1 \cdot \Delta \mathbf{u}_S & D_p g_1 \cdot \Delta p \\ D_u g_2 \cdot \Delta \mathbf{u}_S & D_p g_2 \cdot \Delta p \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

angegeben werden. Weiterhin erhält man für die Richtungsableitung des Funktionsvektors \mathbf{G} in Richtung des inkrementellen Vektors der Prozeßgeschwindigkeiten:

$$D_{z'} \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{z}' = \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \mathbf{z}'} \cdot \Delta \mathbf{z}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_v g_2 \cdot \Delta \mathbf{v}_S & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.17)$$

Diese Matrix enthält aufgrund der Abhängigkeiten der Bilanzgleichungen nur einen Eintrag.

6.3 Bereitstellung wichtiger Linearisierungen

Im weiteren werden nun die Linearisierungen einiger Größen zur Verfügung gestellt, die zur konsistenten Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen benötigt werden. Hierbei wird unter Linearisierung das Bilden der Richtungsableitung verstanden. Wie im vorigen Abschnitt wird auch hier die Richtungsableitung jeweils an der Entwicklungsstelle ausgewertet, ohne daß dies explizit angegeben wird. Dies gilt auch für die dabei auftretenden Differentialoperatoren und Transportmechanismen.

6.3.1 Linearisierung bezüglich der Festkörperdeformation

Die Linearisierung einer finiten Deformation entspricht der Erzeugung eines Tangentialfeldes an die Momentankonfiguration bei festgehaltener Deformation. Das Vektorfeld $\Delta \mathbf{u}_S$ läßt sich demnach als infinitesimale Deformation interpretieren, die dem aktuellen Deformationszustand überlagert wird.

Transportverhalten von Differentialoperatoren

Die Transformationsvorschriften zwischen materiellen und räumlichen Differentialoperatoren lassen sich mit Hilfe einer Darstellung der Ortsableitungen in konvektiven Koordinaten und natürlichen Basisvektoren herleiten. Auf eine Kennzeichnung der Koordinatenlinien θ^i und der natürlichen Basisvektoren $\mathbf{h}^i = \partial\theta^i/\partial\mathbf{X}_S$, bzw. $\mathbf{a}^i = \partial\theta^i/\partial\mathbf{x}$ mit einem Phasenindex S für den Festkörperanteil wird hier verzichtet, da Verwechslungen ausgeschlossen sind. Außerdem wird hier über doppelt auftretende Indizes summiert (*Einsteinsche* Summenkonvention). Für ein Skalarfeld α erhält man die Beziehungen:

$$\text{Grad}_S \alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{X}_S} = \frac{\partial\alpha}{\partial\theta^i} \mathbf{h}^i, \quad \text{grad } \alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial\alpha}{\partial\theta^i} \mathbf{a}^i, \quad (6.18)$$

woraus mit (2.32) sofort auf das Transportverhalten

$$\text{grad } \alpha = \mathbf{F}_S^{T-1} \text{Grad}_S \alpha \quad (6.19)$$

geschlossen werden kann.

Für ein Vektorfeld \mathbf{a} gelten die Beziehungen:

$$\text{Grad}_S \mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{X}_S} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\theta^i} \otimes \mathbf{h}^i, \quad \text{grad } \mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\theta^i} \otimes \mathbf{a}^i. \quad (6.20)$$

Das Transportverhalten ergibt sich demnach zu

$$\text{grad } \mathbf{a} = (\text{Grad}_S \mathbf{a}) \mathbf{F}_S^{-1}. \quad (6.21)$$

Deformationsgrößen

Die Linearisierung des Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \text{Grad}_S \mathbf{x}$ erhält man aus der Definition der Richtungsableitung zu

$$\begin{aligned} D_u \mathbf{F}_S \cdot \Delta\mathbf{u}_S &= \frac{d}{d\epsilon} \left[\text{Grad}_S (\mathbf{x} + \epsilon \Delta\mathbf{u}_S) \right]_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \left[\mathbf{F}_S + \epsilon \text{Grad}_S \Delta\mathbf{u}_S \right]_{\epsilon=0} \\ &= \text{Grad}_S \Delta\mathbf{u}_S. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Die Linearisierung des inversen Deformationsgradienten findet man aus der Bedingung $D_u (\mathbf{F}_S \mathbf{F}_S^{-1}) \cdot \Delta\mathbf{u}_S = \mathbf{0}$. Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_S (D_u \mathbf{F}_S^{-1} \cdot \Delta\mathbf{u}_S) &= -(D_u \mathbf{F}_S \cdot \Delta\mathbf{u}_S) \mathbf{F}_S^{-1} \\ &= -(\text{Grad}_S \Delta\mathbf{u}_S) \mathbf{F}_S^{-1} \\ &= -\text{grad } \Delta\mathbf{u}_S. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Hieraus erhält man schließlich die gesuchte Linearisierung des inversen Deformationsgradienten zu

$$D_u \mathbf{F}_S^{-1} \cdot \Delta \mathbf{u}_S = -\mathbf{F}_S^{-1} \operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_S . \quad (6.24)$$

Die Richtungsableitung der *Jacobi-Determinante* $J_S = \det \mathbf{F}_S$ liefert zunächst:

$$\begin{aligned} D_u J_S \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= \frac{d}{d\epsilon} \left[\det (\operatorname{Grad}_S (\mathbf{x} + \epsilon \Delta \mathbf{u}_S)) \right]_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \left[\det (\mathbf{F}_S + \epsilon \operatorname{Grad}_S \Delta \mathbf{u}_S) \right]_{\epsilon=0} . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Mit Hilfe der Rechenregeln zur Bildung von Determinanten, siehe z. B. *de Boer* [8], erhält man das gesuchte Ergebnis

$$D_u J_S \cdot \Delta \mathbf{u}_S = J_S \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S . \quad (6.26)$$

Verzerrungen

Die Linearisierung des *Greenschen* Verzerrungstensors läßt sich mit Hilfe der Kettenregel aus der Linearisierung des Deformationsgradienten berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}_S := D_u \mathbf{E}_S \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= D_u \left[\frac{1}{2} (\mathbf{F}_S^T \mathbf{F}_S - \mathbf{I}) \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_S^T \operatorname{Grad}_S \Delta \mathbf{u}_S + \operatorname{Grad}_S^T \Delta \mathbf{u}_S \mathbf{F}_S \right) . \end{aligned} \quad (6.27)$$

Aus dem kontravarianten Vorwärtstransport des Verzerrungssinkrements $\Delta \mathbf{E}_S$ ergibt sich die einfache Form

$$\mathbf{F}_S^{T-1} \Delta \mathbf{E}_S \mathbf{F}_S^{-1} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_S + \operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S \right) . \quad (6.28)$$

Spannungen

Bei der Linearisierung der schwachen Form der Impulsbilanz wird die Linearisierung eines Spannungsmaßes benötigt. Die Linearisierung des 2. *Piola-Kirchhoff-Extraspaltungstensors* erhält man mit Hilfe der Kettenregel und des Elastizitätstensors der Referenzkonfiguration:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{S}_E^S &:= D_u (\mathbf{S}_E^S) \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ &= \frac{\partial \mathbf{S}_E^S}{\partial \mathbf{E}_S} (D_u \mathbf{E}_S \cdot \Delta \mathbf{u}_S) \\ &= \overset{4}{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{E}_S . \end{aligned} \quad (6.29)$$

Der kovariante Vorwärtstransport führt unter Verwendung des Elastizitätstensors der Momentankonfiguration auf

$$\mathbf{F}_S \Delta \mathbf{S}_E^S \mathbf{F}_S^T = \overset{4}{\mathbf{C}} \frac{1}{2} \left(\text{grad } \Delta \mathbf{u}_S + \text{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S \right) . \quad (6.30)$$

Vergleicht man dies mit dem *Oldroydschen* Spannungsfluß

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau}_E^S)^\nabla &= \mathbf{F}_S (\mathbf{S}_E^S)'_S \mathbf{F}_S^T \\ &= \overset{4}{\mathbf{C}} \frac{1}{2} \left(\text{grad} (\mathbf{u}_S)'_S + \text{grad}^T (\mathbf{u}_S)'_S \right) , \end{aligned} \quad (6.31)$$

so ist leicht ersichtlich, daß eine Analogie zwischen der *Lie*-Ableitung und der Richtungsableitung einer Größe der Momentankonfiguration besteht. Der Zusammenhang zwischen den Operatoren für Linearisierung und *Lie*-Ableitung räumlicher Größen wird bei *Wriggers* [72] ausführlich diskutiert.

Differentialoperatoren

Zur Linearisierung der geometrischen Nichtlinearitäten, die in den räumlichen Differentialoperatoren „grad“ bzw. „div“ enthalten sind, werden diese mit den Transformationsbeziehungen (6.19) bzw. (6.21) zu materiellen Differentialoperatoren transformiert. Anschließend wird dann im entstehenden Ausdruck das Transportverhalten bezüglich der Deformation linearisiert und das Ergebnis gegebenenfalls wieder zurücktransformiert. So liefert z. B. die Linearisierung des räumlichen Gradienten der Testfunktion $\delta \mathbf{u}_S$ unter Beachtung von $D_u(\text{Grad}_S \delta \mathbf{u}_S) \cdot \Delta \mathbf{u}_S = \mathbf{0}$ das Ergebnis

$$\begin{aligned} D_u(\text{grad } \delta \mathbf{u}_S) \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= D_u(\text{Grad}_S \delta \mathbf{u}_S \mathbf{F}_S^{-1}) \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ &= -\text{Grad}_S \delta \mathbf{u}_S \mathbf{F}_S^{-1} \text{grad } \Delta \mathbf{u}_S \\ &= -\text{grad } \delta \mathbf{u}_S \text{grad } \Delta \mathbf{u}_S . \end{aligned} \quad (6.32)$$

Volumenintegration

Bei der Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen muß beachtet werden, daß die dort auftretenden Integrale deformationsabhängig sind, da eine Volumenintegration über ein Volumenelement der aktuellen (deformierten) Konfiguration durchgeführt wird. Daher wird eine Integraltransformation vorgenommen:

$$\int_{\mathcal{B}} (\dots) dv = \int_{\mathcal{B}_0} J_S (\dots) dV_S . \quad (6.33)$$

Die Volumenintegration erfolgt dann bezüglich der Referenzkonfiguration. Damit sind die Integrationsgrenzen und somit auch die Volumenintegration nicht mehr deformationsabhängig. Die Linearisierung erfolgt dann entsprechend der Beziehung

$$D_u \left[\int_{\mathcal{B}} (\dots) dv \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S = \int_{\mathcal{B}_0} D_u [J_S (\dots)] \cdot \Delta \mathbf{u}_S dV_S . \quad (6.34)$$

Anschließend wird dann wieder eine Integralrücktransformation vorgenommen und die Volumenintegration bezüglich der aktuellen Konfiguration durchgeführt.

6.3.2 Linearisierung bezüglich des Porenfluiddrucks

In der Volumenbilanz der Mischung tritt der Gradient des Porenfluiddrucks auf. Dessen Linearisierung bezüglich des Porendrucks erhält man aus der Definition der Richtungsableitung zu

$$D_p(\text{grad } p) \cdot \Delta p = \frac{d}{d\epsilon} \left[\text{grad } (p + \epsilon \Delta p) \right]_{\epsilon=0} = \text{grad } \Delta p . \quad (6.35)$$

6.3.3 Linearisierung bezüglich der Verschiebungsgeschwindigkeit

Die Linearisierung der Divergenz der Verschiebungsgeschwindigkeit bezüglich \mathbf{v}_S selbst erfolgt auf analoge Weise. Man erhält

$$D_v(\text{div } \mathbf{v}_S) \cdot \Delta \mathbf{v}_S = \text{div } \Delta \mathbf{v}_S . \quad (6.36)$$

Die Deformationsabhängigkeit (geometrische Nichtlinearität) des Differentialoperators „div“ muß hier nicht berücksichtigt werden, da \mathbf{v}_S zunächst eine von \mathbf{u}_S unabhängige Feldgröße ist. Die Deformationsabhängigkeit wird bei der Linearisierung dieses Ausdrucks bezüglich der Festkörperdeformation berücksichtigt.

6.4 Linearisierung der Bilanzgleichungen

Mit den im letzten Abschnitt zur Verfügung gestellten Beziehungen läßt sich die konsistente Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen in einfacher Weise angeben. Die dabei entstehenden Ausdrücke lassen sich zur einheitlichen Behandlung bei der Orts- und Zeitdiskretisierung in das Matrixschema (6.16) bzw. (6.17) einordnen.

6.4.1 Impulsbilanz der Mischung

Linearisierung bezüglich der Festkörperdeformation

Zur Linearisierung der deformationsabhängigen Terme in der schwachen Form der Impulsbilanz der Mischung wird zunächst eine Integraltransformation in die Referenzkonfiguration durchgeführt. Für das Volumenintegral in (6.8) erhält man

$$\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I}) \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S \, dv = \int_{\mathcal{B}_0} (\boldsymbol{\tau}_E^S - J_S p \mathbf{I}) \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S \, dV_S . \quad (6.37)$$

Für die Linearisierung des Extraspannungsanteils erhält man die aus der Festkörpermechanik bekannte Form

$$\begin{aligned} & D_u \left[\boldsymbol{\tau}_E^S \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ &= D_u \left[(\mathbf{F}_S \mathbf{S}_E^S \mathbf{F}_S^T) \cdot (\text{Grad}_S \delta \mathbf{u}_S \mathbf{F}_S^{-1}) \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ &= \left[\mathbf{C} \frac{1}{2} (\text{grad } \Delta \mathbf{u}_S + \text{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S) + \text{grad } \Delta \mathbf{u}_S \boldsymbol{\tau}_E^S \right] \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S . \end{aligned} \quad (6.38)$$

Dieser Ausdruck ist auch maßgebend bei der Berechnung eines leeren porösen Festkörperskeletts, das durch die schwache Form der Impulsbilanz (3.79) beschrieben wird.

Die Linearisierung des Porenfluiddruckterms in (6.37) liefert

$$\begin{aligned} & D_u \left[- J_S p \mathbf{I} \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ &= -D_u \left[J_S p \text{Grad}_S^T \delta \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{F}_S^{-1} \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ &= J_S p (\text{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S - \text{div } \Delta \mathbf{u}_S \mathbf{I}) \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S . \end{aligned} \quad (6.39)$$

Da die Oberflächenkräfte als deformationsunabhängig angenommen werden, liefert das Oberflächenintegral $\int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, da$ keinen Beitrag bei der Linearisierung.

Führt man eine Rücktransformation des Volumenintegrals in die Momentankonfiguration durch, so erhält man zusammenfassend für die Linearisierung der Impulsbi-

lanz der Mischung bezüglich der Verschiebung

$$\begin{aligned}
 D_u g_1 \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= \int_B \frac{1}{J_S} \left[\mathbf{C} \frac{1}{2} (\text{grad } \Delta \mathbf{u}_S + \text{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S) + (\text{grad } \Delta \mathbf{u}_S) \boldsymbol{\tau}_E^S \right] \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S \, dv \\
 &+ \int_B p (\text{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S - \text{div } \Delta \mathbf{u}_S \mathbf{I}) \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S \, dv .
 \end{aligned}
 \tag{6.40}$$

Die erste Zeile enthält die materielle und die geometrische Nichtlinearität des Extra-
spannungsterms in der schwachen Form der Impulsbilanz der Mischung. Die zweite
Zeile beinhaltet die geometrische Nichtlinearität des Gradienten der Testfunktion
und die Nichtlinearität bezüglich der Volumenintegration beim Druckterm in der
schwachen Form der Impulsbilanz der Mischung.

Linearisierung bezüglich des Porenfluiddrucks

Aus der Linearisierung der Impulsbilanz der Mischung bezüglich des Porenfluid-
drucks erhält man

$$D_p g_1 \cdot \Delta p = - \int_B \Delta p \, \text{div } \delta \mathbf{u}_S \, dv .
 \tag{6.41}$$

Linearisierung bezüglich der Verschiebungsgeschwindigkeit

Da die Impulsbilanz keine geschwindigkeitsabhängigen Terme enthält, ergibt die
Linearisierung der Impulsbilanz bezüglich der Verschiebungsgeschwindigkeit:

$$D_v g_1 \cdot \Delta \mathbf{v}_S = \mathbf{0} .
 \tag{6.42}$$

6.4.2 Volumenbilanz der Mischung

Linearisierung bezüglich der Festkörperdeformation

Zur Berücksichtigung der Deformationsabhängigkeit der Volumenbilanz wird auch
hier zunächst eine Transformation des Volumenintegrals in die Referenzkonfigura-
tion durchgeführt, um deformationsunabhängige Integralgrenzen zu erhalten. Der
Geschwindigkeitsdivergenzterm in g_2 führt auf

$$\int_B \text{div } \mathbf{v}_S \, \delta p \, dv = \int_{B_0} J_S (\mathbf{I} \cdot \text{grad } \mathbf{v}_S) \, \delta p \, dV_S .
 \tag{6.43}$$

Aus der Linearisierung des Integranden erhält man

$$\begin{aligned} D_u \left[J_S (\mathbf{I} \cdot \text{grad } \mathbf{v}_S) \delta p \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= D_u \left[J_S (\text{Grad}_S \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{F}_S^{T-1}) \delta p \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ &= J_S (\text{div } \Delta \mathbf{u}_S \text{ div } \mathbf{v}_S - \text{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S \cdot \text{grad } \mathbf{v}_S) \delta p . \end{aligned} \quad (6.44)$$

Die Integraltransformation des Porenfluiddruckterms in der Volumenbilanz g_2 liefert

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{k^F}{\gamma_{FR}} \text{grad } p \cdot \text{grad } \delta p \, dv = \int_{\mathcal{B}_0} J_S \frac{k^F}{\gamma_{FR}} \text{grad } p \cdot \text{grad } \delta p \, dV_S . \quad (6.45)$$

Hierbei ist die Permeabilität im allgemeinen deformationsabhängig ($k^F = k^F(n^F)$, siehe (3.64)). Deshalb wird zunächst die Linearisierung des Darcy-Permeabilitätsparameters angegeben. Mit der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} D_u(k^F) \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= \frac{\partial k^F}{\partial n^F} \frac{\partial n^F}{\partial J_S} D_u(J_S) \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ &= \frac{\partial k^F}{\partial n^F} n^S \text{div } \Delta \mathbf{u}_S . \end{aligned} \quad (6.46)$$

Zur Linearisierung des Integranden von (6.45) werden die räumlichen Gradientenoperatoren „grad“ mit der Transportbeziehung (6.19) in materielle Gradientenoperatoren „Grad_S“ überführt und der entstehende Ausdruck mit Hilfe der Kettenregel linearisiert. Anschließend wird das Ergebnis wieder zurücktransformiert. Mit obigem Ergebnis für den deformationsabhängigen Permeabilitätsparameter ergibt die Linearisierung des Druckterms in der Volumenbilanz der Mischung:

$$\begin{aligned} D_u \left[J_S \frac{k^F}{\gamma_{FR}} \text{grad } p \cdot \text{grad } \delta p \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ = J_S \left[\frac{k^F}{\gamma_{FR}} \left(1 + \frac{\partial k^F}{\partial n^F} \frac{n^S}{k^F} \right) \text{div } \Delta \mathbf{u}_S \text{ grad } p \right. \\ \left. - \frac{k^F}{\gamma_{FR}} (\text{grad } \Delta \mathbf{u}_S + \text{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S) \text{ grad } p \right] \cdot \text{grad } \delta p . \end{aligned} \quad (6.47)$$

Das Oberflächenintegral $\int_{\partial \mathcal{B}} q \delta p \, da$ in (6.9) wird als deformationsunabhängig betrachtet. Deshalb entfällt dieser Term bei der Linearisierung.

Zusammenfassend erhält man für die Linearisierung der schwachen Form der Volumenbilanz der Mischung g_2 bezüglich der Festkörperdeformation nach einer Inte-

galtransformation in die Momentankonfiguration:

$$\begin{aligned}
 D_u g_2 \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= \int_{\mathcal{B}} \left(\operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S \operatorname{div} \mathbf{v}_S - \operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}_S \right) \delta p \, dv \\
 &+ \int_{\mathcal{B}} \left[\frac{k^F}{\gamma^{FR}} \left(1 + \frac{\partial k^F}{\partial n^F} \frac{n^S}{k^F} \right) \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S \operatorname{grad} p \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k^F}{\gamma^{FR}} \left(\operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_S + \operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S \right) \operatorname{grad} p \right] \cdot \operatorname{grad} \delta p \, dv .
 \end{aligned}
 \tag{6.48}$$

Die erste Zeile beinhaltet die geometrische Nichtlinearität des Geschwindigkeitsdivergenzterms in der schwachen Form der Volumenbilanz der Mischung. In der zweiten und dritten Zeile sind die geometrischen Nichtlinearitäten des Porenfluiddruckterms aufgrund der Volumenintegration und der Deformationsabhängigkeit der Gradientenoperatoren enthalten. Der Zusatzterm $\partial k^F / \partial n^F$ berücksichtigt die Deformationsabhängigkeit des Darcy-Permeabilitätsparameters. Dieser verschwindet bei deformationsunabhängigem Durchlässigkeitsparameter k^F .

Linearisierung bezüglich des Porenfluiddrucks

Aus der Linearisierung der Volumenbilanz bezüglich des Porenfluiddrucks erhält man

$$D_p g_2 \cdot \Delta p = \int_{\mathcal{B}} \frac{k^F}{\gamma^{FR}} \operatorname{grad} \Delta p \cdot \operatorname{grad} \delta p \, dv .
 \tag{6.49}$$

Linearisierung bezüglich der Verschiebungsgeschwindigkeit

Die Linearisierung der Volumenbilanz der Mischung bezüglich der Festkörperverschiebungsgeschwindigkeit liefert den Ausdruck

$$D_v g_2 \cdot \Delta \mathbf{v}_S = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \Delta \mathbf{v}_S \delta p \, dv .
 \tag{6.50}$$

Kapitel 7

Diskretisierung der Bilanzgleichungen

Zur numerischen Behandlung des gekoppelten Mehrfeldproblems müssen die schwachen Formen der Bilanzgleichungen in Ort und Zeit diskretisiert werden. Dazu wird zunächst eine Semidiskretisierung der Gleichungen im Ort mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) durchgeführt. Anschließend wird das entstehende Gleichungssystem mit Hilfe eines geeigneten Zeitintegrationsverfahrens in der Zeit diskretisiert.

7.1 Semidiskretisierung im Ort mit finiten Elementen

7.1.1 Grundlagen

Zur Ortsdiskretisierung der schwachen Form der Bilanzgleichungen wird die Finite-Elemente-Methode verwendet. Hierzu wird eine Zerlegung des betrachteten Gebietes \mathcal{B} in n_e Elemente vorgenommen. Die Beschreibung der Geometrie innerhalb eines Elements e erfolgt durch den Ansatz

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^e = \sum_{j=1}^{k_u} N^j \mathbf{x}^j, \quad (7.1)$$

wobei \mathbf{x}^j der Vektor der Knotenkoordinaten am Knoten j des Elements e ist, welches k_u Knoten besitzt. Die Ansatzfunktionen N^j sind in lokalen Elementkoordinaten formuliert. Diese lokalen Koordinaten lassen sich durch eine geeignete Transformation auf globale Koordinaten transformieren. Dementsprechend lassen sich auch partielle Ableitungen nach den lokalen Koordinaten auf Ableitungen nach den globalen Koordinaten transformieren. Hierauf wird im weiteren nicht detaillierter eingegangen.

Stattdessen sei auf die Standardliteratur zur Finite-Elemente-Methode verwiesen, z. B. *Zienkiewicz & Taylor* [73], *Bathe* [4], *Schwarz* [60].

Im folgenden wird ein isoparametrisches Konzept zur Diskretisierung der Festkörperverschiebungsfreiheitsgrade verwendet. Dazu werden gleiche Ansatzfunktionen zur Approximation der Elementgeometrie und des Verschiebungsfeldes benutzt. Damit erhält man für den Verschiebungsvektor in einem Element

$$\mathbf{u}_S \rightarrow \mathbf{u}^e = \sum_{j=1}^{k_u} N^j \mathbf{u}^j . \quad (7.2)$$

Hierbei bezeichnet k_u die Anzahl der Verschiebungsknoten (Knoten, an denen Verschiebungsfreiheitsgrade vorliegen) eines Elements. Die Ortsabhängigkeit des zu diskretisierenden Verschiebungsfeldes \mathbf{u}_S ist in den Ansatzfunktion N^j enthalten, während die diskreten Knotenvariablen \mathbf{u}^j die Zeitabhängigkeit des Verschiebungsvektors \mathbf{u}_S beinhalten. Für die zeitliche Ableitung des Verschiebungsvektors, der Verschiebungsgeschwindigkeit, wird ein entsprechender Ansatz

$$\mathbf{v}_S = (\mathbf{u}_S)'_S \rightarrow \mathbf{v}^e = \sum_{j=1}^{k_u} N^j \mathbf{v}^j \quad (7.3)$$

verwendet, wobei \mathbf{v}^j die zeitliche Ableitung der Knotenverschiebungen \mathbf{u}^j am Elementknoten j ist. Die Ortsdiskretisierung der Inkremente der Festkörperverschiebung und der Verschiebungsgeschwindigkeit, die in einer *Newton*-Iteration benötigt werden, erfolgt analog:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_S \rightarrow \Delta \mathbf{u}^e &= \sum_{j=1}^{k_u} N^j \Delta \mathbf{u}^j , \\ \Delta \mathbf{v}_S \rightarrow \Delta \mathbf{v}^e &= \sum_{j=1}^{k_u} N^j \Delta \mathbf{v}^j . \end{aligned} \quad (7.4)$$

Bei der Ortsdiskretisierung des Drucks kann prinzipiell von einer anderen Ordnung der verwendeten Ansatzfunktionen M^j ausgegangen werden. Existieren in einem Element k_p Knoten, an denen der Druck approximiert wird, so erhält man:

$$p \rightarrow p^e = \sum_{j=1}^{k_p} M^j p^j \quad (7.5)$$

sowie für ein Druckinkrement in einem *Newton*-Schritt:

$$\Delta p \rightarrow \Delta p^e = \sum_{j=1}^{k_p} M^j \Delta p^j . \quad (7.6)$$

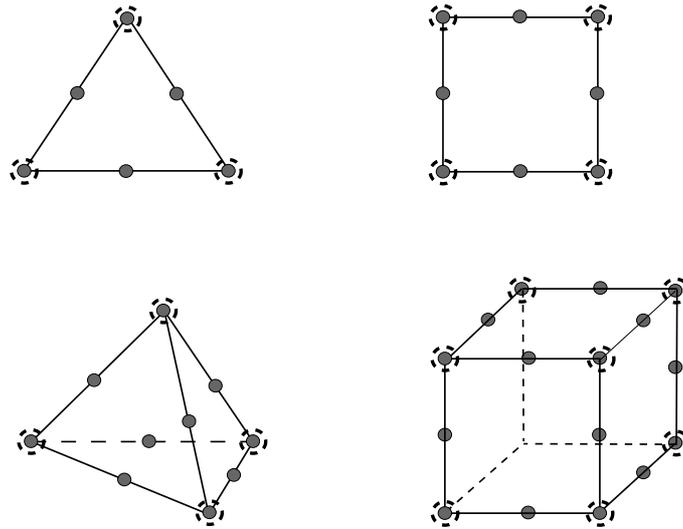
In der Impulsbilanz der Mischung werden die Gesamtspannungen aus einem Extraspannungsanteil des Festkörpers und einem Anteil aus dem Porenfluiddruck berechnet: $(\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I})$. Die Extraspannungen ergeben sich aus Deformationsmaßen, die durch Gradientenbildung der Festkörperverschiebung gebildet werden. Durch die Gradientenbildung des diskretisierten Verschiebungsvektors reduziert sich die Ordnung des resultierenden Ausdrucks um eins. Deshalb liegt es nahe, die Ordnung der Ansatzfunktion M^j für den Druck entsprechend um eins niedriger zu wählen als die Ansatzfunktion N^j für die Verschiebung. Damit liegen gleiche Ordnungen im diskretisierten Gesamtspannungsausdruck vor.

Ein entsprechendes Vorgehen ist auch aus der Mechanik nicht-poröser Festkörper bei der sogenannten gemischten Methode zur Behandlung inkompressiblen Werkstoffverhaltens bekannt. Hier wird die Ordnung der Ansatzfunktionen für eine Druckgröße und die *Jacobi*-Determinante um eins niedriger gewählt als die Ansatzfunktion für die Verschiebung. Häufig wird dann der Verschiebungsansatz linear und der Druckansatz konstant gewählt. Letzteres ist allerdings beim vorliegenden Festkörper-Fluid-Problem nicht möglich, da die Volumenbilanz der Mischung einen Term mit dem Gradienten des Porenfluiddrucks enthält. Dieser Term würde bei konstanten Ansätzen für den Porenfluiddruck immer verschwinden.

In dieser Arbeit werden deshalb quadratische Ansätze zur Approximation der Festkörperverschiebung und lineare Ansätze zur Approximation des Porenfluiddrucks verwendet. Dieser Ansatz erfüllt im übrigen die *Babuška-Brezzi*-Bedingung. Ein analoger Ansatz ist auch bei *Zienkiewicz* [74] in einem ähnlichen Zusammenhang zu finden. Bei der hier gewählten Approximation existieren die Verschiebungsfreiheitsgrade in einem Element damit sowohl an den Eckknoten als auch an den Seitenmittelnknoten. Die diskreten Druckfreiheitsgrade existieren hingegen nur an den Eckknoten eines Elements. Knoten im Inneren eines Elements treten nicht auf (*Serendipity*-Elemente für Vierecke bzw. Quader; *Lagrange*-Polynome für Dreiecke bzw. Tetraeder). Dies ist in Abbildung 7.1 für ein ebenes Dreieckselement (12 Verschiebungsfreiheitsgrade/3 Druckfreiheitsgrade), ein ebenes Viereckselement (16/4), ein räumliches Tetraederelement (30/4) sowie für ein räumliches Quaderselement (60/8) dargestellt. Die konkrete Form der Ansatzfunktionen N^j und M^j für verschiedene Elementgeometrien kann der Standardliteratur entnommen werden, siehe z. B. *Zienkiewicz & Taylor* [73], *Bathe* [4].

Bei Verwendung eines *Standard-Galerkin*-Verfahrens stimmen die Ansatz- und Testfunktionen zur Approximation korrespondierender Feldgrößen überein. Damit erhält man für die Ortsdiskretisierung des virtuellen Verschiebungs- und Druckfeldes in Analogie zur Approximation des Verschiebungsfeldes (7.2) und des Druckfeldes (7.5) selbst:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_S &\rightarrow \delta \mathbf{u}^e = \sum_{i=1}^{k_u} N^i \delta \mathbf{u}^i, \\ \delta p &\rightarrow \delta p^e = \sum_{i=1}^{k_p} M^i \delta p^i. \end{aligned} \tag{7.7}$$



- Verschiebungsfreiheitsgrade
- ▢ Verschiebungs- und Druckfreiheitsgrade

Abbildung 7.1: Verschiebungs- und Druckfreiheitsgrade bei ebenen und räumlichen Elementen

Geht man von der hier angegebenen Vektorschreibweise auf eine Indexschreibweise bezüglich eines kartesischen Basissystems über, so lassen sich die vektoriellen- und tensoriellen Größen in den Bilanzgleichungen relativ einfach in ein FEM-System implementieren, siehe z. B. *Zienkiewicz & Taylor* [73]. Diese Schreibweise besitzt außerdem den Vorteil, daß beim Übergang von einem ebenen Element zu einem räumlichen Element nur die Dimension des Problems (2-d/3-d) in einem Schleifenzähler geändert werden muß.

Diese Darstellung soll hier kurz an einem Beispiel erläutert werden. Kennzeichnet der Index m in einem Vektor, z. B. $(\mathbf{u}^e)_m$, dessen Komponente in \mathbf{e}_m -Richtung eines kartesischen Koordinatensystems, so gilt z. B. für die Approximation des Verschiebungsvektors in dieser Schreibweise

$$u_m^e := (\mathbf{u}^e)_m = \sum_{j=1}^{k_u} N^j u_m^j . \quad (7.8)$$

Für ebene Probleme gilt $m = 2$: $\mathbf{u}^j = (u_1^j, u_2^j)^T$; Für räumliche Probleme gilt $m = 3$: $\mathbf{u}^j = (u_1^j, u_2^j, u_3^j)^T$. Führt man für die Ableitung einer Ansatzfunktion nach einer Komponente des Ortsvektors die Abkürzung

$$N^j_{,n} = \frac{\partial N^j}{\partial x_n} \quad (7.9)$$

ein, so lassen sich die räumlichen Gradienten von Feldgrößen ebenfalls sehr einfach in der Indexschreibweise darstellen. So berechnen sich z. B. die Komponenten des Verschiebungsgradienten zu

$$\text{grad } \mathbf{u}_S \rightarrow (\text{grad } \mathbf{u}^e)_{mn} = \sum_{j=1}^{k_u} N_{,n}^j u_m^j . \quad (7.10)$$

Mit den Tensorkomponenten läßt sich dann entsprechend der *Einsteinschen* Summationskonvention rechnen. Dies läßt sich sehr einfach durch ineinander geschachtelte Schleifen in einem Algorithmus handhaben.

Eine effizientere Speicherung der Größen auf Elementebene ist durch die aus der Literatur bekannte *Voigtsche* Darstellung möglich. Hier werden Tensoren unter Beachtung von Symmetrieeigenschaften in Vektoren gespeichert. Allerdings ist damit ein Übergang von einem ebenen zu einem räumlichen Element nicht ohne weiteres möglich.

7.1.2 Ortsdiskretisierung der Bilanzgleichungen

Führt man die Ortsdiskretisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen (6.8) und (6.9) bzw. des daraus resultierenden Funktionenvektors (6.10) durch, so erhält man nach Assemblierung der entstehenden lokalen Elementanteile ein globales zeitkontinuierliches FEM-Gleichungssystem. Faßt man die Verschiebungs- und Druckfreiheitsgrade aller Elementknoten im Vektor \mathbf{y} der Unbekannten zusammen, so erhält man ein ortsdiskretes, jedoch zeitkontinuierliches Gleichungssystem in der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', t) = \mathbf{M}(\mathbf{y}) \mathbf{y}' + \mathbf{k}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{0} \quad (7.11)$$

mit $t \geq t_0$, wobei im Vektor

$$\mathbf{y}' = \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad (7.12)$$

die Zeitableitungen des Freiheitsgradevektors enthalten sind. In diesem Gleichungssystem bezeichnet \mathbf{M} eine verallgemeinerte Massen- bzw. Systemmatrix, \mathbf{k} einen verallgemeinerten Steifigkeitsvektor und \mathbf{f} einen verallgemeinerten Kraftvektor. Die Matrix \mathbf{M} ist aufgrund der geometrischen Nichtlinearität des Geschwindigkeitsdivergenzterms in der Volumenbilanz deformationsabhängig.

Da der Porenfluiddruck eine algebraische Zwangsbedingung zur Erfüllung der Inkompressibilitätsforderung darstellt, existiert keine Evolutionsgleichung für den Druck. Damit tritt auch keine zeitliche Ableitung des Porenfluiddrucks in den Gleichungen auf. Dies hat zur Folge, daß die Matrix \mathbf{M} singular ist. Deshalb stellt (7.11) ein differential-algebraisches Gleichungssystem (DAE) erster Ordnung in der Zeit dar. Das Gleichungssystem kann deshalb nur in einer impliziten Form dargestellt werden und nicht in der sonst üblichen Form $\mathbf{y}' = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}, t)$. Differenziert man die schwache Form der Volumenbilanz einmal nach der Zeit, so erhält man auch für den Druck eine Zeitableitung. Demzufolge handelt es sich bei (7.11) um eine DAE vom Indextyp 1, siehe z. B. *Hairer & Wanner* [35], *Brenan, Campell & Petzold* [14].

7.2 Zeitdiskretisierung und Lösungsalgorithmus

Eine Zeitdiskretisierung des FEM-Gleichungssystems (7.11) führt auf ein System nichtlinearer Gleichungen, das in jedem Zeitschritt eines Zeitintegrationsalgorithmus' mittels eines *Newton*-Verfahrens iterativ gelöst werden muß. Aufgrund des DAE-Charakters des Gleichungssystems ist zur Zeitintegration ein implizites Verfahren notwendig, siehe z. B. *Brenan, Campell & Petzold* [14]. Zur Lösung des Anfangs-Randwertproblems müssen die Anfangsbedingungen

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$$

bekannt sein.

7.2.1 Implizites *Euler*-Verfahren

Das einfachste implizite Integrationsverfahren ist das implizite *Euler*-Verfahren. Hierbei wird die Geschwindigkeit am neu zu berechnenden Zeitpunkt t_{n+1} durch den Differenzenquotienten

$$\mathbf{y}'_{n+1} = \frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{\Delta t} \quad (7.13)$$

approximiert. Das Zeitinkrement $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ kann dabei an verschiedenen Zeitpunkten t_n variieren. Für die Ableitung des zeitdiskretisierten Geschwindigkeitsvektors bezüglich des Freiheitsgradevektors erhält man durch Ableitung des Differenzenquotienten

$$\frac{\partial \mathbf{y}'_{n+1}}{\partial \mathbf{y}_{n+1}} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{I}, \quad (7.14)$$

wobei \mathbf{I} eine Einheitsmatrix vom Rang der Freiheitsgrade in \mathbf{y} ist.

Die Zeitdiskretisierung des FEM-Gleichungssystems (7.11) mit dem impliziten *Euler*-Verfahren zu einem Zeitpunkt t_{n+1} führt auf

$$\mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}'_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}), t_{n+1}) = \mathbf{0}. \quad (7.15)$$

Der Vektor \mathbf{y}_{n+1} der unbekanntenen Freiheitsgrade muß aus einem Gleichungssystem $\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{0}$ zum Zeitpunkt t_{n+1} bestimmt werden. Deshalb ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems nur iterativ möglich. Die dazu notwendige Tangente beim *Newton*-Verfahren im Iterationsschritt k erhält man mit der Ableitung (7.14) des Geschwindigkeitsvektors formal zu

$$D\mathbf{F}_{n+1}^k := \frac{d\mathbf{F}_{n+1}^k}{d\mathbf{y}_{n+1}^k} = \frac{\partial \mathbf{F}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{y}_{n+1}^k} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \mathbf{F}_{n+1}^k}{\partial (\mathbf{y}')_{n+1}^k}. \quad (7.16)$$

Die globale Tangente des Gleichungssystems ist also auch von der jeweils gewählten Zeitdiskretisierung abhängig. Die Darstellung (7.11) der FEM-Gleichungen führt auf

$$D\mathbf{F}_{n+1}^k = \left(\frac{\partial \mathbf{M}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{y}_{n+1}^k} (\mathbf{y}')_{n+1}^k + \frac{\partial \mathbf{k}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{y}_{n+1}^k} \right) + \frac{1}{\Delta t} \left(\mathbf{M}_{n+1}^k \right). \quad (7.17)$$

Die partiellen Ableitungen, die in der Tangente $D\mathbf{F}_{n+1}^k$ auftreten, ergeben sich durch Ortdiskretisierung der in (6.16) und (6.17) formal zusammengefaßten Linearisierungen der Bilanzgleichungen aus Kapitel 6.4. Hierfür wurde mit (7.4) und (7.6) die Ortdiskretisierung der Inkremente der Prozeßvariablen eingeführt.

Anmerkung: Bei den in dieser Arbeit behandelten Gleichungen eines nichtlinearen elastischen Zweiphasenmodells stimmen die Linearisierungen der kontinuierlichen Bilanzgleichungen mit den Linearisierungen der FEM-Gleichungen exakt überein. Hier ist eine Vertauschung der Linearisierung (Richtungsableitung) und der Assemblierung der globalen FEM-Tangente möglich. Bei Problemstellungen mit inneren Variablen (Plastizität, Viskoelastizität) oder Kontaktproblemen stimmt die Linearisierung des kontinuierlichen Problems nicht mehr mit der Linearisierung des diskretisierten Problems überein. Hier ist eine Linearisierung eines auf Elementebene (an *Gauß*punkten) arbeitenden Algorithmus' notwendig. Dies führt auf den von *Simó* [62] geprägten Begriff der „algorithmisch konsistenten Linearisierung“.

Globaler Lösungsalgorithmus

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (7.15) wird mit einem *Newton*-Verfahren iterativ berechnet. In einem *Newton*-Iterationsschritt k zur Berechnung der Lösung zum Zeitpunkt t_{n+1} muß das Gleichungssystem

$$D\mathbf{F}_{n+1}^k \Delta \mathbf{y}_{n+1}^k = -\mathbf{F}_{n+1}^k \quad (7.18)$$

gelöst werden. Anschließend erfolgt eine Aufdatierung des Lösungsvektors

$$\mathbf{y}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{y}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{y}_{n+1}^k . \quad (7.19)$$

Diese Iteration wird solange wiederholt, bis die Residuumsnorm eine vorgegebene Toleranz unterschreitet:

$$\|\mathbf{F}_{n+1}^{k+1}\| < \text{TOL} . \quad (7.20)$$

Für den Startwert einer *Newton*-Iteration wird die ausiterierte Lösung des letzten Zeitschritts verwendet:

$$\mathbf{y}_{n+1}^0 = \mathbf{y}_n^{\text{end}} . \quad (7.21)$$

Bei einem *Newton*-Verfahren wird die Tangente $D\mathbf{F}_{n+1}$ in jedem Iterationsschritt neu berechnet, während bei einem vereinfachten *Newton*-Verfahren eine einmal berechnete Tangente über mehrere Iterationsschritte beibehalten wird. Dadurch sinkt zwar die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens, jedoch erweist sich dieses Vorgehen insbesondere bei großen Gleichungssystemen als vorteilhaft, da dann das Gleichungssystem (7.18) mit Hilfe einer LR-zerlegten und abgespeicherten Tangente sehr effizient gelöst werden kann.

7.2.2 Runge-Kutta-Verfahren

Die im folgenden kurz vorgestellten *Runge-Kutta*-Verfahren sind Einschrittverfahren mit internen Schritten, d. h. es werden keine Lösungen aus zurückliegenden Zeitschritten t_{n-1}, t_{n-2}, \dots zur Berechnung einer Lösung zum Zeitpunkt t_{n+1} benötigt. Um mehr Informationen über das Verhalten der Differentialgleichung zu erhalten, werden aber Zwischenlösungen \mathbf{Y}_{ni} im n -ten Zeitschritt auf der i -ten *Runge-Kutta*-Stufe berechnet. Das Verfahren ist (bei gleicher Zeitschrittweite Δt) deshalb auch genauer als das implizite *Euler*-Verfahren.

Verwendet man zur Zeitdiskretisierung ein s -stufiges einfach-diagonalimplizites *Runge-Kutta*-Verfahren (SDIRK), so sind die s nichtlinearen Gleichungssysteme

$$\mathbf{F}_{ni}(\mathbf{Y}_{ni}, \mathbf{Y}'_{ni}, t_n + c_i \Delta t) = \mathbf{0} \quad (7.22)$$

in einem Zeitschritt nacheinander zu lösen (bei vollimpliziten Verfahren müssen alle Stufengleichungen simultan gelöst werden, was sehr aufwendig ist).

Die Zeitableitung einer Zwischenstufe erhält man aus

$$\mathbf{Y}'_{ni} = \frac{\mathbf{Y}_{ni} - \mathbf{y}_n - \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{Y}'_{nj}}{a_{ii} \Delta t}. \quad (7.23)$$

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems auf jeder *Runge-Kutta*-Stufe erfordert eine *Newton*-Iteration, wozu eine zu (7.16) analoge Linearisierung von (7.22) bezüglich \mathbf{Y}_{ni} auf jeder Stufe notwendig ist. In die Linearisierung geht dann auch die Zeitableitung (7.23) ein. Die gesuchte Lösung im Zeitschritt t_{n+1} ergibt sich zu

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{Y}'_{ni}, \quad \mathbf{y}'_{n+1} = \mathbf{Y}'_{ns}. \quad (7.24)$$

Durch Angabe der Stufenzahl s und der Koeffizienten a_{ij} , b_i und c_i wird ein spezielles *Runge-Kutta*-Verfahren definiert. Üblicherweise werden die Koeffizienten in einem sogenannten *Butcher*-Array angeordnet. Diagonalimplizite Verfahren liegen vor, wenn die (a_{ij}) eine untere Dreiecksmatrix bilden:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array}.$$

Bei den hier behandelten einfach-diagonalimpliziten Verfahren (SDIRK) sind alle Diagonalelemente a_{ii} identisch. Durch die Wahl von $b_i = a_{si}$ erhält man ein steifgenaues Verfahren. Dieses empfiehlt sich besonders bei der Behandlung von DAE-Systemen, da dann die algebraische Nebenbedingung zum gesuchten Zeitpunkt t_{n+1} erfüllt wird. Koeffizienten für spezielle Verfahren sowie detailliertere Ausführungen zu *Runge-Kutta*-Verfahren können der Literatur entnommen werden, z. B. *Törnig & Spellucci* [66], *Hairer & Wanner* [35], *Hairer, Lubich & Roche* [34]. Das im vorigen Abschnitt vorgestellte implizite *Euler*-Verfahren läßt sich als einstufiges *Runge-Kutta*-Verfahren mit $a_{11} = 1$, $b_1 = 1$ und $c_1 = 1$ interpretieren.

Zeitschrittweitensteuerung

Durch Einbettung eines *Runge-Kutta*-Verfahrens niedriger Ordnung in ein Verfahren höherer Ordnung läßt sich eine Schätzung des Integrationsfehlers vornehmen. Die Ordnung eines Verfahrens kann durch die Wahl verschiedener Sätze von Gewichten b_i vorgeben werden. Aufgrund der Einbettung der Verfahren ist die Fehlerschätzung ohne zusätzlichen Aufwand möglich. Mit Hilfe des Fehlerschätzers läßt sich dann eine Schrittweitensteuerung konstruieren, die jeweils eine neue Zeitschrittweite Δt vorschlägt. Außerdem ist es möglich, einen gerechneten Zeitschritt zu verwerfen und die Schrittweite zu verkleinern. Durch die Schrittweitensteuerung kann der Rechenaufwand für ein Problem bei vorgegebener Fehlertoleranz teilweise erheblich reduziert werden. Dies ist z. B. bei der Berechnung des zeitabhängigen Konsolidationsproblems (siehe Kapitel 8.2) sehr effizient. Bei *Ehlers & Ellsiepen* [30] werden verschiedene *Runge-Kutta*-Verfahren für gekoppelte Festkörper-Fluid-Probleme angegeben und eine geeignete Zeitschrittweitensteuerung vorgestellt.

Kapitel 8

Beispiele

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Materialmodelle und Elementformulierungen wurden in das FEM-Programmsystem *PANDAS* [32] implementiert. Der Programmaufbau ist modular, so daß die verschiedenen Elastizitätsgesetze für das Festkörperskelett mit den Modellen zur Berücksichtigung der deformationsabhängigen Permeabilitätseigenschaften beliebig kombiniert werden können. Außerdem kann jedes Materialmodell (Elementphysik) innerhalb einer ebenen Elementgeometrie (Dreiecks-, Viereckselement) oder einer räumlichen Geometrie (Tetraeder-, Quader-element) verwendet werden. Aufgrund der Vielfalt der Kombinationsmöglichkeiten von Materialmodellen werden im folgenden nur einige relevante Beispiele vorgestellt, die zur Validierung der in dieser Arbeit entwickelten Formulierungen dienen sollen.

8.1 Zugversuch am leeren Festkörperskelett

Im ersten Beispiel wird ein leeres poröses Festkörperskelett untersucht. Zur Modellierung des Materialverhaltens werden das *Neo-Hooke*-Modell für poröse Medien und das *Ogden*-Modell für poröse Medien verwendet und die Ergebnisse miteinander verglichen. Als Randwertproblem wird ein Würfel berechnet, der lediglich aus einem einzigen Element besteht und einaxial auf Zug beansprucht wird, siehe Abbildung 8.1. Aufgrund der Symmetrie der Randbedingungen wird hiermit ein Achtel eines einaxial belasteten Probenkörpers berechnet. Eine Druckbelastung und damit volumetrische Kompression wird in den darauffolgenden Beispielen behandelt.

Die Diskretisierung des räumlichen Problems erfolgt mit einem 20-Knoten-Quader-element mit quadratischen Verschiebungsansätzen. Der leere poröse Festkörper ließe sich auch mit linearen Verschiebungsansätzen berechnen. Allerdings soll das räumliche Element hier auch im Hinblick auf seine Verwendbarkeit für einen fluidgesättigten porösen Festkörper untersucht werden.

Als Materialparameter für das Festkörperskelett werden die *Lamé*-Konstanten zu $\mu^S = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ und $\Lambda^S = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ vorgegeben. Daraus ergibt sich eine

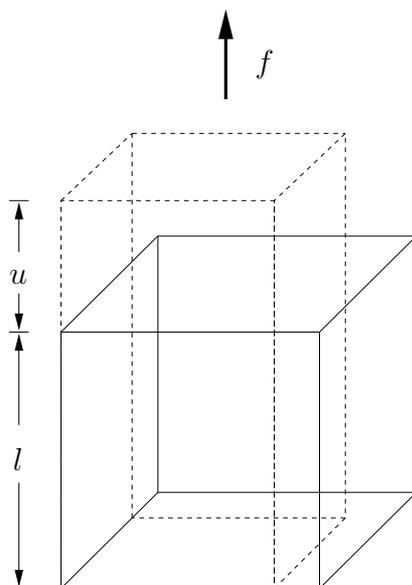


Abbildung 8.1: Einaxiale Belastung beim leeren Festkörperskelett

Poissonzahl von $\nu_0^S = 0,3$. Der Anfangsvolumenanteil der Festkörpers wird zunächst zu $n_{0S}^S = 0,67$ gewählt und der Ogden-Parameter ist zunächst $\gamma = 1$. Die weiteren Parameter für das Ogden-Modell sind [53] entnommen und in Tabelle 8.1 aufgeführt. Als Referenzwert für die Oberflächenbelastung wird $f_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ gewählt. Die Belastung erfolgt durch Steigerung des Lastfaktors $P = f/f_0$ von 0 bis 1,5.

μ_1^*	α_1	μ_2^*	α_2	μ_3^*	α_3
1,4911	1,3	0,0028	5,0	-0,0237	-2,0

Tabelle 8.1: zusätzliche Materialparameter beim Ogden-Modell

In Abbildung 8.2 ist die Längsdehnung u/l aufgetragen, die sich unter Belastung ergibt. Bis zu einer Dehnung von ca. 20% ist die Last-Dehnungsbeziehung beider Elastizitätsgesetze für poröse Medien („Neo-Hooke“, „Ogden“ in Abbildung 8.2) nahezu linear. Mit zunehmender Längsdehnung unterscheiden sich die Materialmodelle dann immer mehr. Eine Variation der Materialparameter im volumetrischen Erweiterungsterm U^S der Verzerrungsenergiefunktion (siehe (5.10)) zeigt, daß die Lösung des Randwertproblems fast ausschließlich vom gewählten Basistyp (Neo-Hooke, Ogden) des Elastizitätsgesetzes abhängt. Durch Vorgabe von $n_{0S}^S = 0$ (dies entspricht einem nicht-porösen Festkörper) beim Neo-Hooke-Modell verändert sich die Last-Verschiebungskurve nur sehr gering („Neo-Hooke 2“). Auch die Wahl von $\gamma = 5$ im Ogden-Modell („Ogden 2“) führt nur zu einem unwesentlichen Unterschied gegenüber der ursprünglichen Kurve des Ogden-Modells.

Daraus ist zu schließen, daß der volumetrische Erweiterungsterm U^S bei diesem

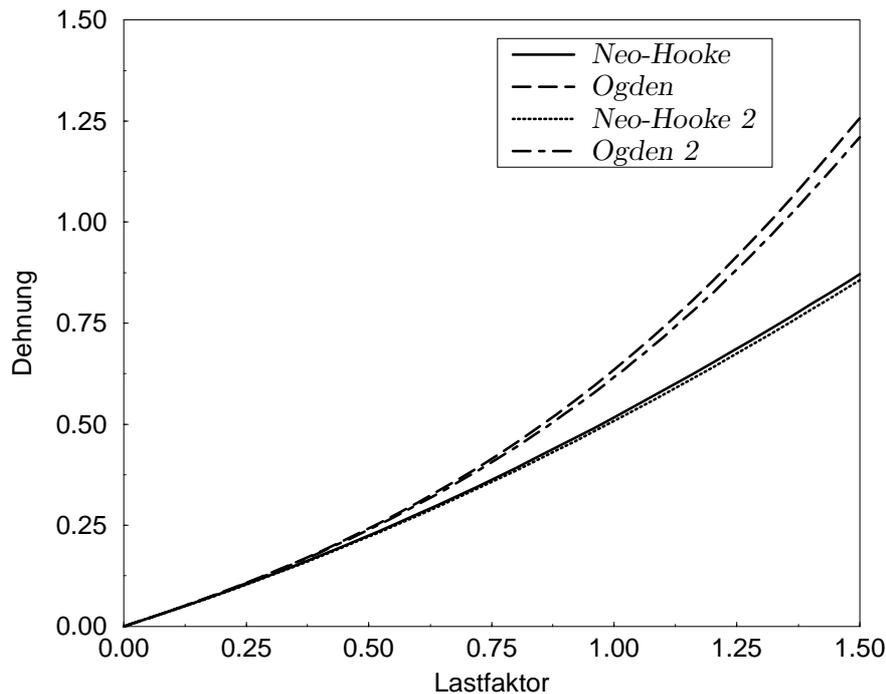


Abbildung 8.2: Dehnung u/l über Lastfaktor f/f_0 beim Zugversuch am leeren Festkörperskelett

Randwertproblem „Zug“ nur eine untergeordnete Rolle spielt. Dies läßt sich aber nicht verallgemeinern. Beim nächsten Beispielproblem, dem Stauchen eines porösen Schwammes, ist aber genau das Gegenteil der Fall. Hier dominiert der volumetrische Erweiterungsterm bei der Lösung des Problems gegenüber dem Basistyp des Elastizitätsgesetzes.

8.2 Stauchen eines fluidgesättigten Schwammes

In diesem Modellbeispiel wird das Stauchen eines fluidgesättigten porösen Schwammes in einer Wanne behandelt. Hierbei ist der obere Rand durch eine Oberflächenlast belastet und ideal drainiert. Die ideale Drainage bewirkt, daß am oberen Rand Umgebungsdruck herrscht (Überdruck $p = 0$) und die Porenflüssigkeit durch die Oberfläche am diesem Rand ausströmen kann. Die restlichen Ränder sind fest und flüssigkeitsundurchlässig. Außerdem wird von einem ebenen Verzerrungszustand (EVZ) ausgegangen. Das Randwertproblem sowie die Vernetzung mit finiten Elementen ist in Abbildung 8.3 dargestellt. Für dieses Beispiel wird eine Vernetzung mit 6-knotigen Dreieckselementen (quadratische Ansätze für die Verschiebung, lineare Ansätze für den Druck) gewählt. Eine Vernetzung mit 8-knotigen Viereckselementen liefert, bei hinreichend genauer Vernetzung, identische Ergebnisse.

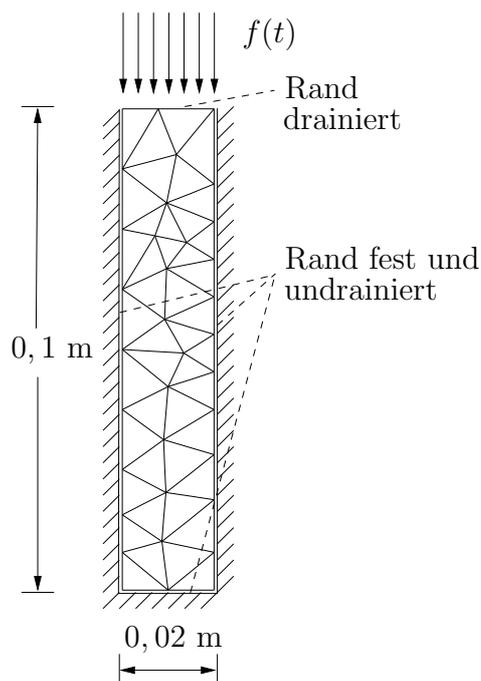


Abbildung 8.3: Belastung und Randbedingungen des Schwammes

Aufgrund des sich aus den Randbedingungen ergebenden eindimensionalen Deformationszustandes eignet sich dieses Randwertproblem ideal zur Untersuchung von physikalischen Grenzzuständen. So kann z. B. der Deformationszustand, der zum Kompressionspunkt gehört, analytisch berechnet werden. Für die weiteren Untersuchungen werden die in Tabelle 8.2 aufgeführten Materialparameter verwendet. Die zusätzlichen Parameter für das Ogden-Modell können, wie beim leeren Festkörperskelett, aus Tabelle 8.1 entnommen werden. Materialparameter, die bei den folgenden Berechnungen variiert werden, sind im einzelnen angegeben. In den weiteren Berechnungen wird die Volumenkräftdichte \mathbf{b} jeweils vernachlässigt.

Lamé-Konstante μ^S	$1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
Lamé-Konstante Λ^S	$1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
Anfangsvolumenanteil Festk. n_{0S}^S	0,67
Darcy-Parameter k_0^F	$5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$
reale Fluidwichte γ^{FR}	10^4 N/m^3

Tabelle 8.2: Materialparameter des fluidgesättigten porösen Schwammes

8.2.1 Konsolidationsproblem

Zunächst soll hier das Konsolidationsproblem untersucht werden. Dazu wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ eine sprungartige Oberflächenbelastung von $f = 1,25 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ auf den oberen Rand des Schwammes aufgebracht. Aufgrund der Viskosität des im Schwamm enthaltenen Fluids ist der Deformationsprozeß zeitabhängig. Das Zeitverhalten des Anfangs-Randwertproblems wird durch den Konsolidationsvorgang, d. h. das Ausströmen des Fluids über die Oberfläche geprägt. Eine Deformation des Schwammes stellt sich erst im Laufe des Konsolidationsprozesses ein. Deshalb kann trotz der sprungartigen Belastung eine quasi-statische Betrachtungsweise des Problems erfolgen, was bei der Herleitung der Bilanzgleichungen vorausgesetzt wurde. In diesem Beispiel wird der *Darcy*-Parameter zunächst als deformationsunabhängig angenommen: $k^F = k_0^F$. Bei der vorgegebenen Höhe des Schwammes von 0,1 m und den angegebenen Materialparametern führt die gewählte Oberflächenbelastung zu einer Oberflächenabsenkung von ca. 0,02 m. Dies entspricht einer Längsdehnung von ca. 20 %. Aufgrund des eindimensionalen Deformationszustandes stimmt der Wert der Längsdehnung mit der Volumendehnung überein. Aus den Größenordnungen ist leicht ersichtlich, daß in diesem Beispiel finite Deformationen auftreten.

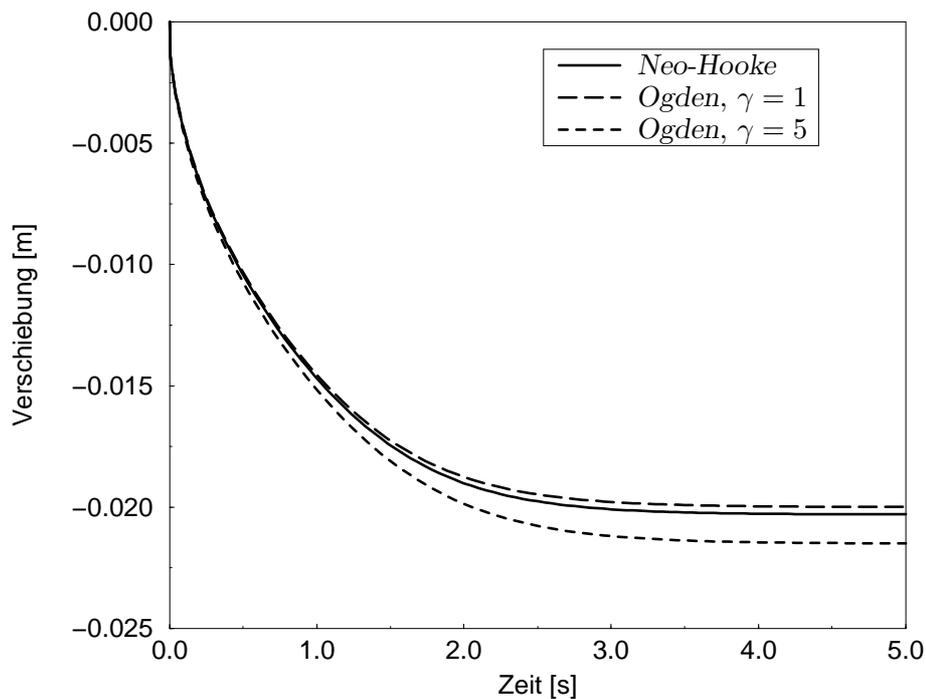


Abbildung 8.4: Absenkung der Oberfläche beim Konsolidationsproblem

In Abbildung 8.4 ist die Absenkung der Oberfläche unter der Last beim *Neo-Hooke*-Modell für poröse Festkörper und beim *Ogden*-Modell für poröse Festkörper bei Wahl unterschiedlicher Werte für den *Ogden*-Parameter γ dargestellt. Im Laufe des Konsolidationsprozesses wird Flüssigkeit durch den oberen Rand ausgepreßt. Gleichzeitig erfolgt eine Absenkung der Oberfläche. Die maximale Deformation wird er-

reicht, wenn der Konsolidationsprozeß abgeschlossen ist. Dann hat sich eine homogene Druckverteilung ($p = 0$) im Schwamm eingestellt.

Im Bereich kleiner Deformationen unterscheiden sich die Ergebnisse nicht, die mit den beiden unterschiedlichen Elastizitätsgesetzen berechnet werden. Auch bei größeren Deformationen sind nur geringe Unterschiede zwischen den Materialmodellen zu erkennen. Bei diesem Randwertproblem sind hauptsächlich die entstehenden finiten Volumendehformationen für das mechanische Verhalten verantwortlich. Die Volumendehnungen haben einen erheblichen Einfluß im volumetrischen Erweiterungsterm U^S der Verzerrungsenergiefunktion. Dieser aber weist bei beiden Materialmodellen eine analoge Struktur auf. Mit Hilfe des *Ogden*-Parameters γ läßt sich das Verhalten im Bereich großer Volumendehformationen noch geringfügig beeinflussen. Demzufolge ist bei diesem Randwertproblem, aufgrund der großen Volumendehformationen, der Basistyp des gewählten Elastizitätsgesetzes (*Neo-Hooke-Ansatz*, *Ogden-Ansatz*) nur von untergeordneter Bedeutung. Deshalb wird bei den weiteren Untersuchungen das einfachere *Neo-Hooke*-Modell für poröse Medien verwendet.

Abbildung 8.5 zeigt die Verteilung des Porenfluiddrucks p und der Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_F während verschiedener Phasen des Konsolidationsvorgangs beim *Neo-Hooke*-Modell. Die Deformationszustände sind maßstäblich dargestellt. Bei sprunghafter Lastaufbringung tritt zunächst keine Deformation auf, die äußere Last wird vollständig vom Porenfluiddruck aufgenommen. Erst durch Auspressen des Fluids über die Oberfläche wird eine Deformation des Festkörperskeletts ermöglicht. Nach Beendigung des Konsolidationsvorgangs findet keine Flüssigkeitsausströmung mehr statt. Der Porenfluiddruck ist dann im ganzen Bereich homogen verteilt und entspricht dem Umgebungsdruck. Die äußere Last wird nun vollständig von der Festkörperstruktur getragen.

8.2.2 Deformation auf den Kompressionspunkt

Das folgende Berechnungsbeispiel dient zur Validierung des in Kapitel 5 konstruierten volumetrischen Erweiterungsterms U^S zur Modellierung des Kompressionspunktes in porösen Festkörpern. Dazu wird der bereits beschriebene Schwamm so stark belastet, bis der Kompressionspunkt (nahezu) erreicht wird. Bei der Höhe des Schwammes von 0,1 m und einem Anfangsvolumenanteil des Festkörpers von $n_{0S}^S = 0,67$ wird der Kompressionspunkt bei einer Oberflächenabsenkung von

$$-u_2 = (1 - n_{0S}^S) \cdot 0,1\text{m} = 0,033\text{m}$$

erreicht. In diesem Fall sind alle Poren der Festkörpermatrix geschlossen. Der Volumenanteil des Festkörperanteils beträgt dann $n^S = 1$. Aufgrund der Inkompresibilität des Festkörpermaterials ist somit keine weitere Volumenkompression mehr möglich.

Die folgenden Ergebnisse sind mit dem *Neo-Hooke*-Modell und den in Tabelle 8.2 angegebenen Materialparametern berechnet. Eine Berechnung mit dem *Ogden*-Modell

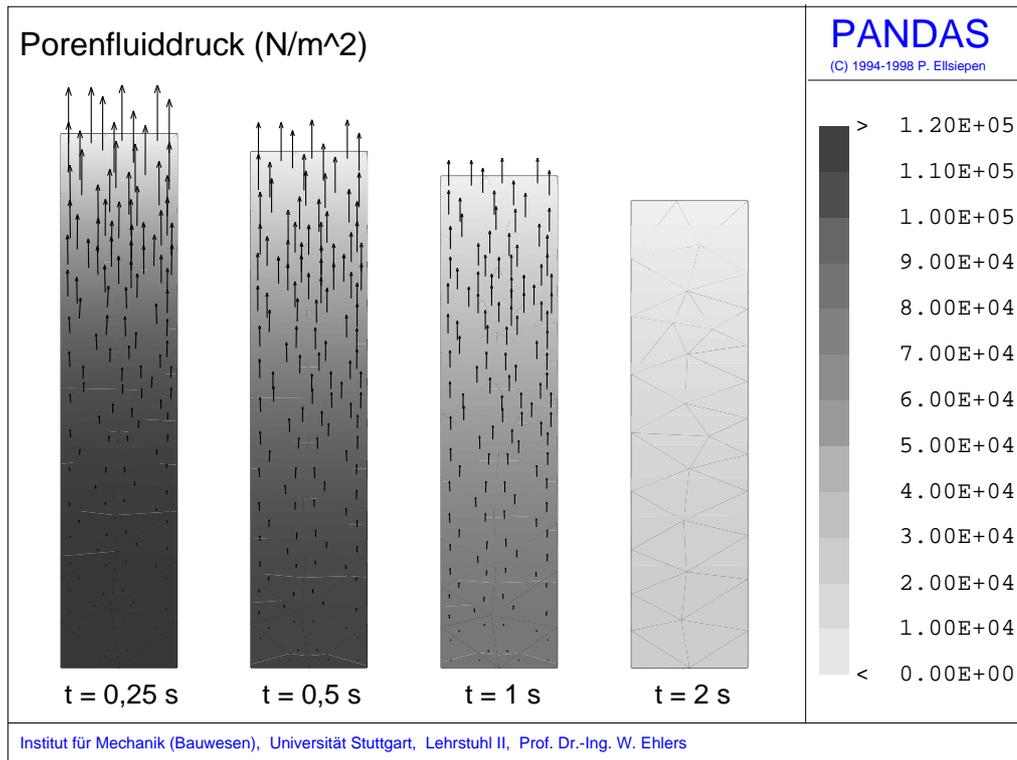


Abbildung 8.5: Verteilung des Porenfluiddrucks (Farbtabelle) und der Sicker-
geschwindigkeit (Vektoren) beim Konsolidationsproblem

liefert nahezu identische Ergebnisse, da das mechanische Verhalten des Randwert-problems vom volumetrischen Erweiterungsterm U^S dominiert wird. Nach einem anfänglichen Belastungssprung von $f = 1,25 \cdot 10^5$ N/m² zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ (siehe voriges Beispiel) wird die Oberflächenbelastung innerhalb von 10 s linear auf das 20-fache dieser Anfangsbelastung gesteigert.

Abbildung 8.6 zeigt den Verlauf der Oberflächenabsenkung über der Zeit. Zum Vergleich ist auch noch einmal der Verschiebungsverlauf beim bereits untersuchten Konsolidationsproblem (konstante Belastung über der Zeit) angegeben. Für den Fall der Laststeigerung erkennt man, daß sich die Oberflächenabsenkung asymptotisch der theoretischen Grenze, die durch den Kompressionspunkt festgelegt ist, nähert. Auch bei weiterer Laststeigerung kann diese Grenze nicht überschritten werden. Es ist keine weitere Volumendeformation im Kompressionsbereich möglich.

Dieses Ergebnis läßt sich nur mit den in Kapitel 5 vorgestellten Materialgesetzen zur Behandlung finiter Volumendeformationen in porösen Festkörpern erhalten. Würde man bei diesem Belastungsfall ein Materialgesetz für nicht-poröse Festkörper verwenden, so würde der Kompressionspunkt überschritten. Dies hätte zur Folge, daß sich eine negative Porosität n^F einstellt, was physikalisch unmöglich ist. Eine weitere numerische Berechnung des Problems wäre dann nicht mehr sinnvoll und meist auch nicht mehr möglich, da der Lösungsalgorithmus nicht mehr konvergiert.

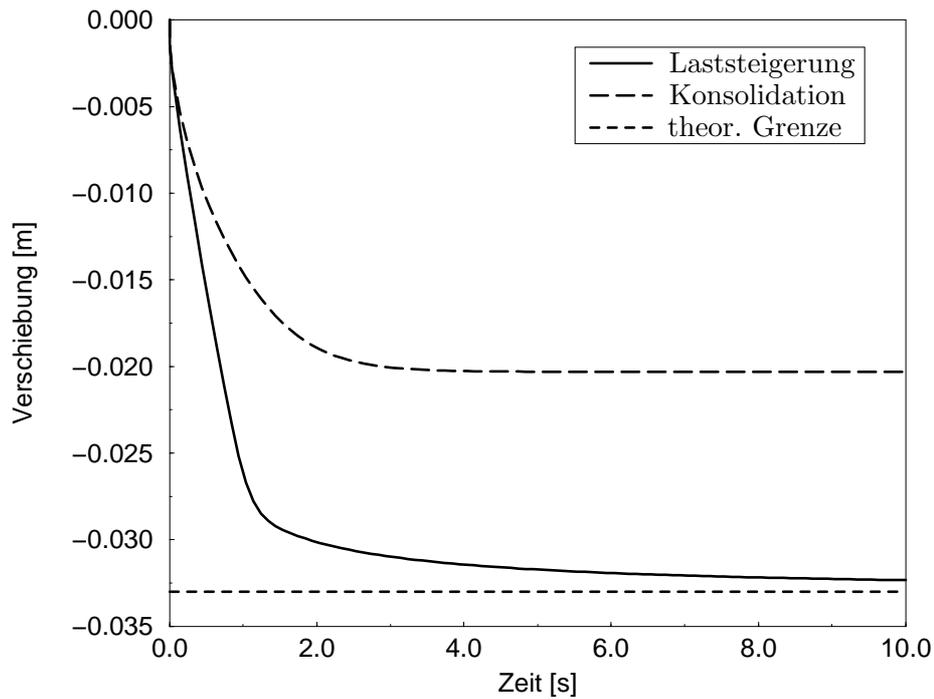


Abbildung 8.6: Absenkung der Oberfläche bei kontinuierlicher Laststeigerung; Vergleich mit Konsolidationsproblem

In Abbildung 8.7 ist der Porenfluiddruck p und der Festkörpervolumenanteil n^S beim Laststeigerungsfall zu verschiedenen Zeiten dargestellt. Zu Beginn der Belastung verhindert ein hoher Porenfluiddruck im unteren Bereich des Schwammes eine dortige Volumendeformation, während die Volumendeformation im oberen Bereich bereits einsetzt. Die Volumendeformation ist durch zunehmende n^S gekennzeichnet. Im Laufe der Zeit wird immer mehr Porenflüssigkeit über die obere Oberfläche ausgepreßt. Der Porenfluiddruck im unteren Teil des Schwammes nimmt ab. Dies ermöglicht eine zunehmende Volumendeformation im ganzen Bereich, die von der Oberfläche des Schwammes nach unten hin fortschreitet. Nach einer gewissen Zeit sind die Poren des Festkörperskeletts (nahezu) geschlossen und man erhält eine homogene Verteilung des Festkörpervolumenanteils von $n^S \approx 1$ im ganzen Bereich.

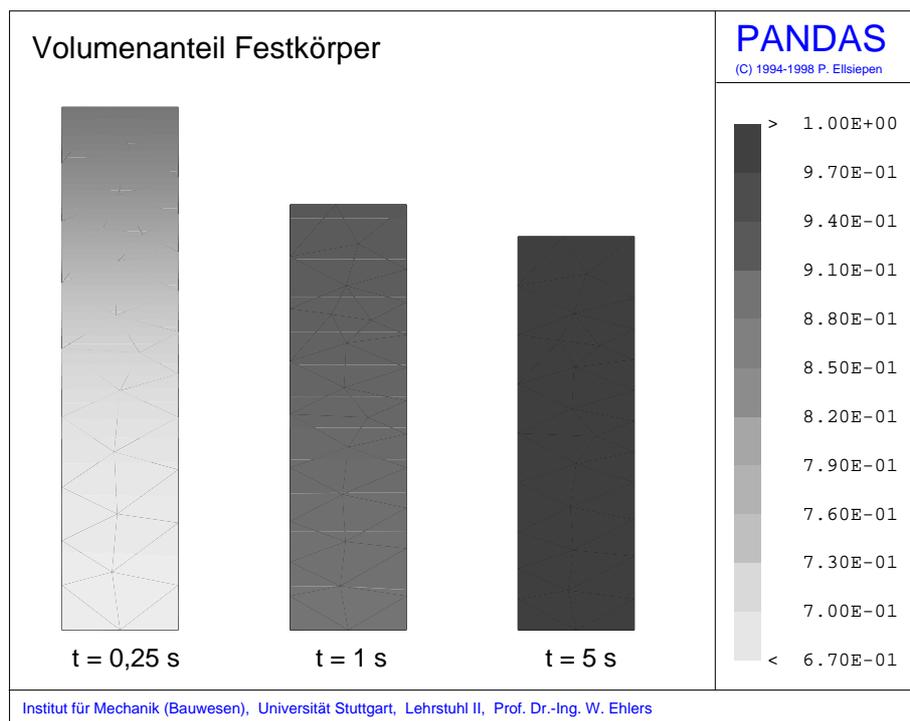
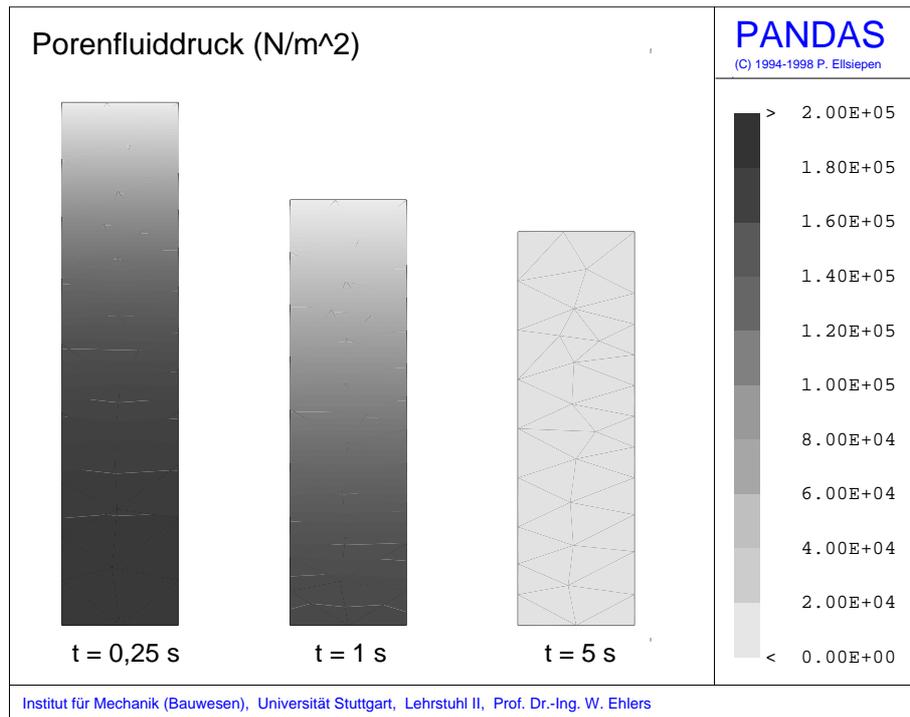


Abbildung 8.7: Verteilung des Porenfluiddrucks p und des Festkörpervolumenanteils n^S bei kontinuierlicher Laststeigerung

8.2.3 Deformationsabhängiger *Darcy-Parameter*

Das Berechnungsbeispiel des fluidgesättigten Schwammes unter sprungartiger Belastung eignet sich weiterhin zur Untersuchung des Deformations-Zeit-Verhaltens bei Verwendung des isotropen deformationsabhängigen *Darcy-Permeabilitätsparameters* $k^F(n^F)$ nach (3.64). Die Oberflächenbelastung wird entsprechend dem Konsolidationsbeispiel als Belastungssprung von $f = 1,25 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ gewählt. Zur Berechnung der Festkörperextraspannungen wird das *Neo-Hooke-Modell* für poröse Festkörper verwendet. In Abbildung 8.8 ist der Deformationsverlauf über der Zeit bei Vorgabe von verschiedenen Werten für den Exponenten κ im deformationsabhängigen Permeabilitätsparameter $k^F(n^F) = k_0^F (n^F/n_{0S}^F)^\kappa$ nach (3.64) dargestellt. Für $\kappa = 0$ ist k^F konstant.

Eine Veränderung des Parameters κ ändert die Zeitskala des Konsolidationsproblems signifikant. Je höher der Exponent κ im Potenzansatz (3.64) gewählt wird, desto kleiner wird die Permeabilität bei zunehmender Volumenkompression. Dies führt dazu, daß der Konsolidationsvorgang entsprechend länger dauert und die Oberflächenabsenkung langsamer vor sich geht. Der Wert der Oberflächenabsenkung, der sich nach Abschluß des Konsolidationsvorgangs einstellt, wird durch die Wahl eines deformationsabhängigen Permeabilitätsparameters natürlich nicht beeinflusst. Dies ändert lediglich das zeitliche Verhalten des Gesamtproblems.

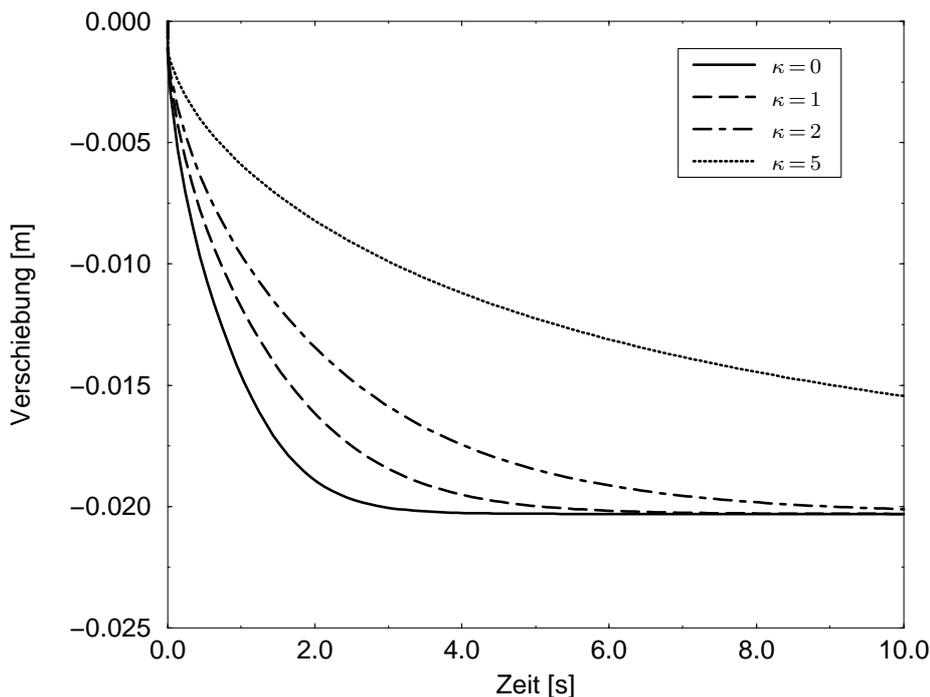


Abbildung 8.8: Absenkung der Oberfläche bei unterschiedlichen Werten des Exponenten κ im deformationsabhängigen *Darcy-Parameter* $k^F(n^F)$

8.3 Konvergenzstudie

Bevor komplexere Anfangs-Randwertprobleme berechnet werden, soll zunächst eine Konvergenzstudie durchgeführt werden. Hierbei ist von besonderem Interesse, welchen Einfluß die Terme, die bei der Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen entstehen, auf das Konvergenzverhalten in einer *Newton*-Iteration haben. Als Berechnungsbeispiel dient ein fluidgesättigter Block. Dieses Beispiel wird häufig auch als Halbraumproblem bezeichnet. Aufgrund der Symmetrie des Problems wird nur die dargestellte Hälfte des Problems vernetzt und berechnet. Eine Hälfte des oberen Randes des Halbraums ist belastet und undrainiert, die andere Hälfte ist unbelastet und drainiert, siehe Abbildung 8.9. Es findet dabei eine Oberflächenabsenkung unter der Last statt, während Flüssigkeit durch den durchlässigen Teil der Oberfläche austritt.

Bei der Berechnung wird von einem ebenen Verzerrungszustand ausgegangen. Als Lastfunktion wird eine lineare Steigerung der Oberflächenlast über der Zeit vorgegeben. Für dieses Berechnungsbeispiel wird das *Neo-Hooke*-Modell für poröse Medien zur Berechnung der Festkörperextraspansungen verwendet. Der *Darcy*-Parameter ist deformationsabhängig ($\kappa = 1$).

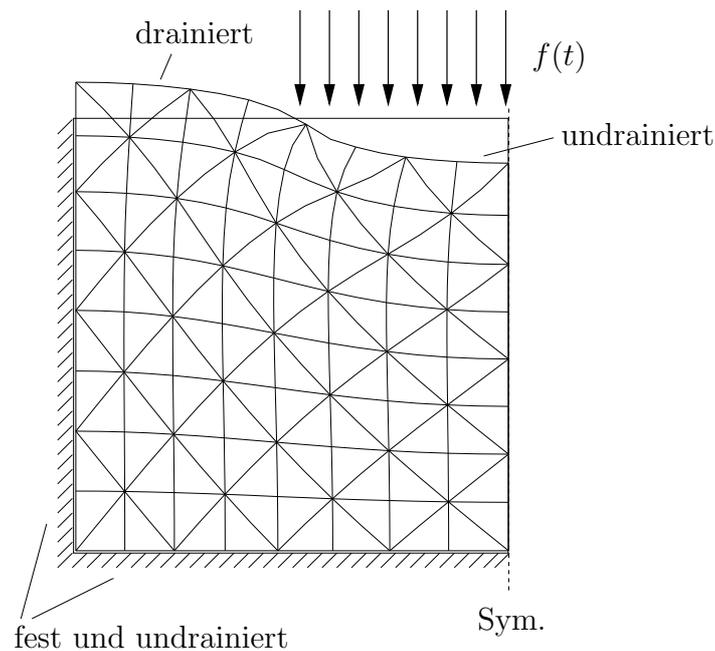


Abbildung 8.9: Halbraum, Randbedingungen sowie deformierter und undeformierter Zustand

Für den in Abbildung 8.9 maßstäblich dargestellten Deformationszustand zu einem bestimmten Zeitpunkt wird die Residuumsnorm des FEM-Gleichungssystems innerhalb einer *Newton*-Iterationsschleife betrachtet. Das untersuchte System ist hierbei

großen Deformationen unterworfen. Außerdem ist zum betrachteten Zeitpunkt die Druckverteilung im Gebiet noch stark inhomogen. Damit sind die beschreibenden Gleichungen des Problems bezüglich aller Freiheitsgrade stark nichtlinear.

Bei Berücksichtigung aller bei der Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen auftretenden Terme erhält man quadratische Konvergenz im *Newton*-Verfahren („Vollständig“ in Tabelle 8.3). Vernachlässigt man bei der Berechnung der Tangente des FEM-Gleichungssystems die Linearisierung (6.47)

$$D_u \int_{\mathcal{B}} \frac{k^F(n^F)}{\gamma^{FR}} \text{grad } p \cdot \text{grad } \delta p \, dv$$

der geometrische Nichtlinearität des Druckterms in der Volumenbilanz, dann verschlechtert sich das Konvergenzverhalten nur unwesentlich (Spalte „ohne (6.47)“ in Tabelle 8.3). Dieser Term beinhaltet auch den Anteil aus der geometrischen Nichtlinearität infolge des deformationsabhängigen *Darcy*-Parameters. Vernachlässigt man jedoch die Linearisierung (6.39)

$$D_u \int_{\mathcal{B}} -p \mathbf{I} \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S \, dv$$

bezüglich der geometrischen Nichtlinearität im Druckterm in der Impulsbilanz, so verschlechtert sich das Konvergenzverhalten dramatisch. Die Linearisierung dieses Terms ist demzufolge extrem wichtig bei der Tangentenberechnung für das FEM-Gleichungssystem. Bei Vernachlässigung der aus der Festkörpermechanik bekannten Linearisierung (6.38) des Spannungsterms erhält man keine Konvergenz im *Newton*-Verfahren.

Residuumsnorm $\ \mathbf{F}\ $	Vollständig	ohne (6.47)	ohne (6.39)
1. Iteration	$9,199 \cdot 10^2$	$9,199 \cdot 10^2$	$9,199 \cdot 10^2$
2. Iteration	$5,413 \cdot 10^1$	$5,295 \cdot 10^1$	$1,615 \cdot 10^2$
3. Iteration	$2,693 \cdot 10^{-1}$	$1,857 \cdot 10^{-1}$	$5,888 \cdot 10^1$
4. Iteration	$5,664 \cdot 10^{-6}$	$2,329 \cdot 10^{-5}$	$2,321 \cdot 10^1$
5. Iteration	$3,851 \cdot 10^{-10}$	$3,312 \cdot 10^{-8}$	$1,030 \cdot 10^1$
⋮			⋮
27. Iteration			$1,476 \cdot 10^{-6}$
28. Iteration			$7,361 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 8.3: Residuumsnorm $\|\mathbf{F}\|$ in einer *Newton*-Iteration

Anmerkung: Im Bereich kleiner Deformationen wirkt sich die Vernachlässigung der geometrischen Nichtlinearitäten bei der Linearisierung natürlich entsprechend weniger stark aus.

8.4 Anisotrope Permeabilitätseigenschaften

Um die Wirksamkeit des in Kapitel 3.5.2 entwickelten anisotropen Permeabilitätstensors \mathbf{K}_v zu untersuchen, wird das in Abbildung 8.10 dargestellte Randwertproblem berechnet. Um den Einfluß des Anisotropieeffekts klar herausstellen zu können, wird von einem konstanten Darcy-Parameter k_0^F ausgegangen.

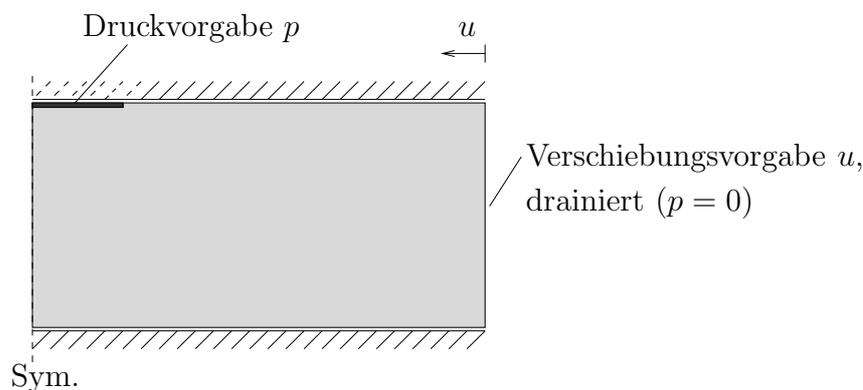


Abbildung 8.10: Verschiebungs- und Druckvorgabe zur Untersuchung anisotroper Permeabilitätseigenschaften

Zunächst wird ein fluidgesättigtes hochporöses Material ($n_{0S}^S = 0,33$) verschiebungsgesteuert auf 50% seiner ursprünglichen Breite horizontal zusammengedrückt und dann festgehalten. Eine vertikale Deformation ist infolge der Randbedingungen ausgeschlossen. Anschließend wird auf einem kleinen Bereich des oberen Randes ein Fluidüberdruck vorgegeben, was zu einer Fluidströmung von hier durch das Festkörperskelett zum drainierten rechten Rand führt. Abbildung 8.11 zeigt den Druckverlauf und die Sickergeschwindigkeit durch den Körper. Hierbei wird nur der stationäre Zustand betrachtet, der sich nach dem Druckaufbau am oberen Rand ergibt.

Im Fall isotroper Permeabilitätseigenschaften ($\mathbf{K}_v = \mathbf{I}$) findet ein Flüssigkeitsstrom durch den ganzen Körper statt. Die Sickergeschwindigkeit (und damit der Volumenstrom) der am rechten Rand austretenden Flüssigkeit ist unabhängig von der vertikalen Position am Rand. Bei Verwendung eines anisotropen Permeabilitätstensors $\mathbf{K}_v = \overset{+}{\mathbf{B}}_S$ ändert sich das Strömungsverhalten der Flüssigkeit durch das Festkörperskelett erheblich. Aufgrund der horizontalen Deformation der Probe wird die Durchströmung in vertikaler Richtung erheblich behindert. Dies führt dazu, daß der größte

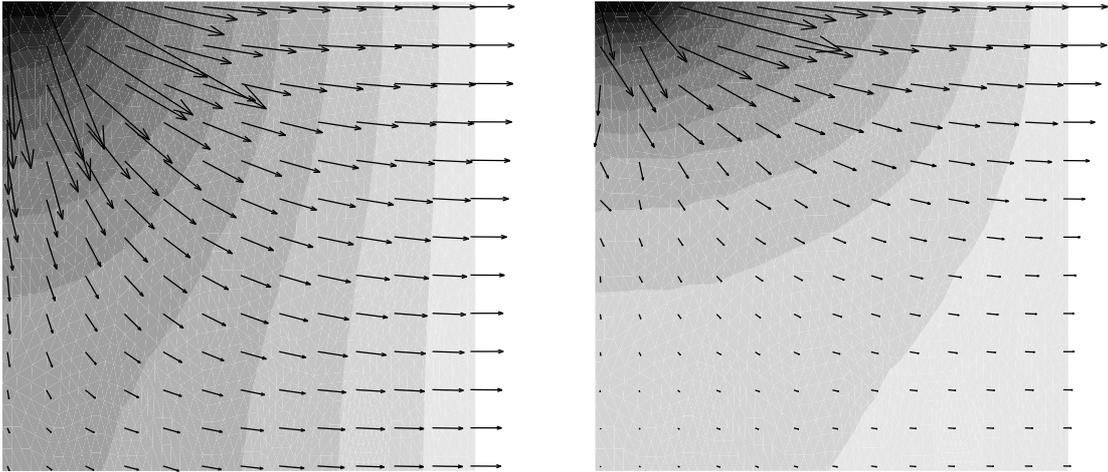


Abbildung 8.11: Porenfluiddruck und Sickergeschwindigkeit im stationären Zustand bei isotropen (links) und anisotropen (rechts) Permeabilitätseigenschaften

Teil der Flüssigkeit im oberen Bereich des rechten Randes austritt. Der Volumenstrom, der durch den unteren Teil des rechten Randes austritt, ist sehr gering.

Anmerkung: Bei der vorangegangenen Konvergenzstudie konnte gezeigt werden, daß die Vernachlässigung der Linearisierung des skalaren deformationsabhängigen Permeabilitätsparameters bezüglich der Deformation nur einen geringen Einfluß auf das Konvergenzverhalten hat. Aus diesem Grund wurde auch hier auf eine Linearisierung des Permeabilitätstensors verzichtet, zumal hier bei der Linearisierung ein vierstufiger Tensor entstehen würde, dessen Auswertung sehr rechenzeitintensiv ist. Bei der Berechnung dieses Beispiels sind die Unterschiede im Konvergenzverhalten bei Verwendung eines isotropen bzw. anisotropen Permeabilitätstensors nur äußerst gering.

8.5 Deformation eines porösen Würfels

Im letzten Beispiel wird ein dreidimensionales Anfangs-Randwertproblem gelöst. Hierbei wird ein Viertel der Oberfläche eines flüssigkeitsgesättigten porösen Würfels belastet. Unter der Lasteinleitungsstelle ist die Oberfläche undrainiert, während der restliche Teil der oberen Randfläche drainiert ist, siehe Abbildung 8.12. Für die Ortsdiskretisierung des Problems werden 1296 20-knotige Quaderelemente verwendet (quadratische Verschiebungsansätze, lineare Ansätze für den Porenfluiddruck).

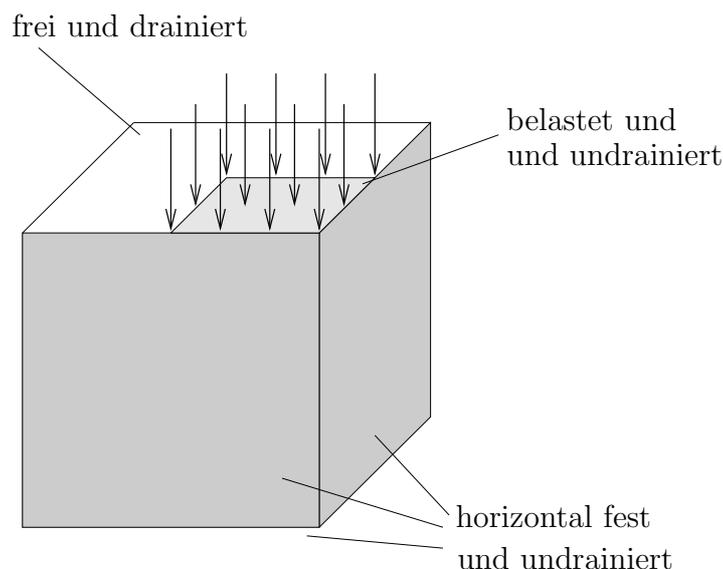


Abbildung 8.12: Belastung und Randbedingungen beim Würfel

Die Lastaufbringung erfolgt mit einer Rampenfunktion über der Zeit. Die Belastungsgeschichte wird dabei so gewählt, daß die Zeit, in der die Last vollständig aufgebracht wird, im Vergleich zur Konsolidationszeit gering ist. Aufgrund der Fluidviskosität ist die Deformation auch nach dem vollständigen Aufbringen der Last zeitabhängig.

Abbildung 8.13 zeigt die maßstäbliche Deformation des Würfels unmittelbar nach der Lastaufbringung und nach Beendigung des Konsolidationsvorgangs. Unmittelbar nach der vollständigen Lastaufbringung wölbt sich die unbelastete Oberfläche des Würfels nach oben aus, während unter der belasteten Oberfläche eine Absenkung stattfindet. Im Laufe des Konsolidationsvorgangs wird Flüssigkeit durch den drainierten Teil der Oberfläche ausgepreßt. Dadurch findet eine weitere Absenkung der belasteten Oberfläche statt. Interessant ist, daß auch eine Absenkung der unbelasteten Oberfläche stattfindet. Nach Beendigung des Konsolidationsprozesses hat auch eine Absenkung der unbelasteten Oberfläche unter die ursprüngliche Form des Würfels stattgefunden.

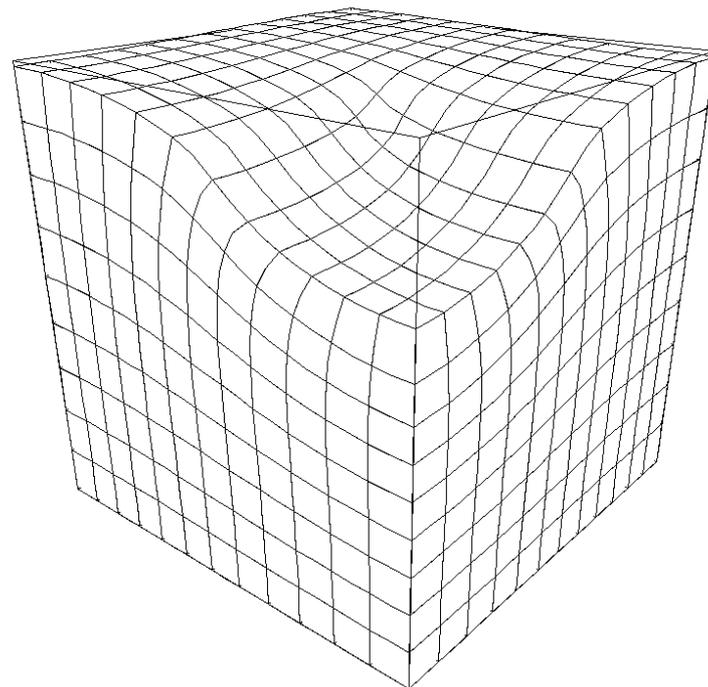
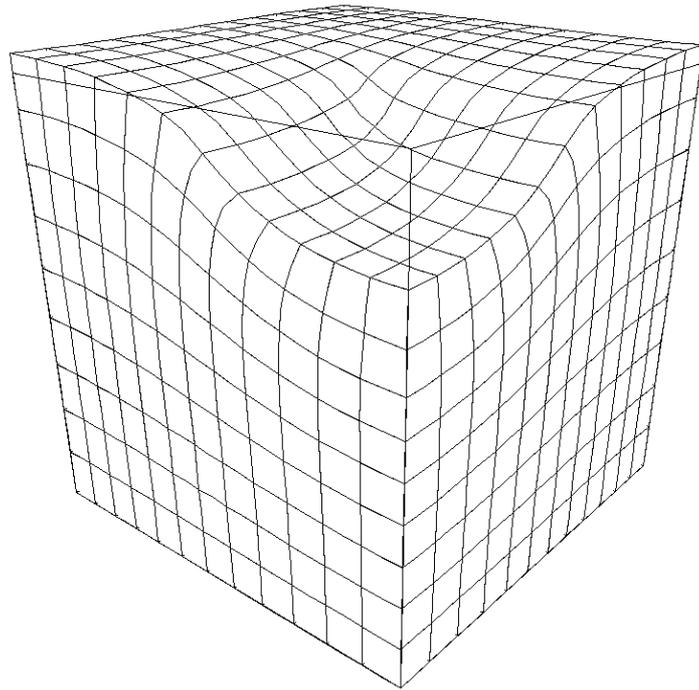


Abbildung 8.13: Deformation des Würfels unmittelbar nach Lastaufbringung (oben) und nach Beendigung des Konsolidationsvorgangs (unten)

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Zusammenfassung

Mit Hilfe der Theorie Poröser Medien (TPM) läßt sich das mechanische Verhalten von fluidgesättigten, deformierbaren porösen Festkörpern untersuchen. Die Theorie Poröser Medien stellt eine kontinuumsmechanische Formulierung dar, die auf der Mischungstheorie basiert. In dieser Arbeit wird ein inkompressibles Zweiphasenmodell behandelt. Dieses besteht aus einem elastisch deformierbaren porösen Festkörperskelett, das mit einer viskosen Flüssigkeit gesättigt ist. Dabei werden beide Konstituierenden als materiell inkompressibel betrachtet. Trotz der angenommenen materiellen Inkompressibilität können sich aufgrund von Porositätsänderungen große Volumendehnungen in der Festkörpermatrix ergeben.

Ziel dieser Arbeit ist die Behandlung finiter elastischer Deformationen im Festkörperskelett. Hierzu werden zunächst die aus der Literatur bekannten finiten Hyperelastizitätsgesetze untersucht. Als Ergebnis erhält man, daß die aus der Festkörpermechanik nicht-poröser nahezu inkompressibler Materialien bekannte Aufspaltung der hyperelastischen Verzerrungsenergiefunktion in rein isochore (volumenerhaltende) und rein volumetrische (volumenändernde) Anteile für finite Volumendehnungen zu unphysikalischen Ergebnissen führt. Aufgrund der möglichen finiten Volumendehnungen in einem porösen Festkörperskelett sind derartige Materialgesetze deshalb hier nicht verwendbar.

Die Behandlung finiter elastischer Deformationen, wie sie z. B. in porösen Elastomerschäumen auftreten kann, erfordert die Konstruktion neuartiger Elastizitätsgesetze für das Festkörperskelett. Insbesondere muß der sogenannte Kompressionspunkt berücksichtigt werden. Dieser Deformationszustand ist erreicht, wenn durch eine Volumendehnung im Kompressionsbereich alle Poren geschlossen sind und eine weitere Volumenkompression aufgrund der materiellen Inkompressibilität des Matrixmaterials nicht möglich ist. Zur Behandlung dieses physikalischen Effekts wird ein neuer, thermodynamisch konsistenter volumetrischer Erweiterungsterm der Verzerrungsenergiefunktion eines hyperelastischen Materialgesetzes konstruiert. Durch

Kombination dieses Erweiterungsterms mit bekannten hyperelastischen Basisgesetzen erhält man ein neues Elastizitätsgesetz für poröse Festkörper vom *Neo-Hooke*-Typ bzw. vom *Ogden*-Typ. Für beide Materialgesetze wird der konsistente elastische Tangentenoperator hergeleitet. Das entwickelte finite Elastizitätsgesetz läßt sich sowohl zur Berechnung fluidgefüllter poröser Festkörper als auch zur Berechnung leerer poröser Festkörperskelette verwenden.

Die finiten Deformationen im Festkörperskelett führen zu einer Veränderung der Permeabilitätseigenschaften der Festkörpermatrix. Dadurch wird die Fluidströmung durch das poröse Material maßgeblich beeinflußt. Zur Modellierung dieses Effekts wird ein deformationsabhängiges *Darcy*-Filtergesetz entwickelt. Hierbei ist es auch möglich, deformationsinduzierte anisotrope Permeabilitätseigenschaften zu berücksichtigen.

Grundlage zur numerischen Behandlung des gekoppelten Festkörper-Fluid-Problems sind die schwachen Formen der Bilanzgleichungen in einer Verschiebungs-Druck-Formulierung. Zur numerischen Berechnung müssen die orts- und zeitkontinuierlichen schwachen Formen der Bilanzgleichungen diskretisiert werden. Dabei wird zunächst eine Semidiskretisierung der Gleichungen im Ort mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) vorgenommen, wobei die unbekanntes Feldgrößen, die Festkörperverschiebung und der Porenfluiddruck, durch geeignete Ansätze räumlich approximiert werden müssen. Anschließend erfolgt die Zeitdiskretisierung des entstehenden zeitabhängigen Gleichungssystems durch ein geeignetes Zeitintegrationsverfahren.

Zur effizienten numerischen Lösung des nichtlinearen gekoppelten Mehrfeldproblems ist eine konsistente Linearisierung des diskretisierten Gleichungssystems notwendig. Dazu wird eine konsistente Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen bezüglich der unbekanntes Feldgrößen durchgeführt. Die Linearisierung der schwachen Formen steht in engem Zusammenhang mit der Linearisierung des zeitdiskreten FEM-Gleichungssystems. Durch eine systematische Darstellung läßt sich die Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen direkt auf die Linearisierung der diskretisierten Gleichungen übertragen.

Berechnungsbeispiele an fluidgesättigten Festkörperskeletten zeigen, daß aufgrund der Fluidviskosität selbst bei quasi-statischer Betrachtung ein zeitabhängiges Deformationsverhalten auftritt. Mit Hilfe von Modellproblemen wird eine Validierung der entwickelten Materialgesetze und Formulierungen vorgenommen.

9.2 Ausblick

Das in dieser Arbeit entwickelte finite Elastizitätsgesetz für poröse Festkörper läßt sich auch bei der Behandlung inelastischer Problemstellungen (Viskoelastizität, Plastizität, Viskoplastizität) poröser Medien verwenden. Inelastische Berechnungen verwenden meist eine Zerlegung der Deformation in elastische und inelastische Anteile (Zwischenkonfigurationskonzept). Die Beschreibung des elastischen Anteils in diesen Materialmodellen läßt sich durch das in Kapitel 5 entwickelte Hyperelastizitätsgesetz vornehmen. Allerdings muß dabei beachtet werden, daß der dort auftretende Festkörpervolumenanteil n_{0S}^S dann kein konstanter Parameter mehr ist. Vielmehr muß n_{0S}^S als ein durch eine vorherige inelastische Volumendeformation entstandener Festkörpervolumenanteil interpretiert werden, der als Parameter in das Hyperelastizitätsgesetz eingeht.

Die Modellierung eines kompressiblen Fluids, z. B. eines Gases, verspricht weitere interessante Ergebnisse ebenso wie die Berücksichtigung mikropolarer Freiheitsgrade oder die Berücksichtigung thermischer Effekte.

Weitere Bemühungen sind notwendig, um die Finite-Elemente-Vernetzung von dreidimensionalen komplexen Geometrien mit den in dieser Arbeit entwickelten Elementen zu ermöglichen. Um eine effiziente und gleichzeitig genaue Berechnung eines Anfangs-Randwertproblems zu ermöglichen, müssen Fragen adaptiver Lösungsstrategien in Zeit und Raum untersucht werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Abraham, R.; Marsden, J. E.; Ratiu, T.: Manifolds, Tensor Analysis, and Applications. Addison-Wesley, Reading, 1982.
- [2] Ball, J. M.: Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity. Arch. Rational Mech. Anal. **63** (1977), 337 - 403.
- [3] Barthold, F.-J.: Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien. Technischer Bericht F 93/2. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1993.
- [4] Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden. Springer, Berlin, 1990.
- [5] Bear, J.: Dynamics of Fluids in Porous Media. Elsevier, New York, 1972.
- [6] Beatty, M. F.: Topics in Finite Elasticity: Hyperelasticity of Rubber, Elastomers, and Biological Tissues – with Examples. Appl. Mech. Rev. **40** (1987), 1699 - 1734.
- [7] Beatty, M. F.; Stalnaker, D. O.: The Poisson Function of Finite Elasticity. J. Appl. Mech. **53** (1987), 807 - 813.
- [8] de Boer, R.: Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [9] de Boer, R.; Ehlers, W.: Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf Bodenmechanische Probleme, Teil I. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen der Universität-GH-Essen, Heft 40, Essen 1986.
- [10] Bogert, P. A. J, van den: Computational Modelling of Rubberlike Materials. Dissertation, Technische Universität Delft, 1991.
- [11] Bowen, R. M.: Toward a Thermodynamics and Mechanics of Mixtures. Arch. Rational Mech. Anal. **24** (1967), 370 - 403.
- [12] Bowen, R. M.: Incompressible Porous Media Models by Use of the Theory of Mixtures. Int. J. Engng. Sci. **18** (1980), 1129 - 1148.

- [13] Bowen, R. M.: Compressible Porous Media Models by Use of the Theory of Mixtures. *Int. J. Engng. Sci.* **20** (1982), 697 - 735.
- [14] Brenan, K. E.; Campbell, S. L.; Petzold, L. R.: *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. Elsevier, New York, 1989.
- [15] Carlson, D. E.; Hoger, A.: The Derivative of a Tensor-Valued Function of a Tensor. *Quart. Appl. Math.* **44** (1986), 409-423.
- [16] Chadwick, P.; Ogden, R. W.: On the Definition of Elastic Moduli. *Arch. Rational Mech. Anal.* **44** (1971), 41 - 53.
- [17] Chadwick, P.; Ogden, R. W.: A Theorem of Tensor Calculus and its Application to Isotropic Elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **44** (1971), 54 - 68.
- [18] Ciarlet, P. G.: *Mathematical Elasticity. Vol. I: Three-dimensional Elasticity*. Elsevier, Amsterdam, 1988.
- [19] Coleman, B. D.; Noll, W.: The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **13** (1963), 167 - 178.
- [20] Darcy, H.: *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, Dalmont, Paris, 1856.
- [21] Diebels, S.; Ehlers, W.: Dynamic Analysis of a Fully Saturated Porous Medium Accounting for Geometrical and Material Non-Linearities. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **39** (1996), 81 - 97.
- [22] Diebels, S.; Ehlers, W.: On Fundamental Concepts of Multiphase Micropolar Materials. *Technische Mechanik* **16** (1996), 77 - 88.
- [23] Doyle, T. C.; Ericksen, J. L.: *Nonlinear Elasticity. Advances in Appl. Mech. IV*. Academic Press, New York, 1956.
- [24] Ehlers, W.: Poröse Medien – ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie. *Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen der Universität-GH-Essen*, Heft 47, Essen 1989.
- [25] Ehlers, W.: Toward Finite Theories of Liquid-Saturated Elasto-Plastic Porous Media. *Int. J. Plasticity* **7** (1991), 443 - 475.
- [26] Ehlers, W.: Constitutive Equations for Granular Materials in Geomechanical Context. In K. Hutter, Hrsg., *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics, CISM Courses and Lectures No. 337*, 313 - 402, Springer-Verlag, Wien, 1993.
- [27] Ehlers, W.: Grundlegende Konzepte in der Theorie Poröser Medien. *Technische Mechanik* **16** (1996), 63 - 76.

- [28] Ehlers, W.; Eipper, G.: The Simple Tension Problem at Large Volumetric Strains Computed from Finite Hyperelastic Material Laws. Erscheint in *Acta Mechanica*.
- [29] Ehlers, W.; Eipper, G.: Finite Elastic Deformations in Liquid-Saturated and Empty Porous Solids. Erscheint in *Transport in Porous Media*.
- [30] Ehlers, W.; Ellsiepen, P.: Zeitschrittgesteuerte Verfahren bei stark gekoppelten Festkörper-Fluid-Problemen. *ZAMM* **77** (1997), S 81 - S 82.
- [31] Felippa, C. A.; Park, K. C.: Staggered Transient Analysis Procedures for Coupled Mechanical Systems: Formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **24** (1980), 61 - 111.
- [32] Ellsiepen, P.: PANDAS – Benutzer- und Referenzhandbuch. Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen) **97-II-9**. Universität Stuttgart, 1997.
- [33] Flory, P. J.: Thermodynamic Relations for High Elastic Materials. *Trans. Faraday Soc.* **57** (1961), 829 - 838.
- [34] Hairer, E.; Lubich, C.; Roche, M.: *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations by Runge-Kutta-Methods*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [35] Hairer, E.; Wanner, G.: *Solving Ordinary Differential Equations II - Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [36] Hassanizadeh, M.; Gray, W. G.: General Conservation Equations for Multiphase Systems: 1. Averaging Procedure. *Adv. Water Res.* **2** (1979), 131 - 144.
- [37] Haupt, P.: *Foundations of Continuum Mechanics*. In K. Hutter, Hrsg., *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics, CISM Courses and Lectures No. 377*, 1 - 77, Springer-Verlag, Wien, 1993.
- [38] Hill, R.: On Uniqueness and Stability in the Theory of Finite Elastic Strain. *J. Mech. Phys. Solids* **5** (1957), 229 - 241.
- [39] Holmes, M. H.; Mow, V. C.: The Nonlinear Characteristics of Soft Gels and Hydrated Connective Tissues in Ultrafiltration. *J. Biomechanics* **23** (1990), 1145 - 1156.
- [40] Hughes, T. J. R.; Pister, K. S.: Consistent Linearization in Mechanics of Solids and Structures. *Comp. Struct.* **8** (1978), 391 - 397.
- [41] Hutter, K.: The Foundations of Thermodynamics, its Basic Postulates and Implications. A Review of Modern Thermodynamics. *Acta Mech.* **27** (1977), 1 - 54.
- [42] Lai, W. M.; Mow, V. C.: Drag-Induced Compression of Articular Cartilage During A Permeation Experiment. *Biorheology* **17** (1980), 111 - 123.

- [43] Leipholz, H.: Einführung in die Elastizitätstheorie. G. Braun, Karlsruhe, 1968.
- [44] Marsden, J. E.; Hughes, T. J. R.: Mathematical Foundations of Elasticity. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
- [45] Miehe, C.: Computation of Isotropic Tensor Functions. Communications in Numerical Methods in Engineering **9** (1993), 889 - 896.
- [46] Miehe, C.: Aspects of the Formulation and Finite Element Implementation of Large Strain Isotropic Elasticity. Int. J. Numer. Meth. Eng. **37** (1994), 1981 - 2004.
- [47] Mooney, M.: A Theory of Large Elastic Deformation. J. Appl. Phys. **11** (1940), 582 - 592.
- [48] Morman, K. N.: The Generalized Strain Measure With Application to Non-homogeneous Deformations in Rubber-Like Solids. J. Appl. Mech. **53** (1986), 726 - 728.
- [49] Müller, I.: A Thermodynamic Theory of Mixtures of Fluids. Arch. Rational Mech. Anal. **28** (1968), 1 - 39.
- [50] Ogden, R. W.: Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, **326** (1972), 565 - 584.
- [51] Ogden, R. W.: Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Compressible Rubberlike Solids. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, **328** (1972), 567 - 583.
- [52] Ogden, R. W.: Volume Changes Associated with the Deformation of Rubberlike Solids. J. Mech. Phys. Solids **24** (1976), 323 - 338.
- [53] Ogden, R. W.: Non-Linear Elastic Deformations. Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- [54] Oldroyd, J. G.: On the Formulation of Rheological Equations of State. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, **200** (1950), 523 - 541.
- [55] Peng, S. T. J.; Landel, R. F.: Stored Energy Function and Compressibility of Compressible Rubberlike Materials under Large Strain. J. Appl. Phys. **46** (1975), 2599 - 2604.
- [56] Penn, R. W.: Volume Changes Accompanying the Extension of Rubber. Trans. Soc. Rheol. **14** (1970), 509 - 517.
- [57] Plischka, J.: Die Bedeutung der Durchschnittsbildungstheorie für die Theorie poröser Medien. Dissertation, Fachbereich Bauwesen, Universität-GH-Essen, 1992.

- [58] Reese, S.: Theorie und Numerik des Stabilitätsverhaltens hyperelastischer Festkörper. Dissertation, Fachbereich Mechanik, Technische Hochschule Darmstadt, 1994.
- [59] Rivlin, R. S.: Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, **241** (1948), 379 - 397.
- [60] Schwarz, H. R.: Methode der finiten Elemente. Teubner, Stuttgart, 1991.
- [61] Simo, J. C.; Pister, K. S.: Remarks on Rate Constitutive Equations for Finite Deformation Problems: Computational Implications. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **46** (1984), 201 - 215.
- [62] Simo, J. C.; Taylor, R. L.: Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **48** (1985), 101 - 118.
- [63] Simo, J. C.; Taylor, R. L.: Quasi-Incompressible Finite Elasticity in Principal Stretches. Continuum Basis and Numerical Algorithms. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **85** (1991), 273 - 310.
- [64] Simo, J. C.: Topics on the Numerical Analysis and Simulation of Plasticity. In R. S. Ciarlet, J. L. Lions, Hrsg., Handbook of Numerical Analysis, Vol. III. Elsevier, Amsterdam, 1994.
- [65] Terzaghi, K.: Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage. Franz Deuticke, Leipzig und Wien, 1925.
- [66] Törnig, W.; Spellucci, P.: Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Band 2 (2. Auflage), Springer-Verlag Berlin, 1990.
- [67] Truesdell, C.; Toupin, R. A.: The Classical Field Theories. In S. Flügge, Hrsg., Handbuch der Physik, Band III/1. Springer-Verlag, Berlin, 1960.
- [68] Truesdell, C.; Noll, W.: The Nonlinear Field Theories of Mechanics. In S. Flügge, Hrsg., Handbuch der Physik, Band III/3. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [69] Truesdell, C.: Thermodynamics of Diffusion. Rational Thermodynamics, Second Edition. Springer Verlag, New York, 1984.
- [70] Valanis, K. C.; Landel, R. F.: The Strain-Energy Function of a Hyperelastic Material in Terms of the Extension Ratios. J. Appl. Phys. **38** (1967), 2997 - 3002.
- [71] Widjajakusuma, J.: Dynamik fluidgesättigter Elastomerschäume. Diplomarbeit, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, Universität Stuttgart, 1995.

- [72] Wriggers, P.: Konsistente Linearisierung in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Elemente-Methode. Technischer Bericht F 88/4. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1988.
- [73] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: The Finite Element Method. McGraw-Hill, London, 1989.
- [74] Zienkiewicz, O. C.: Coupled Problems and their Numerical Solution. In R. W. Lewis, P. Bettes and E. Hinton, Hrsg., Numerical Methods in Coupled Systems, 35 - 68, Wiley, 1984.

Anhang A

Tensoroperationen

In diesem Anhang sind die wichtigsten, in dieser Arbeit verwendeten Tensoroperationen zusammengestellt, die *de Boer* [8] und *Ehlers* [24, 26] entnommen werden können. Alle Operationen sind in absoluter, koordinatenfreier Darstellung angegeben. Diese Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sie soll nur das Nachvollziehen der in dieser Arbeit verwendeten Gleichungen erleichtern.

A.1 Allgemeine Beziehungen

Identitätstensor

Der Identitätstensor zweiter Stufe bildet jeden Vektor \mathbf{u} bzw. Tensor \mathbf{T} auf sich selbst ab.

$$\mathbf{u} = \mathbf{I} \mathbf{u} , \quad \mathbf{T} = \mathbf{I} \mathbf{T} .$$

Fundamentaltensoren vierter Stufe

Die Fundamentaltensoren vierter Stufe können durch

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \overset{4}{\mathbf{I}} \mathbf{T} & \quad \text{mit} \quad \overset{4}{\mathbf{I}} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{23}{T}} , \\ (\mathbf{T} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} = \overset{4}{\bar{\mathbf{I}}} \mathbf{T} & \quad \text{mit} \quad \overset{4}{\bar{\mathbf{I}}} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} , \\ \mathbf{T}^T = \overset{4}{\bar{\bar{\mathbf{I}}}} \mathbf{T} & \quad \text{mit} \quad \overset{4}{\bar{\bar{\mathbf{I}}}} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{13}{T}} \end{aligned}$$

definiert werden. Dabei bedeutet die Transposition $(..)^{\overset{ik}{T}}$ die Vertauschung der i -ten Tensorbasis mit der k -ten Tensorbasis.

Deviator

Der Deviator eines Tensors \mathbf{T} ist definiert durch

$$\mathbf{T}^D = \mathbf{T} - \frac{1}{3} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} .$$

Der Deviator ist spurfrei ($\mathbf{T}^D \cdot \mathbf{I} = 0$).

Inverse eines Tensors

Für die Inverse \mathbf{T}^{-1} eines Tensors \mathbf{T} gilt: $\mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}$. Sie läßt sich durch

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{T}} \mathbf{T}^{+T}$$

darstellen, wobei $(\cdot)^{+}$ die Adjungierte eines Tensors ist.

Invarianten eines Tensors

Die Invarianten eines Tensors \mathbf{T} sind definiert durch:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{T}} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{I} , \\ II_{\mathbf{T}} &= \frac{1}{2} [I_{\mathbf{T}}^2 - \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}] , \\ III_{\mathbf{T}} &= \det \mathbf{T} . \end{aligned}$$

Transformation des Gradientenoperators

Die Transformationsbeziehungen zwischen dem materiellen Gradientenoperator $\text{Grad}_S(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial \mathbf{X}_S$ und dem räumlichen Gradientenoperator $\text{grad}(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial \mathbf{x}$ lautet mit dem Deformationsgradienten $\mathbf{F}_S = \text{Grad}_S \mathbf{x}$ für eine skalarwertige Größe ϕ

$$\text{grad} \phi = \mathbf{F}_S^{T-1} \text{Grad}_S \phi \quad \longleftrightarrow \quad \text{Grad}_S \phi = \mathbf{F}_S^T \text{grad} \phi ,$$

und für eine vektorwertige Größe u

$$\text{grad} \mathbf{u} = (\text{Grad}_S \mathbf{u}) \mathbf{F}_S^{-1} \quad \longleftrightarrow \quad \text{Grad}_S \mathbf{u} = (\text{grad} \mathbf{u}) \mathbf{F}_S .$$

A.2 Tensoranalysis

Es werden hier folgende differenzierbare Feldgrößen verwendet, die Funktionen des Ortsvektors \mathbf{x} sind:

- Skalarfeld: ϕ, ψ ,
- Vektorfeld: \mathbf{u}, \mathbf{v} ,
- Tensorfeld: \mathbf{T}, \mathbf{S} .

Gradientenbildung

Die Gradientenbildung „grad“ erhöht die Stufenzahl eines Tensors um eins. Die folgenden Beziehungen gelten sowohl für den räumlichen Gradienten „grad“ und in analoger Weise für den materiellen Gradienten „Grad_S“. Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\text{grad}(\phi\psi) &= \phi \text{grad}\psi + \psi \text{grad}\phi, \\ \text{grad}(\phi\mathbf{u}) &= \mathbf{u} \otimes \text{grad}\phi + \phi \text{grad}\mathbf{u}, \\ \text{grad}(\phi\mathbf{T}) &= \mathbf{T} \otimes \text{grad}\phi + \phi \text{grad}\mathbf{T}, \\ \text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= (\text{grad}\mathbf{u})^T \mathbf{v} + (\text{grad}\mathbf{v})^T \mathbf{u}, \\ \text{grad}\mathbf{x} &= \mathbf{I}.\end{aligned}$$

Divergenzbildung

Die Divergenzbildung „div“ erniedrigt die Stufenzahl eines Tensors um eins. Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\text{div}\mathbf{u} &= (\text{grad}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{I}, \\ \text{div}\mathbf{T} &= (\text{grad}\mathbf{T})\mathbf{I}, \\ \text{div}(\phi\mathbf{u}) &= \mathbf{u} \cdot \text{grad}\phi + \phi \text{div}\mathbf{u}, \\ \text{div}(\phi\mathbf{T}) &= \mathbf{T}\text{grad}\phi + \phi \text{div}\mathbf{T}, \\ \text{div}(\mathbf{T}\mathbf{u}) &= (\text{div}\mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{T}^T \cdot \text{grad}\mathbf{u}, \\ \text{div}(\mathbf{T}\mathbf{S}) &= (\text{grad}\mathbf{T})\mathbf{S} + \mathbf{T} \text{div}\mathbf{S}.\end{aligned}$$

Ableitung der Invarianten nach einem Tensor

Die Ableitung der Invarianten nach dem entsprechenden Tensor ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{T}} &= \mathbf{I}, \\ \frac{\partial II_{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{T}} &= I_{\mathbf{T}}\mathbf{I} - \mathbf{T}, \\ \frac{\partial III_{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{T}} &= III_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{T-1}.\end{aligned}$$

Integralsätze

Umwandlung von Volumen- in Flächenintegrale (*Gaußscher Integralsatz*):

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}} \text{div}\mathbf{u} \, dv &= \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, da, \\ \int_{\mathcal{B}} \text{div}\mathbf{T} \, dv &= \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{T}\mathbf{n} \, da.\end{aligned}$$

A.3 Ableitungen nach Tensoren zweiter Stufe

Es seien \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} beliebige nichtsinguläre Tensoren zweiter Stufe und ϕ eine skalarwertige Funktion, dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{A}} \right)^T \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{B}}, \\ \frac{\partial (\phi \mathbf{A})}{\partial \mathbf{B}} &= \mathbf{A} \otimes \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{B}} + \phi \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{B}}, \\ \frac{\partial (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial \mathbf{C}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \mathbf{B} + \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \mathbf{A}, \\ \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{A}} &= -(\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{A}^{T-1})^T, \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} &= \overset{4}{\mathbf{I}}, \\ \frac{\partial (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}}{\partial \mathbf{A}} &= \overset{4}{\mathbf{I}}, \\ \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{A}} &= \overset{4}{\mathbf{I}}.\end{aligned}$$

A.4 Tensoren höherer Stufe

Es seien \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} beliebige nichtsinguläre Tensoren zweiter Stufe, dann gilt:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^T &= (\mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD})^T, \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= (\mathbf{ACB}^T \otimes \mathbf{D}), \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^T &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}^T \mathbf{BD}), \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T \mathbf{C} &= \mathbf{ACB}^T, \\ [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T]^T &= (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T)^T.\end{aligned}$$

Die Transposition $(\cdot)^T$ beinhaltet die Vertauschung der ersten beiden gegen die letzten beiden Tensorbasen des vierstufigen Tensors \mathbf{E} :

$$(\mathbf{E})^T = [(\mathbf{E})^T]^T.$$

Lebenslauf

Gernot Eipper

18. Juli 1968 geboren in Herrenberg
- 74 - 78 Grundschule in Herrenberg
- 78 - 6/87 Andrae-Gymnasium Herrenberg
Abschluß: Abitur
- 7/87 - 9/88 Wehrdienst in Ingolstadt
- 10/88 - 2/94 Studium Maschinenwesen
an der Universität Stuttgart
Abschluß: Dipl.-Ing.
- 9/93 - 2/94 Diplomarbeit bei der Robert Bosch GmbH
in Schwieberdingen
- seit 3/94 wissenschaftlicher Mitarbeiter am
Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II
der Universität Stuttgart