

**Untersuchung des Lokalisierungsverhaltens
mikropolarer poröser Medien mit Hilfe
der *Cosserat*-Theorie**

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

von
Dipl.-Ing. Wolfram Volk
aus
Göppingen

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Paul Steinmann

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Mai 1999

Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart,
Lehrstuhl II, Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

Bericht Nr. II-2 aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II,
Universität Stuttgart

Herausgeber:

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

© Wolfram Volk
Institut für Mechanik (Bauwesen)
Lehrstuhl II
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7
70569 Stuttgart

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise
auf fotomechanischem Wege zu vervielfältigen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Technischen Hochschule Darmstadt vom 1. November 1994 bis 28. Februar 1995 und ab 1. März 1995 am Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart.

Vom 1. November 1994 bis 31. Dezember 1995 war ich Mitglied im SFB 298 „Versagen in metallischen und granularen Materialien“ als Mitarbeiter des Projekts B1 „Stoffverhalten und Lokalisierung in der Theorie Poröser Medien“ unter der Projektleitung von Herrn Professor Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers. Nachdem Herr Ehlers den Ruf auf die Professur für Technische Mechanik der Fakultät 2 „Bauingenieur- und Vermessungswesen“ der Universität Stuttgart zum 1. März 1995 annahm, wurde das Projekt B1 aus dem SFB 298 ausgegliedert und zum 1. Januar 1996 in den SFB 404 „Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik“ an der Universität Stuttgart als Teilprojekt A6 aufgenommen. Mein Dank gilt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die gewährte Finanzierung meiner Arbeit.

Ganz besonders danken möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers für stets gewährte Unterstützung, Motivation und Anregungen zur vorliegenden Arbeit und die Übernahme des Hauptberichts.

Weiterhin gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Paul Steinmann für die Übernahme des Korreferats.

Schließlich möchte ich mich bei all meinen Kollegen und Mitarbeitern des Instituts für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart für die gute Zusammenarbeit und insbesondere bei Herrn Dr.-Ing. Stefan Diebels für die anregenden Diskussionen und hilfreichen Tips bedanken.

Stuttgart, im Mai 1999

Wolfram Volk

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einführung	1
1.2	Problemstellung und Zielsetzung	5
1.3	Gliederung	6
1.4	Notation	7
2	Kontinuumsmechanische Grundlagen	9
2.1	Allgemeines	9
2.2	Kinematik (poröse, nicht-polare Festkörper)	9
2.2.1	Elementare Konfigurationen	10
2.2.2	Verschiebung, Verschiebungsgradient	10
2.2.3	Deformationsgradient, Transport von Linienelementen	11
2.2.4	Dichtefunktionen	11
2.2.5	Konvektive Koordinaten	12
2.2.6	Deformations- und Verzerrungsmaße	14
2.2.7	Deformationsgeschwindigkeit	16
2.2.8	Zeitableitungen	17
2.3	Kinematik (mikropolare Materialien)	18
2.3.1	Die Direktoren	18
2.3.2	Zerlegung der Deformation	19
2.3.3	Mikropolare Deformations- und Verzerrungsmaße	21
2.3.4	Mikropolare Krümmungsmaße	22
2.3.5	Mikropolare Deformationsgeschwindigkeit	26
2.3.6	Mikropolare Zeitableitungen	27
2.3.7	Mikropolare Krümmungsgeschwindigkeit	28
2.4	Kompatibilitätsbedingungen	29

2.5	Geometrisch lineare Darstellung	31
2.5.1	Formale Linearisierung	32
2.5.2	Geometrisch lineare Kompatibilitätsbedingungen	34
2.6	Elasto-Plastizität	35
2.6.1	Multiplikative Zerlegungen, Zwischenkonfigurationen	35
2.6.2	Additive Aufspaltung der Verzerrungsmaße	38
2.6.3	Additive Aufspaltung der Krümmungstensoren	40
2.6.4	Elastische und plastische Deformationsgradienten zweiter Ordnung	42
2.6.5	Kompatibilitätsuntersuchungen	42
2.7	Bilanzrelationen	44
2.7.1	Massenbilanz	45
2.7.2	Impulsbilanz	45
2.7.3	Drallbilanz, Bilanz der Mikroträgheit	45
3	Mikropolare Theorie Poröser Medien	47
3.1	Einführung in die Theorie Poröser Medien	47
3.1.1	Die Volumenanteile	48
3.2	Kinematik von Mehrphasenmaterialien	50
3.3	Bilanzrelationen	52
3.4	Sonderfall des inkompressiblen binären Modells	55
3.5	Konstitutivannahmen	56
3.5.1	Restriktionen infolge der Inkompressibilität	56
3.5.2	Fluidreibspannung	57
3.5.3	Interaktionskraft	57
3.5.4	Effektive Festkörperspannung	58
3.5.5	Momentenspannungen	59
3.5.6	Plastizität von Reibungsmaterialien	60
3.6	Motivation der Materialgesetze	67
3.6.1	Gradiententheorie erster Ordnung	71
4	Numerische Umsetzung	73
4.1	Schwache Formen der Bilanzgleichungen	73
4.2	Orts- und Zeitdiskretisierung	75
4.2.1	Ortsdiskretisierung	75
4.2.2	Zeitdiskretisierung	80
4.2.3	Algorithmisches Vorgehen	80
4.3	Die verallgemeinerte Punkt-Kollokationsmethode	82
4.4	Elementformulierungen im Detail	86

5	Beispiele	89
5.1	Biaxial-Versuch	89
5.1.1	Netzunabhängigkeit	93
5.1.2	Abhängigkeit der Ergebnisse von der internen Länge	96
5.1.3	Funktionaler Zusammenhang zwischen Scherbandbreite und interner Länge	103
5.2	Böschungsbruch	106
6	Zusammenfassung und Ausblick	117
6.1	Zusammenfassung	117
6.2	Ausblick	118
	Anhang A: Rechenregeln	127
A.1	Beispiele der symbolischen Tensorrechnung	127
A.1.1	Produkte zwischen Tensoren	128
A.2	Definitionen	130
A.2.1	Invarianten	130
A.2.2	Deviator und Kugeltensor	131
A.2.3	Fundamentaltensoren	131
A.2.4	Gradient und Divergenz von Produktausdrücken	132
A.2.5	Ableitungen nach Tensoren 2. Stufe	133
A.3	Rechenregel für Kompatibilitätsbedingungen	134
	Anhang B: Elastisch-plastische Aufspaltungen	137
B.1	Nicht-polare und mikropolare Verzerrungsmaße	137
B.1.1	Beziehungen zwischen den Verzerrungstensoren vom <i>Green-</i> <i>bzw. Almansi-Typ</i>	138
B.1.2	Beziehungen zwischen den Verzerrungstensoren vom <i>Karni-</i> <i>Reiner-Typ</i>	139
B.2	Mikropolare Krümmungstensoren	140
B.3	Deformationsgradienten 2. Ordnung	141

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung

Lokalisierungsphänomene treten in vielen Bereichen des Ingenieurwesens auf, in denen Festigkeitsuntersuchungen von unterschiedlichsten Materialien durchgeführt werden. Es handelt sich hierbei um lokale Konzentrationen von inelastischen Verzerrungen in schmalen Bändern, die durch lokale Entfestigungseffekte (z. B. Dilatanz und Scherentfestigung) hervorgerufen werden und im Rahmen der bruchmechanischen Bezeichnungsweise häufig zu einem Scherversagen („Mode 2“-Problem) führen. Die angesprochenen Lokalisierungsphänomene werden bei duktilen Materialien (*Lüders*-Bänder) als auch spröden und granularen Materialien vorgefunden. Beispielhaft sind im Bild 1.1 Scherbänder eines Granitblocks des Massivs Neouville in den Zentralpyrenäen abgebildet.

Die theoretische und numerische Untersuchung von Lokalisierungsphänomenen stellt eine interessante und für die Praxis wichtige Aufgabe in der modernen Ingenieurwissenschaft dar.

Zu Beginn sei darauf hingewiesen, daß zur Beschreibung des Stoffverhaltens eines beliebigen Materials immer Vereinfachungen oder Beschränkungen nötig sind, um in eine mathematisch fundierte Theorie eingebettet werden zu können. Beispielsweise basiert die klassische Kontinuumsmechanik auf der Vorstellung, daß der dimensionslose *materielle Punkt* Träger der physikalischen Eigenschaften (z. B. Dichte) ist. Hierbei wird grundsätzlich vernachlässigt, daß jedes Material über interne Längenskalen (intrinsische Längen) verfügt, sofern die Kristall-, Molekular- oder Atomebene betrachtet wird. Aus diesem Grund muß, vom theoretischen Standpunkt aus gesehen, immer ein Homogenisierungsprozeß durchgeführt werden, bei dem die mikroskopischen Inhomogenitäten über ein sogenanntes Repräsentatives Elementarvolumen (REV) gemittelt werden. Das Ergebnis dieses Mittelungsprozesses sind die Materialeigenschaften jedes materiellen Punkts. An dieser Stelle stößt man auf einen prinzipiellen argumentativen Widerspruch. Von der physikalischen Seite aus gesehen muß das REV groß genug sein, um ein statistisch verwertbares Ergebnis zu



Bild 1.1: Scherbänder in einem Granitblock

liefern, wo hingegen aus mathematischer Sicht die Größe des REV gegen null gehen muß, um die Dimensionslosigkeit des materiellen Punkts sicherzustellen. Dieses Problem kann in der Regel wegen des Dimensionsunterschieds zwischen der Makroebene (Skala der zu untersuchenden Randwertprobleme) und der Mikroebene (Skala der Bausteine des zu untersuchenden Materials) vernachlässigt werden. Bei den makroskopischen Materialgesetzen der klassischen Kontinuumsmechanik wird der angesprochene Homogenisierungsprozeß völlig vernachlässigt; d. h. diese Gesetze beinhalten somit keinerlei Information aus der Mikroebene. Es gibt jedoch viele Problemstellungen, bei denen diese Vereinfachungen nicht mehr möglich sind und alternative Beschreibungsmöglichkeiten gewählt werden müssen.

Bei kristallinen Materialien existieren z. B. infolge der speziellen Gitterstruktur kinematische Vorzugsrichtungen (Gleitlinien), die im Rahmen einer rein makroskopischen Beschreibung nur mit großen Schwierigkeiten erfaßt werden können. In diesem Fall ist die explizite Durchführung des Mikro-Makro-Übergangs ein erfolgversprechender Lösungsansatz (z. B. *Schröder* [72]). Anstelle der Auswertung eines anisotropen und äußerst komplizierten makroskopischen Materialgesetzes wird ein einfaches mikroskopisches Ersatzrandwertproblem gelöst. Dies ist möglich, da die meisten Ein- bzw. Polykristalle über eine exakt bekannte Mikrostruktur verfügen, die zusätzlich periodischen Charakter besitzt.

Es gibt jedoch viele Materialien, die weder über eine exakt bekannte noch über eine periodische Mikrostruktur verfügen. Hier seien in erster Linie Granulate (z. B. Sande) oder geschäumte Stoffe (z. B. Metallschäume oder PVC-Schäume) erwähnt. Bei diesen Materialien ist die explizite Durchführung des Mikro-Makro-Übergangs sehr aufwendig. Zudem erscheint es fraglich, ob die Ergebnisse überhaupt so verallgemeinert werden können, daß das makroskopische Verhalten mit einer hinreichenden Genauigkeit simuliert werden kann. Deswegen bietet sich ein komplett unterschiedliches Vorgehen an, in dem die klassische Kontinuumsmechanik von vornherein auf der Makroebene um zusätzliche Freiheitsgrade und Materialparameter erweitert wird. Der Mittelungsprozeß bleibt dann zwar weiterhin die Grundlage der Theorie, doch wird er nicht mehr explizit, sondern nur noch virtuell durchgeführt. Die Einflüsse der Mikrostruktur auf die makroskopischen Ergebnisse werden dabei durch Bestimmung zusätzlicher Materialparameter mit Hilfe von Experimenten berücksichtigt. Der Grad der Idealisierung steigt somit auf eine rein phänomenologische Beschreibung auf der Makroebene an, ohne die Mikrostruktur explizit einzubeziehen. Diese Idee wurde sehr erfolgreich zur Beschreibung von unterschiedlichen porösen Materialien, insbesondere von Böden, in der Theorie Poröser Medien (TPM) verwendet. Bei der TPM handelt es sich um ein kontinuumsmechanisches Modell für Mehrphasenmaterialien auf der Basis der Mischungstheorie, die um das Konzept der Volumenanteile (Strukturvariablen) erweitert wurde. Mit diesen zusätzlichen skalaren Strukturvariablen ist es möglich, die lokale Zusammensetzung des porösen Mediums zu beschreiben und somit Informationen aus der Mikroebene auf die Makroebene zu übertragen. Grundlegende und weiterführende Arbeiten zu diesem Thema sind ohne Anspruch auf Vollständigkeit *de Boer & Ehlers* [6], *de Boer* [8], *Bowen* [11, 12, 13], *Ehlers* [25, 27, 28, 30] und *Truesdell & Toupin* [84].

Die TPM besitzt in ihrer Grundkonzeption keine intrinsische (interne) Längenskala beinhaltet. Dies macht sich insbesondere bei leeren Festkörperskeletten bei der Beschreibung von Lokalisierungsphänomenen nachteilig bemerkbar. Bei der numerischen Simulation dieser Probleme mit der Methode der finiten Elemente (FEM) im Rahmen der klassischen Beschreibungsweise stellt man eine fundamentale Netzabhängigkeit der Ergebnisse fest. So führt jede Verfeinerung des Netzes zu einer Verminderung der Scherbanddicke, bis man bei einem unendlich feinen Netz eine singuläre Fläche als Scherband erhalten würde. Dieses Verhalten ist unphysikalisch, denn Experimente haben gezeigt, daß sich die Scherbanddicke z. B. von Granulaten in einem Bereich von 10-30 Korndurchmessern bewegt. Hier sieht man sehr deutlich, daß der Korndurchmesser im Sinne einer intrinsischen Länge einen entscheidenden Einfluß auf die Dicke des Scherbands hat. Aus diesem Grund wurden in der Literatur Gradientenplastizitätstheorien (z. B. *Mühlhaus & Aifantis* [59]) oder künstliche Viskositäten (z. B. *Schrefler et al.* [70, 71]) eingeführt, um das mathematisch schlecht gestellte Problem zu regularisieren. Diese Methoden sind erfolgreich, doch fehlt häufig der physikalisch motivierte Hintergrund; z. B., wenn es sich bei den Viskositäten nicht um eine meßbare Viskosität des Materials handelt.

Der mikropolare Zugang ist hingegen eine physikalisch motivierte Erweiterung der klassischen Kontinuumsmechanik zur Berücksichtigung interner Längenskalen. Die

Idee ist die Existenz einer Skala, auf der den Elementarbausteinen des Materials, die im klassischen Fall den materiellen Punkten entsprechen, eine Orientierung zugewiesen werden kann, so daß Verdrehungen dieser Bausteine gegeneinander einen Einfluß auf das makroskopische Materialverhalten haben. Typische Vertreter dieser mikropolaren Klasse sind Granulate, bei denen der materielle Punkt nach dieser Argumentation eine räumliche Ausdehnung in der Größenordnung der Körner haben muß. Somit ist die kleinste Einheit des mikropolaren Materials ein räumliches Element (Mikrostarrkörper), das die drei translatorischen und die drei rotatorischen Freiheitsgrade eines starren Körpers besitzt.

Der Ansatz der unabhängigen rotatorischen Freiheitsgrade des materiellen Punkts geht auf eine Arbeit der Gebrüder *Cosserat* [15] zu Beginn dieses Jahrhunderts zurück. Man beachte, daß bereits an dieser Stelle eine intrinsische Länge dem Problem zugeführt wird; denn ohne eine räumliche Ausdehnung des materiellen Elements würden unabhängige rotatorische Freiheitsgrade keinen Sinn machen. Die rotatorischen Freiheitsgrade dürfen jedoch nicht direkt mit den Drehungen jedes einzelnen Korn identifiziert werden, denn der virtuelle Homogenisierungsprozeß muß weiterhin durchgeführt werden. Aus diesem Grund entsprechen die zusätzlichen rotatorischen Freiheitsgrade physikalisch den gemittelten Verdrehungen der einzelnen Körner über ein REV (siehe Bild 1.2).

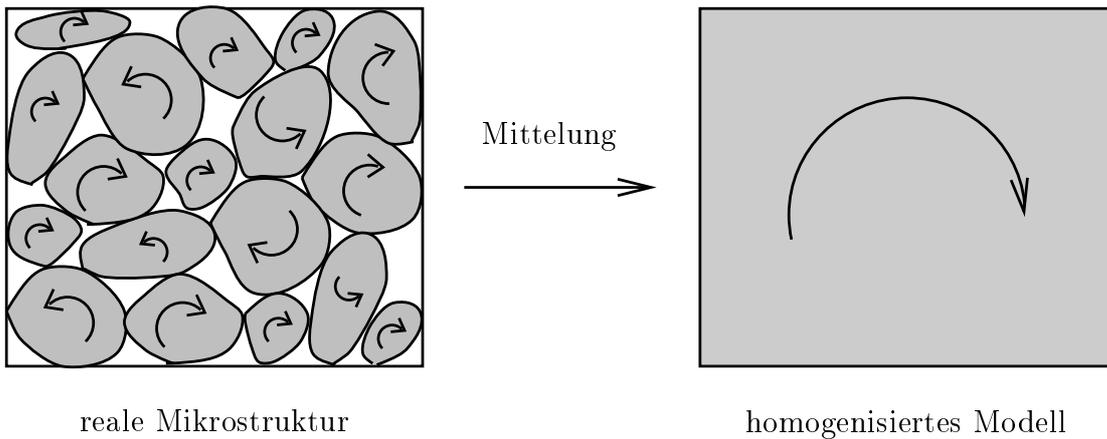


Bild 1.2: Physikalische Motivation der mikropolaren Theorie

Infolge dieser Erweiterung muß die gesamte Kontinuumsmechanik erweitert werden: So verlieren der mikropolare Spannungstensor und das mikropolare Verzerrungsmaß durch die zusätzlichen Freiheitsgrade ihre Symmetrieeigenschaft. Die Idee der zusätzlichen rotatorischen Freiheitsgrade wurde in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts wenig beachtet. Erst aus den 50er und 60er Jahren datieren wieder Arbeiten, die die *Cosserat*-Theorie auf Balkenprobleme anwenden (z. B. *Günther* [43] oder *Schaefer* [69]). Eine umfassende kontinuumsmechanische Abhandlung der mikropolaren Theorie findet man bei *Besdo* [4], *Diebels & Ehlers* [21] oder *Eringen & Kafadar* [40] und mit Erweiterung auf elastisch-plastisches Materialverhalten bei

Steinmann [76]. Nachdem der regularisierende Einfluß der mikropolaren Theorie auf die numerische Simulation von Scherbandproblemen erkannt wurde, entstanden einige Arbeiten, die diesen Aspekt in den Vordergrund stellen (z. B. *de Borst* [9, 10], *Dietsche et al.* [23], *Mühlhaus & Vardoulakis* [60], *Steinmann & Willam* [79] und *Tejchmann & Wu* [80]).

In der Realität liegen neben Einphasenmaterialien häufig sogenannte Mehrphasenmaterialien vor, bei denen eines oder mehrere der beteiligten Materialien über mikropolare Eigenschaften verfügen. Stellvertretend sei hier flüssigkeitsgesättigter Sand erwähnt, wie er in der Baupraxis bei vielen Problemstellungen vorgefunden wird. In diesem Fall können zwei unabhängige physikalisch motivierte Regularisierungstechniken angewendet werden. Neben der Mikropolarität hat die Viskosität des Porenfluids ebenfalls eine regularisierende Wirkung. Infolge der häufig sehr großen Durchlässigkeiten von Sand ist jedoch der Einfluß der Viskosität des Porenfluids auf die numerische Simulation von Problemen mit Scherbandbildung in der Regel klein gegenüber der regularisierenden Wirkung der Mikropolarität (vgl. *Ehlers & Volk* [39]).

1.2 Problemstellung und Zielsetzung

In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie Poröser Medien mit den Elementen einer mikropolaren Theorie erweitert und die dann resultierende mikropolare Theorie Poröser Medien auf verschiedene Problemstellungen der Bodenmechanik angewendet. Hierfür wird die Kinematik mikropolarer Materialien für den geometrisch nicht-linearen Bereich präsentiert, und es wird besonderer Wert auf die Herausarbeitung von bisher noch nicht berücksichtigten Kompatibilitätsbedingungen gelegt. Die Ergebnisse der geometrisch linearen Theorie werden durch formale Linearisierung der Ergebnisse aus der geometrisch nicht-linearen Formulierung gewonnen. Bei allen Erweiterungen muß grundsätzlich die Abwärtskompatibilität zur nicht-polaren Theorie gewährleistet sein.

Um ein Ausufern des Umfangs der Arbeit zu vermeiden, wird für die Konstitutivgleichungen die Beschränkung auf den geometrisch linearen Bereich vorausgesetzt. Neben den theoretischen Überlegungen ist die numerische Simulation mit der Methode der finiten Elemente ein weiterer Hauptpunkt der Arbeit. Hierzu werden Elementroutinen im nicht-kommerziellen FEM-Paket PANDAS (Porous media Adaptive Nonlinear finite element solver based on Differential Algebraic Systems) implementiert, das an der Universität Stuttgart am Lehrstuhl II für Mechanik (Prof. *Ehlers*) entwickelt wurde (z. B. *Ehlers & Ellsiepen* [34]). Anhand von Simulationen typischer bodenmechanischer Problemstellungen mit Scherbandbildungen werden die Regularisierungseigenschaften der mikropolaren Freiheitsgrade und der natürlichen Viskosität des Fluids gezeigt.

1.3 Gliederung

Im Kapitel 2 werden die grundlegenden kontinuumsmechanischen Beziehungen herausgearbeitet. Zuerst werden die Gleichungen für ein nicht-polares Material in aller Kürze präsentiert. Hier wird besonderer Wert auf das Transportverhalten der eingeführten kinematischen Größen gelegt. Bei der Erweiterung auf die kontinuumsmechanischen Beziehungen für mikropolare Materialien werden vor allem die Analogien sowie Unterschiede zu den Grundgleichungen der nicht-polaren Materialien herausgestellt. Infolge der zusätzlichen rotatorischen Freiheitsgrade werden erweiterte Deformations- und Verzerrungsmaße eingeführt. Es wird gezeigt, daß diese erweiterte Kinematik zu neuen mikropolaren Kompatibilitätsbedingungen führt. Diese Kompatibilitätsbedingungen lassen sich mit wenigen einschränkenden Voraussetzungen auch auf eine elastisch-plastische Theorie übertragen. Nach einer formalen geometrischen Linearisierung kann damit direkt ein Zusammenhang zwischen den Kompatibilitätsbedingungen und der Formulierung von plastischen Evolutionsgleichungen gezeigt werden. Mit den klassischen *Beltrami-Mitchell*-Kompatibilitätsbedingungen ist dies bekanntlich nicht möglich. Es wird weiterhin gezeigt, daß das klassische Zwischenkonfigurationskonzept, das auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten beruht, ebenfalls erweitert werden muß. Danach werden die mikropolaren Bilanzgleichungen diskutiert und besonders die für mikropolare Materialien verallgemeinerte Drallbilanz eingehend studiert.

Im Kapitel 3 werden die bis dahin diskutierten Gleichungen für einphasige Materialien auf mehrphasige Materialverhalten verallgemeinert. Neben den erweiterten Bilanzgleichungen im Rahmen der mikropolaren Theorie Poröser Medien werden auch die notwendigen Konstitutivgleichungen für diesen Fall angegeben. Ein besonderer Wert muß dabei auf die Formulierungen der plastischen Bestimmungsgleichungen für mikropolare Reibungsmaterialien gelegt werden. Ausgehend von einem Einflächenfließkriterium für nicht-polare Reibungsmaterialien (*Ehlers* [27, 29]) werden die zusätzlichen bzw. erweiterten Spannungsgrößen in separaten Termen berücksichtigt, so daß eine Abwärtskompatibilität durch einfaches Nullsetzen von Parametern gewährleistet ist.

Im Kapitel 4 steht die numerische Simulation mit der Methode der finiten Elemente im Vordergrund. Dazu werden die zugrunde liegenden Bilanzgleichungen in eine schwache Form überführt, an die sich eine numerische Integration nach Orts- und Zeitdiskretisierung anschließt. Die üblichen Algorithmen zur Berücksichtigung der Plastizität müssen für die mikropolare Theorie ebenfalls erweitert werden. Weiterhin werden zwei unterschiedliche Elementformulierungen vorgestellt, mit denen es möglich ist, einen fluidgesättigten bzw. leeren mikropolaren porösen Festkörper zu beschreiben.

Anhand typischer bodenmechanischer Probleme wird im Kapitel 5 die Gültigkeit und Effizienz der vorgestellten Methoden gezeigt. Dabei wird für die Parameterstudien der aus der Experimentalmethode bekannte Biaxial-Versuch simuliert. Anschließend wird mit dem Böschungsbruchproblem zusätzlich eine Problemstellung aus der Bauingenieurpraxis berechnet.

1.4 Notation

Die Notation erfolgt in symbolischer Schreibweise nach *de Boer* [5]. Skalare Größen sind durch geneigte Schmalschrift gekennzeichnet, z. B. die Porosität n . Vektoren werden durch aufrechte fette Kleinbuchstaben dargestellt, z. B. die Geschwindigkeit \mathbf{v} (Ausnahme ist der Ortsvektor \mathbf{X} des materiellen Punktes der Referenzkonfiguration). Tensoren zweiter Stufe werden durch aufrechte fette Großbuchstaben identifiziert, z. B. der Spannungstensor \mathbf{T} . Tensoren höherer Stufe sind zusätzlich mit der Stufenzahl über dem entsprechenden aufrechten fetten Großbuchstaben gekennzeichnet, beispielsweise wird der *Ricci*-Permutationstensor dritter Stufe durch $\overset{3}{\mathbf{E}}$ dargestellt. Mikropolare Größen sind normalerweise durch einen Querstrich über der entsprechenden nicht-polaren Größe ausgezeichnet, z. B. der mikropolare Rotationstensor $\bar{\mathbf{R}}$. In der Plastizitätstheorie wird der Bezug einer Größe auf eine Zwischenkonfiguration mit einem zusätzlichen Dach angegeben, z. B. der mikropolare Verzerrungstensor $\hat{\mathbf{T}}$ der Zwischenkonfiguration. Zusätzliche Konfigurationsunterscheidungen erkennt man an einem Index links oben, z. B. der zweistufige Krümmungstensor ${}^R\bar{\mathcal{K}}$ der Referenzkonfiguration. Ein Index rechts oben gibt den Bezug zu einer speziellen Phase im Rahmen der Mischungstheorie an, und ein Index rechts unten unterscheidet in der Kinematik zwischen elastischen und plastischen Größen sowie zwischen den unterschiedlichen Phasen.

Im Anhang A sind einige typische Tensoroperationen in symbolischer und in Indexschreibweise erläutert.

Kapitel 2

Kontinuumsmechanische Grundlagen

2.1 Allgemeines

In diesem Kapitel werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen für leere, poröse, nicht-polare und mikropolare Materialien vorgestellt. Die Erweiterung auf mehrphasige poröse Medien erfolgt im nächsten Kapitel. Normalerweise sind bei Mehrphasenmaterialien, die aus einem porösen Festkörper und einem oder mehreren Fluiden bestehen, die Porenflüssigkeiten nicht-polar, so daß es sinnvoll erscheint, die mikropolare Kontinuumsmechanik nur auf das poröse Festkörperskelett im Sinne eines Einphasenmaterials anzuwenden. Bei fehlenden mikropolaren Wechselwirkungen sind die Erweiterungen der klassischen Kontinuumsmechanik sowohl für das leere als auch für das fluidgesättigte Material identisch. Der Vorteil der Beschränkung auf ein mikropolares Einphasenmaterial ist die deutlich kompaktere Schreibweise, denn die ohnehin schon sehr komplexen Gleichungen müssen nicht mit den Indizes für die Mehrphasigkeit überladen werden. Im folgenden werden zunächst ohne Anspruch auf Vollständigkeit einige Aspekte der klassischen Kontinuumsmechanik nicht-polarer poröser Materialien vorgestellt. Es wird versucht, sich auf die Teile zu beschränken, die dann für die kinematische Beschreibung mikropolarer Festkörper ebenfalls von Interesse sind. Besonderer Wert wird auf Herausarbeitung der Analogien zwischen der klassischen (siehe z. B. *Becker & Bürger* [3]) und der mikropolaren Kontinuumsmechanik (siehe z. B. *Diebels & Ehlers* [21], *Eringen & Kafadar* [40] oder *Steinmann* [75, 76]) gelegt.

2.2 Kinematik (poröse, nicht-polare Festkörper)

Unter der Kinematik eines Körpers \mathcal{B} wird die allgemeine Beschreibung des geometrischen Bewegungsablaufs verstanden. Die kinematischen Beziehungen haben

allgemeinen Charakter und sind somit unabhängig von den Konstitutivannahmen eines speziellen Materials.

2.2.1 Elementare Konfigurationen

Zur makroskopischen Beschreibung des porösen Festkörperskeletts wird eine *Lagrangesche* oder materielle Beschreibung gewählt. Dies bedeutet, daß die aktuelle Plazierung \mathbf{x} eines materiellen Punktes \mathbf{X} durch die Bewegungsfunktion $\boldsymbol{\chi}$ und den Ortsvektor \mathbf{X} in einer zeitlich konstanten Referenzkonfiguration gegeben ist:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(X, t), \quad \mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}(X, t_0) \quad \implies \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Prinzipiell ist es auch möglich, eine Referenzkonfiguration zu wählen, die während der Bewegung überhaupt nicht vom Körper \mathcal{B} eingenommen wurde. Im folgenden wird jedoch vorausgesetzt, daß die Referenzkonfiguration durch die Lage des Körpers \mathcal{B} im Raum zur konstanten Zeit t_0 bestimmt wird, vgl. (2.1)₂.

2.2.2 Verschiebung, Verschiebungsgradient

Der Verschiebungsvektor \mathbf{u} ist die Differenz zwischen den Ortsvektoren \mathbf{x} und \mathbf{X} :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (2.2)$$

Der materielle Verschiebungsgradient \mathbf{H} wird durch die Ableitung von \mathbf{u} nach \mathbf{X} gebildet, und der räumliche Verschiebungsgradient \mathbf{J} ist durch die Ableitung von \mathbf{u} nach \mathbf{x} definiert:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}, \quad \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.3)$$

Die Nomenklatur der Verschiebungsgradienten ist in der Literatur nicht eindeutig. Die Ableitungen einer Größe (\cdot) nach den Ortsvektoren \mathbf{X} und \mathbf{x} werden im folgenden als materieller und räumlicher Gradient von (\cdot) bezeichnet:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{X}} := \text{Grad}(\cdot), \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} := \text{grad}(\cdot). \quad (2.4)$$

2.2.3 Deformationsgradient, Transport von Linien- elementen

Betrachtet man zwei benachbarte Punkte \mathbf{X} und \mathbf{Y} , die auf der Referenzkonfiguration den differentiellen Abstand $d\mathbf{X}$ haben, so verändert sich dieser Differenzvektor im Laufe der fortschreitenden Deformation, bis die beiden Punkte auf der aktuellen Konfiguration den Abstand $d\mathbf{x}$ besitzen (siehe Abbildung 2.1). Der Deformationsgradient \mathbf{F} ist dann durch das Verhältnis der beiden Linienelemente definiert, wenn der Abstand gegen null geht. \mathbf{F} beschreibt somit den Transport eines Linienelements von der Referenz- auf die aktuelle Konfiguration:

$$\mathbf{F} := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} = \mathbf{I} + \mathbf{H} \implies d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (2.5)$$

Entsprechend transportiert der inverse Deformationsgradient \mathbf{F}^{-1} ein Linienelement von der aktuellen auf die Referenzkonfiguration:

$$\mathbf{F}^{-1} := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad } \mathbf{X} = \mathbf{I} - \mathbf{J} \implies d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}. \quad (2.6)$$

Im Rahmen der polaren Zerlegung kann der Deformationsgradient eindeutig in einen eigentlich-orthogonalen Rotationstensor \mathbf{R} und einen Linksstrecktensor \mathbf{V} bzw. einen Rechtsstrecktensor \mathbf{U} aufgespalten werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T. \quad (2.7)$$

2.2.4 Dichtefunktionen

Infolge der Porosität des Festkörpermaterials können zwei unterschiedliche Dichtefunktionen eingeführt werden. Dies sind die effektive oder realistische Dichte ρ^R , die durch das Verhältnis der lokalen Festkörpermasse dm zum mikroskopisch tatsächlich eingenommenen Volumen dv^S gegeben ist, und die Partialdichte ρ , die durch den Quotienten von dm bezüglich des Gesamtvolumenelements dv definiert ist (vgl. *de Boer & Ehlers* [6]):

$$\rho^R = \frac{dm}{dv^S}, \quad \rho = \frac{dm}{dv}. \quad (2.8)$$

Mit Hilfe des sogenannten Volumenanteils n^S , der als skalare Strukturvariable die lokale Zusammensetzung des porösen Festkörpermaterials beschreibt, sieht man direkt, daß die folgende Beziehung gültig ist:

$$n^S = \frac{dv}{dv^S} \implies \rho = n^S \rho^R. \quad (2.9)$$

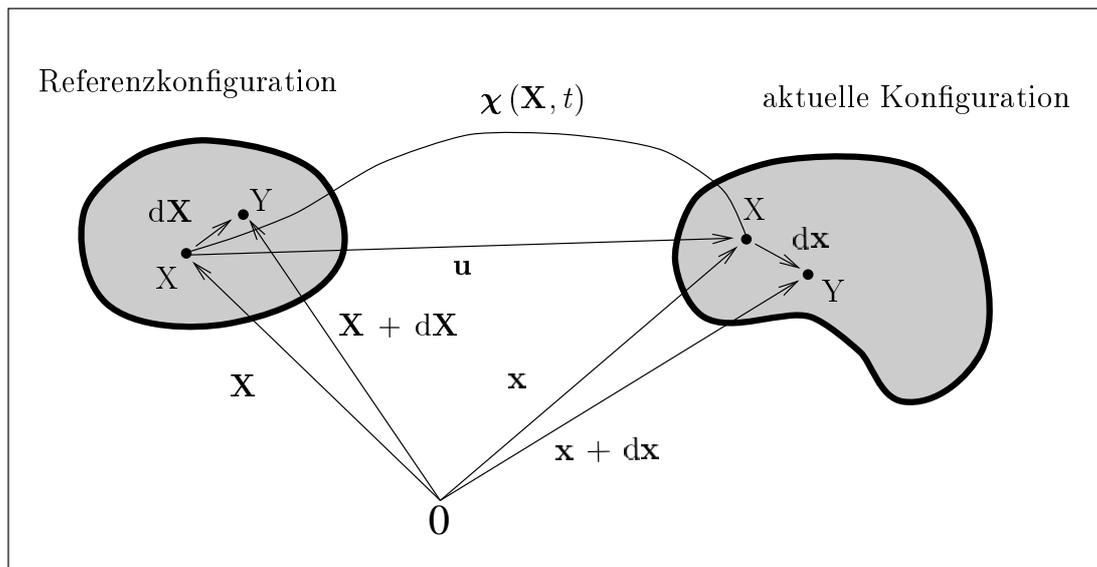


Bild 2.1: Konfigurationen der klassischen Kontinuumsmechanik

Die aus der Literatur bekannte Porosität n des Festkörpers ergibt sich für den hier betrachteten Fall von leeren Poren zu

$$n = 1 - n^S. \quad (2.10)$$

Ausgehend von der Annahme, daß die Kompressibilität der porösen Struktur deutlich größer ist als die Kompressibilität des reinen Festkörpermateriale, wird im folgenden die effektive Dichte ρ^R als konstant angenommen (materiell inkompressibles Material):

$$\rho^R = \text{konst.} \implies \rho = \rho(n^S). \quad (2.11)$$

Es ist einsichtig, daß diese Annahme z. B. für locker oder mitteldicht gelagerten Sand, bei dem die Kompressibilität der Struktur ein Vielfaches der Kompressibilität der einzelnen Körner ist, in einem weiten Bereich Gültigkeit besitzt. Man beachte, daß mit der Annahme $\rho^R = \text{konst.}$ noch keine Aussage über die Partialdichte gemacht wird, denn diese ist durch eventuelle Veränderungen von n^S variabel.

2.2.5 Konvektive Koordinaten

Für die folgenden theoretischen Überlegungen ist es hilfreich, sogenannte konvektive Koordinaten mittels krummliniger Parameterlinien θ^i ($i = 1, 2, 3$) einzuführen (siehe Bild 2.2). Die natürlichen (kovarianten) Basisvektoren \mathbf{a}_i der aktuellen Konfiguration

sowie \mathbf{h}_i der Referenzkonfiguration ergeben sich dann durch Tangentenbildung an die Parameterlinien θ^i :

$$\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{x}}{d\theta^i}, \quad \mathbf{h}_i = \frac{d\mathbf{X}}{d\theta^i}. \quad (2.12)$$

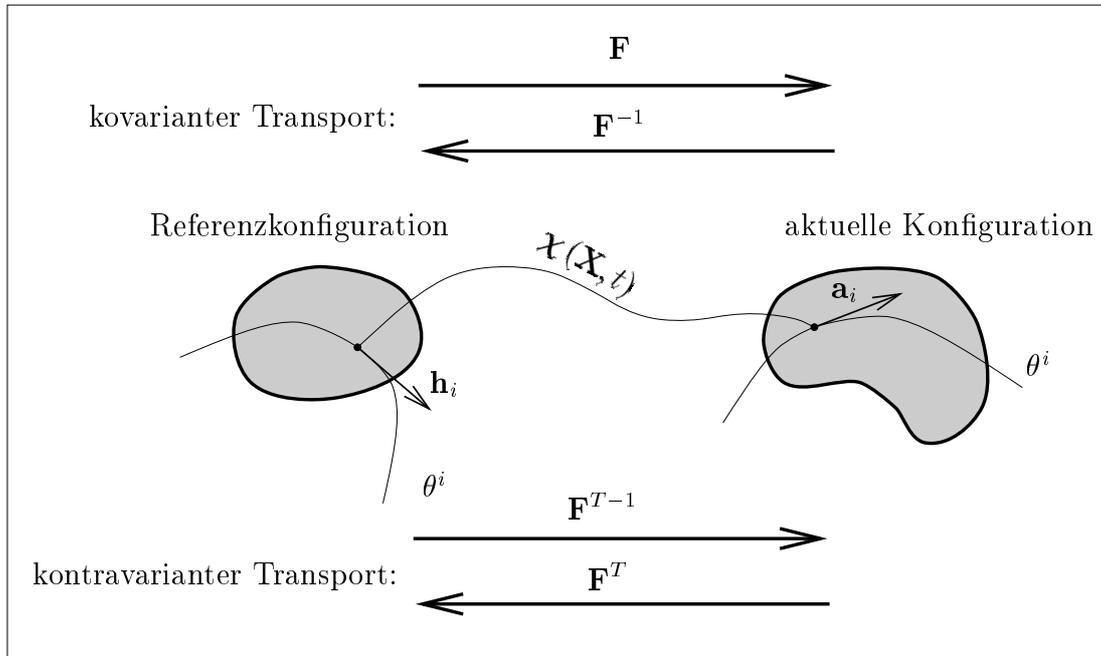


Bild 2.2: Transportverhalten und natürliche Basisvektoren

Mit den Methoden der Vektoralgebra (siehe z. B. *de Boer* [5]) kann man duale (kontravariante) Basisvektoren \mathbf{a}^i und \mathbf{h}^i einführen,

$$\mathbf{a}^i = \frac{d\theta^i}{d\mathbf{x}}, \quad \mathbf{h}^i = \frac{d\theta^i}{d\mathbf{X}}, \quad (2.13)$$

die den folgenden Eigenschaften genügen:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j &= \delta_j^i, & \mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}_j &= \delta_j^i, \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j &= a_{ij}, & \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j &= h_{ij}, \\ \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j &= a^{ij}, & \mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}^j &= h^{ij}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Hierin sind δ_j^i das *Kronecker-Delta*, a_{ij} und h_{ij} die kovarianten Metrikkoeffizienten sowie a^{ij} und h^{ij} die kontravarianten Metrikkoeffizienten. Mit den Beziehungen aus (2.14) erhält man die Vorschrift für das „Runter-“ bzw. „Hochziehen“ der Indizes:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^i &= a^{ij} \mathbf{a}_j, & \mathbf{a}_i &= a_{ij} \mathbf{a}^j, \\ \mathbf{h}^i &= h^{ij} \mathbf{h}_j, & \mathbf{h}_i &= h_{ij} \mathbf{h}^j. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Mit diesen Definitionen entsprechen die kovarianten Basisvektoren \mathbf{a}_i und \mathbf{h}_i , multipliziert mit einem infinitesimalen Element $d\theta^i$ der Parameterlinie θ^i , einem Linienelement $d\mathbf{x}$ bzw. $d\mathbf{X}$ entlang der i -ten natürlichen Koordinatenrichtung. Mit den Methoden der Tensorrechnung (siehe z. B. *de Boer* [5] oder *Klingbeil* [53]) erhalten der Deformationsgradient und sein inverser Tensor die folgenden Formen:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{h}^i = \delta_j^i \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{h}^j \implies \mathbf{a}_i = \mathbf{F} \mathbf{h}_i, \\ \mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{a}^i = \delta_j^i \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{a}^j \implies \mathbf{h}_i = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{a}_i.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Hierbei wurde von der *Einsteinschen* Summenkonvention Gebrauch gemacht, die besagt, daß über gegenständige Indizes in einem Term summiert wird. Aus (2.16) ist ersichtlich, daß \mathbf{F} und \mathbf{F}^{-1} sogenannte Zwei-Feld-Tensoren mit je einem Basisvektor auf der Referenz- und auf der aktuellen Konfiguration sind und daß \mathbf{F} den kovarianten Vorwärtstransport sowie \mathbf{F}^{-1} den kovarianten Rückwärtstransport von der Referenz- auf die aktuelle Konfiguration beschreiben. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß sich kontravariante Vektoren mit \mathbf{F}^{T-1} bzw. \mathbf{F}^T transportieren lassen:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{T-1} &= \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{h}_i \implies \mathbf{a}^i = \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{h}^i, \\ \mathbf{F}^T &= \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{h}_i \implies \mathbf{h}^i = \mathbf{F}^T \mathbf{a}^i.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Die Begriffsbildung „ko-“ und „kontravarianter“ Transportmechanismus bezieht sich dabei auf die Varianz der Basis der zu transportierenden Vektor- bzw. Tensorgröße, (vgl. *Ehlers* [25, 26]).

2.2.6 Deformations- und Verzerrungsmaße

Die Deformationsmaße beschreiben das Transportverhalten der Quadrate der Linienelemente. Der rechte *Greensche* Deformationstensor \mathbf{C} transportiert ein Quadrat von Linienelementen von der Referenz- auf die aktuelle Konfiguration und der inverse linke *Greensche* Deformationstensor \mathbf{B}^{-1} transportiert entsprechend ein Quadrat von Linienelementen von der aktuellen auf die Referenzkonfiguration:

$$\begin{aligned}d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}, \\ d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} d\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Darin sind

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \mathbf{F} = a_{ij} \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}^j, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F} \mathbf{F}^T = h^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Der *Greensche* Verzerrungstensor \mathbf{E} und der *Almansische* Verzerrungstensor \mathbf{A} sind durch die Darstellung der Differenz von Quadraten der Linienelementen motiviert. Dabei stellt \mathbf{E} die Differenz der Quadrate der Linienelemente mit Bezug auf die Referenzkonfiguration und \mathbf{A} mit Bezug auf die aktuelle Konfiguration dar:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} d\mathbf{X}, \\ d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{x} \cdot 2\mathbf{A} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Hieraus ergeben sich die Definitionen

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &:= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(a_{ij} - h_{ij}) \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}^j, \\ \mathbf{A} &:= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2}(a_{ij} - h_{ij}) \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die Verzerrungstensoren \mathbf{E} und \mathbf{A} haben eine kontravariante Basis und lassen sich entsprechend Gleichung (2.17) und Bild 2.2 durch den kontravarianten Transportmechanismus ineinander abbilden, da sie jeweils über das gleiche Koeffizientenschema verfügen (siehe *Ehlers* [26] oder *Haupt & Tsakmakis* [50]):

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F}. \quad (2.22)$$

Die Beziehungen aus (2.22) werden durch das folgende Konzept zusammengefaßt:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathbf{F}^{T-1} (\cdot) \mathbf{F}^{-1}} & \\ \mathbf{E} & & \mathbf{A} \\ & \xleftarrow{\mathbf{F}^T (\cdot) \mathbf{F}} & \end{array}}. \quad (2.23)$$

Die *Karni-Reiner*-Verzerrungstensoren \mathbf{K} und ${}^R\mathbf{K}$ (das „*R*“ steht für Referenzkonfiguration) können z. B. durch Vorrotation von \mathbf{E} bzw. Rückrotation von \mathbf{A} gebildet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{R} \mathbf{E} \mathbf{R}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(h^{ij} - a^{ij}) \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j, \\ {}^R\mathbf{K} &= \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) = \frac{1}{2}(h^{ij} - a^{ij}) \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j. \end{aligned} \quad (2.24)$$

\mathbf{K} und ${}^R\mathbf{K}$ haben physikalisch die Bedeutung der Differenz der Quadrate der dualen Linienelemente mit Bezug zur aktuellen bzw. Referenzkonfiguration. Sie sind somit im Gegensatz zu \mathbf{A} und \mathbf{E} kovariante Verzerrungstensoren und lassen sich mit Hilfe von (2.17) und Bild 2.2 durch kovariante Transporte ineinander überführen:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathbf{F} (\cdot) \mathbf{F}^T} & \\ {}^R\mathbf{K} & & \mathbf{K} \\ & \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1} (\cdot) \mathbf{F}^{T-1}} & \end{array}}. \quad (2.25)$$

Die *Karni-Reiner*-Verzerrungstensoren eignen sich infolge der kovarianten Basis gut zur Formulierung von hypoelastischen Elastizitätsgesetzen der kovariant definierten Spannungstensoren.

2.2.7 Deformationsgeschwindigkeit

Der Deformationsgeschwindigkeitsgradient \mathbf{L} beschreibt die zeitliche Änderung eines Linienelements $d\mathbf{x}$ der aktuellen Konfiguration:

$$d\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{a}}_i \otimes \mathbf{a}^i. \quad (2.26)$$

Mit (2.26) kann damit unmittelbar die zeitliche Ableitung der Basisvektoren \mathbf{a}_i bestimmt werden:

$$\dot{\mathbf{a}}_i = \mathbf{L} \mathbf{a}_i. \quad (2.27)$$

Der symmetrische Anteil von \mathbf{L} heißt symmetrischer Deformationsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} , und der schiefssymmetrische Anteil von \mathbf{L} wird Drehgeschwindigkeitstensor oder Wirbeltensor \mathbf{W} genannt:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{D} + \mathbf{W}, \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Neben der Aufspaltung in den symmetrischen und schiefssymmetrischen Anteil existiert die Aufspaltung des Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} in den schiefssymmetrischen Kreiseltensor $\mathbf{\Omega}$ und den verallgemeinerten, unsymmetrischen Deformationsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{\Delta}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{\Delta} + \mathbf{\Omega}, \\ \mathbf{\Delta} &= \mathbf{R} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^T, \\ \mathbf{\Omega} &= \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Für die genannten Aufspaltungen können die folgenden Beziehungen gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}^T), \\ \mathbf{W} &= \mathbf{\Omega} + \frac{1}{2}(\mathbf{\Delta} - \mathbf{\Delta}^T). \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.2.8 Zeitableitungen

Die materielle Zeitableitung $(\cdot)^\bullet$ einer tensoriellen Größe (\cdot) mit einer Basis auf der Momentankonfiguration wird bekanntlich durch die partielle Ableitung bezüglich des (mitbewegten) Basissystems der aktuellen Konfiguration und der zeitlichen Änderung der Basis selbst gebildet (Relativbewegung). Die materielle Zeitableitung genügt für tensorielle Größen mit Basis auf der Momentankonfiguration nicht mehr dem Prinzip der Beobachterinvarianz (vgl. z. B. *Altenbach & Altenbach* [1]).

Beispielhaft werden für die Klasse der objektiven Zeitableitungen die *Green-Naghdi*-Ableitung $(\cdot)^\diamond$ sowie die untere und obere *Oldroyd*-Ableitung $(\cdot)^\nabla$ bzw. $(\cdot)^\Delta$ erwähnt, die folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} (\cdot)^\diamond &= (\cdot)^\bullet - \boldsymbol{\Omega}(\cdot) - (\cdot)\boldsymbol{\Omega}^T, \\ (\cdot)^\nabla &= (\cdot)^\bullet - \mathbf{L}(\cdot) - (\cdot)\mathbf{L}^T, \\ (\cdot)^\Delta &= (\cdot)^\bullet + \mathbf{L}^T(\cdot) + (\cdot)\mathbf{L}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Bei der *Green-Naghdi*-Ableitung (*Green & Naghdi* [41]) wird der rotatorische Anteil der Ableitung des mitbewegten Basissystems nicht berücksichtigt. Somit wird mit der *Green-Naghdi*-Ableitung die zeitliche Ableitung bezüglich einer mitrotierten Konfiguration beschrieben. Bei der unteren und oberen *Oldroyd*-Ableitung (*Oldroyd* [64]) wird die komplette zeitliche Änderung des mitbewegten kovarianten bzw. kontravarianten Basissystems nicht berücksichtigt. Mit der unteren und oberen *Oldroyd*-Ableitung wird demnach die zeitliche Ableitung bezüglich des komplett mitbewegten Basissystems beschrieben. Dies bedeutet, daß für eine tensorielle Größe mit der Basis auf der Momentankonfiguration lediglich die Zeitableitung des Koeffizientenschemas gebildet wird.

Eine Zusammenstellung von gebräuchlichen und weniger bekannten objektiven Zeitableitungen findet man bei *Wegener* [85].

Mit diesen Überlegungen und unter Verwendung von (2.29) können die folgenden Transportbeziehungen gezeigt werden:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\Delta} \mathbf{R} \mathbf{U} \quad \xrightarrow{\mathbf{R} \quad (\cdot) \mathbf{R}^T} \quad \dot{\mathbf{V}} = \boldsymbol{\Delta} \mathbf{V}, \\ \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \quad \xrightarrow{\mathbf{F}^{T-1} (\cdot) \mathbf{F}^{-1}} \quad \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{D}, \\ {}^R \dot{\mathbf{K}} = -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}^{-1} \quad \xrightarrow{\mathbf{F} \quad (\cdot) \mathbf{F}^T} \quad \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{D}. \end{array}} \tag{2.32}$$

Aus (2.32) ist zu entnehmen, daß zwischen den dort angegebenen Zeitableitungen die gleiche Transformationsvorschrift gilt, wie zwischen den Ursprungsgrößen, vgl. Gleichungen (2.7), (2.23) und (2.25). Die *Green-Naghdi*-Ableitung kann somit durch

den Mechanismus „Rückrotation – materielle Zeitableitung – Vorwärtsrotation“ beschrieben werden, für die untere *Oldroyd*-Ableitung gilt demnach „kovarianter Rückwärtstransport – materielle Zeitableitung – kovarianter Vorwärtstransport“, und die obere *Oldroyd*-Ableitung hat die Bedeutung: „kontravarianter Rückwärtstransport – materielle Zeitableitung – kontravarianter Vorwärtstransport“.

Die Verzerrungstensoren \mathbf{A} und \mathbf{K} haben als Koeffizientenschema jeweils die Differenz der ko- bzw. kontravarianten Metrikoeffizienten mit jedoch unterschiedlichem Vorzeichen, vgl. (2.21) und (2.24). Die Metrik der Referenzkonfiguration ist definitionsgemäß konstant, so daß durch Ableiten des Koeffizientenschemas die folgenden Ergebnisse erzielt werden:

$$\begin{aligned}\overset{\nabla}{\mathbf{K}} &= -\frac{1}{2}\dot{a}^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j, \\ \overset{\Delta}{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2}\dot{a}_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Mit den Beziehungen

$$\dot{a}_{ij} = -a_{ik} \dot{a}^{kl} a_{lj}, \quad \dot{a}^{ij} = -a^{ik} \dot{a}_{kl} a^{lj}\tag{2.34}$$

und mit Hilfe von (2.15), (2.26) und (2.28) erkennt man leicht, daß die Ausdrücke in (2.33) äquivalent und gleich \mathbf{D} sind.

2.3 Kinematik (mikropolare Materialien)

Im folgenden werden die erweiterten kinematischen Beziehungen für mikropolare Materialien angegeben. Wie bereits angesprochen, wird die Berücksichtigung der Mikropolarität durch die Einführung eines vom Verschiebungszustand unabhängigen Rotationsfelds vorgenommen. Zur vollständigen Beschreibung des Bewegungszustands eines materiellen Punkts ist somit neben dem Verschiebungsvektor \mathbf{u} noch ein Drehvektor $\bar{\varphi}$ notwendig.

2.3.1 Die Direktoren

Zur kinematischen Berücksichtigung der zusätzlichen mikropolaren, rotatorischen Freiheitsgrade wird ein zusätzliches starres Dreibein (Direktoren) an jedem materiellen Punkt angeheftet, um die angesprochene Orientierung des Punkts im Raum angeben zu können. In Analogie zu den Linienelementen $d\mathbf{X}$ und $d\mathbf{x}$ bzw. den natürlichen Basisvektoren \mathbf{h}_i und \mathbf{a}_i werden Direktoren Ξ_i , die eine Referenzorientierung beschreiben, und Direktoren ξ_i , die die aktuelle Orientierung beschreiben, eingeführt (vgl. *Eringen & Kafadar* [40]). Die Abbildung zwischen den Direktoren ξ_i und Ξ_i erfolgt mit einem eigentlich orthogonalen Tensor $\bar{\mathbf{R}}$ (*Cosserat*-Rotationstensor oder

Tensor der Mikrobewegung), der mit Hilfe der *Euler-Rodrigues*-Formel in Abhängigkeit der Rotationsachse $\bar{\mathbf{e}}$ und dem Rotationswinkel $\bar{\varphi}$ dargestellt werden kann (vgl. Bild 2.3):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_i &= \bar{\mathbf{R}} \boldsymbol{\Xi}_i, & \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}^T &= \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{I}, & \det \bar{\mathbf{R}} &= 1, \\ \bar{\mathbf{R}} &= \bar{\mathbf{e}} \otimes \bar{\mathbf{e}} + (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{e}} \otimes \bar{\mathbf{e}}) \cos \bar{\varphi} + (\bar{\mathbf{e}} \times \mathbf{I}) \sin \bar{\varphi}, & & & & (2.35) \\ \bar{\varphi} &= \bar{\varphi} \bar{\mathbf{e}}.\end{aligned}$$

Das äußere Tensorprodukt zwischen Vektor und Tensor ist folgendermaßen definiert (siehe *de Boer* [5]):

$$\mathbf{a} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{a} = [\mathbf{E}^3 (\mathbf{a} \otimes \mathbf{A})]^2. \quad (2.36)$$

Darin gibt der unterstrichene Index die Stufe des Ergebnisses einer tensoriellen Verknüpfung von Tensoren höherer Stufe an, vgl. auch Anhang A.

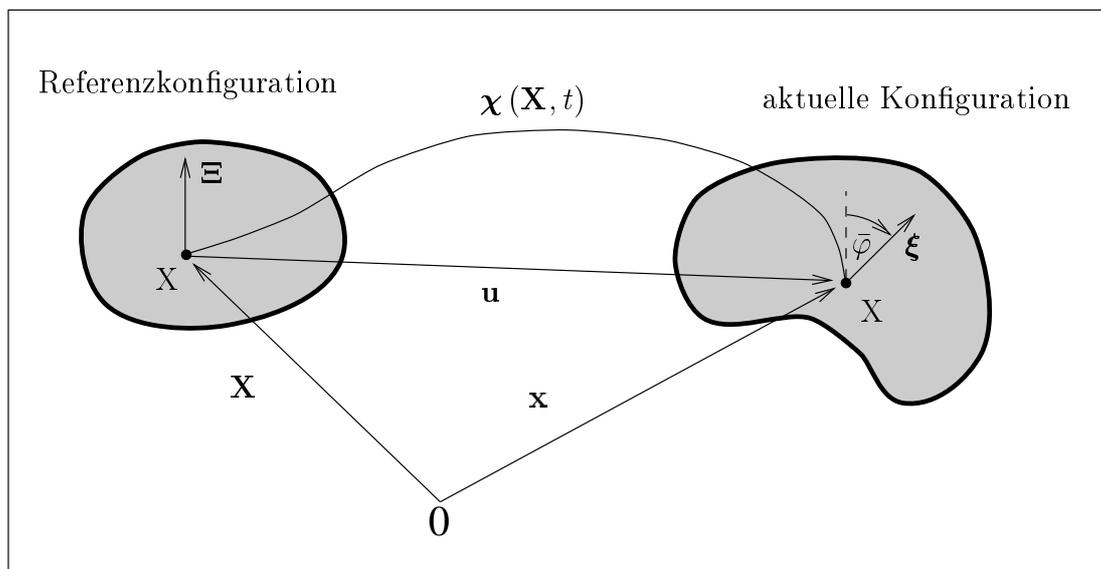


Bild 2.3: Direktoren der mikropolaren Theorie

2.3.2 Zerlegung der Deformation

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist es möglich, die Direktoren auf zwei verschiedene Arten mit den natürlichen Basisvektoren zu identifizieren. Einerseits kann man die Direktoren $\boldsymbol{\Xi}_i$ mit den Basisvektoren \mathbf{h}_i der Referenzkonfiguration gleichsetzen. Diese Annahme führt zu einer sogenannten $\bar{\mathbf{V}}$ -Konfiguration mit den Basisvektoren $\bar{\mathbf{a}}_i = \boldsymbol{\xi}_i$, die infolge der eigentlichen Orthogonalität von $\bar{\mathbf{R}}$ die aktuelle

Orientierung aller materiellen Punkte auf der Geometrie der Referenzkonfiguration wiedergibt. Dieses Vorgehen entspricht prinzipiell einer *Lagrangeschen* Beschreibung der Mikropolarität. Andererseits kann man gleichwertig die Direktoren ξ_i mit den Basisvektoren \mathbf{a}_i der aktuellen Konfiguration identifizieren. Mit dieser Annahme ist die Existenz einer sogenannte $\bar{\mathbf{U}}$ -Konfiguration (Basisvektoren $\bar{\mathbf{h}}_i = \Xi_i$) verknüpft, die für die Direktoren als Referenzkonfiguration dient, jedoch mit der Geometrie der aktuellen Konfiguration versehen ist, vgl. Bild 2.4. Dies entspricht einer *Eulerschen* Beschreibung der Direktoren (siehe *Diebels & Ehlers* [21]). Man beachte, daß wegen der zusätzlichen Rotation die Basisvektoren $\bar{\mathbf{a}}_i$ und $\bar{\mathbf{h}}_i$ nicht mehr Tangenten an die Parameterlinien sind.

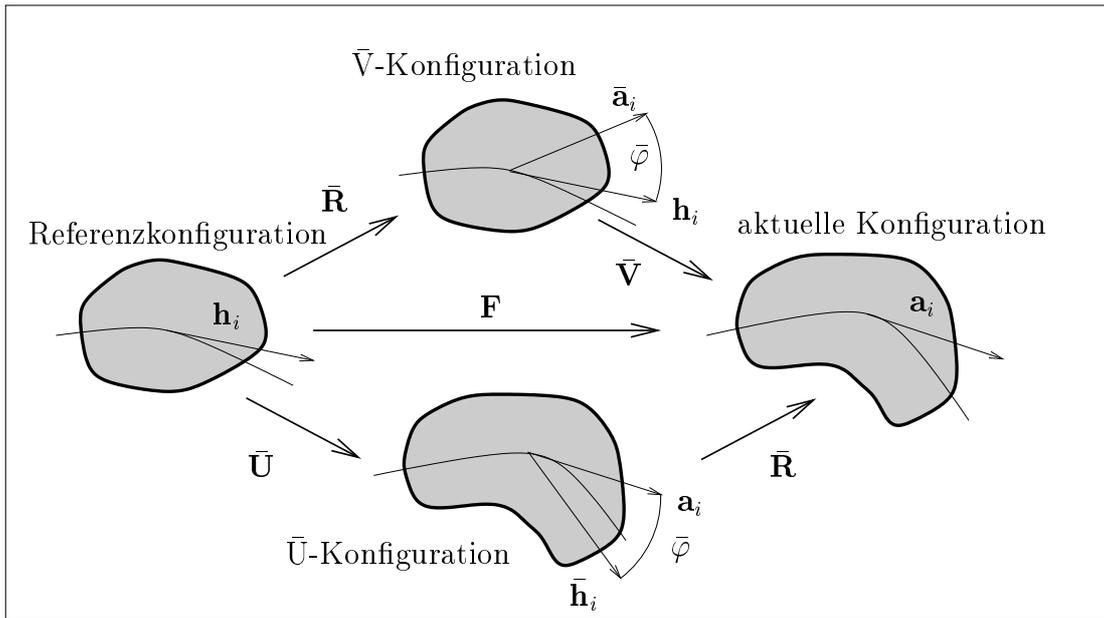


Bild 2.4: Konfigurationen der mikropolaren Kontinuumsmechanik

Somit ist es möglich, zwei verschiedene Aufspaltungen für den Deformationsgradienten \mathbf{F} bzw. den *Cosserat*-Rotationstensor $\bar{\mathbf{R}}$ in Analogie zur polaren Zerlegung (2.7) anzugeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{R}}, & \bar{\mathbf{U}} &\neq \bar{\mathbf{U}}^T, & \bar{\mathbf{V}} &\neq \bar{\mathbf{V}}^T, \\ \bar{\mathbf{R}} &= \mathbf{F}\bar{\mathbf{U}}^{-1} = \bar{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{a}_i \otimes \bar{\mathbf{h}}^i = \bar{\mathbf{a}}_i \otimes \mathbf{h}^i. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Im Gegensatz zur polaren Zerlegung sind die *Cosserat*-Deformationstensoren $\bar{\mathbf{U}}$ und $\bar{\mathbf{V}}$ nicht mehr zwingend symmetrisch. Folglich ist Gleichung (2.37) nicht mehr eindeutig, und $\bar{\mathbf{U}}$ sowie $\bar{\mathbf{V}}$ hängen sowohl von den translatorischen (über \mathbf{F}) als auch

von den rotatorischen Freiheitsgraden (über $\bar{\mathbf{R}}$) ab:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}} &= \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} = \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{h}}_i \otimes \mathbf{h}^i, \\ \bar{\mathbf{V}} &= \mathbf{F} \bar{\mathbf{R}}^T = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{R}}^T = \mathbf{a}_i \otimes \bar{\mathbf{a}}^i.\end{aligned}\tag{2.38}$$

An dieser Stelle sei eine Bemerkung zur Nomenklatur gestattet: Es wird versucht, alle mikropolaren Größen, die ein Analogon in der nicht-polaren Theorie haben, mit dem gleichen Buchstaben und einem Querstrich zu bezeichnen. So ist der *Cosserat*-Rotationstensor $\bar{\mathbf{R}}$ vergleichbar mit dem Rotationstensor \mathbf{R} der polaren Zerlegung.

2.3.3 Mikropolare Deformations- und Verzerrungsmaße

In der mikropolaren Kontinuumsmechanik beschreiben die Deformationstensoren nicht mehr den Transport von Quadraten der Linienelemente, sondern den Transport des Skalarprodukts zwischen Direktor und Linienelement (siehe *Diebels & Ehlers* [21]):

$$\begin{aligned}\xi \cdot dx &= \bar{\mathbf{R}} \Xi \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} = \Xi \cdot \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} = \Xi \cdot \bar{\mathbf{U}} d\mathbf{X}, \\ \Xi \cdot d\mathbf{X} &= \bar{\mathbf{R}}^T \xi \cdot \mathbf{F}^{-1} dx = \xi \cdot \bar{\mathbf{R}} \mathbf{F}^{-1} dx = \xi \cdot \bar{\mathbf{V}}^{-1} dx.\end{aligned}\tag{2.39}$$

Die Verzerrungstensoren $\bar{\mathbf{E}}$ und $\bar{\mathbf{A}}$ sind jetzt in Analogie zu (2.20) über die Differenz der Skalarprodukte zwischen Linienelementen und Direktoren definiert:

$$\begin{aligned}\xi \cdot dx - \Xi \cdot d\mathbf{X} &= \Xi \cdot \bar{\mathbf{E}} d\mathbf{X}, \\ \xi \cdot dx - \Xi \cdot d\mathbf{X} &= \xi \cdot \bar{\mathbf{A}} dx.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Darin sind

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{I} = (\delta_j^i - \bar{\mathbf{h}}^i \cdot \mathbf{h}_j) \bar{\mathbf{h}}_i \otimes \mathbf{h}^j, \\ \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{I} - \bar{\mathbf{V}}^{-1} = (\bar{\mathbf{a}}^i \cdot \mathbf{a}_j - \delta_j^i) \bar{\mathbf{a}}_i \otimes \mathbf{a}^j.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Ersetzt man in (2.23) den linken Transporttensor \mathbf{F}^{T-1} durch den entsprechenden mikropolaren Transporttensor $\bar{\mathbf{R}}^{T-1} = \bar{\mathbf{R}}$, dann ergibt sich die Beziehung zwischen $\bar{\mathbf{E}}$ und $\bar{\mathbf{A}}$:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{E}} & \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}} (\cdot) \mathbf{F}^{-1}} & \bar{\mathbf{A}} \\ & \xleftarrow{\bar{\mathbf{R}}^T (\cdot) \mathbf{F}} & \end{array}}.\tag{2.42}$$

Durch Vorrotation von $\bar{\mathbf{E}}$ bzw. Rückrotation von $\bar{\mathbf{A}}$ entstehen die *Karni-Reiner*-Tensoren der mikropolaren Theorie in Analogie zu (2.24):

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{K}} &= \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{R}}^T = \bar{\mathbf{V}} - \mathbf{I} = (\mathbf{a}^i \cdot \bar{\mathbf{a}}_j - \delta_j^i) \mathbf{a}_i \otimes \bar{\mathbf{a}}^j, \\ {}^R\bar{\mathbf{K}} &= \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{I} - \bar{\mathbf{U}}^{-1} = (\delta_j^i - \mathbf{h}^i \cdot \bar{\mathbf{h}}_j) \mathbf{h}_i \otimes \bar{\mathbf{h}}^j.\end{aligned}\quad (2.43)$$

$\bar{\mathbf{K}}$ und ${}^R\bar{\mathbf{K}}$ können durch die folgende Transformation ineinander abgebildet werden, vgl. Gleichung (2.25):

$$\boxed{{}^R\bar{\mathbf{K}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}^T} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}} \end{array} \bar{\mathbf{K}}}. \quad (2.44)$$

2.3.4 Mikropolare Krümmungsmaße

Der Krümmungstensor ist ein zusätzliches Deformationsmaß der mikropolaren Theorie, das in der klassischen Kontinuumsmechanik nur eine untergeordnete Rolle spielt. Der Krümmungstensor wird durch den *Cosserat*-Rotationstensor $\bar{\mathbf{R}}$ und seinen Gradienten gebildet (vgl. *Eringen & Kafadar* [40] oder *Steinmann* [76]). Aufgrund der Existenz von zwei äquivalenten Darstellungen von $\bar{\mathbf{R}}$ aus (2.37) und der eigentlichen Orthogonalität von $\bar{\mathbf{R}}$ gibt es sehr viele Darstellungsmöglichkeiten für die Krümmungsmaße. Zunächst werden die Beschreibungen des Krümmungstensors mit allen Basisvektoren auf einer Konfiguration vorgestellt:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{K}}^3 &:= (\bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad } \bar{\mathbf{R}})^3 = (\bar{\gamma}_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i) \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}^j \otimes \mathbf{h}^k, \\ \bar{\mathcal{K}}^3_{\bar{V}} &:= -(\bar{\mathbf{R}} \text{grad}_{\bar{V}} \bar{\mathbf{R}}^T)^3 = (\bar{\gamma}_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i) \bar{\mathbf{a}}_i \otimes \bar{\mathbf{a}}^j \otimes \bar{\mathbf{a}}^k, \\ \bar{\mathcal{K}}^3_{\bar{U}} &:= (\bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad}_{\bar{U}} \bar{\mathbf{R}})^3 = (\gamma_{jk}^i - \bar{\Gamma}_{jk}^i) \bar{\mathbf{h}}_i \otimes \bar{\mathbf{h}}^j \otimes \bar{\mathbf{h}}^k, \\ \bar{\mathcal{K}}^3 &:= -(\bar{\mathbf{R}} \text{grad } \bar{\mathbf{R}}^T)^3 = (\gamma_{jk}^i - \bar{\Gamma}_{jk}^i) \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^j \otimes \mathbf{a}^k.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Die Operatoren „ $\text{grad}_{\bar{V}}(\cdot)$ “ und „ $\text{Grad}_{\bar{U}}(\cdot)$ “ sind als räumliche Ableitungen von (\cdot) bezüglich der Ortsvektoren der \bar{V} -Konfiguration bzw. der \bar{U} -Konfiguration definiert. Die unterschiedlichen Gradienten lassen sich mit kontravarianten Transportmechanismen ineinander überführen. Es gelten z. B. die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}[\text{grad}_{\bar{V}}(\cdot)]^i &= [\text{Grad}(\cdot) \bar{\mathbf{R}}^T]^i, & [\text{Grad}(\cdot)]^i &= [\text{grad}_{\bar{V}}(\cdot) \bar{\mathbf{R}}]^i, \\ [\text{grad}(\cdot)]^i &= [\text{Grad}_{\bar{U}}(\cdot) \bar{\mathbf{R}}^T]^i, & [\text{Grad}_{\bar{U}}(\cdot)]^i &= [\text{grad}(\cdot) \bar{\mathbf{R}}]^i, \\ [\text{grad}(\cdot)]^i &= [\text{Grad}(\cdot) \mathbf{F}^{-1}]^i, & [\text{Grad}(\cdot)]^i &= [\text{grad}(\cdot) \mathbf{F}]^i.\end{aligned}\quad (2.46)$$

In (2.45) wurden verallgemeinerte *Christoffel*-Symbole verwendet (vgl. *de Boer* [5]), die das Koeffizientenschema der Ableitung eines Basisvektors in Abhängigkeit des Basisvektors angeben:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \Theta^j} &= \gamma_{ij}^k \mathbf{a}_k, & \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \Theta^j} &= \gamma_{jk}^i \mathbf{a}^k = -\gamma_{kj}^i \mathbf{a}^k, \\
\frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \Theta^j} &= \Gamma_{ij}^k \mathbf{h}_k, & \frac{\partial \mathbf{h}^i}{\partial \Theta^j} &= \Gamma_{jk}^i \mathbf{h}^k = -\Gamma_{kj}^i \mathbf{h}^k, \\
\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}_i}{\partial \Theta^j} &= \bar{\gamma}_{ij}^k \bar{\mathbf{a}}_k, & \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^i}{\partial \Theta^j} &= \bar{\gamma}_{jk}^i \bar{\mathbf{a}}^k = -\bar{\gamma}_{kj}^i \bar{\mathbf{a}}^k, \\
\frac{\partial \bar{\mathbf{h}}_i}{\partial \Theta^j} &= \bar{\Gamma}_{ij}^k \bar{\mathbf{h}}_k, & \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}^i}{\partial \Theta^j} &= \bar{\Gamma}_{jk}^i \bar{\mathbf{h}}^k = -\bar{\Gamma}_{kj}^i \bar{\mathbf{h}}^k.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Die Definition der *Christoffel*-Symbole erhält man aus (2.47) durch skalare Multiplikation mit dem jeweiligen dualen Basisvektor. Es ist zu beachten, daß die *Christoffel*-Symbole γ_{ij}^k und Γ_{ij}^k symmetrisch bezüglich der ersten beiden Indizes sind, da \mathbf{a}_i und \mathbf{h}_i nach (2.12) als Tangenten an die Parameterlinien definiert wurden und die *Schwarzsche* Vertauschbarkeitsregel Anwendung findet.

Die *Christoffel*-Symbole $\bar{\gamma}_{jk}^i$ und $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ verfügen nicht über die angesprochene Symmetrie, da die zugehörigen Basisvektoren $\bar{\mathbf{a}}_i$ und $\bar{\mathbf{h}}_i$ keine Tangentialeigenschaft besitzen:

$$\begin{aligned}
\gamma_{ij}^k &= \gamma_{ji}^k, & \Gamma_{ij}^k &= \Gamma_{ji}^k, \\
\bar{\gamma}_{ij}^k &\neq \bar{\gamma}_{ji}^k, & \bar{\Gamma}_{ij}^k &\neq \bar{\Gamma}_{ji}^k.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

In (2.45) wurde für ${}^R\bar{\mathcal{K}}$ und ${}^V\bar{\mathcal{K}}$ die Darstellung $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{a}}_i \otimes \mathbf{h}^i$ und für ${}^U\bar{\mathcal{K}}$ und $\bar{\mathcal{K}}$ die alternative Darstellung $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{a}_i \otimes \bar{\mathbf{h}}^i$ verwendet. Zudem wurde ausgenutzt, daß $\bar{\mathbf{R}}^T = \bar{\mathbf{R}}^{-1}$ ist.

Im folgenden sei exemplarisch für ${}^R\bar{\mathcal{K}}$ die Ermittlung des Koeffizientenschemas aus (2.45)₁ gezeigt:

Zunächst wird der Gradiententerm von ${}^R\bar{\mathcal{K}}$ untersucht:

$$\text{Grad } \bar{\mathbf{R}} = \text{Grad} (\bar{\mathbf{a}}_i \otimes \mathbf{h}^i) = (\text{Grad } \bar{\mathbf{a}}_i \otimes \mathbf{h}^i)^{\overset{23}{T}} + \bar{\mathbf{a}}_i \otimes \text{Grad } \mathbf{h}^i. \tag{2.49}$$

Die Transposition $(\cdot)^{\overset{ik}{T}}$ bedeutet darin eine Vertauschung des i -ten mit dem k -ten Basisvektor von Tensoren höherer Stufe. Die in (2.49) auftretenden Gradienten können durch die *Christoffel*-Symbole aus (2.47) ausgedrückt werden:

$$\text{Grad } \bar{\mathbf{a}}_i = \bar{\gamma}_{ij}^k \bar{\mathbf{a}}_k \otimes \mathbf{h}^j, \quad \text{Grad } \mathbf{h}^i = \Gamma_{jk}^i \mathbf{h}^k \otimes \mathbf{h}^j = -\Gamma_{kj}^i \mathbf{h}^k \otimes \mathbf{h}^j. \tag{2.50}$$

Einsetzen von (2.50) in (2.49) und Umbenennung der Indizes ergibt

$$\text{Grad } \bar{\mathbf{R}} = (\bar{\gamma}_{jk}{}^i - \Gamma_{jk}{}^i) \bar{\mathbf{a}}_i \otimes \mathbf{h}^j \otimes \mathbf{h}^k. \quad (2.51)$$

Durch die Multiplikation mit $\bar{\mathbf{R}}^T$ wird schließlich noch der erste Basisvektor auf die Referenzkonfiguration zurückgezogen, und man erhält das gesuchte Ergebnis:

$$(\bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad } \bar{\mathbf{R}})^{\underline{3}} = (\bar{\gamma}_{jk}{}^i - \Gamma_{jk}{}^i) \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}^j \otimes \mathbf{h}^k. \quad (2.52)$$

Aus (2.45) ist zu entnehmen, daß $\bar{U}^{\underline{3}} \bar{\mathcal{K}}$ und $\bar{\mathcal{K}}$ bzw. ${}^R \bar{\mathcal{K}}$ und $\bar{V}^{\underline{3}} \bar{\mathcal{K}}$ jeweils das gleiche Koeffizientenschema bei unterschiedlicher Basis aufweisen, wobei die Basistransformationen zwischen $\bar{U}^{\underline{3}} \bar{\mathcal{K}}$ und $\bar{\mathcal{K}}$ sowie zwischen ${}^R \bar{\mathcal{K}}$ und $\bar{V}^{\underline{3}} \bar{\mathcal{K}}$ identisch sind, so daß die folgende Transformationsvorschrift gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{U}^{\underline{3}} \bar{\mathcal{K}} \xrightarrow{\{\bar{\mathbf{R}} [(\cdot)^T \bar{\mathbf{R}}^T]^{\underline{3}} \bar{\mathbf{R}}^T\}^{\underline{3}}} \bar{\mathcal{K}}, \\ {}^R \bar{\mathcal{K}} \xrightarrow{\{\bar{\mathbf{R}} [(\cdot)^T \bar{\mathbf{R}}^T]^{\underline{3}} \bar{\mathbf{R}}^T\}^{\underline{3}}} \bar{V}^{\underline{3}} \bar{\mathcal{K}}. \end{array}} \quad (2.53)$$

Bezüglich weiterer Transportmechanismen von 3-stufigen Tensoren, vgl. z. B. *Ehlers* [25].

Da ${}^R \bar{\mathcal{K}}$ und $\bar{\mathcal{K}}$ nach (2.45) über ein unterschiedliches Koeffizientenschema verfügen, können sie nicht unmittelbar durch reine Basistransformation (Vorwärts- bzw. Rückwärtstransport) ineinander überführt werden. Um dennoch einen Transportmechanismus zwischen diesen beiden Krümmungstensoren aufzuzeigen, wird bei der Auswertung von $\bar{\mathcal{K}}$ nicht von der Darstellung $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{a}_i \otimes \bar{\mathbf{h}}^i$, sondern von $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{a}}_i \otimes \mathbf{h}^i$ Gebrauch gemacht. Damit ergibt sich

$$\bar{\mathcal{K}}^{\underline{3}} := -(\bar{\mathbf{R}} \text{grad } \bar{\mathbf{R}}^T)^{\underline{3}} = (\bar{\gamma}_{jk}{}^i - \Gamma_{jk}{}^i) \bar{\mathbf{a}}_i \otimes \bar{\mathbf{a}}^j \otimes \mathbf{a}^k, \quad (2.54)$$

so daß im Vergleich mit (2.45)₁

$$\bar{\mathcal{K}}^{\underline{3}} = \{\bar{\mathbf{R}} [({}^R \bar{\mathcal{K}})^T \bar{\mathbf{R}}^T]^{\underline{3}} \mathbf{F}^{-1}\}^{\underline{3}}. \quad (2.55)$$

Analoges Vorgehen liefert

$${}^R \bar{\mathcal{K}}^{\underline{3}} := (\bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad } \bar{\mathbf{R}})^{\underline{3}} = (\gamma_{jk}{}^i - \bar{\Gamma}_{jk}{}^i) \bar{\mathbf{h}}_i \otimes \bar{\mathbf{h}}^j \otimes \mathbf{h}^k, \quad (2.56)$$

so daß im Vergleich mit (2.45)₄ ebenfalls der Zusammenhang aus (2.55) gilt, der auch in schematischer Form dargestellt werden kann:

$$\boxed{{}^R\bar{\mathcal{K}} \xrightarrow{\{\bar{\mathbf{R}}[(\cdot)^T \bar{\mathbf{R}}^T]_{\bar{\mathbf{R}}^T}^{\bar{\mathbf{R}}^T} \mathbf{F}^{-1}\}_{\bar{\mathbf{R}}^T}} {}^3\bar{\mathcal{K}}}. \quad (2.57)$$

Alle Krümmungstensoren sind schiefsymmetrisch bezüglich der ersten beiden Indizes. Dies sei exemplarisch für ${}^3\bar{\mathcal{K}}$ gezeigt:

$$\text{grad } \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \text{grad } (\bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}^T) = \mathbf{0}. \quad (2.58)$$

Unter Verwendung der Identität (*de Boer* [5])

$$\text{grad}(\mathbf{A} \mathbf{B}) = [(\text{grad } \mathbf{A})^T \mathbf{B}]_{\mathbf{A}^T}^{\mathbf{A}} + (\mathbf{A} \text{grad } \mathbf{B})_{\mathbf{B}^T}^{\mathbf{B}} \quad (2.59)$$

ergibt sich anstelle von (2.58):

$$[(\text{grad } \bar{\mathbf{R}})^T \bar{\mathbf{R}}^T]_{\bar{\mathbf{R}}^T}^{\bar{\mathbf{R}}^T} + (\bar{\mathbf{R}} \text{grad } \bar{\mathbf{R}}^T)_{\bar{\mathbf{R}}^T}^{\bar{\mathbf{R}}^T} = \mathbf{0}. \quad (2.60)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß mit (2.60) und der Identität

$$[(\text{grad } \bar{\mathbf{R}})^T \bar{\mathbf{R}}^T]_{\bar{\mathbf{R}}^T}^{\bar{\mathbf{R}}^T} = (\bar{\mathbf{R}} \text{grad } \bar{\mathbf{R}}^T)_{\bar{\mathbf{R}}^T}^{\bar{\mathbf{R}}^T} \quad (2.61)$$

die Schiefsymmetrie von ${}^3\bar{\mathcal{K}}$ folgt:

$$(\bar{\mathbf{R}} \text{grad } \bar{\mathbf{R}}^T)_{\bar{\mathbf{R}}^T}^{\bar{\mathbf{R}}^T} = -(\bar{\mathbf{R}} \text{grad } \bar{\mathbf{R}}^T)_{\bar{\mathbf{R}}^T}^{\bar{\mathbf{R}}^T} \quad \Longrightarrow \quad {}^3\bar{\mathcal{K}} = -({}^3\bar{\mathcal{K}})^T. \quad (2.62)$$

Infolge der Schiefsymmetrie können die Krümmungstensoren ein-eindeutig mit Hilfe des *Ricci*-Permutationstensors ${}^3\bar{\mathbf{E}}$ (Fundamentaltensor dritter Stufe) auf zweistufige axiale Krümmungstensoren reduziert werden (*Eringen & Kaffadar* [40]):

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}} &= -\frac{1}{2}({}^3\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathcal{K}})^{\bar{\mathcal{K}}}, & {}^3\bar{\mathcal{K}} &= -({}^3\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathcal{K}})^{\bar{\mathcal{K}}}, \\ {}^R\bar{\mathcal{K}} &= -\frac{1}{2}({}^3\bar{\mathbf{E}} {}^R\bar{\mathcal{K}})^{\bar{\mathcal{K}}}, & {}^R{}^3\bar{\mathcal{K}} &= -({}^3\bar{\mathbf{E}} {}^R\bar{\mathcal{K}})^{\bar{\mathcal{K}}}, \\ \bar{\mathcal{V}}\bar{\mathcal{K}} &= -\frac{1}{2}({}^3\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathcal{V}}\bar{\mathcal{K}})^{\bar{\mathcal{K}}}, & \bar{\mathcal{V}}{}^3\bar{\mathcal{K}} &= -({}^3\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathcal{V}}\bar{\mathcal{K}})^{\bar{\mathcal{K}}}, \\ \bar{\mathcal{U}}\bar{\mathcal{K}} &= -\frac{1}{2}({}^3\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathcal{U}}\bar{\mathcal{K}})^{\bar{\mathcal{K}}}, & \bar{\mathcal{U}}{}^3\bar{\mathcal{K}} &= -({}^3\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathcal{U}}\bar{\mathcal{K}})^{\bar{\mathcal{K}}}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Der Permutationstensor $\overset{3}{\mathbf{E}}$ kann darin bzgl. einer beliebigen schiefsymmetrischen Basis \mathbf{g}_i bzw. \mathbf{g}^i dargestellt werden (*de Boer* [5])

$$\overset{3}{\mathbf{E}} = \begin{cases} \sqrt{g} e^{ijk} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \\ \frac{1}{\sqrt{g}} e_{ijk} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k \end{cases}$$

mit $g = \det(g_{ij})$ (2.64)

und $e_{ijk} = e^{ijk} = \begin{cases} 1 : \text{gerade Permutation} \\ -1 : \text{ungerade Permutation} \\ 0 : \text{sonst} \end{cases}$

Mit (2.63) ergibt sich das Transformationsverhalten der zweistufigen Krümmungstensoren zu:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{v} \bar{\mathcal{K}} \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot) \bar{\mathbf{R}}^T} \bar{\mathcal{K}}, \\ {}^R \bar{\mathcal{K}} \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot) \bar{\mathbf{R}}^T} \bar{v} \bar{\mathcal{K}}, \\ {}^R \bar{\mathcal{K}} \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot) \mathbf{F}^{-1}} \bar{\mathcal{K}}. \end{array}} \quad (2.65)$$

2.3.5 Mikropolare Deformationsgeschwindigkeit

Da die Basisvektoren $\bar{\mathbf{a}}_i$ während der Deformation keine Längenänderung erfahren, beschreibt der mikropolare Kreiseltensor $\bar{\mathbf{\Omega}}$ die zeitliche Ableitung der Basisvektoren $\bar{\mathbf{a}}_i$ und somit auch die zeitliche Ableitung von $\bar{\mathbf{R}}$:

$$\bar{\mathbf{\Omega}} = \dot{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{R}}^T, \quad \dot{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{\mathbf{\Omega}} \bar{\mathbf{R}}, \quad \dot{\bar{\mathbf{a}}}_i = \bar{\mathbf{\Omega}} \bar{\mathbf{a}}_i. \quad (2.66)$$

Analog zu den Krümmungstensoren ist es möglich zu zeigen, daß der mikropolare Kreiseltensor schiefsymmetrisch ist und daher mit Hilfe des *Ricci*-Permutationstensors auf den axialen Vektor $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ (auch Winkelgeschwindigkeit genannt) ein-eindeutig verjüngt werden kann:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{\Omega}}^T, \quad \bar{\mathbf{\Omega}}^T = -\overset{3}{\mathbf{E}} \bar{\boldsymbol{\omega}}. \quad (2.67)$$

Der unsymmetrische, mikropolare Deformationsgeschwindigkeitstensor $\bar{\mathbf{\Delta}}$ ergibt sich als Differenz zwischen \mathbf{L} und $\bar{\mathbf{\Omega}}$:

$$\bar{\mathbf{\Delta}} := \mathbf{L} - \bar{\mathbf{\Omega}}, \quad \bar{\mathbf{\Delta}} \neq \bar{\mathbf{\Delta}}^T. \quad (2.68)$$

In den Gleichungen (2.37) und (2.68) erkennt man sehr gut die Auswirkung der zusätzlichen rotatorischen Freiheitsgrade auf die Kinematik. \mathbf{F} und \mathbf{L} sind sowohl für die nicht-polare als auch die mikropolare Kinematik identisch. Die multiplikative Zerlegung (2.7) von \mathbf{F} sowie die additive Zerlegung (2.28)₁ von \mathbf{L} ist im nicht-polaren Fall eindeutig, während die entsprechenden mikropolaren Zerlegungen (2.37) und (2.68) durch den *Cosserat*-Rotationstensor bestimmt sind. Hieraus ist ersichtlich, daß prinzipiell die Abwärtskompatibilität von der mikropolaren zur nicht-polaren Theorie gewährleistet ist, indem der *Cosserat*-Rotationstensor mit dem Rotationstensor der polaren Zerlegung von \mathbf{F} identifiziert wird. Lediglich die Definition der Verzerrungsmaße hat dann eine zulässige, aber modifizierte Form, da die Symmetrieeigenschaften von \mathbf{U} und \mathbf{V} für die Definition der Deformationsmaße nicht ausgenutzt werden.

Schließlich kann die zeitliche Ableitung der Basisvektoren $\bar{\mathbf{h}}_i$ in Abhängigkeit von $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$, $\bar{\mathbf{R}}$ und $\bar{\mathbf{L}}$ dargestellt werden:

$$\dot{\bar{\mathbf{h}}}_i = \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\boldsymbol{\Delta}} \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{h}}_i. \quad (2.69)$$

2.3.6 Mikropolare Zeitableitungen

Die mikropolare *Green-Naghdi*-Ableitung sowie die mikropolaren *Oldroyd*-Ableitungen erhalten gegenüber Gleichungen (2.31) leicht modifizierte Formen:

$$\begin{aligned} (\cdot)^\diamond &= (\cdot)^\cdot - \bar{\boldsymbol{\Omega}}(\cdot) - (\cdot)\bar{\boldsymbol{\Omega}}^T, \\ (\cdot)^\nabla &= (\cdot)^\cdot - \bar{\mathbf{L}}(\cdot) - (\cdot)\bar{\boldsymbol{\Omega}}^T, \\ (\cdot)^\blacktriangle &= (\cdot)^\cdot + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^T(\cdot) + (\cdot)\bar{\mathbf{L}}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Die Bedeutung der mikropolaren Zeitableitung ist prinzipiell mit den nicht-polaren Zeitableitungen vergleichbar. Bei der *Green-Naghdi*-Ableitung erkennt man diesen Zusammenhang sofort, und somit wird die Zeitableitung bezüglich einer mitrotierten Konfiguration gebildet. Bei den mikropolaren *Oldroyd*-Ableitungen muß berücksichtigt werden, daß die mikropolaren Verzerrungsmaße $\bar{\mathbf{A}}$ und $\bar{\mathbf{K}}$ nach Gleichungen (2.41) und (2.43) Zweifeldtensoren sind, die jeweils einen Basisvektor auf der aktuellen und einen auf der $\bar{\mathbf{V}}$ -Konfiguration haben. Demnach beschreibt die untere mikropolare *Oldroyd*-Ableitung die zeitliche Ableitung bezüglich mitbewegter Basissysteme für eine tensorielle Größe mit dem ersten kovarianten Basisvektor auf der aktuellen Konfiguration und dem zweiten kontravarianten Basisvektor auf der $\bar{\mathbf{V}}$ -Konfiguration. Die obere mikropolare *Oldroyd*-Ableitung hat die entsprechende Bedeutung einer zeitlichen Ableitung bezüglich mitbewegter Basissysteme für eine tensorielle Größe mit dem ersten kovarianten Basisvektor auf der $\bar{\mathbf{V}}$ -Konfiguration und dem zweiten kontravarianten Basisvektor auf der aktuellen Konfiguration.

Die Beziehungen (2.32) sind mit diesen Definitionen auf die mikropolare Theorie übertragbar:

$$\boxed{
 \begin{array}{lcl}
 \dot{\bar{\mathbf{U}}} = \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\Delta} \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}} & \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}^T} & \overset{\blacklozenge}{\dot{\bar{\mathbf{V}}}} = \bar{\Delta} \bar{\mathbf{V}}, \\
 \dot{\bar{\mathbf{E}}} = \dot{\bar{\mathbf{U}}} & \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot)\mathbf{F}^{-1}} & \overset{\blacktriangle}{\dot{\bar{\mathbf{A}}}} = \bar{\Delta}, \\
 {}^R\dot{\bar{\mathbf{K}}} = -\dot{\bar{\mathbf{U}}}^{-1} & \xrightarrow{\mathbf{F}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}^T} & \overset{\blacktriangledown}{\dot{\bar{\mathbf{K}}}} = \bar{\Delta}.
 \end{array}
 } \quad (2.71)$$

2.3.7 Mikropolare Krümmungsgeschwindigkeit

Die zeitlichen Ableitungen der Krümmungstensoren seien an dieser Stelle nur kurz erwähnt. Die materielle Zeitableitung von ${}^R\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}}$ aus (2.45) ergibt:

$$({}^R\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}})\cdot = \dot{\bar{\mathbf{R}}}^T \text{Grad } \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad } \dot{\bar{\mathbf{R}}}. \quad (2.72)$$

Mit (2.66) folgt

$$({}^R\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}})\cdot = \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\Omega}^T \text{Grad } \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad}(\bar{\Omega} \bar{\mathbf{R}}). \quad (2.73)$$

Schließlich erhält man mit (2.59) und unter Ausnutzung der Schiefsymmetrie von $\bar{\Omega}$ das Resultat

$$({}^R\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}})\cdot = \{\bar{\mathbf{R}}^T [(\text{Grad } \bar{\Omega})^T \bar{\mathbf{R}}]^{23} \}^3. \quad (2.74)$$

Mit Gleichungen (2.65) bis (2.74) folgen die zeitlichen Ableitungen der zweistufigen Krümmungstensoren ${}^R\bar{\mathcal{K}}$ und ${}^V\bar{\mathcal{K}}$:

$$\boxed{
 {}^R\dot{\bar{\mathcal{K}}} = \bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad } \bar{\omega} \quad \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}^T} \quad \overset{\blacklozenge}{\dot{}}{}^V\bar{\mathcal{K}} = \text{grad}_{\bar{\mathbf{V}}} \bar{\omega}
 } \quad (2.75)$$

Für die zeitlichen Ableitungen von ${}^U\bar{\mathcal{K}}$ und $\bar{\mathcal{K}}$ gilt prinzipiell der gleiche Zusammenhang:

$$\boxed{
 {}^U\dot{\bar{\mathcal{K}}} \quad \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}^T} \quad \overset{\blacklozenge}{\dot{\bar{\mathcal{K}}}}
 } \quad (2.76)$$

Darin sind

$$\begin{aligned}
 {}^U\dot{\bar{\mathcal{K}}} &= \bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad}_{\bar{\mathbf{U}}} \bar{\omega} - {}^U\bar{\mathcal{K}} \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\Delta} \bar{\mathbf{R}}, \\
 \overset{\blacklozenge}{\dot{\bar{\mathcal{K}}}} &= \text{grad } \bar{\omega} - \bar{\mathcal{K}} \bar{\Delta}.
 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Letztendlich sei noch der Zusammenhang zwischen den zeitlichen Ableitungen der Krümmungstensoren ${}^R\bar{\mathcal{K}}$ und $\bar{\mathcal{K}}$ genannt, der das folgende interessante Ergebnis liefert:

$$\boxed{{}^R\dot{\bar{\mathcal{K}}} = \bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad } \bar{\omega} \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot)\mathbf{F}^{-1}} \dot{\hat{\mathcal{K}}} = \text{grad } \bar{\omega}} \quad (2.78)$$

2.4 Kompatibilitätsbedingungen

In diesem Kapitel werden Kompatibilitätsbedingungen (Verträglichkeitsbedingungen) entwickelt, die von den Deformationsmaßen erfüllt werden müssen, damit überhaupt eine Bewegungsfunktion existiert, aus der die Deformationsmaße hergeleitet werden können. In der klassischen Kontinuumsmechanik haben die Kompatibilitätsbedingungen eine eher untergeordnete Rolle, da die Bewegungsfunktion gegeben ist und die daraus abgeleiteten Deformationsmaße die Kompatibilitätsbedingungen somit auf jeden Fall erfüllen. Die Bedeutung der Verträglichkeitsbedingungen für die mikropolare Theorie zeigt sich erst im Falle von elastisch-plastischem Materialverhalten, da hier einige Kompatibilitätsaussagen im Gegensatz zur Theorie nicht-polarer Materialien einen entscheidenden Einfluß auf die Formulierung von Evolutionsgleichungen haben, vgl. Kapitel 2.6.

Mit Hilfe der *Schwarzschen* Vertauschungsregel für partielle Ableitungen können die folgenden Symmetrieeigenschaften der Deformationsgradienten zweiten Grades gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \overset{3}{\mathbf{G}} &= \text{grad } \mathbf{F}^{-1} = - \text{grad grad } \mathbf{u} = (\text{grad } \mathbf{F}^{-1})^{\overset{23}{T}}, \\ {}^R\overset{3}{\mathbf{G}} &= \text{Grad } \mathbf{F} = \text{Grad Grad } \mathbf{u} = (\text{Grad } \mathbf{F})^{\overset{23}{T}}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Ein allgemeiner Weg zur Definition von höheren Gradienten ist die Einführung der sogenannten Gruppe linearer Abbildungen zweiten Grades \mathcal{L} (vgl. *Cross* [16] und *Ehlers* [25]). \mathcal{L} ist mit Hilfe von gruppentheoretischen Überlegungen definiert und beinhaltet Paare von Tensoren

$$\mathcal{L} = \{(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}})\} \quad \text{mit} \quad \overset{3}{\mathbf{C}} = \overset{3}{\mathbf{C}}^{\overset{23}{T}}, \quad (2.80)$$

ohne zu fordern, daß \mathbf{H} ein Definitionsgradient oder $\overset{3}{\mathbf{C}}$ der Gradient von \mathbf{H} ist. Mit (2.80) ist ersichtlich, daß die Paare $(\mathbf{F}, {}^R\overset{3}{\mathcal{G}})$ sowie $(\mathbf{F}^{-1}, \overset{3}{\mathcal{G}})$ mit den Definitionen

$$\begin{aligned} {}^R\overset{3}{\mathcal{G}} &= {}^R\overset{3}{\mathcal{G}}^{\overset{23}{T}} := (\mathbf{F}^{-1} \text{Grad } \mathbf{F})^{\overset{3}{\mathcal{G}}} = (\gamma_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i) \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}^j \otimes \mathbf{h}^k, \\ \overset{3}{\mathcal{G}} &= \overset{3}{\mathcal{G}}^{\overset{23}{T}} := -(\mathbf{F} \text{grad } \mathbf{F}^{-1})^{\overset{3}{\mathcal{G}}} = (\gamma_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i) \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^j \otimes \mathbf{a}^k \end{aligned} \quad (2.81)$$

Elemente von \mathcal{L} sind. $\overset{3}{\mathcal{G}}$ entsteht aus dem kovarianten Vorwärtstransport des ersten Basisvektors von $\overset{3}{\mathbf{G}}$ auf die aktuelle Konfiguration, und ${}^R\overset{3}{\mathcal{G}}$ wird durch den kovarianten Rückwärtstransport des ersten Basisvektors von ${}^R\overset{3}{\mathbf{G}}$ gebildet. Somit haben $\overset{3}{\mathcal{G}}$ und ${}^R\overset{3}{\mathcal{G}}$ nicht mehr die Eigenschaft eines Zweifeldtensors, da alle Basisvektoren jeweils der gleichen Konfiguration entstammen. Mit Hilfe der Gleichungen (2.37), (2.43), (2.45) und der Rechenregel (2.59) können die folgenden Ausdrücke aus (2.81) hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} {}^R\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}} - ({}^R\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}})^T &= [\mathbf{F}^{-1}(\text{Grad } \bar{\mathbf{V}})^T \bar{\mathbf{R}}]^{\mathfrak{z}} - [\mathbf{F}^{-1}(\text{Grad } \bar{\mathbf{V}})^T \bar{\mathbf{R}}]^{\mathfrak{z} T}, \\ \overset{3}{\bar{\mathcal{K}}} - (\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}})^T &= -[\mathbf{F}(\text{grad } \bar{\mathbf{U}}^{-1})^T \bar{\mathbf{R}}^T]^{\mathfrak{z}} + [\mathbf{F}(\text{grad } \bar{\mathbf{U}}^{-1})^T \bar{\mathbf{R}}^T]^{\mathfrak{z} T}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Die Transporte von (2.82)₁ auf die $\bar{\mathbf{V}}$ -Konfiguration und von (2.82)₂ auf die $\bar{\mathbf{U}}$ -Konfiguration ergeben die folgenden Kompatibilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}} - (\bar{\mathbf{V}}\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}})^T &= [\bar{\mathbf{V}}^{-1}(\text{grad}_{\bar{\mathbf{V}}} \bar{\mathbf{V}})^T]^{\mathfrak{z}} - [\bar{\mathbf{V}}^{-1}(\text{grad}_{\bar{\mathbf{V}}} \bar{\mathbf{V}})^T]^{\mathfrak{z} T}, \\ \bar{\mathbf{U}}\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}} - (\bar{\mathbf{U}}\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}})^T &= -[\bar{\mathbf{U}}(\text{Grad}_{\bar{\mathbf{U}}} \bar{\mathbf{U}}^{-1})^T]^{\mathfrak{z}} + [\bar{\mathbf{U}}(\text{Grad}_{\bar{\mathbf{U}}} \bar{\mathbf{U}}^{-1})^T]^{\mathfrak{z} T}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Die Gleichungen (2.82) bzw. (2.83) sind Tensorgleichungen dritter Stufe, die im allgemeinen jeweils aus 27 skalaren Gleichungen bestehen. Wegen der speziellen Form von (2.82) und (2.83) verschwinden die symmetrischen Anteile bezüglich des zweiten und dritten Basisvektors, so daß nur neun skalare Gleichungen voneinander unabhängig sind. Einsetzen von (2.63) z. B. in (2.83) und Auflösen nach $\bar{\mathbf{V}}\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}}$ bzw. $\bar{\mathbf{U}}\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}}$ ergibt folgende Krümmungs-Verzerrungs-Relationen:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}} &= \frac{1}{2}\{\overset{3}{\mathbf{E}} [\bar{\mathbf{V}}\overset{3}{\bar{\mathbf{V}}} + (\bar{\mathbf{V}}\overset{3}{\bar{\mathbf{V}}})^T - (\bar{\mathbf{V}}\overset{3}{\bar{\mathbf{V}}})^T]\}^{\mathfrak{z}}, \\ \bar{\mathbf{U}}\overset{3}{\bar{\mathcal{K}}} &= \frac{1}{2}\{\overset{3}{\mathbf{E}} [\bar{\mathbf{U}}\overset{3}{\bar{\mathbf{U}}} + (\bar{\mathbf{U}}\overset{3}{\bar{\mathbf{U}}})^T - (\bar{\mathbf{U}}\overset{3}{\bar{\mathbf{U}}})^T]\}^{\mathfrak{z}}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Der Beweis der Gültigkeit der Beziehung (2.84) ist im Anhang A.3 gegeben. Weiterhin repräsentieren $\bar{\mathbf{V}}\overset{3}{\bar{\mathbf{V}}}$ den Verzerrungsgradienten von $\bar{\mathbf{K}}$, der auf die $\bar{\mathbf{V}}$ -Konfiguration transportiert wurde und $\bar{\mathbf{U}}\overset{3}{\bar{\mathbf{U}}}$ den Verzerrungsgradienten von ${}^R\bar{\mathbf{K}}$ nach Transport auf die $\bar{\mathbf{U}}$ -Konfiguration:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}\overset{3}{\bar{\mathbf{V}}} &:= [\bar{\mathbf{V}}^{-1} \text{grad}_{\bar{\mathbf{V}}} \bar{\mathbf{V}}]^{\mathfrak{z}} = [\bar{\mathbf{V}}^{-1} \text{grad}_{\bar{\mathbf{V}}} \bar{\mathbf{K}}]^{\mathfrak{z}}, \\ \bar{\mathbf{U}}\overset{3}{\bar{\mathbf{U}}} &:= -[\bar{\mathbf{U}} \text{Grad}_{\bar{\mathbf{U}}} \bar{\mathbf{U}}^{-1}]^{\mathfrak{z}} = [\bar{\mathbf{U}} \text{Grad}_{\bar{\mathbf{U}}} {}^R\bar{\mathbf{K}}]^{\mathfrak{z}}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Ersetzt man in (2.84) die zweistufigen Krümmungstensoren durch ihre ursprünglichen Definitionen (2.45) und (2.63), dann erhält man die mikropolaren Kompatibilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}^3 (\bar{\mathbf{R}} \text{ grad}_{\bar{\mathbf{v}}} \bar{\mathbf{R}}^T)^{\mathbb{Z}}]^2 &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}^3 [\bar{\mathbf{v}}^{\mathbb{3}} \bar{\mathbf{V}} + (\bar{\mathbf{v}}^{\mathbb{3}} \bar{\mathbf{V}})^{13} - (\bar{\mathbf{v}}^{\mathbb{3}} \bar{\mathbf{V}})^{23}] \}^2, \\ -[\mathbf{E}^3 (\bar{\mathbf{R}}^T \text{ Grad}_{\bar{\mathbf{v}}} \bar{\mathbf{R}})^{\mathbb{Z}}]^2 &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}^3 [\bar{\mathbf{v}}^{\mathbb{3}} \bar{\mathbf{U}} + (\bar{\mathbf{v}}^{\mathbb{3}} \bar{\mathbf{U}})^{13} - (\bar{\mathbf{v}}^{\mathbb{3}} \bar{\mathbf{U}})^{23}] \}^2. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Die Kompatibilitätsbedingungen (2.86) fassen die Schiefsymmetrie der dreistufigen Krümmungstensoren und die Symmetrie der Deformationsgradienten zweiten Grades zusammen. Für eine weitere mikropolare Kompatibilitätsbedingung wird die Tatsache ausgenutzt, daß die Krümmungstensoren aus dem Gradienten der *Cosserat*-Rotation $\bar{\mathbf{R}}$ hergeleitet werden und somit gilt:

$$\begin{aligned} \text{Rot } {}^R \bar{\mathcal{K}} &= \mathbf{0}, \\ \text{rot } \bar{\mathcal{K}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Darin sind die Operatoren „Rot (\cdot)“ und „rot (\cdot)“ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \text{Rot } (\cdot) &= \{ \mathbf{E}^3 [\text{Grad } (\cdot)]^T \}^2, \\ \text{rot } (\cdot) &= \{ \mathbf{E}^3 [\text{grad } (\cdot)]^T \}^2. \end{aligned} \quad (2.88)$$

2.5 Geometrisch lineare Darstellung

Die kinematischen Relationen in einer geometrisch linearen Darstellung können aus den nicht-linearen Gleichungen durch formale Linearisierung gewonnen werden. Dies geschieht durch eine *Taylor*-Reihen-Entwicklung mit Abbruch nach dem linearen Glied unter Annahme kleiner Verschiebungsgradienten \mathbf{H} (\mathbf{J}) sowie kleiner Rotationen $\bar{\varphi} = \bar{\varphi} \bar{\mathbf{e}}$ und kleiner Rotationsgradienten $\text{Grad } \bar{\varphi}$ ($\text{grad } \bar{\varphi}$). Die Gradienten bezüglich der aktuellen Konfiguration sind jeweils in Klammern geschrieben, da im Rahmen einer geometrisch linearen Darstellung „Grad (\cdot)“ und „grad (\cdot)“ zusammenfallen. Der Unterschied würde erst im quadratischen Glied der *Taylor*-Reihen-Entwicklung auftreten und kann somit vernachlässigt werden. Im folgenden wird daher im geometrisch Linearen nur noch „grad (\cdot)“ für den Gradienten verwendet. Der materielle und der räumliche Verschiebungsgradient sind daher ungefähr gleich:

$$\mathbf{H} \approx \mathbf{J} = \text{grad } \mathbf{u}. \quad (2.89)$$

2.5.1 Formale Linearisierung

Zur Linearisierung des *Cosserat*-Rotationstensors $\bar{\mathbf{R}}$ ist es hilfreich, von der *Euler-Rodrigues*-Formel (2.35)₁ auszugehen und eine Entwicklung um den Punkt $\bar{\varphi} = 0$ vorzunehmen:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{R}}_{\text{lin.}} &= \bar{\mathbf{R}} \Big|_{\bar{\varphi}=0} + \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \bar{\varphi}} \Big|_{\bar{\varphi}=0} \bar{\varphi}, \\ &= \mathbf{I} + (\bar{\mathbf{e}} \times \mathbf{I}) \bar{\varphi} = \mathbf{I} + (\bar{\varphi} \times \mathbf{I}) = \mathbf{I} - \overset{3}{\mathbf{E}} \bar{\varphi}, \\ \bar{\mathbf{R}}_{\text{lin.}}^T &= \mathbf{I} - (\bar{\mathbf{e}} \times \mathbf{I}) \bar{\varphi} = \mathbf{I} - (\bar{\varphi} \times \mathbf{I}) = \mathbf{I} + \overset{3}{\mathbf{E}} \bar{\varphi}.\end{aligned}\tag{2.90}$$

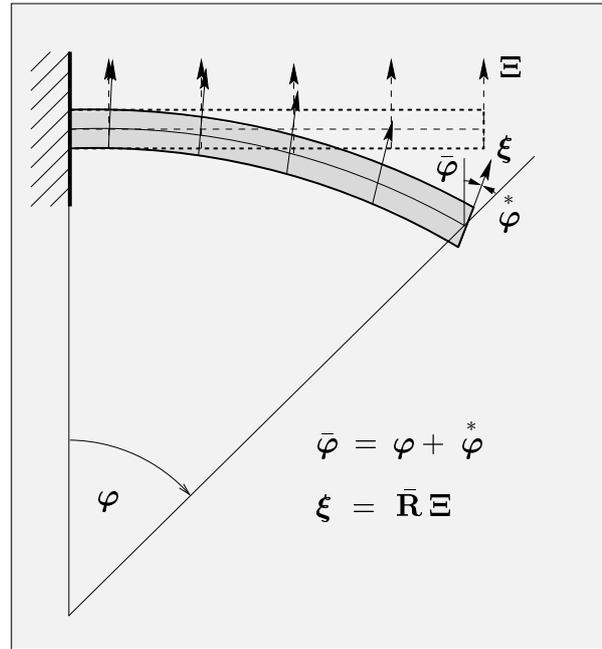
Die Linearisierung der Verzerrungsmaße $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{A}}$, ${}^R\bar{\mathbf{K}}$ und $\bar{\mathbf{K}}$ ergibt jeweils das lineare, unsymmetrische *Cosserat*-Verzerrungsmaß $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und sei exemplarisch für $\bar{\mathbf{E}}$ gezeigt:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}_{\text{lin.}} &= \bar{\mathbf{E}} \Big|_{\substack{\bar{\varphi}=0, \\ \mathbf{H}=0}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \bar{\varphi}} \Big|_{\substack{\bar{\varphi}=0, \\ \mathbf{H}=0}} \bar{\varphi} + \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{H}} \Big|_{\substack{\bar{\varphi}=0, \\ \mathbf{H}=0}} \mathbf{H} \\ &= \mathbf{0} + \overset{3}{\mathbf{E}} \bar{\varphi} + \mathbf{H} =: \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}.\end{aligned}\tag{2.91}$$

Die symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteile von $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ergeben:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{sym}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{skw}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}^T) + \overset{3}{\mathbf{E}} \bar{\varphi} = \overset{3}{\mathbf{E}} (\bar{\varphi} - \varphi) = \overset{3}{\mathbf{E}} \varphi^*.\end{aligned}\tag{2.92}$$

Man beachte, daß die in (2.92) verwendete Addition von Winkelvektoren nur in der geometrisch linearen Theorie zulässig ist. Weiterhin kann $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{sym}}$ mit dem linearen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ der nicht-polaren Theorie identifiziert werden, während $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{skw}}$ ein tensorielles Maß für den Einfluß der zusätzlichen Rotation φ^* auf das linearisierte Verzerrungsmaß darstellt (vgl. *Ehlers & Volk* [36, 39]). Der verwendete Kontinuumsrotationsvektor φ entspricht dem axialen Vektor des Verschiebungsgradienten \mathbf{H} . Die physikalische Bedeutung der drei verschiedenen Rotationsvektoren kann z. B. mit Hilfe eines *Timoschenko*-Balkens verdeutlicht werden (vgl. *Günther* [43]):


Bild 2.5: Rotationsvektoren

Die Verdrehung der Mittelachse des Balkens ist abhängig von der Verschiebung des Balkens und entspricht somit der Kontinuumsrotation φ . Nun können sich die Querschnitte, in deren Ebene die Direktoren Ξ und ξ liegen, noch zusätzlich gegen die Mittelachse mit dem freien Rotationsvektor φ^* verdrehen, so daß ξ nicht mehr rechtwinklig zur Balkenmittellachse ist. Im Rahmen der geometrisch linearen Theorie können die Rotationsvektoren zur Gesamttrotation $\bar{\varphi}$ der Querschnitte summiert werden.

Die Linearisierung der dreistufigen Krümmungstensoren ergibt genau wie bei den Verzerrungstensoren jeweils das gleiche Ergebnis.

Die Linearisierung wird beispielhaft für ${}^R\bar{\mathcal{K}}^3$ durchgeführt:

$$\begin{aligned}
 {}^R\bar{\mathcal{K}}_{\text{lin.}}^3 &= {}^R\bar{\mathcal{K}}^3 \Big|_{\bar{\varphi}=0} + \bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial(\text{Grad } \bar{\mathbf{R}})}{\partial \bar{\varphi}} \Big|_{\bar{\varphi}=0} \bar{\varphi} + \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^T}{\partial \bar{\varphi}} \text{Grad } \bar{\mathbf{R}} \Big|_{\bar{\varphi}=0} \bar{\varphi} \\
 &= \mathbf{0}^3 - \text{grad}({}^3\bar{\mathbf{E}} \bar{\varphi}) + \mathbf{0}^3 \quad (2.93) \\
 &= -({}^3\bar{\mathbf{E}} \text{grad } \bar{\varphi})^3.
 \end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis (2.93) kann direkt das Ergebnis der Linearisierung für die zwei-stufigen Krümmungstensoren ${}^R\bar{\mathcal{K}}$, ${}^V\bar{\mathcal{K}}$, ${}^U\bar{\mathcal{K}}$ und $\bar{\mathcal{K}}$ bestimmt werden, z. B.:

$${}^R\bar{\mathcal{K}}_{\text{lin.}} = \frac{1}{2} ({}^3\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}})^2 \text{grad } \bar{\varphi} = \text{grad } \bar{\varphi} =: \bar{\kappa}. \quad (2.94)$$

$\bar{\kappa}$ ist der aus der Literatur bekannte lineare *Cosserat*-Krümmungstensor.

2.5.2 Geometrisch lineare Kompatibilitätsbedingungen

Die geometrisch nicht-linearen Kompatibilitätsbedingungen erhalten in einer geometrisch linearen Darstellung eine deutlich einfachere Form. Es läßt sich zeigen, daß der linearisierte Krümmungstensor $\bar{\kappa}$ als Funktion des linearisierten Verzerrungsgradienten $\text{grad } \bar{\varepsilon}$ darstellbar ist.

Mit den Gleichungen (2.90) - (2.94) erhält man als Linearisierung von (2.82) oder (2.83) jeweils den folgenden Ausdruck:

$$\text{grad } \bar{\varepsilon} - \text{grad}^T \bar{\varepsilon} = (\mathbf{E} \bar{\kappa})^{\underline{3}} - (\mathbf{E} \bar{\kappa})^{\underline{3}T}. \quad (2.95)$$

Diese Gleichung wurde in Indexnotation bereits von *Nowacki* [63] als Kompatibilitätsbedingung der unsymmetrischen Elastizitätstheorie veröffentlicht. Mit einem Vorgehen analog zur geometrisch nicht-linearen Theorie kann (2.95) nach $\bar{\kappa}$ aufgelöst werden (*Ehlers & Volk* [39]):

$$\boxed{\bar{\kappa} = \frac{1}{2} \mathbf{E} (\text{grad } \bar{\varepsilon} + \text{grad}^T \bar{\varepsilon} - \text{grad}^T \bar{\varepsilon})^{\underline{2}}}. \quad (2.96)$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, daß in der geometrisch linearen Theorie der Krümmungstensor $\bar{\kappa}$ eine reine Funktion des Verzerrungsgradienten $\text{grad } \bar{\varepsilon}$ ist.

Die Linearisierung der Kompatibilitätsbedingung (2.87)₁ oder (2.87)₂ ergibt:

$$\text{rot } \bar{\kappa} = \mathbf{0}. \quad (2.97)$$

Mit (2.96) kann man zeigen, daß die Bedingung (2.97) äquivalent zu den *Beltrami-Mitchell*-Kompatibilitätsbedingungen der nicht-polaren linearen Kontinuumsmechanik ist:

$$\text{rot rot } \varepsilon = \text{rot rot } \bar{\varepsilon}_{\text{sym}} = \mathbf{0}. \quad (2.98)$$

Zusammenfassend bedeutet dies, daß für einen beliebigen Verzerrungstensor $\bar{\varepsilon}$ und Krümmungstensor $\bar{\kappa}$ die Kompatibilitätsbedingungen (2.96) sowie (2.97) erfüllt sein müssen, so daß ein Primärvariablensatz (bestehend aus \mathbf{u} und $\bar{\varphi}$) existiert, aus dem $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\kappa}$ gebildet werden können.

2.6 Elasto-Plastizität

2.6.1 Multiplikative Zerlegungen, Zwischenkonfigurationen

Die Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens bei großen Deformationen beginnt mit der Annahme einer multiplikativen Aufspaltung des Deformationsgradienten \mathbf{F} und des *Cosserat*-Rotationstensors $\bar{\mathbf{R}}$ in einen elastischen und einen plastischen Anteil (*Steinmann* [76]):

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &:= \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p, \\ \bar{\mathbf{R}} &:= \bar{\mathbf{R}}_e \bar{\mathbf{R}}_p.\end{aligned}\tag{2.99}$$

Die Aufspaltung des Deformationsgradienten wird in einer für nicht-polare Materialien üblichen Art durchgeführt (siehe z. B. *Ehlers* [26] oder *Haupt* [48]), um die Abwärtskompatibilität zum klassischen Zwischenkonfigurationskonzept zu gewährleisten. Die Motivation der multiplikativen Zerlegung von $\bar{\mathbf{R}}$ basiert auf der Tatsache, daß $\bar{\mathbf{R}}$ in Analogie zu \mathbf{F} die Abbildung der Direktoren von der Referenzkonfiguration auf die aktuellen Konfiguration beschreibt (siehe Kapitel 2.3).

Die multiplikative Zerlegung entspricht allgemein einer Hintereinanderausführung von zwei unabhängigen Abbildungen, so daß eine Zwischenkonfiguration eingeführt werden kann, die für die plastische Abbildung \mathbf{F}_p den Status einer aktuellen Konfiguration besitzt und für die elastische Abbildung \mathbf{F}_e als Referenzkonfiguration dient. In Erweiterung der Standardtheorie werden infolge der Zerlegung (2.99)₂ zusätzlich eine $\bar{\mathbf{U}}$ -Zwischenkonfiguration und eine $\bar{\mathbf{V}}$ -Zwischenkonfiguration eingeführt, vgl. Bild 2.6.

Mit den Standardargumenten der Materialtheorie kann gezeigt werden, daß die Zwischenkonfiguration spannungsfrei bezüglich des symmetrischen Anteils des Spannungstensors \mathbf{T} ist. Der Spannungstensor, der die arbeitskonjugierte Größe zu den elastischen Verzerrungen darstellt, ist für mikropolare Materialien im allgemeinen nicht-symmetrisch, denn die mikropolaren Verzerrungstensoren enthalten keinerlei Symmetrieeigenschaften. Die Momentenspannungen \mathbf{M} sind die arbeitskonjugierte Größe zu den elastischen Krümmungen, und die multiplikative Aufspaltung von $\bar{\mathbf{R}}$ führt zur Aussage, daß die $\bar{\mathbf{U}}$ -Zwischenkonfiguration und $\bar{\mathbf{V}}$ -Zwischenkonfiguration jeweils momentenspannungsfrei sind.

Für nicht-polare Materialien ist die multiplikative Aufspaltung des Deformationsgradienten lokal nicht-eindeutig bezüglich einer Multiplikation mit einem beliebigen orthogonalen Tensor \mathbf{Q} (vgl. z. B. *Haupt* [48] oder das Übersichtswerk von *Khan & Huang* [52]), da die abgeleiteten Spannungsmaße unabhängig von \mathbf{Q} sind:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p = \underbrace{\mathbf{F}_e \mathbf{Q}^T}_{\tilde{\mathbf{F}}_e} \underbrace{\mathbf{Q} \mathbf{F}_p}_{\tilde{\mathbf{F}}_p} = \tilde{\mathbf{F}}_e \tilde{\mathbf{F}}_p.\tag{2.100}$$

Mit der Forderung, daß für mikropolare Materialien rein elastische und rein plastische Deformationsmaße existieren,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{U}}_p &:= \bar{\mathbf{R}}_p^T \mathbf{F}_p = (\bar{\mathbf{U}}_p)^i_j \bar{\mathbf{h}}_i \otimes \mathbf{h}^j; & (\bar{\mathbf{U}}_p)^i_j &= \hat{\mathbf{h}}^i \cdot \hat{\mathbf{h}}_j, \\
\bar{\mathbf{U}}_e &:= \bar{\mathbf{R}}_e^T \mathbf{F}_e = \delta_j^i \hat{\mathbf{h}}_i \otimes \hat{\mathbf{h}}^j, \\
\bar{\mathbf{V}}_p &:= \mathbf{F}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T = \delta_j^i \hat{\mathbf{h}}_i \otimes \hat{\mathbf{a}}^j, \\
\bar{\mathbf{V}}_e &:= \mathbf{F}_e \bar{\mathbf{R}}_e^T = (\bar{\mathbf{V}}_e)^i_j \mathbf{a}_i \otimes \bar{\mathbf{a}}^j; & (\bar{\mathbf{V}}_e)^i_j &= \hat{\mathbf{h}}^i \cdot \hat{\mathbf{a}}_j,
\end{aligned} \tag{2.101}$$

werden für mikropolare Materialien die multiplikativen Aufspaltungen (2.99) lokal eindeutig (eindeutig bis auf eine Starrkörperbewegung). Dies bedeutet, daß die lokale Eindeutigkeit für mikropolare Materialien erst durch die zusätzliche Forderung der Momentenspannungsfreiheit und der Spannungsfreiheit bezüglich des schiefssymmetrischen Anteils des Spannungstensors auf der Zwischenkonfiguration gegeben ist.

Nach einer beliebigen elastisch-plastischen Deformation kann die Spannungs- bzw. Momentenspannungsfreiheit nicht durch einfaches Entlasten erreicht werden (Existenz von Eigenspannungen). Vielmehr ist es notwendig, den Körper durch beliebig viele Schnitte in lokal entlastete Teilkörper zu zerschneiden.

Es ist bekannt, daß die Zwischenkonfiguration inkompatibel bezüglich des Verschiebungsfeldes ist, so daß \mathbf{F}_e und \mathbf{F}_p nicht zu einem elastischen bzw. plastischen Verschiebungsvektor integriert werden können (siehe z. B. *Haupt* [48]). Anschaulich bedeutet diese Inkompatibilität, daß der Entlastungsvorgang der Teilkörper zu einer Verformung führt, so daß diese im entlasteten Zustand nicht mehr zusammenpassen und sich unter Umständen sogar überlappen. Folglich ist es auf der Zwischenkonfiguration im allgemeinen nicht möglich, die Teilkörper zu einem Gesamtkörper zusammenzusetzen. Etwas anders verhält es sich mit der Zerschneidung der $\bar{\mathbf{U}}$ -Zwischenkonfiguration bzw. der $\bar{\mathbf{V}}$ -Zwischenkonfiguration, da $\bar{\mathbf{R}}_e$ und $\bar{\mathbf{R}}_p$ genau wie $\bar{\mathbf{R}}$ eigentlich orthogonale Tensoren sind. Somit geschieht die Entlastung lediglich durch Drehung der Direktoren, und die Geometrie der Konfiguration bleibt unverändert. Es ist jedoch möglich, daß das Rotationsfeld nach dem Entlasten unstetig über die Schnitte ist.

Der Zerteilungsprozeß führt zu mathematischen Schwierigkeiten bei der Formulierung der Differentialoperatoren auf den Zwischenkonfigurationen. Nachfolgend werden lokale Differentialoperatoren am Beispiel der multiplikativen Aufspaltung von \mathbf{F} definiert:

1. Durch den Zerteilungsprozeß wird der Gesamtkörper \mathcal{B} in beliebig viele offene Teilkörper \mathcal{B}_i zerteilt, die jeweils ein Volumen größer null haben.
2. Die Abschließung eines \mathcal{B}_i wird mit $\bar{\mathcal{B}}_i$ bezeichnet.
3. Die Teilkörper \mathcal{B}_i sind auf der Referenzkonfiguration sowie der aktuellen Konfiguration disjunkt.

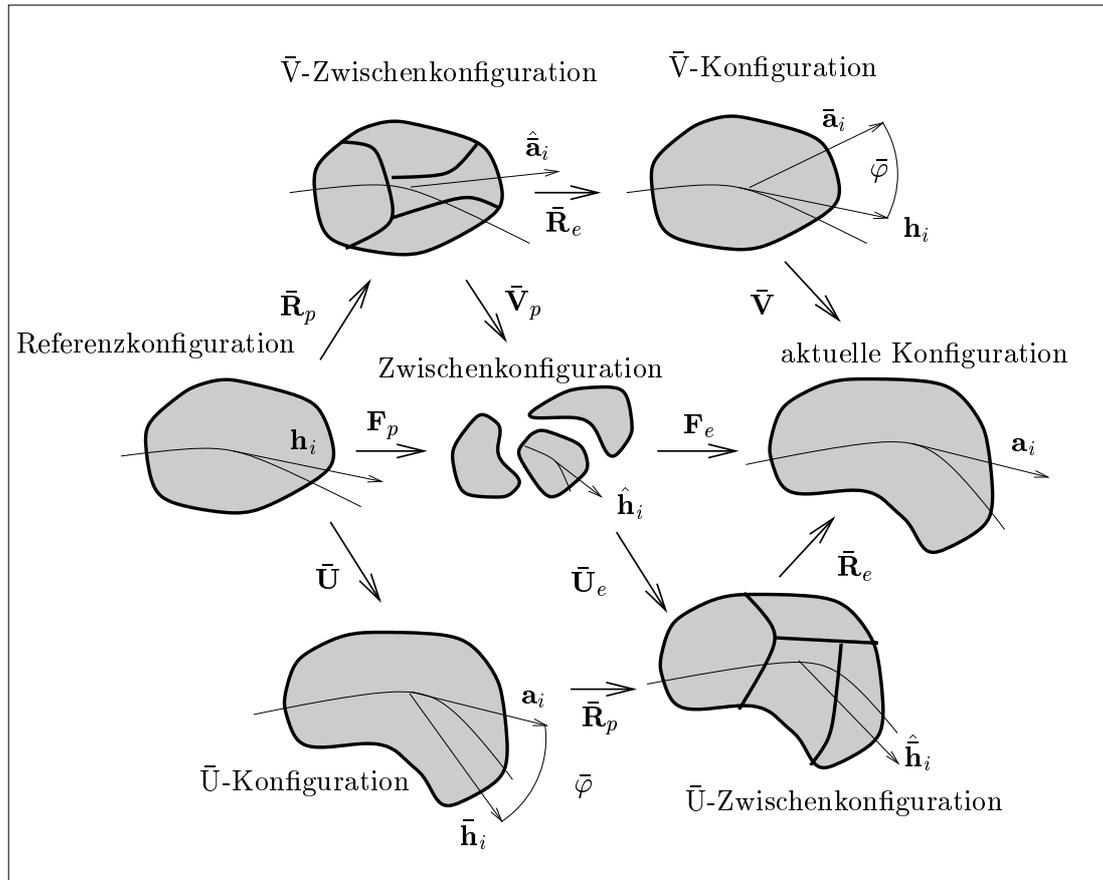


Bild 2.6: Konfigurationen der elastisch-plastischen Formulierung

4. Die Vereinigung der $\bar{\mathcal{B}}_i$ ist eine Überdeckung des Gesamtkörpers \mathcal{B} .
5. Die Teilkörper $\bar{\mathcal{B}}_i$ sind auf der Zwischenkonfiguration spannungsfrei.
6. Zu jedem materiellen Punkt $X \in \bar{\mathcal{B}}_i$ existiert eine nicht-leere Umgebung \mathcal{U}_X , die in $\bar{\mathcal{B}}_i$ enthalten ist und deren Schnitt mit \mathcal{B}_i nicht-leer ist.
7. Die Differentialoperatoren sind nur auf dem Teilkörper $\bar{\mathcal{B}}_i$ definiert, in den X und \mathcal{U}_X abgebildet werden.
8. Liegt X auf dem Rand von $\bar{\mathcal{B}}_i$, dann sind halbseitige Differentialoperatoren zugelassen.

Eine Bemerkung zu Punkt 6: Erst durch die Wahl der Umgebung \mathcal{U}_X wird die Abbildung für Punkte X , die direkt auf einem Schnitt liegen, eindeutig, da diese durch die Abschließung von \mathcal{B}_i zu beiden angrenzenden Teilkörpern gehören. Dies bedeutet auch, daß z. B. der Gradient an diesen Punkten unterschiedliche Werte haben

kann. Dies ist vergleichbar mit den halbseitigen Gradienten einer Funktion mit einem Knick. Da die Überdeckung aus Punkt 4 mit abgeschlossenen Mengen geschieht, muß die Zwischenkonfiguration als Ganzes nicht metrisierbar sein, wohl jedoch die Teilkörper $\bar{\mathcal{B}}_i$. Somit ist auch von mathematischer Sicht einsichtig, daß kein plastisches Verschiebungsfeld existiert und die Differentialoperatoren ausschließlich lokalen Charakter haben, da sie nur auf einem Teilkörper $\bar{\mathcal{B}}_i$ definiert werden können.

Es kann sein, daß die gestellten Forderungen hinreichend, aber nicht notwendig für die Definition der Differentialoperatoren sind. Es ist nicht Ziel der vorliegenden Arbeit, die mathematischen Konsequenzen im Detail zu diskutieren, vielmehr werden die bereits sehr weitreichenden Konsequenzen der multiplikativen Zerlegungen (2.99) auf die Kinematik diskutiert, und es wird in Kapitel 4 gezeigt, daß die numerische Simulation mit der Methode der finiten Elemente und die obigen Annahmen sehr gut zusammenpassen. Die Gradienten bezüglich der Zwischenkonfiguration sind somit lokale oder Pseudogradienten und werden im folgenden mit $\text{grad}_Z(\cdot)$ bezeichnet. Aufgrund der Tatsache, daß \mathbf{F}_p und \mathbf{F}_e^{-1} weiterhin die Abbildung eines Linienelements auf die Zwischenkonfiguration beschreiben, sind die Paare $(\mathbf{F}_p^{-1}, \text{grad}_Z \mathbf{F}_p^{-1})$ sowie $(\mathbf{F}_e, \text{grad}_Z \mathbf{F}_e)$ Elemente der linearen Gruppe \mathcal{L} (vgl. Ehlers [25, 26]).

Entsprechende Überlegungen für die multiplikative Zerlegung von $\bar{\mathbf{R}}$ führen zur Definition der Pseudogradienten $\text{Grad}_{\bar{U}Z}(\cdot)$ für die \bar{U} -Zwischenkonfiguration und $\text{grad}_{\bar{V}Z}(\cdot)$ für die \bar{V} -Zwischenkonfiguration. Zusammenfassend lassen sich die folgenden Gleichungen für die genannten Pseudogradienten angeben:

$$\begin{aligned} [\text{grad}_Z(\cdot)]^i &= [\text{Grad}(\cdot)\mathbf{F}_p^{-1}]^i = [\text{grad}(\cdot)\mathbf{F}_e]^i, \\ [\text{grad}_{\bar{V}Z}(\cdot)]^i &= [\text{Grad}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_p^T]^i = [\text{grad}_{\bar{V}}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_e]^i, \\ [\text{Grad}_{\bar{U}Z}(\cdot)]^i &= [\text{Grad}_{\bar{U}}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_p^T]^i = [\text{grad}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_e]^i. \end{aligned} \quad (2.102)$$

2.6.2 Additive Aufspaltung der Verzerrungsmaße

Die Abbildungen der Verzerrungsmaße (2.42) und (2.44) können mit (2.99) als eine Hintereinanderausführung von einer rein plastischen und einer rein elastischen Abbildung aufgefaßt werden (siehe auch Bild 2.6):

$$\bar{\mathbf{E}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}_p(\cdot)\mathbf{F}_p^{-1}} \\ \xleftarrow{\bar{\mathbf{R}}_p^T(\cdot)\mathbf{F}_p} \end{array} \hat{\mathbf{\Gamma}} = \bar{\mathbf{U}}_e - \bar{\mathbf{V}}_p^{-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}_e(\cdot)\mathbf{F}_e^{-1}} \\ \xleftarrow{\bar{\mathbf{R}}_e^T(\cdot)\mathbf{F}_e} \end{array} \bar{\mathbf{A}}, \quad (2.103)$$

$${}^R\bar{\mathbf{K}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}_p(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_p^T} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}_p^{-1}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_p} \end{array} \hat{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{V}}_p - \bar{\mathbf{U}}_e^{-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}_e(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_e^T} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}_e^{-1}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_e} \end{array} \bar{\mathbf{K}}. \quad (2.104)$$

Aus (2.103) und (2.104) ist ersichtlich, daß sich die Verzerrungsmaße $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ und $\hat{\mathbf{K}}$ additiv in einen elastischen und plastischen Anteil aufspalten:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{\Gamma}} &= \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_p, \\ \hat{\mathbf{K}} &= \hat{\mathbf{K}}_e + \hat{\mathbf{K}}_p.\end{aligned}\quad (2.105)$$

Darin sind

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{\Gamma}}_e &= \bar{\mathbf{U}}_e - \mathbf{I}, & \hat{\mathbf{\Gamma}}_p &= \mathbf{I} - \bar{\mathbf{V}}_p^{-1}, \\ \hat{\mathbf{K}}_e &= \mathbf{I} - \bar{\mathbf{U}}_e^{-1}, & \hat{\mathbf{K}}_p &= \bar{\mathbf{V}}_p - \mathbf{I}.\end{aligned}\quad (2.106)$$

Die Abbildungsvorschriften aus (2.103) und (2.104) liefern bei Anwendung auf $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e$ und $\hat{\mathbf{\Gamma}}_p$ ebenfalls additive Aufspaltungen für $\bar{\mathbf{E}}$ und $\bar{\mathbf{A}}$:

$$\bar{\mathbf{E}}_e \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}_p(\cdot)\mathbf{F}_p^{-1}} \\ \xleftarrow{\bar{\mathbf{R}}_p^T(\cdot)\mathbf{F}_p} \end{array} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}_e(\cdot)\mathbf{F}_e^{-1}} \\ \xleftarrow{\bar{\mathbf{R}}_e^T(\cdot)\mathbf{F}_e} \end{array} \bar{\mathbf{A}}_e, \quad (2.107)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_p \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}_p(\cdot)\mathbf{F}_p^{-1}} \\ \xleftarrow{\bar{\mathbf{R}}_p^T(\cdot)\mathbf{F}_p} \end{array} \hat{\mathbf{\Gamma}}_p \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}_e(\cdot)\mathbf{F}_e^{-1}} \\ \xleftarrow{\bar{\mathbf{R}}_e^T(\cdot)\mathbf{F}_e} \end{array} \bar{\mathbf{A}}_p, \quad (2.108)$$

Man kann sich mit den Gleichungen (2.107) und (2.108) leicht davon überzeugen, daß die folgenden Beziehungen Gültigkeit haben:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= \bar{\mathbf{E}}_e + \bar{\mathbf{E}}_p, & \bar{\mathbf{E}}_e &= \bar{\mathbf{U}} - \bar{\mathbf{U}}_p, & \bar{\mathbf{E}}_p &= \bar{\mathbf{U}}_p - \mathbf{I}, \\ \bar{\mathbf{A}} &= \bar{\mathbf{A}}_e + \bar{\mathbf{A}}_p, & \bar{\mathbf{A}}_e &= \mathbf{I} - \bar{\mathbf{V}}_e^{-1}, & \bar{\mathbf{A}}_p &= \bar{\mathbf{V}}_e^{-1} - \bar{\mathbf{V}}^{-1}.\end{aligned}\quad (2.109)$$

Aus (2.107) ist zu entnehmen, daß $\bar{\mathbf{E}}_e$ aus dem Zurückziehen der rein elastischen Größe $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e$ von der Zwischenkonfiguration auf die Referenzkonfiguration entsteht. Dieser Transport wird hingegen durch rein plastische Größen gebildet, vgl. Gleichung (2.107), und somit verliert $\bar{\mathbf{E}}_e$ den Charakter einer rein elastischen Größe. Ganz entsprechend kann $\bar{\mathbf{A}}_p$ nicht mehr als rein plastische Größe bezeichnet werden.

Die Anwendung der zugeordneten Transporttheoreme auf die *Karni-Reiner*-Verzerrungstensoren liefert analoge Ergebnisse bezüglich der additiven Aufspaltungen:

$${}^R\bar{\mathbf{K}}_e \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}_p(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_p^T} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}_p^{-1}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_p} \end{array} \hat{\mathbf{K}}_e \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}_e(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_e^T} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}_e^{-1}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_e} \end{array} \bar{\mathbf{K}}_e, \quad (2.110)$$

$$\begin{array}{ccc}
{}^R\bar{\mathbf{K}}_p & \xrightarrow{\mathbf{F}_p(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_p^T} & \hat{\mathbf{K}}_p \\
& \xleftarrow{\mathbf{F}_p^{-1}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_p} & \\
& & \hat{\mathbf{K}}_p \xrightarrow{\mathbf{F}_e(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_e^T} \bar{\mathbf{K}}_p \\
& & \xleftarrow{\mathbf{F}_e^{-1}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_e}
\end{array} \quad (2.111)$$

Darin sind

$$\begin{aligned}
{}^R\bar{\mathbf{K}} &= {}^R\bar{\mathbf{K}}_e + {}^R\bar{\mathbf{K}}_p, & {}^R\bar{\mathbf{K}}_e &= \bar{\mathbf{U}}_p^{-1} - \bar{\mathbf{U}}^{-1}, & {}^R\bar{\mathbf{K}}_p &= \mathbf{I} - \bar{\mathbf{U}}_p^{-1}, \\
\bar{\mathbf{K}} &= \bar{\mathbf{K}}_e + \bar{\mathbf{K}}_p & \bar{\mathbf{K}}_e &= \bar{\mathbf{V}}_e - \mathbf{I}, & \bar{\mathbf{K}}_p &= \bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{V}}_e.
\end{aligned} \quad (2.112)$$

Dies hat zur Folge, daß ${}^R\bar{\mathbf{K}}_e$ und $\bar{\mathbf{K}}_p$ nicht mehr rein elastische bzw. rein plastische Größen sind.

Diese Ergebnisse sind vergleichbar mit den Resultaten der nicht-polaren Elasto-Plastizitätstheorie (vgl. *Ehlers* [26] oder *Haupt & Tsakmakis* [50]).

2.6.3 Additive Aufspaltung der Krümmungstensoren

Um eine Aussage über die Aufspaltung der dreistufigen Krümmungstensoren zu gewinnen, wird die Transformation aus (2.53) ebenfalls in eine Hintereinanderausführung einer rein plastischen und einer rein elastischen Transformation umgeschrieben. Dies führt zur Definition von Krümmungstensoren $\bar{\mathbf{U}} \hat{\mathcal{K}}^3$ auf der $\bar{\mathbf{U}}$ -Zwischenkonfiguration und $\bar{\mathbf{V}} \hat{\mathcal{K}}^3$ auf der $\bar{\mathbf{V}}$ -Zwischenkonfiguration:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{U}} \hat{\mathcal{K}}^3 &= \{\bar{\mathbf{R}}_p [(\bar{\mathbf{U}} \hat{\mathcal{K}}^3)^T \bar{\mathbf{R}}_p^T]^3 \bar{\mathbf{R}}_p^T \}^3 = \{\bar{\mathbf{R}}_e^T [(\hat{\mathcal{K}}^3)^T \bar{\mathbf{R}}_e]^3 \bar{\mathbf{R}}_e \}^3, \\
\bar{\mathbf{V}} \hat{\mathcal{K}}^3 &= \{\bar{\mathbf{R}}_p [(\bar{\mathbf{V}} \hat{\mathcal{K}}^3)^T \bar{\mathbf{R}}_p^T]^3 \bar{\mathbf{R}}_p^T \}^3 = \{\bar{\mathbf{R}}_e^T [(\hat{\mathcal{K}}^3)^T \bar{\mathbf{R}}_e]^3 \bar{\mathbf{R}}_e \}^3.
\end{aligned} \quad (2.113)$$

Man kann leicht zeigen, daß mit (2.113) eine additive Aufspaltung in einen rein plastischen und einen rein elastischen Anteil von $\bar{\mathbf{U}} \hat{\mathcal{K}}^3$ und $\bar{\mathbf{V}} \hat{\mathcal{K}}^3$ folgt:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{U}} \hat{\mathcal{K}}^3 &= \bar{\mathbf{U}} \hat{\mathcal{K}}_e^3 + \bar{\mathbf{U}} \hat{\mathcal{K}}_p^3, \\
\bar{\mathbf{V}} \hat{\mathcal{K}}^3 &= \bar{\mathbf{V}} \hat{\mathcal{K}}_e^3 + \bar{\mathbf{V}} \hat{\mathcal{K}}_p^3.
\end{aligned} \quad (2.114)$$

Für die in (2.114) angegebenen Größen gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{U}} \hat{\mathcal{K}}_e^3 &= (\bar{\mathbf{R}}_e^T \text{Grad}_{\bar{\mathbf{U}}Z} \bar{\mathbf{R}}_e)^3, & \bar{\mathbf{U}} \hat{\mathcal{K}}_p^3 &= -(\bar{\mathbf{R}}_p \text{Grad}_{\bar{\mathbf{U}}Z} \bar{\mathbf{R}}_p^T)^3, \\
\bar{\mathbf{V}} \hat{\mathcal{K}}_e^3 &= (\bar{\mathbf{R}}_e^T \text{grad}_{\bar{\mathbf{V}}Z} \bar{\mathbf{R}}_e)^3, & \bar{\mathbf{V}} \hat{\mathcal{K}}_p^3 &= -(\bar{\mathbf{R}}_p \text{grad}_{\bar{\mathbf{V}}Z} \bar{\mathbf{R}}_p^T)^3.
\end{aligned} \quad (2.115)$$

Die Aufspaltung der Transformation aus (2.57) in einen elastischen und plastischen Anteil führt zu einem Krümmungstensor $\overset{3}{\hat{\mathcal{K}}}$, der entweder zwei Basissysteme der \bar{U} -Zwischenkonfiguration und eins der klassischen Zwischenkonfiguration besitzt, wenn für ${}^R\overset{3}{\mathcal{K}}$ die Definition aus (2.56) und für $\overset{3}{\mathcal{K}}$ die Definition aus (2.45) verwendet wird, oder der zwei Basissysteme der \bar{V} -Zwischenkonfiguration und eins der klassischen Zwischenkonfiguration aufweist, wenn alternativ die Darstellung von ${}^R\overset{3}{\mathcal{K}}$ aus (2.45) und für $\overset{3}{\mathcal{K}}$ die Darstellung aus (2.54) benutzt wird:

$$\begin{aligned}\overset{3}{\hat{\mathcal{K}}} &= \{\bar{\mathbf{R}}_p [({}^R\overset{3}{\mathcal{K}})^{23} \bar{\mathbf{R}}_p^T]^{23} \mathbf{F}_p^{-1}\}^{\mathfrak{z}} = \{\bar{\mathbf{R}}_e^T [(\overset{3}{\mathcal{K}})^{23} \bar{\mathbf{R}}_e]^{23} \mathbf{F}_e\}^{\mathfrak{z}}, \\ &= \overset{3}{\hat{\mathcal{K}}}_e + \overset{3}{\hat{\mathcal{K}}}_p.\end{aligned}\quad (2.116)$$

Die rein elastischen und rein plastischen Anteile von $\overset{3}{\hat{\mathcal{K}}}$ ergeben sich zu:

$$\overset{3}{\hat{\mathcal{K}}}_e = (\bar{\mathbf{R}}_e^T \text{grad}_Z \bar{\mathbf{R}}_e)^{\mathfrak{z}}, \quad \overset{3}{\hat{\mathcal{K}}}_p = -(\bar{\mathbf{R}}_p \text{grad}_Z \bar{\mathbf{R}}_p^T)^{\mathfrak{z}}.\quad (2.117)$$

Es ist wiederum möglich, eine additive Aufspaltung der übrigen Krümmungstensoren zu erhalten, indem die elastischen und plastischen Anteile aus (2.115) auf die zugehörigen Konfigurationen transportiert werden, jedoch sind dies in Analogie zu (2.112) keine Aufspaltungen mehr in rein elastische und rein plastische Anteile:

$$\begin{aligned}{}^R\overset{3}{\mathcal{K}} &= {}^R\overset{3}{\mathcal{K}}_e + {}^R\overset{3}{\mathcal{K}}_p, & \bar{V}\overset{3}{\mathcal{K}} &= \bar{V}\overset{3}{\mathcal{K}}_e + \bar{V}\overset{3}{\mathcal{K}}_p, \\ \bar{U}\overset{3}{\mathcal{K}} &= \bar{U}\overset{3}{\mathcal{K}}_e + \bar{U}\overset{3}{\mathcal{K}}_p, & \overset{3}{\mathcal{K}} &= \overset{3}{\mathcal{K}}_e + \overset{3}{\mathcal{K}}_p.\end{aligned}\quad (2.118)$$

Darin sind

$$\begin{aligned}{}^R\overset{3}{\mathcal{K}}_e &= [\bar{\mathbf{R}}^T (\text{Grad} \bar{\mathbf{R}}_e)^T \bar{\mathbf{R}}_p]^T, & {}^R\overset{3}{\mathcal{K}}_p &= (\bar{\mathbf{R}}_p^T \text{Grad} \bar{\mathbf{R}}_p)^{\mathfrak{z}}, \\ \bar{V}\overset{3}{\mathcal{K}}_e &= -(\bar{\mathbf{R}}_e \text{grad}_{\bar{V}} \bar{\mathbf{R}}_e^T)^{\mathfrak{z}}, & \bar{V}\overset{3}{\mathcal{K}}_p &= -[\bar{\mathbf{R}} (\text{grad}_{\bar{V}} \bar{\mathbf{R}}_p^T)^T \bar{\mathbf{R}}_e^T]^T, \\ \bar{U}\overset{3}{\mathcal{K}}_e &= [\bar{\mathbf{R}}^T (\text{Grad}_{\bar{U}} \bar{\mathbf{R}}_e)^T \bar{\mathbf{R}}_p]^T, & \bar{U}\overset{3}{\mathcal{K}}_p &= (\bar{\mathbf{R}}_p^T \text{Grad}_{\bar{U}} \bar{\mathbf{R}}_p)^{\mathfrak{z}}, \\ \overset{3}{\mathcal{K}}_e &= -(\bar{\mathbf{R}}_e \text{grad} \bar{\mathbf{R}}_e^T)^{\mathfrak{z}}, & \overset{3}{\mathcal{K}}_p &= -[\bar{\mathbf{R}} (\text{grad} \bar{\mathbf{R}}_p^T)^T \bar{\mathbf{R}}_e^T]^T.\end{aligned}\quad (2.119)$$

Man erkennt, daß ${}^R\overset{3}{\mathcal{K}}_e$ und $\bar{U}\overset{3}{\mathcal{K}}_e$ nicht mehr rein elastischen Charakter haben und daß $\bar{V}\overset{3}{\mathcal{K}}_p$ und $\overset{3}{\mathcal{K}}_p$ keine rein plastischen Größen sind.

Für die zweistufigen Krümmungstensoren können entsprechende Resultate gewonnen werden.

2.6.4 Elastische und plastische Deformationsgradienten zweiter Ordnung

Schließlich wird noch das elastisch-plastische Verhalten der Deformationsgradienten zweiter Ordnung untersucht. Nach *Ehlers* [25, 26] wird von den folgenden Definitionen ausgegangen:

$$\begin{aligned} {}^R\mathbf{G}_p &= \text{Grad } \mathbf{F}_p, & {}^R\mathbf{G}_e &= \text{grad}_Z \mathbf{F}_e, \\ \mathbf{G}_p &= \text{grad}_Z \mathbf{F}_p^{-1}, & \mathbf{G}_e &= \text{grad } \mathbf{F}_e^{-1}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Hierin sind alle elastischen und plastischen Deformationsgradienten zweiter Ordnung weiterhin Zweifeldtensoren. Unter Verwendung der bekannten Transportmechanismen können diese Tensoren in Einfeldtensoren überführt werden. Für die transportierten Deformationsgradienten kann gezeigt werden, daß auf der Zwischenkonfiguration wiederum eine additive Aufspaltung in einen rein plastischen und einen rein elastischen Anteil möglich ist:

$$\hat{\mathcal{G}}^3 = \{\mathbf{F}_p [({}^R\hat{\mathcal{G}}^3)^T \mathbf{F}_p^{-1}]^{\underline{23}} \mathbf{F}_p^{-1}\}^{\underline{3}} = \{\mathbf{F}_e^{-1} [(\hat{\mathcal{G}}^3)^T \mathbf{F}_e]^{\underline{23}} \mathbf{F}_e\}^{\underline{3}}, \quad (2.121)$$

Darin sind

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}^3 &= \hat{\mathcal{G}}_p^3 + \hat{\mathcal{G}}_e^3, \\ \hat{\mathcal{G}}_p^3 &= \mathbf{F}_p \mathbf{G}_p^3, & \hat{\mathcal{G}}_e^3 &= \mathbf{F}_e^{-1} {}^R\mathbf{G}_e^3. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Die Aufspaltungen und Transporte der Verzerrungsmaße, Krümmungstensoren und Deformationsgradienten sind im Anhang B in schematischer Form zusammengefaßt.

2.6.5 Kompatibilitätsuntersuchungen

Wie bereits oben angesprochen, sind die Paare $(\mathbf{F}_p^{-1}, \hat{\mathcal{G}}_p^3)$ und $(\mathbf{F}_e, \hat{\mathcal{G}}_e^3)$ Elemente von \mathcal{L} , und somit müssen $\hat{\mathcal{G}}_p^3$ als auch $\hat{\mathcal{G}}_e^3$ über die Symmetrie bezüglich der zweiten und dritten Basissysteme verfügen:

$$\hat{\mathcal{G}}^3 = (\hat{\mathcal{G}}^3)^T, \quad \hat{\mathcal{G}}_p^3 = (\hat{\mathcal{G}}_p^3)^T, \quad \hat{\mathcal{G}}_e^3 = (\hat{\mathcal{G}}_e^3)^T. \quad (2.123)$$

Zurückziehen der plastischen Gleichung (2.123)₂ auf die \bar{V} -Zwischenkonfiguration mit der Abbildung $\{\bar{\mathbf{V}}_p^{-1}[(\cdot)^T \bar{\mathbf{V}}_p]^{\underline{23}} \bar{\mathbf{V}}_p\}^{\underline{3}}$ ergibt eine plastische Krümmungs-Verzerrungs-Relation in Analogie zu (2.83)₁:

$$\bar{V} \hat{\mathcal{K}}_p^3 - (\bar{V} \hat{\mathcal{K}}_p^3)^T = [\bar{\mathbf{V}}_p^{-1} \text{grad}_{\bar{V}Z} \bar{\mathbf{V}}_p]^{\underline{23}} - [\bar{\mathbf{V}}_p^{-1} \text{grad}_{\bar{V}Z} \bar{\mathbf{V}}_p]^{\underline{3}}. \quad (2.124)$$

Entsprechend kann eine rein elastische Krümmungs-Verzerrungs-Relation in Analogie zu (2.82)₂ durch Vorwärtstransport von (2.123)₃ auf die \bar{U} -Zwischenkonfiguration mit der Abbildung $\{\bar{U}_e [(\cdot)^T \bar{U}_e^{-1}]^{\bar{3}T} \bar{U}_e^{-1}\}^{\bar{3}}$ hergeleitet werden:

$$\bar{U} \hat{\mathcal{K}}_e - (\bar{U} \hat{\mathcal{K}}_e)^{\bar{3}T} = -[\bar{U}_e \text{Grad}_{\bar{U}Z} \bar{U}_e^{-1}]^{\bar{3}} + [\bar{U}_e \text{Grad}_{\bar{U}Z} \bar{U}_e^{-1}]^{\bar{3}T}. \quad (2.125)$$

Wie bereits für Gleichungen (2.83) gezeigt wurde, können (2.124) und (2.125) bezüglich $\bar{V} \hat{\mathcal{K}}_p$ bzw. $\bar{U} \hat{\mathcal{K}}_e$ aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \bar{V} \hat{\mathcal{K}}_p &= \frac{1}{2} \{ \bar{\mathbf{E}} [\bar{V} \hat{\mathbf{V}}_p + (\bar{V} \hat{\mathbf{V}}_p)^{\bar{1}3} - (\bar{V} \hat{\mathbf{V}}_p)^{\bar{2}3}] \}^{\bar{2}}, \\ \bar{U} \hat{\mathcal{K}}_e &= \frac{1}{2} \{ \bar{\mathbf{E}} [\bar{U} \hat{\mathbf{U}}_e + (\bar{U} \hat{\mathbf{U}}_e)^{\bar{1}3} - (\bar{U} \hat{\mathbf{U}}_e)^{\bar{2}3}] \}^{\bar{2}}. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Darin sind

$$\begin{aligned} \bar{V} \hat{\mathbf{V}}_p &:= [\bar{\mathbf{V}}_p^{-1} \text{grad}_{\bar{V}Z} \bar{\mathbf{V}}_p]^{\bar{3}} = [\bar{\mathbf{V}}_p^{-1} \text{grad}_{\bar{V}Z} \hat{\mathbf{K}}_p]^{\bar{3}}, \\ \bar{U} \hat{\mathbf{U}}_p &:= -[\bar{\mathbf{U}}_p \text{Grad}_{\bar{U}Z} \bar{\mathbf{U}}_p^{-1}]^{\bar{3}} = [\bar{\mathbf{U}}_p \text{Grad}_{\bar{U}Z} {}^R \hat{\mathbf{K}}_p]^{\bar{3}}. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Für die Formulierung von Evolutionsgleichungen gibt es mit Hilfe der Kompatibilitätsuntersuchungen zwei unterschiedliche Vorgehensweisen. Einerseits können für \mathbf{F}_p und $\bar{\mathbf{R}}_p$ zwei unabhängige Evolutionsgleichungen angegeben werden. Hierbei muß sichergestellt sein, daß $\text{Grad} \mathbf{F}_p$ über die angesprochene Symmetrieeigenschaft bezüglich der letzten beiden Basisvektoren verfügt und $\bar{\mathbf{R}}_p$ ein eigentlich orthogonaler Tensor ist.

Andererseits kann eine Evolutionsgleichung für $\bar{\mathbf{V}}_p$ angegeben werden, da sich aus $\bar{\mathbf{V}}_p$ die entsprechenden plastischen Verzerrungsmaße und mit (2.127)₁ auch die zwei-stufigen plastischen Krümmungstensoren bestimmen lassen.

In der geometrisch linearen Theorie vereinfachen sich die Ergebnisse erheblich. Formale Linearisierung der Gleichungen (2.103) bis (2.121) ergibt additive Aufspaltungen des linearen Verzerrungsmaßes $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und des linearen Krümmungsmaßes $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$, vgl. *Ehlers & Volk* [39]:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}} &= \bar{\boldsymbol{\kappa}}_e + \bar{\boldsymbol{\kappa}}_p. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Die Linearisierung der nicht-linearen Krümmungs-Verzerrungs-Relationen (2.119) und (2.121) ergibt die linearen Kompatibilitätsbedingungen

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\kappa}}_p &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}} (\text{grad} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \text{grad}^{\bar{1}3} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \text{grad}^{\bar{2}3} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)^{\bar{2}}, \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}}_e &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}} (\text{grad} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \text{grad}^{\bar{1}3} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \text{grad}^{\bar{2}3} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e)^{\bar{2}}. \end{aligned}} \quad (2.129)$$

Mit (2.129)₁ folgt der Zusammenhang, daß die plastische Krümmung eine Funktion des plastischen Verzerrungsgradienten ist. Dies gilt auch für die Ratenformulierung von (2.129)₁:

$$\boxed{\dot{\kappa}_p = \frac{1}{2} \mathbf{E} (\text{grad } \dot{\hat{\epsilon}}_p + \text{grad}^{13} \dot{\hat{\epsilon}}_p - \text{grad}^{23} \dot{\hat{\epsilon}}_p)^2}. \quad (2.130)$$

Demnach ergibt sich die Evolutionsgleichung für die plastischen Krümmungen direkt als Funktion der plastischen Verzerrungsrate. Man beachte, daß die Kompatibilitätsbedingungen (2.129) sowie die Evolutionsgleichung für die plastische Krümmungsrate (2.130) eine direkte Folge der multiplikativen Aufspaltungen (2.99) sind. Die vorgestellte geometrisch lineare Theorie wird im folgenden für die numerische Simulation und die Beispielrechnungen verwendet.

2.7 Bilanzrelationen

Das Aufstellen einer allgemeinen Bilanzrelation ist ein eleganter Weg, um die Aussagen der axiomatisch eingeführten Bilanzen für Masse, Impuls, Drall, Energie und Entropie zu finden (siehe z. B. *Ehlers* [30] oder *Haupt* [49]):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi dv &= \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} da + \int_{\mathcal{B}} v dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\psi} dv, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\psi} dv &= \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\Phi} \mathbf{n}) da + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v} dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\boldsymbol{\psi}} dv. \end{aligned} \quad (2.131)$$

In (2.131) ist ψ bzw. $\boldsymbol{\psi}$ die skalare oder vektorwertige Dichte der zu bilanzierenden mechanischen Größe, $\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n}$ bzw. $\boldsymbol{\Phi} \mathbf{n}$ ist der Ausfluß der mechanischen Größe infolge äußerer Nahwirkung mit dem nach außen gerichteten Oberflächennormaleneinheitsvektor \mathbf{n} , v bzw. \boldsymbol{v} sind die Zufuhrterme infolge äußerer Fernwirkung und $\hat{\psi}$ bzw. $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ sind die Produktionsterme der mechanischen Größe. Mit dem *Gaußschen* Integralssatz können die Oberflächenintegrale $\int_{\mathcal{S}}$ ebenfalls in Volumenintegrale $\int_{\mathcal{B}}$ überführt werden. Unter der Voraussetzung stetiger Integranden können durch Differentiation die lokalen Bilanzrelationen gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} + \psi \text{div } \dot{\mathbf{x}} &= \text{div } \boldsymbol{\phi} + v + \hat{\psi}, \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\psi} \text{div } \dot{\mathbf{x}} &= \text{div } \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{v} + \hat{\boldsymbol{\psi}}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

In der folgenden Tabelle sind die speziellen Bilanzrelationen mit Hilfe der allgemeinen Bilanzrelationen (2.131) oder (2.132) zusammengefaßt:

In Tabelle 2.1 ist \mathbf{T} der *Cauchy'sche* Spannungstensor und \mathbf{b} die spezifische Volumenkraft. Unter dem Tensor der Mikroträchtigkeit $\bar{\boldsymbol{\Theta}}$ versteht man den über ein REV

	$\psi, \boldsymbol{\psi}$	$\phi, \boldsymbol{\Phi}$	v, \boldsymbol{v}	$\hat{\psi}, \hat{\boldsymbol{\psi}}$
Masse	ρ	$\mathbf{0}$	0	0
Impuls	$\rho \dot{\mathbf{x}}$	\mathbf{T}	$\rho \mathbf{b}$	$\mathbf{0}$
Drall (klassisch)	$\mathbf{x} \times (\rho \dot{\mathbf{x}})$	$\mathbf{x} \times \mathbf{T}$	$\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}$	$\mathbf{0}$
Drall (mikropolar)	$\mathbf{x} \times (\rho \dot{\mathbf{x}}) + \rho \bar{\boldsymbol{\Theta}} \bar{\boldsymbol{\omega}}$	$\mathbf{x} \times \mathbf{T} + \mathbf{M}$	$\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} + \rho \mathbf{c}$	$\mathbf{0}$

Tabelle 2.1: Bilanzrelationen

gemittelten Trägheitstensor der Mikropartikel, \mathbf{M} ist der Momentenspannungstensor und \mathbf{c} ist die spezifische Volumenmomentendichte. Auf die Bilanzrelationen für Energie und Entropie wird an dieser Stelle im Rahmen einer rein mechanischen Theorie verzichtet. Der interessierte Leser sei auf die Arbeiten von *Diebels* [19] und *Eringen & Kafadar* [40] verwiesen.

2.7.1 Massenbilanz

Aus Tabelle 2.1 ergibt sich die Massenbilanz zu

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0. \quad (2.133)$$

2.7.2 Impulsbilanz

Mit Einsetzen der Massenbilanz (2.133) folgt für die Impulsbilanz die bekannte Form:

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.134)$$

2.7.3 Drallbilanz, Bilanz der Mikroträgheit

Mit den „niedrigeren“ Bilanzen (2.133) und (2.134) folgt in der klassischen Kontinuumsmechanik aus der Drallbilanz lediglich die Symmetrie des Spannungstensors:

$$\mathbf{0} = \mathbf{I} \times \mathbf{T}. \quad (2.135)$$

Das äußere Vektorprodukt zweier Tensoren ist folgendermaßen definiert (vgl. *de Boer* [5]):

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{A} \mathbf{B}^T). \quad (2.136)$$

In der mikropolaren Theorie erhält man die erweiterte Form der Drallbilanz

$$\rho(\bar{\Theta}\bar{\omega})' = \mathbf{I} \times \mathbf{T} + \operatorname{div} \mathbf{M} + \rho \mathbf{c}. \quad (2.137)$$

Aus (2.137) folgt, daß der mikropolare Spannungstensor in der Regel unsymmetrisch ist.

Neben den in Tabelle 2.1 genannten Bilanzen ist für mikropolare Materialien die sogenannte Erhaltung der Mikroträghheit von Interesse (*Eringen & Kafadar* [40]). Die Annahme starrer Mikroartikel führt zur Aussage, daß die mikropolare *Green-Naghdi*-Ableitung (Zeitableitung bezüglich eines mitrotierten Basissystems) des Tensors der Mikroträghheit $\bar{\Theta}$ verschwinden muß:

$$\overset{\diamond}{\bar{\Theta}} = \dot{\bar{\Theta}} - \bar{\Omega}\bar{\Theta} - \bar{\Theta}\bar{\Omega}^T = \mathbf{0}. \quad (2.138)$$

Hieraus ergibt sich

$$\dot{\bar{\Theta}} = 2(\bar{\Omega}\bar{\Theta})_{\operatorname{sym}}. \quad (2.139)$$

Diese Gleichung liefert in Verbindung mit der Massenbilanz (2.133) eine Beziehung, die die Form einer Erhaltungsgleichung für die Mikroträghheit besitzt:

$$(\rho\bar{\Theta})' + \rho\bar{\Theta}\operatorname{div}\dot{\mathbf{x}} = 2\rho(\bar{\Omega}\bar{\Theta})_{\operatorname{sym}}. \quad (2.140)$$

Die Beziehung (2.140) ist keine Bilanzgleichung im üblichen Sinn, da sie auf kinematischen Überlegungen beruht und nicht axiomatisch eingeführt wird. Da (2.140) jedoch prinzipiell die Form der lokalen Bilanz (2.132) besitzt, spricht man auch gelegentlich von der Bilanz der Mikroträghheit (z. B. *Eringen & Kafadar* [40]).

Mit (2.140) kann die mikropolare Drallbilanz (2.137) in die folgende Form gebracht werden:

$$\rho\bar{\Theta}\dot{\bar{\omega}} + 2\rho(\bar{\Omega}\bar{\Theta})_{\operatorname{sym}}\bar{\omega} = \operatorname{div} \mathbf{M} + \mathbf{I} \times \mathbf{T} + \rho \mathbf{c}. \quad (2.141)$$

Kapitel 3

Mikropolare Theorie Poröser Medien

3.1 Einführung in die Theorie Poröser Medien

In Kapitel 2 wurden ausschließlich leere poröse Festkörpermaterialien behandelt, die sich prinzipiell mit den gleichen Methoden wie reine Einphasenmaterialien beschreiben lassen. Wenn das Porenfluid einen maßgebenden Einfluß auf das Ergebnis eines bestimmten Randwertproblems hat, ist diese Vereinfachung nicht mehr zulässig. Ein typisches Beispiel hierfür ist das allgemein bekannte Konsolidationsproblem (vgl. Bild 3.1).

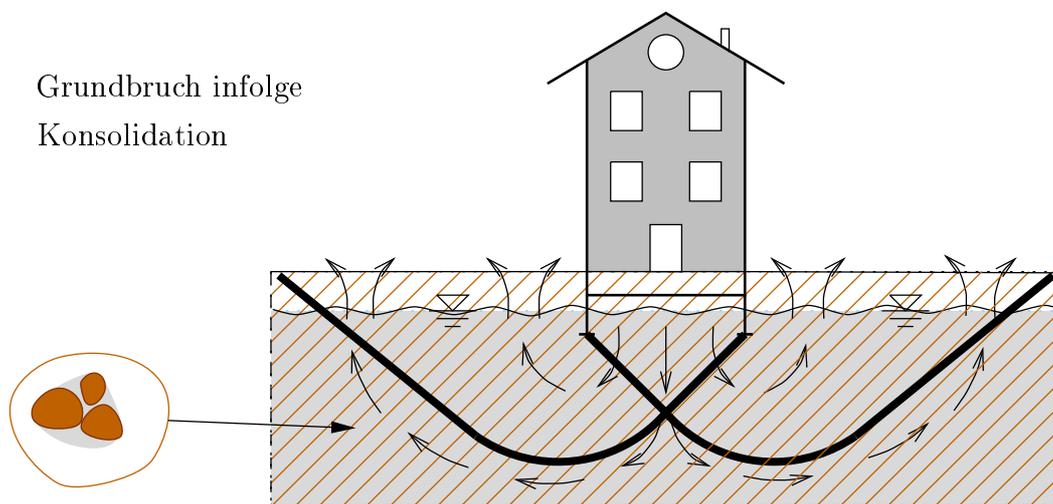


Bild 3.1: Konsolidationsproblem infolge äußerer Last

Durch Aufbringung einer äußeren Last (z. B. Bau eines Gebäudes) entsteht im teilweise bzw. vollständig gesättigten Boden ein Porenüberdruck und somit gegenüber

der unbelasteten Oberfläche ein hydrostatisches Gefälle. Es stellt sich ein Strömungsprozeß ein, der solange anhält, bis der Porenüberdruck abgebaut wurde und die gesamte Last vom Festkörperskelett getragen wird. Folglich tritt durch die Existenz eines viskosen Fluids ein zeitlich verzögerter Deformationsprozeß ein. Je nach Beschaffenheit des Bodens können der Konsolidationsprozeß und die damit verbundenen Setzungen über Jahrzehnte andauern (beispielsweise bei sehr dichten Tonböden). Es ist offensichtlich, daß eine Beschreibung dieser Phänomene mittels expliziter Betrachtung der Mikrostruktur sofort zum Scheitern verurteilt ist, da bei realen Böden die genaue mikroskopische Beschaffenheit in der Regel unbekannt ist. Erfolgversprechender erscheint die Behandlung des Festkörperskeletts und der Porenfluide als unvermischbare Konstituierenden eines Mehrphasenmaterials, das mit der Theorie Poröser Medien (TPM) beschrieben werden kann. Grundlage der TPM als kontinuumsmechanische Beschreibung von Mehrphasenmaterialien (Phase steht hier für jede einzelne Konstituierende) ist die moderne Mischungstheorie, wie sie ursprünglich bei *Truesdell & Toupin* [84] oder als Übersichtsarbeit bei *Truesdell* [83] zu finden ist. Die fundamentalen Voraussetzungen der modernen Mischungstheorie hat *Truesdell* in den „metaphysischen Prinzipien“ zusammengefaßt [83]:

1. *All properties of the mixture must be mathematical consequences of properties of the constituents.*
2. *So as to describe the motion of a constituent, we may in imagination isolate it from the rest of the mixture, provided we allow properly for the actions of the other constituents upon it.*
3. *The motion of the mixture is governed by the same equations as is a single body.*

Das erste Prinzip bedeutet, daß die Mischungsgrößen aus den entsprechenden Größen der einzelnen Phasen hergeleitet werden können. Das zweite Postulat besagt, daß die mechanischen Axiome auch für jede einzelne Phase Gültigkeit haben, sofern man Wechselwirkungsterme zwischen den Phasen berücksichtigt. Im letzten Postulat werden Restriktionen an diese Wechselwirkungsterme gestellt, denn in der Summe über alle Phasen müssen sich wieder die Ergebnisse für einphasige Materialien ergeben.

3.1.1 Die Volumenanteile

Die Mischungstheorie behandelt die Mehrphasigkeit mittels Konzentrationen und beinhaltet somit prinzipiell bereits einen lokalen Homogenisierungsprozeß wie er in Kapitel 1 angesprochen wurde. Für die Beschreibung poröser Materialien, bestehend aus unvermischbaren Konstituierenden, sind die Volumenteile jedoch deutlich besser geeignet, um die Mehrphasigkeit auch thermodynamisch konsistent berücksichtigen zu können. Die Volumenanteile sind skalare Strukturvariablen, die die homogenisierte, lokale Zusammensetzung des mehrphasigen Materials wiedergeben (siehe Bild 3.2).

Das Konzept der Volumenteile in Verbindung mit der modernen Mischungstheorie findet man beispielhaft bei *Bowen* [12, 13], *de Boer & Ehlers* [6] und *Ehlers* [25]. Die Arbeiten von *Hassanizadeh & Gray* [45, 46], *de Boer et al.* [7] und *Plischka* [66] behandeln detailliert den Homogenisierungsprozeß über ein repräsentatives Elementarvolumen (REV). Für das Aufstellen von Konstitutivannahmen ist aus materialtheoretischer Sicht die Auswertung des Entropieprinzips notwendig. Zum thermodynamisch konsistenten Entropiepostulat für Mehrphasenmaterialien sei auf die Arbeiten von *Bowen* [11], *Bowen & Wiese* [14], *Müller* [61], *de Boer & Ehlers* [6] und *Ehlers* [25] verwiesen.

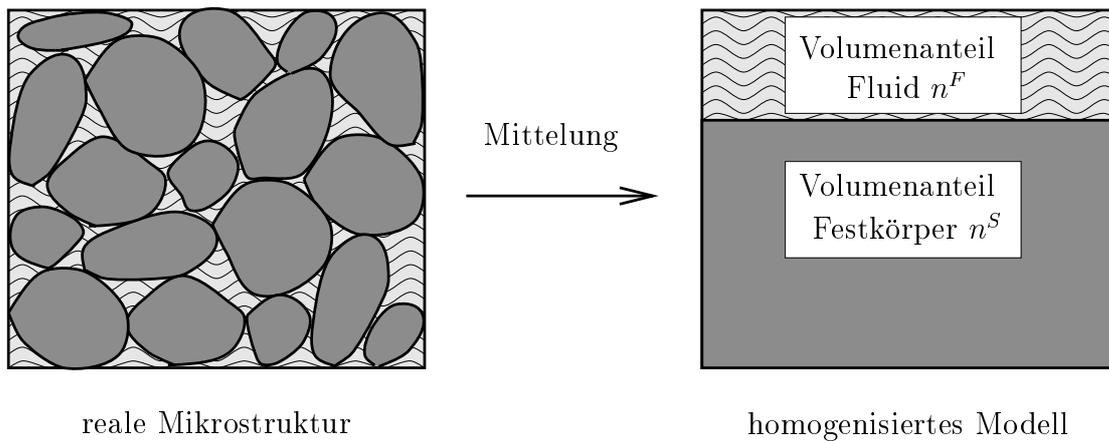


Bild 3.2: Definition der Volumenteile

Die Volumenteile n^α (α steht stellvertretend für die Indizes der einzelnen Konstituierenden) sind daher in Analogie zu (2.9) zu verstehen und folgendermaßen definiert:

$$n^\alpha = \frac{dv^\alpha}{dv}. \quad (3.1)$$

Im Gegensatz zum leeren, porösen Festkörpermaterial aus Kapitel 2 gilt für ein k -phasiges Material die Sättigungsbedingung

$$\sum_{\alpha=1}^k n^\alpha = 1. \quad (3.2)$$

Gleichung (3.2) kann als Verallgemeinerung von (2.10) aufgefaßt werden.

3.2 Kinematik von Mehrphasenmaterialien

In diesem Kapitel werden die Unterschiede in der Beschreibung von Mehrphasenmaterialien zur Kinematik von Einphasenmaterialien herausgearbeitet. Die Annahme superponierter Kontinua (siehe Bild 3.2) hat zur Folge, daß auf der aktuellen Konfiguration jeder Raumpunkt \mathbf{x} gleichzeitig von materiellen Punkten X^α jeder Phase φ^α eingenommen wird. Infolge der Unabhängigkeitsbedingung können die X^α zur Referenzzeit t_0 an unterschiedlichen Orten \mathbf{X}_α gewesen sein (vgl. Bild 3.3), so daß jede Phase φ^α im allgemeinen eine eigene Bewegungsfunktion χ_α besitzt:

$$\mathbf{x} = \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t). \quad (3.3)$$

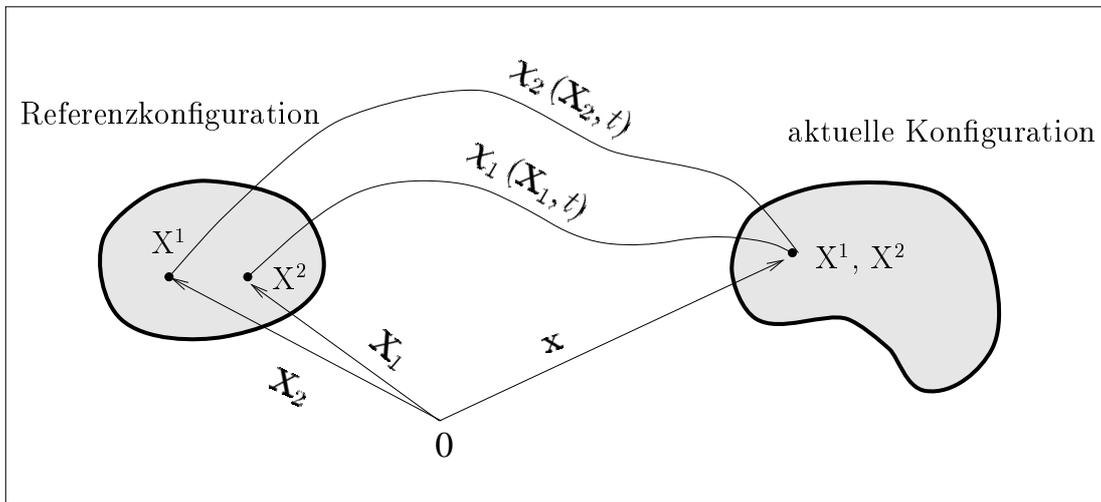


Bild 3.3: Kinematik von Mehrphasenmaterialien

Somit hat jede Phase einen eigenen Deformationsgradienten \mathbf{F}_α :

$$\mathbf{F}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}_\alpha} = \text{Grad}_\alpha \mathbf{x}, \quad \mathbf{F}_\alpha^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}_\alpha}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad } \mathbf{X}_\alpha. \quad (3.4)$$

Als Folge von (3.3) kann jeder Phase φ^α ein eigenes Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld zugewiesen werden:

$$\begin{aligned} \overset{\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha &:= \mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial t} = \overset{\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha(\mathbf{x}, t), \\ \overset{\cdot\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha &:= \mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial^2 \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial t^2} = \overset{\cdot\cdot}{\mathbf{x}}_\alpha(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die lokale Schwerpunktgeschwindigkeit (auch baryzentrische Geschwindigkeit) für ein k -phasiges Material ergibt sich durch Summation über alle Konstituierenden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha}. \quad (3.6)$$

Die Diffusionsgeschwindigkeiten \mathbf{d}_α sind definiert als Relativgeschwindigkeit der Phase zum Gesamtkörper:

$$\mathbf{d}_\alpha = \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.7)$$

Man kann leicht zeigen, daß die gewichtete Summe der Diffusionsgeschwindigkeiten verschwindet:

$$\sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha \mathbf{d}_\alpha = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

Infolge von (3.3)-(3.6) existieren für eine beliebige Größe Γ unterschiedliche Zeitableitungen:

$$(\Gamma)'_\alpha = \frac{d_\alpha \Gamma}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \text{grad } \Gamma \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha. \quad (3.9)$$

Aus Gleichung (3.9) folgt der Zusammenhang

$$(\Gamma)'_\alpha = (\Gamma)'_\beta + \text{grad } \Gamma \cdot (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\beta) \quad (3.10)$$

und insbesondere

$$(\Gamma)'_\alpha = \dot{\Gamma} + \text{grad } \Gamma \cdot \mathbf{d}_\alpha. \quad (3.11)$$

Mit den Erweiterungen (3.3)-(3.11) können alle Gleichungen des Kapitels 2, die ein einphasiges poröses Material beschreiben, auch für mehrphasige Materialien angewendet werden. Beispielsweise folgen für die Dichtefunktionen (2.8):

$$\rho^{\alpha R} = \frac{dm^\alpha}{dv^\alpha}, \quad \rho^\alpha = \frac{dm^\alpha}{dv}. \quad (3.12)$$

Mit (3.1) und (3.12) ergibt sich für die Beziehung zwischen den Dichtefunktionen (vgl. (2.9)₂):

$$\rho^\alpha = n^\alpha \rho^{\alpha R}. \quad (3.13)$$

3.3 Bilanzrelationen

Nach den *Truesdellschen* Prinzipien lassen sich die Bilanzrelationen der einzelnen Phasen sowie des gesamten Mehrphasenkörpers aus den Bilanzrelationen für einphasige Materialien (2.131)-(2.141) herleiten. Die allgemeinen Bilanzrelationen (2.131) haben für Mehrphasenmaterialien die folgende Struktur (vgl. *Ehlers* [30]):

$$\begin{aligned} \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha dv &= \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\phi}^\alpha \cdot \mathbf{n} da + \int_{\mathcal{B}} v^\alpha dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\psi}^\alpha dv, \\ \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\psi}^\alpha dv &= \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\Phi}^\alpha \mathbf{n}) da + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}^\alpha dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha dv. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die allgemeine Bilanzrelation in lokaler Form ergibt sich aus (2.132) zu:

$$\begin{aligned} (\psi^\alpha)'_\alpha + \psi^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}^\alpha + v^\alpha + \hat{\psi}^\alpha, \\ (\boldsymbol{\psi}^\alpha)'_\alpha + \boldsymbol{\psi}^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi}^\alpha + \mathbf{v}^\alpha + \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nach den *Truesdellschen* Prinzipien muß sich die Bilanz des gesamten Mehrphasenkontinuums aus der Summe der Bilanzgleichungen der einzelnen Phasen ergeben und sich außerdem als einphasige Bilanzgleichung (2.131) oder (2.132) darstellen lassen. Hieraus erhält man den Zusammenhang zwischen den Partial- und den Gesamtgrößen (vgl. *Ehlers* [30]):

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{\alpha=1}^k \psi^\alpha, & \boldsymbol{\psi} &= \sum_{\alpha=1}^k \boldsymbol{\psi}^\alpha, \\ \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} &= \sum_{\alpha=1}^k (\boldsymbol{\phi}^\alpha - \psi^\alpha \mathbf{d}_\alpha) \cdot \mathbf{n}, & \boldsymbol{\Phi} \mathbf{n} &= \sum_{\alpha=1}^k (\boldsymbol{\Phi}^\alpha - \boldsymbol{\psi}^\alpha \otimes \mathbf{d}_\alpha) \mathbf{n}, \\ v &= \sum_{\alpha=1}^k v^\alpha, & \mathbf{v} &= \sum_{\alpha=1}^k \mathbf{v}^\alpha, \\ \hat{\psi} &= \sum_{\alpha=1}^k \hat{\psi}^\alpha, & \hat{\boldsymbol{\psi}} &= \sum_{\alpha=1}^k \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha. \end{aligned} \quad (3.16)$$

In der folgenden Tabelle sind die speziellen Bilanzrelationen mit Hilfe der allgemeinen Bilanzrelationen für Mehrphasenmaterialien (3.14) oder (3.15) zusammengefaßt:

Die Produktionsterme $\hat{\mathbf{s}}^\alpha$ und $\hat{\mathbf{h}}^\alpha$ setzen sich jeweils aus einem direkten Produktionsanteil und einem Anteil aus den Produktionen der jeweils „niedrigeren“ Bilanzen zusammen:

$$\hat{\mathbf{s}}^\alpha = \hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha, \quad \hat{\mathbf{h}}^\alpha = \hat{\mathbf{m}}^\alpha + \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{s}}^\alpha. \quad (3.17)$$

	$\psi^\alpha, \boldsymbol{\psi}^\alpha$	$\phi^\alpha, \boldsymbol{\Phi}^\alpha$	$v^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha$	$\hat{\psi}^\alpha, \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha$
Masse	ρ^α	$\mathbf{0}$	0	$\hat{\rho}^\alpha$
Impuls	$\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha$	\mathbf{T}^α	$\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$	$\hat{\mathbf{s}}^\alpha$
Drall (klassisch)	$\mathbf{x} \times (\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha)$	$\mathbf{x} \times \mathbf{T}^\alpha$	$\mathbf{x} \times \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$	$\hat{\mathbf{h}}^\alpha$
Drall (mikropolar)	$\mathbf{x} \times (\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha) + \rho^\alpha \bar{\boldsymbol{\Theta}}^\alpha \bar{\boldsymbol{\omega}}_\alpha$	$\mathbf{x} \times \mathbf{T}^\alpha + \mathbf{M}^\alpha$	$\mathbf{x} \times \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{c}^\alpha$	$\hat{\mathbf{h}}^\alpha$

Tabelle 3.1: Bilanzrelationen für Mehrphasenmaterialien

Für die Massenbilanz ergibt sich aus Tabelle 3.1 in Analogie zu Gleichung (2.133)

$$(\rho^\alpha)'_\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = \hat{\rho}^\alpha \quad (3.18)$$

mit den Restriktionen

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha, \quad 0 = \sum_{\alpha=1}^k \hat{\rho}^\alpha. \quad (3.19)$$

Die Impulsbilanzen eines Mehrkomponentenkontinuums haben die folgende Form mit Bezug zu (2.134):

$$\rho^\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \operatorname{div} \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha. \quad (3.20)$$

Es gelten die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \rho \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha, & \mathbf{T} &= \sum_{\alpha=1}^k (\mathbf{T}^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\alpha), \\ \rho \mathbf{b} &= \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha, & \mathbf{0} &= \sum_{\alpha=1}^k \hat{\mathbf{s}}^\alpha. \end{aligned} \quad (3.21)$$

In der klassischen Drallbilanz für Mehrphasenmaterialien erscheint zusätzlich zum Einphasenmaterial (2.135) der direkte Drallproduktionsterm $\hat{\mathbf{m}}^\alpha$,

$$\mathbf{0} = \mathbf{I} \times \mathbf{T}^\alpha + \hat{\mathbf{m}}^\alpha, \quad (3.22)$$

mit

$$\mathbf{0} = \sum_{\alpha=1}^k \hat{\mathbf{m}}^\alpha \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{0} = \sum_{\alpha=1}^k \hat{\mathbf{h}}^\alpha. \quad (3.23)$$

Für mikropolare Mehrphasenmaterialien erhält man die erweiterte Form der Drallbilanz in Analogie zu (2.137)

$$\rho^\alpha (\bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha)'_\alpha = \mathbf{I} \times \mathbf{T}^\alpha + \operatorname{div} \mathbf{M}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{c}^\alpha + \hat{\mathbf{m}}^\alpha, \quad (3.24)$$

und die Restriktionen

$$\begin{aligned} \rho \bar{\Theta} \bar{\omega} &= \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha, & \mathbf{M} &= \sum_{\alpha=1}^k \mathbf{M}^\alpha - \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \bar{\omega}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\alpha, \\ \rho \mathbf{c} &= \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha \mathbf{c}^\alpha & \mathbf{0} &= \sum_{\alpha=1}^k \hat{\mathbf{m}}^\alpha. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Die Erhaltung der Mikroträgheit jeder Phase führt zum Ergebnis

$$(\rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha)'_\alpha + \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = 2 \rho^\alpha (\bar{\Omega}_\alpha \bar{\Theta}^\alpha)_{\operatorname{sym}} + \hat{\rho}^\alpha \bar{\Theta}^\alpha. \quad (3.26)$$

Die Tatsache, daß es sich bei der Erhaltung der Mikroträgheit nur um eine Pseudobilanz handelt, erkennt man daran, daß die Aufsummation über alle Phasen ein von (2.140) abweichendes Resultat liefert (vgl. *Diebels & Ehlers* [21]):

$$(\rho \bar{\Theta})' + \rho^\alpha \bar{\Theta} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \overset{3}{\mathbf{Q}} + \mathbf{\Pi} + \hat{\bar{\Theta}}. \quad (3.27)$$

Darin sind

$$\overset{3}{\mathbf{Q}} := \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha \otimes \mathbf{d}_\alpha, \quad \mathbf{\Pi} := \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha (\bar{\Omega}_\alpha \bar{\Theta}^\alpha)_{\operatorname{sym}}, \quad \hat{\bar{\Theta}} = \sum_{\alpha=1}^k \hat{\rho}^\alpha \bar{\Theta}^\alpha. \quad (3.28)$$

Nur für verschwindende Diffusionsgeschwindigkeiten \mathbf{d}^α und Dichteproduktionen $\hat{\rho}^\alpha$ sind die Gleichungen (2.140) und (3.27) äquivalent. Die lokale Drallbilanz jeder Phase kann mit (3.26) umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \rho^\alpha \bar{\Theta}^\alpha (\bar{\omega}_\alpha)'_\alpha &= \mathbf{I} \times \mathbf{T}^\alpha + \operatorname{div} \mathbf{M}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{c}^\alpha + \hat{\mathbf{m}}^\alpha - \\ &\quad - [2 \rho^\alpha (\bar{\Omega}_\alpha \bar{\Theta}^\alpha)_{\operatorname{sym}} + \hat{\rho}^\alpha \bar{\Theta}^\alpha] \bar{\omega}_\alpha. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die Drallbilanz des gesamten Mehrphasenkontinuums (2.137) ergibt sich mit (3.27) und (3.28) zu:

$$\rho \bar{\Theta} \dot{\bar{\omega}} = \mathbf{I} \times \mathbf{T} + \operatorname{div} \mathbf{M} + \rho \mathbf{c} - (\operatorname{div} \overset{3}{\mathbf{Q}} + \mathbf{\Pi} + \hat{\bar{\Theta}}) \bar{\omega}. \quad (3.30)$$

3.4 Sonderfall des inkompressiblen binären Modells

Die Bilanzgleichungen des Kapitels 3.3 gelten für ein Mehrphasenkontinuum, das aus beliebig vielen kompressiblen oder inkompressiblen Phasen besteht. Im folgenden findet eine Beschränkung auf ein quasistatisches, isothermes Zweiphasenmodell ohne Massenaustausch statt, das im Schwerfeld der Erde aus einem mikropolaren, inkompressiblen Festkörperskelett und einem nicht-polaren inkompressiblen Porenfluid besteht. Durch den fehlenden Massenaustausch und die Inkompressibilität der Konstituierenden reduzieren sich die Massenbilanzen (3.18) mit (3.13) zu reinen Volumenbilanzen

$$(n^\alpha)'_\alpha + n^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = 0 \quad (3.31)$$

mit $i \in \{S, F\}$ (S für Festkörper und F für Fluid). Aufsummation der beiden Volumenbilanzen (3.31) und Ausnutzen von (3.10) sowie (3.12) ergibt die Inkompressibilitätsbedingung

$$\operatorname{div} (n^F \mathbf{w}_F + \dot{\mathbf{x}}_S) = 0 \quad (3.32)$$

des betrachteten binären Modells mit der sogenannten Sickergeschwindigkeit, die als Relativgeschwindigkeit des Fluids zum sich deformierenden Festkörper definiert ist:

$$\mathbf{w}_F := \dot{\mathbf{x}}_F - \dot{\mathbf{x}}_S. \quad (3.33)$$

Die Annahme der Quasistationarität führt zur Vernachlässigung der Beschleunigungsterme. Die Impulsbilanzen (3.20) reduzieren sich demnach zu

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \operatorname{div} \mathbf{T}^S + \rho^S \mathbf{g} - \hat{\mathbf{p}}^F, \\ \mathbf{0} &= \operatorname{div} \mathbf{T}^F + \rho^F \mathbf{g} + \hat{\mathbf{p}}^F \end{aligned} \quad (3.34)$$

mit der Erdbeschleunigung \mathbf{g} . Infolge des nicht-polaren Porenfluids müssen die Drallproduktionsterme $\hat{\mathbf{m}}^\alpha$ verschwinden. Weiterhin wird davon ausgegangen, daß keine Volumenmomente \mathbf{c}^α vorhanden sind. Die Drallbilanzen (3.22) bzw. (3.29) können mit diesen Vereinfachungen in die folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} 2\rho^S (\bar{\Omega}_S \bar{\Theta}^S)_{\operatorname{sym}} \bar{\omega}_S &= \mathbf{I} \times \mathbf{T}^S + \operatorname{div} \mathbf{M}^S, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{I} \times \mathbf{T}^F \implies \mathbf{T}^F = (\mathbf{T}^F)^T. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Für den Fall einer isotropen Ausgangsverteilung der Mikropartikel muß der Tensor der Mikroträchtigkeit $\bar{\Theta}^S$ ein Kugeltensor sein. Man beachte, daß die Annahme der

isotropen Ausgangsverteilung nicht zwangsläufig kugelförmige Mikropartikel voraussetzt, sondern nur daß die Mittelung der Trägheitstensoren der einzelnen Mikropartikel über ein REV zu einem Kugeltensor führt. In diesem Fall verschwindet die linke Seite von (3.35)₁, da das Produkt eines schiefsymmetrischen Tensors mit einem Kugeltensor wiederum schiefsymmetrisch ist:

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}^S &= \bar{\Theta}^S \mathbf{I} \quad \implies \quad (\bar{\Omega}_S \bar{\Theta}^S)_{\text{sym}} = \mathbf{0}, \\ \implies \quad \mathbf{0} &= \mathbf{I} \times \mathbf{T}^S + \text{div } \mathbf{M}^S. \end{aligned} \tag{3.36}$$

3.5 Konstitutivannahmen

Mit den Beziehungen aus Kapitel 3.4 sind die beschreibenden Gleichungen des Mehrphasenkontinuums aus kinematischer Sicht bis auf fehlende Konstitutivgleichungen bestimmt. Aus der Materialtheorie folgen durch Auswerten des Entropieprinzips in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts Restriktionen an die Zulässigkeit der Konstitutivannahmen. Der Umfang dieser Auswertung ist enorm, daher sei an dieser Stelle auf die Arbeiten von *Ehlers* [25] für nicht-polare und von *Diebels* [19] für mikropolare, poröse Mehrphasenmaterialien verwiesen.

Für das binäre Modell aus Kapitel 3.5 müssen noch zur Vervollständigung des beschreibenden Gleichungssatzes Konstitutivannahmen für die beiden Spannungstensoren \mathbf{T}^α , den Momentenspannungstensor \mathbf{M}^S des Festkörpermaterials und die Impulsproduktion $\hat{\mathbf{p}}^F$ angegeben werden.

3.5.1 Restriktionen infolge der Inkompressibilität

Infolge der Inkompressibilität der Konstituierenden folgt aus der Auswertung des Entropieprinzips, daß sowohl die Spannungstensoren als auch die Interaktionskraft jeweils aus zwei Termen bestehen:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^\alpha &= -n^\alpha p \mathbf{I} + \mathbf{T}^\alpha, \\ \hat{\mathbf{p}}^F &= p \text{grad } n^F + \hat{\mathbf{p}}_E^F. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Die ersten Terme in Gleichungen (3.37) werden durch den *Lagrangeschen* Multiplikator p bestimmt, der als effektiver Porenwasserdruck identifiziert werden kann. In den zweiten Termen stehen die sogenannten Extragrößen mit dem Index $(\cdot)_E$, die durch die Festkörperbewegung und den Fluß des Porenfluids bestimmt sind (siehe *Ehlers* [25]). Die Festkörperextraspansung \mathbf{T}_E^S wird in der Bodenmechanik auch wirksame oder effektive Spannung genannt (z. B. *Terzaghi & Jelinek* [81]).

3.5.2 Fluidreibspannung

Der Zahlenwert der Fluidextraspansung \mathbf{T}_E^F ist in der Regel verschwindend klein gegenüber dem effektiven Porendruck, so daß als übliche Annahme der Grundwasserhydraulik die Fluidextraspansung \mathbf{T}_E^F *a priori* nicht berücksichtigt wird (vgl. *Ehlers et al.* [35]):

$$\mathbf{T}_E^F \ll n^F p \mathbf{I}, \quad \implies \quad \mathbf{T}_E^F := \mathbf{0}. \quad (3.38)$$

3.5.3 Interaktionskraft

Die Impulsproduktion oder Interaktionskraft zwischen Fluid und Festkörper $\hat{\mathbf{p}}_E^F$ wird über den Permeabilitätstensor \mathbf{S}_V linear zur Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_F angesetzt:

$$\hat{\mathbf{p}}_E^F = \mathbf{S}_V \mathbf{w}_F. \quad (3.39)$$

Im Fall der Isotropie degeneriert der allgemeine Permeabilitätstensor \mathbf{S}_V zu einem Kugeltensor:

$$\mathbf{S}_V = -\frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{I}. \quad (3.40)$$

Darin sind γ^{FR} die reale bzw. effektive Wichte des Porenfluids und k^F der *Darcysche* Durchlässigkeitskoeffizient, der mit dem physikalischen Durchlässigkeitsbeiwert K^S folgendermaßen zusammenhängt (siehe *Terzaghi & Jelinek* [81]):

$$k^F = \frac{\gamma^{FR}}{\mu^{FR}} K^S. \quad (3.41)$$

Darin ist μ^{FR} die effektive Scherviskosität des Fluids. Somit enthält der makroskopische Materialparameter k^F zum einen Information über die Struktur des lokalen Porenraums (K^S) und zum anderen über die Viskosität des Porenfluids (μ^{FR}).

Mit den Gleichungen (3.34)₂, (3.37)-(3.41) und den Beziehungen

$$\begin{aligned} \gamma^{FR} &= \rho^{FR} |\mathbf{g}|, \\ \text{grad } p &= \gamma^{FR} \text{grad } h + \rho^{FR} \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

erhält man als Sonderfall das bekannte *Darcysche* Filtergesetz, das bereits Mitte des 19. Jahrhunderts aus Versuchen entwickelt wurde (*Darcy* [18]):

$$n^F \mathbf{w}_F = -\mathbf{k}^F \text{grad } h. \quad (3.43)$$

Darin beschreiben h die sogenannte Standrohrspiegelhöhe und $n^F \mathbf{w}_F$ die Filtergeschwindigkeit (vgl. *de Boer & Ehlers* [6]).

Weiterhin ist bekannt, daß k^F von der Porosität bzw. der Volumendehnung des Festkörpers abhängt. Im Rahmen der geometrisch linearen Theorie wird der folgende lineare Ansatz getroffen (vgl. *Ehlers & Volk* [39]):

$$k^F = k_0^F [1 + m^F n_{0S}^S (\boldsymbol{\varepsilon}_S \cdot \mathbf{I})]. \quad (3.44)$$

Darin sind k_0^F und n_{0S}^S der Durchlässigkeitskoeffizient des Fluids bzw. der Volumenanteil des Festkörpers in der Referenzkonfiguration und m^F ein dimensionsloser Materialparameter.

3.5.4 Effektive Festkörperspannung

Die Festkörperextraspansung \mathbf{T}_E^S hängt in einer geometrisch linearen Theorie lediglich von den elastischen Verzerrungen $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ aus Gleichung (2.128) ab. Aus materialtheoretischer Sicht wäre es prinzipiell möglich, daß \mathbf{T}_E^S auch von den elastischen Krümmungen abhängt, doch soll dies konstitutiv ausgeschlossen werden. Neben der geometrischen Linearität wird im folgenden ebenfalls eine materielle Linearität für das Elastizitätsgesetz angenommen. Somit ergibt sich für isotropes Materialverhalten ein modifiziertes Hookesches Gesetz mit drei Elastizitätskonstanten (vgl. *de Borst* [10], *Ehlers & Volk* [36] und *Steinmann & Willam* [79]):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_E^S &= \mathbf{C}_e^4 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = 2\mu^S \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{e\text{sym}} + \lambda^S (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2\mu_c^S \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{e\text{skw}}, \\ \mathbf{T}_{E\text{sym}}^S &= \mathbf{C}_e^4 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{e\text{sym}} = 2\mu^S \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{e\text{sym}} + \lambda^S (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}, \\ \mathbf{T}_{E\text{skw}}^S &= \mathbf{C}_e^4 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{e\text{skw}} = 2\mu_c^S \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{e\text{skw}}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

Darin ist \mathbf{C}_e^4 der 4-stufige Elastizitätstensor

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_e^4 &= 2\mu^S \mathbf{I}_{\text{sym}}^4 + \lambda^S \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_c^S \mathbf{I}_{\text{skw}}^4, \\ \mathbf{I}_{\text{sym}}^4 &= \frac{1}{2} [(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\text{23}} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\text{13}}], \\ \mathbf{I}_{\text{skw}}^4 &= \frac{1}{2} [(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\text{23}} - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\text{13}}]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die Materialparameter μ^S und λ^S entsprechen den *Laméschen* Konstanten der nicht-polaren Elastizitätstheorie, so daß der symmetrische Anteil des mikropolaren Spannungstensors mit dem nicht-polaren Spannungstensor äquivalent ist. Der zusätzliche Materialparameter μ_c^S ist der Proportionalitätsfaktor zwischen dem schief-symmetrischen Anteilen von \mathbf{T}_E^S und $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$. Die 4-stufigen Fundamentaltensoren $\mathbf{I}_{\text{sym}}^4$ und $\mathbf{I}_{\text{skw}}^4$ bilden bei Anwendung auf einen 2-stufigen Tensor dessen symmetrischen bzw. schief-symmetrischen Anteil ab.

3.5.5 Momentenspannungen

In analoger Weise soll die Momentenspannung \mathbf{M}^S ausschließlich von der elastischen Krümmung $\bar{\boldsymbol{\kappa}}_e$ abhängen. Somit muß generell für \mathbf{M}^S ein vergleichbarer Ansatz mit drei Materialparametern gewählt werden (siehe *Ehlers & Volk* [39]):

$$\mathbf{M}^S = \mathbf{D}_e^4 \bar{\boldsymbol{\kappa}}_e = 2 \bar{\mu}^S \bar{\boldsymbol{\kappa}}_{e \text{sym}} + \bar{\lambda}^S (\bar{\boldsymbol{\kappa}}_e \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2 \bar{\mu}_c^S \bar{\boldsymbol{\kappa}}_{e \text{skw}}. \quad (3.47)$$

Darin ist \mathbf{D}_e^4 ein 4-stufiger Momentenelastizitätstensor:

$$\mathbf{D}_e^4 = 2 \bar{\mu}^S \mathbf{I}_{\text{sym}}^4 + \bar{\lambda}^S \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2 \bar{\mu}_c^S \mathbf{I}_{\text{skw}}^4. \quad (3.48)$$

Im Falle eines ebenen, rein elastischen Deformationszustands in der x_1 - x_2 -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems existiert nur der Winkel $\bar{\varphi}_3$. Der Krümmungstensor $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ hat demnach die folgende Form:

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{\varphi}_{3,1} & \bar{\varphi}_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (3.49)$$

Mit der sinnvollen Annahme, daß im ebenen Fall die Momentenspannung ebenfalls nur einen Eintrag ungleich null für die Koeffizienten $\bar{\kappa}_{31}$ und $\bar{\kappa}_{32}$ haben, folgt direkt die Restriktion, daß \mathbf{M}^S proportional zu $\bar{\boldsymbol{\kappa}}_e$ ist. *De Borst* [9] hat aus diesem Grund die folgende Vereinfachung des allgemeinen Ansatzes (3.47) vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^S &= 2 \mu^S (l_c^S)^2 \bar{\boldsymbol{\kappa}}_e \\ \implies \bar{\mu}^S &= \bar{\mu}_c^S = \mu^S l_c^2, \quad \bar{\lambda}^S = 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Im folgenden soll anstelle von (3.50) die modifizierte Form

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^S &= 2 \mu_c^S (l_c^S)^2 \bar{\boldsymbol{\kappa}}_e \\ \implies \bar{\mu}^S &= \bar{\mu}_c^S = \mu_c^S l_c^2, \quad \bar{\lambda}^S = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

verwendet werden. Der einzige Unterschied zwischen (3.50) und (3.51) ist der Austausch von μ^S gegen μ_c^S . Der Grund wird in Kapitel 3.6 deutlich. Aus Dimensionsgründen erscheint in (3.50)₁ ein Materialparameter l_c^S mit der Einheit „Länge“. Man beachte, daß l_c^S nicht direkt mit materialspezifischen Größen wie z. B. der Korngröße identifiziert werden kann, sondern durch Anpassung von berechneten, inhomogenen Randwertproblemen an Versuchsergebnisse bestimmt werden muß. Eine Motivation der angegebenen elastischen Materialgesetze durch mikromechanische Überlegungen wird im Kapitel 3.6 präsentiert.

3.5.6 Plastizität von Reibungsmaterialien

Im Falle plastischen Materialverhaltens wird von einem fließflächenbehafteten Materialmodell ausgegangen. Die zugrunde liegende Fließbedingung F wird in der üblichen Art und Weise in den Invarianten des effektiven Spannungstensors \mathbf{T}_E^S definiert. Dabei bezeichnen Fließwerte kleiner null elastisches Materialverhalten, Fließwerte gleich null plastisches Materialverhalten, Fließwerte größer null sind nicht zulässig.

Reibungsmaterialien zeichnen sich durch eine starke Abhängigkeit des plastischen Materialverhaltens vom hydrostatischen Spannungszustand aus. Zudem wird in Experimenten (z. B. Triaxialversuche) ein stark dilatantes bzw. kontraktantes Materialverhalten bei plastischen Deformationen festgestellt (vgl. *Lade & Duncan* [55]). Das Konzept der plastischen Volumenkonstanz kann folglich nicht für Reibungsmaterialien angewendet werden. Ein weiteres typisches Merkmal für das plastische Materialverhalten von Reibungsmaterialien ist die deutlich größere Festigkeit bei triaxialen Kompressionsversuchen gegenüber triaxialen Extensionsversuchen. Es bezeichnen s_1 bis s_3 die betragsmäßig geordneten deviatorischen Hauptdruckspannungen. Daraus ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \text{Kompressionsversuch: } s_1 &> s_2 = s_3, \\ \text{Extensionsversuch: } s_1 &= s_2 > s_3. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Das folgende Einflächenfließkriterium nach *Ehlers* [27, 29] erfüllt die beschriebenen Anforderungen und hat gegenüber ebenfalls gebräuchlichen Kappenmodellen (z. B. *Schad* [68]) den Vorteil der stetigen Differenzierbarkeit im gesamten Hauptspannungsraum:

$$F = \sqrt{\text{II}_D \left(1 + \gamma \frac{\text{III}_D}{\text{II}_D^{3/2}}\right)^m + \frac{1}{2}\alpha \text{I}^2 + \delta^2 \text{I}^4 + \beta \text{I} + \epsilon \text{I}^2 - \kappa} = 0. \quad (3.53)$$

Darin sind I die erste Invariante des nicht-polaren symmetrischen Extraspannungstensors \mathbf{T}_E^S und II_D bzw. III_D die zweite bzw. dritte Invariante des Deviators $\mathbf{T}_E^{SD} = \mathbf{T}_E^S - \frac{1}{3}(\mathbf{T}_E^S \cdot \mathbf{I})\mathbf{I}$,

$$\begin{aligned} \text{I} &= \mathbf{T}_E^S \cdot \mathbf{I}, \\ \text{II}_D &= \frac{1}{2}\mathbf{T}_E^{SD} \cdot \mathbf{T}_E^{SD}, \\ \text{III}_D &= \frac{1}{3}\mathbf{T}_E^{SD} \cdot \mathbf{T}_E^{SD} \mathbf{T}_E^{SD}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

und

$$\mathcal{P} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, m, \kappa\} \quad (3.55)$$

ist ein Satz von sieben Materialparametern.

Vereinfachend soll im folgenden vom Konzept der idealen Plastizität Gebrauch gemacht werden, so daß \mathcal{P} für ein Material im Verlauf eines elastisch-plastischen Deformationsprozeß als konstant angenommen wird. In Bild 3.4 ist die Fließbedingung F im Hauptspannungsraum abgebildet.

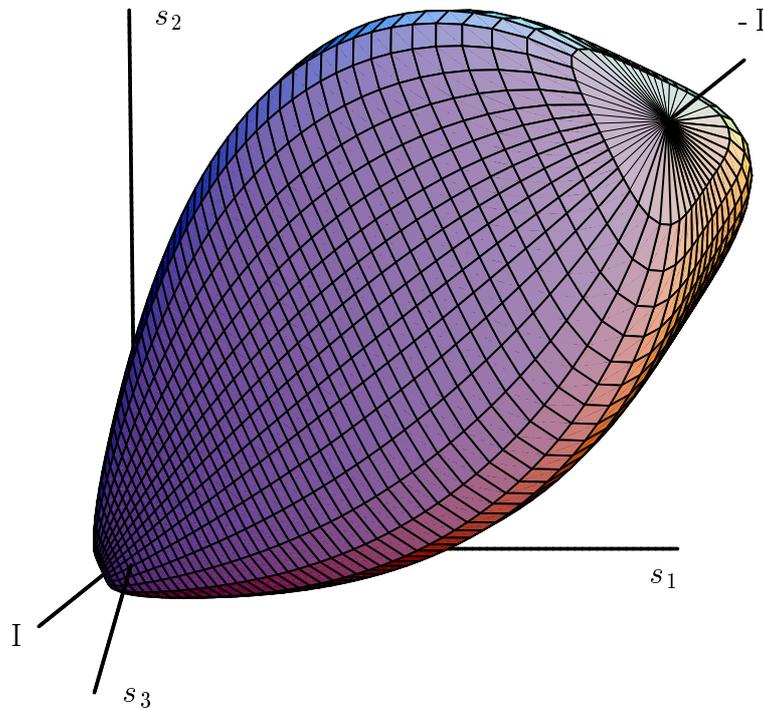


Bild 3.4: Einflächenfließkriterium im Hauptspannungsraum

Durch Nullsetzen einiger Parameter beinhaltet die Fließfläche F aus (3.54) einige klassische Fließbedingungen:

$$\begin{aligned}
 \text{von Mises (1913 [58]): } F_M &= \sqrt{\Pi_D} - \kappa = 0, \\
 \text{Drucker \& Prager (1952 [24]): } F_{DP} &= \sqrt{\Pi_D} + \beta I - \kappa = 0 \\
 \text{Green (1972 [42]): } F_G &= \sqrt{\Pi_D + \frac{1}{2}\alpha I^2} - \kappa = 0.
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Die *von Mises*-Fließbedingung ist für metallische Werkstoffe gebräuchlich, jedoch für Reibungsmaterialien ungenügend, denn die typische Abhängigkeit der Festigkeit von der hydrostatischen Spannung kann mit der *von Mises*-Fließbedingung nicht beschrieben werden. Die *Drucker-Prager*-Fließbedingung berücksichtigt diese Abhängigkeit in linearer Weise. Sie ist für Sand eine häufig benutzte Fließbedingung, jedoch ist bekannt, daß bei großen hydrostatischen Drücken die Festigkeit des Materials mit der *Drucker-Prager*-Fließbedingung in der Regel überschätzt wird.

Zudem bleibt unberücksichtigt, daß Reibungsmaterialien bei großen hydrostatischen Drücken plastifizieren. Die *Greensche* Fließbedingung beinhaltet diesen Effekt, allerdings wird die Festigkeit im Zugbereich durch die symmetrische Form um den Ursprung deutlich überschätzt.

In Bild 3.5 sind die sogenannten deviatorischen Fließradien $r = \sqrt{2\Pi_D}$ der angesprochenen Fließbedingungen in einem Schnitt entlang der hydrostatischen Achse einander gegenübergestellt.

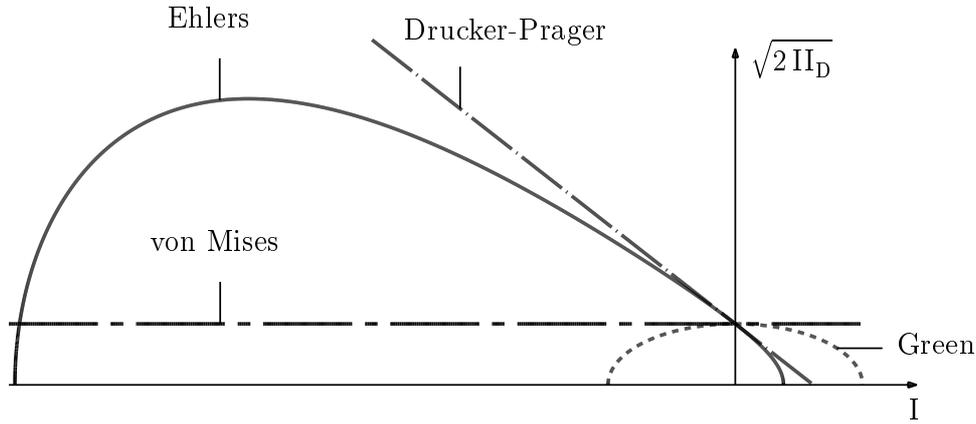


Bild 3.5: Fließbedingungen im Vergleich

In Bild 3.5 ist ersichtlich, daß die *Drucker-Prager*-Fließbedingung für $I = 0$ die Tangente an die *Ehlerssche* Fließbedingung ist.

Die Berücksichtigung der unterschiedlichen Festigkeiten bei triaxialen Kompressions- und Extionsversuchen zeigt sich bei F nach *Ehlers* (3.53) gegenüber den Fließbedingungen (3.56) in der nicht kreisrunden Form in der Deviatorebene. Anstelle des Kreises erhält man ein Dreieck mit abgerundeten Ecken, siehe Bild 3.6.

Mit den *Reußschen* Variablen I , r und

$$\Theta = \frac{1}{3} \arcsin \frac{\sqrt{27} \text{III}_D}{2 \text{II}_D^{3/2}} \quad (3.57)$$

kann eine Variablentransformation von $F = F(I, \text{II}_D, \text{III}_D)$ nach $F = F(I, r, \Theta)$ durchgeführt werden:

$$F = \sqrt{\frac{1}{2} r^2 \left(1 + \gamma \frac{2}{\sqrt{27}} \sin 3\Theta\right)^m + \frac{1}{2} \alpha I^2 + \delta^2 I^4 + \beta I + \epsilon I^2 - \kappa} = 0. \quad (3.58)$$

Auflösen von (3.58) nach r ergibt eine multiplikative Aufspaltung für den deviatorischen Fließradius (vgl. *Ehlers* [27]):

$$\begin{aligned} r(\Theta, I) &= \mathcal{F}_h(I) \mathcal{F}_d(\Theta), \\ \mathcal{F}_h(I) &= \sqrt{2} \sqrt{(\epsilon^2 - \delta^2) I^4 + 2\beta\epsilon I^3 + (\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha - 2\epsilon\kappa) I^2 - 2\beta\kappa I + \kappa^2}, \\ \mathcal{F}_d(\Theta) &= \left(1 + \frac{2}{\sqrt{27}} \gamma \sin 3\Theta\right)^{-m/2}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

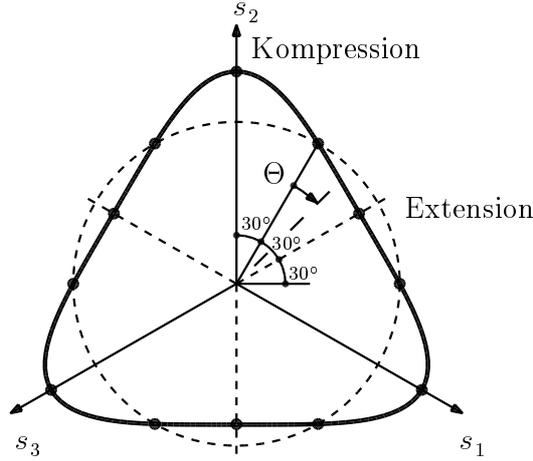


Bild 3.6: Fließbedingung in der Deviatorebene

Aus (3.59) ist direkt ersichtlich, daß die Parameter $\mathcal{P}_h = \{\alpha, \beta, \delta, \epsilon, \kappa\}$ die Form von F in der hydrostatischen Ebene und die Parameter $\mathcal{P}_d = \{\gamma, m\}$ die Form von F in der deviatorischen Ebene bestimmen.

Für die Entwicklung einer Fließbedingung für mikropolares Material wird die nicht-polare Fließbedingung (3.53) als Grundlage genommen. Der nicht-polare Spannungstensor ist identisch mit dem symmetrischen Anteil des mikropolaren Spannungstensors. Daher werden die Invarianten I , II_D und III_D aus (3.54) durch die entsprechenden Invarianten des symmetrischen Anteils von \mathbf{T}_E^S ersetzt:

$$\begin{aligned}
 I &\quad \Longrightarrow \quad I &= \mathbf{T}_E^S \cdot \mathbf{I}, \\
 II_D &\quad \Longrightarrow \quad II_{D \text{ sym}} &= \frac{1}{2} \mathbf{T}_{E \text{ sym}}^{SD} \cdot \mathbf{T}_{E \text{ sym}}^{SD}, \\
 III_D &\quad \Longrightarrow \quad III_{D \text{ sym}} &= \frac{1}{3} \mathbf{T}_{E \text{ sym}}^{SD} \cdot \mathbf{T}_{E \text{ sym}}^{SD} \mathbf{T}_{E \text{ sym}}^{SD}.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Zur Berücksichtigung des schiefsymmetrischen Anteils von \mathbf{T}_E^S und des Momentenspannungstensors \mathbf{M}^S werden zwei neue Invarianten eingeführt:

$$\begin{aligned}
 II_{\text{skw}} &= \frac{1}{2} \mathbf{T}_{E \text{ skw}}^S \cdot \mathbf{T}_{E \text{ skw}}^S, \\
 II_M &= \frac{1}{2} \mathbf{M}^S \cdot \mathbf{M}^S.
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Die Invarianten II_M und II_{skw} werden in Verbindung mit zwei neuen mikropolaren Materialparametern k_1 und k_2 in die mikropolare Fließbedingung \bar{F} aufgenommen (vgl. *Ehlers & Volk* [39]):

$$\begin{aligned}
 \bar{F} = & \sqrt{II_{D \text{ sym}} \left(1 + \gamma \frac{III_{D \text{ sym}}}{II_{D \text{ sym}}^{3/2}}\right)^m + k_2 II_{\text{skw}} \frac{1}{2} \alpha I^2 + \delta^2 I^4 +} \\
 & + \beta I + \epsilon I^2 - \kappa + k_1 \sqrt{II_M} + = 0.
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Der Materialparameter k_2 ist dimensionslos, während k_1 die Einheit [1/m] hat. Neben der Fließbedingung benötigt man zur vollständigen Beschreibung des plastischen Materialverhaltens noch eine Fließregel, die die inkrementelle Entwicklung der plastischen Verzerrung für einen gegebenen Spannungszustand mit plastischem Fließen angibt. Das „Prinzip der maximalen Dissipation“ (z. B. Hill [51]) führt zur Normalität der Fließregel auf die Fließbedingung (assoziiertes Fließen), der Belastungsbedingung und den *Kuhn-Tucker*-Bedingungen der Plastizitätstheorie (vgl. z. B. *Lemaitre & Chaboche* [54] oder *Miehe* [57]):

$$\begin{aligned} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{Sp})'_S &= \dot{\Lambda}^S \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{T}_E^S}, \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{T}_E^S} \cdot (\mathbf{T}_E^S)'_S &> 0, \\ \dot{\Lambda}^S \bar{F} &= 0, \quad \dot{\Lambda}^S \geq 0, \quad \bar{F} \leq 0. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Der Proportionalitätsfaktor $\dot{\Lambda}^S$ wird plastischer Multiplikator genannt. Im Falle einer normierten Fließrichtung erhält man die plastische Weglänge

$$\dot{\Lambda}_n^S = \dot{\Lambda}^S \left(\left\| \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{T}_E^S} \right\| \right)^{-1}. \tag{3.64}$$

In der Literatur wird Gleichung (3.63)₁ auch häufig ohne Zeitableitung von Λ^S angegeben. Mit (3.63)₂₋₄ wird sichergestellt, daß bei Fließwerten kleiner null keine plastische Deformation stattfindet.

Im Rahmen eines viskoplastischen Ansatzes vom *Perzyna*-Typ [65] wird anstelle der *Kuhn-Tucker*-Bedingungen bei Verletzung der Fließbedingung vom sogenannten Überspannungsprinzip Gebrauch gemacht und eine direkte Evolutionsgleichung für den plastischen Multiplikator $\dot{\Lambda}^S$ angegeben:

$$\dot{\Lambda}^S = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{\bar{F}}{F_0} \right\rangle^r. \tag{3.65}$$

Dabei entsprechen η einer Relaxationszeit bei Standardkriechversuchen, F_0 einem Skalierungswert für die Fließbedingung und r einem zusätzlichen Materialparameter (siehe auch *Hartmann et al.* [47]). Die *Föppl*-Klammer $\langle x \rangle$ ist identisch null für $x < 0$ und gleich x für positive x -Werte.

Für Reibungsmaterialien ist bekannt, daß das „Prinzip der maximalen Dissipation“ keine Gültigkeit hat und somit eine nicht-assoziierte Fließregel formuliert werden muß. Dies geschieht durch die konstitutive Einführung eines konvexen plastischen

Potentials \bar{G} , aus dem sich das plastische Verzerrungsinkrement durch Ableitung nach dem Spannungstensor ergibt:

$$\begin{aligned} (\bar{\epsilon}_{Sp})'_S &= \dot{\Lambda}^S \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mathbf{T}_E^S}, \\ \frac{\partial \bar{G}}{\partial \mathbf{T}_E^S} \cdot (\mathbf{T}_E^S)'_S &> 0, \\ \dot{\Lambda}^S \bar{F} &= 0, \quad \dot{\Lambda}^S \geq 0, \quad \bar{F} \leq 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Experimentelle Untersuchungen haben gezeigt, daß Reibungsmaterialien in der Deviatorenebene eine plastische Fließrichtung in der Nähe der coaxialen Richtung zum Spannungszustand aufweisen (*Kim & Lade* [56]). Aus diesem Grund wird angenommen, daß das plastische Potential nicht vom *Lode*-Winkel bzw. von $\text{III}_{D\text{sym}}$ abhängt (vgl. Bild 3.7). Es ist bekannt, daß Reibungsmaterialien im Gegensatz zu vielen metallischen Werkstoffen nicht plastisch Inkompressibel sind. Daher unterscheidet man zwischen spröden oder dilatantem Materialverhalten bei plastischer Volumenvergrößerung und duktilem Materialverhalten bei plastischer Volumenkontraktanz. Der Dilatanzwinkel ν_p gibt die Abweichung des plastischen Verzerrungsinkrements von der deviatorischen (volumenerhaltenden) Richtung an, d. h.

$$\nu_p = \arctan \frac{\|(\bar{\epsilon}_{Sp}^K)'_S\|}{\|(\bar{\epsilon}_{Sp}^D)'_S\|} \quad (3.67)$$

mit

$$\bar{\epsilon}_{Sp}^K = \frac{1}{3}(\bar{\epsilon}_{Sp} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}, \quad \bar{\epsilon}_{Sp}^D = \bar{\epsilon}_{Sp} - \bar{\epsilon}_{Sp}^K. \quad (3.68)$$

Im spröden Bereich würde eine assoziierte Fließrichtung die Dilatanz deutlich überschätzen, so daß in diesem Bereich die betragsmäßige Steigung des plastischen Potentials deutlich kleiner sein muß als der Betrag der Steigung von \bar{F} (siehe Bild 3.7).

Weiterhin ist die Ratenformulierung für die plastische Krümmung bereits durch Gleichung (2.130) als Funktion der plastischen Verzerrungsrate bestimmt. Aus diesem Grund wird angenommen, daß das plastische Potential \bar{G} nicht mehr von der Invarianten II_M des Momentenspannungstensors abhängt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die nicht-assozierte Fließregel im Detail zu postulieren. In *Ehlers & Volk* [36] wurde direkt ein konstitutiver Ansatz für den Dilatanzwinkel ν_p formuliert. In *Diebels et al.* [22] wurden die Anforderungen an die nicht-assozierte Fließregel im spröden Bereich mit Hilfe von bereichsweise definierten Splines erfüllt. In der vorliegenden Arbeit wird für \bar{G} ein zu \bar{F} äquivalenter Ansatz mit modifizierten Parametern getroffen:

$$\bar{G} = \sqrt{\text{II}_{D\text{sym}} + k_2 \text{II}_{\text{skw}} + \frac{1}{2} \alpha_G \text{I}^2 + \delta_G^2 \text{I}^4 + \beta_G \text{I} + \epsilon_G \text{I}^2}. \quad (3.69)$$

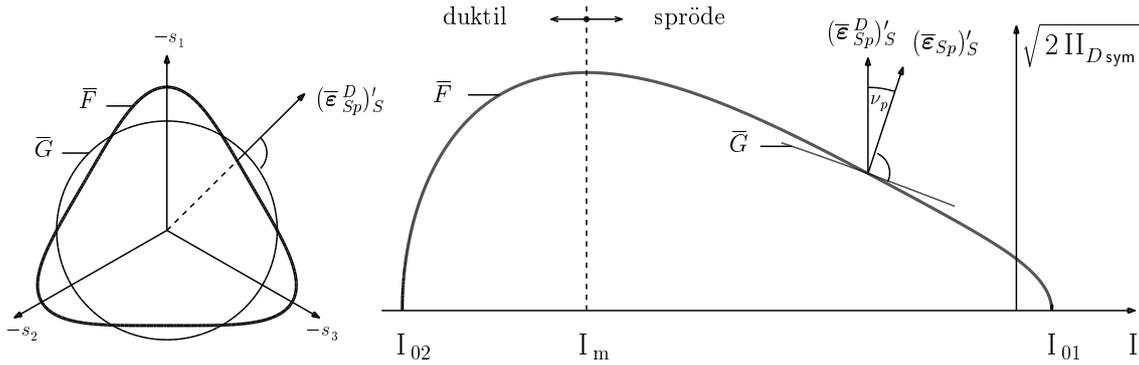


Bild 3.7: Nicht-assoziierte Fließrichtung

Ein κ_G ist nicht erforderlich, da ein konstanter Term bei der Ableitung (3.66)₁ verschwindet. Folgende Anforderungen soll der Parametersatz $\mathcal{P}_G := \{\alpha_G, \beta_G, \delta_G, \epsilon_G\}$ erfüllen:

- Die Grenze zwischen duktilem und sprödem Materialverhalten (rein deviatorisches Fließen) soll mit dem Maximum von \bar{F} in der hydrostatischen Ebene zusammenfallen.
- Die Fließrichtung im spröden Bereich soll zwischen rein deviatorischer und assoziierter Fließrichtung liegen.
- Für Spannungspunkte auf der hydrostatischen Achse soll die Fließrichtung ebenfalls rein hydrostatisch sein.

Beispielhaft wurden für die Fließfläche eines nicht-polaren Materials die folgenden Fließflächenparameter gewählt, die einen bindigen Tonboden beschreiben (siehe *Ehlers* [27, 29] und *Schad* [68]):

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 5,074 \cdot 10^{-3}, & \beta &= 0,1195, & \delta &= 1,001 \cdot 10^{-4} \text{m}^2/\text{kN}, \\
 \epsilon &= 4,3977 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{kN}, & \kappa &= 10,269 \text{kN}/\text{m}^2, & & (3.70) \\
 \gamma &= 1,555, & m &= 0,5935.
 \end{aligned}$$

Die Parameter des plastischen Potentials wurden nach folgenden Kriterien angepaßt:

- Am Übergang von sprödem zu duktilem Materialverhalten sei die Fließrichtung rein deviatorisch ($\nu_p = 0$).
- Im spröden Bereich liegt die Fließrichtung ungefähr in der Mitte zwischen assoziierter und rein deviatorischer Fließrichtung.

- Das plastische Potential muß weiterhin konvex sein.

Der folgende Satz von Materialparametern für das plastische Potential erfüllt die gestellten Forderungen:

$$\begin{aligned} \alpha_G &= \frac{1}{4} \alpha, & \beta_G &= \frac{1}{2} \beta, \\ \delta_G &= 0,6914 \delta, & \epsilon_G &= \frac{1}{2} \epsilon. \end{aligned} \quad (3.71)$$

In Bild 3.8 ist der Dilatanzwinkel für die Parametersätze (3.70) und (3.71) für Spannungspunkte auf der Fließfläche abgebildet.

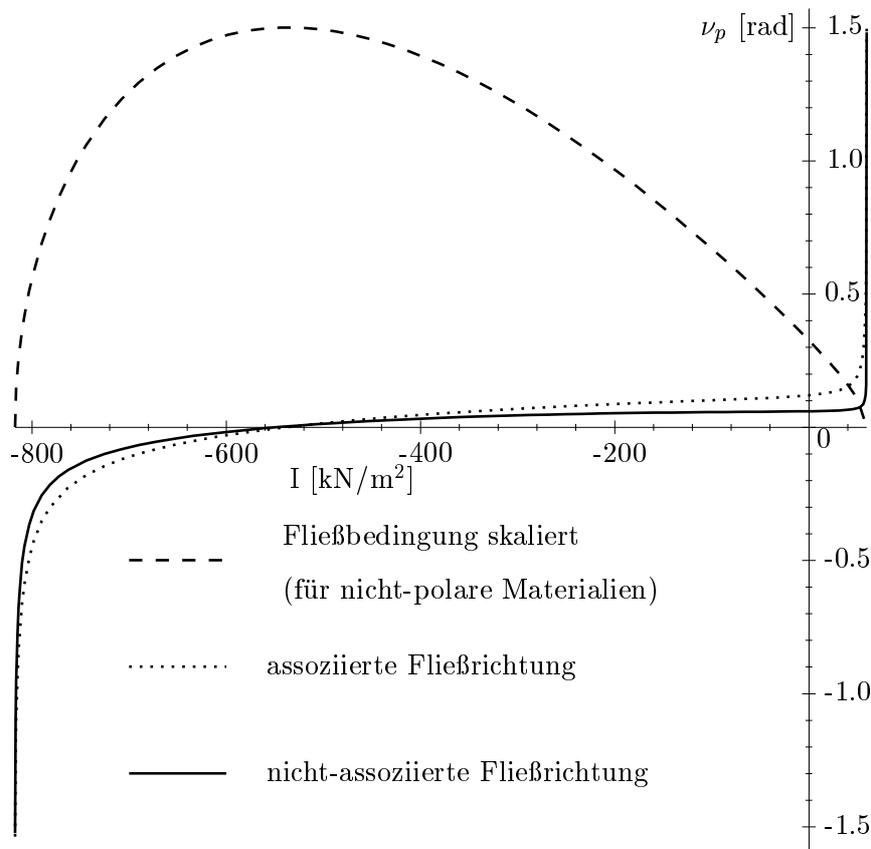


Bild 3.8: Dilatanzwinkel und nicht-assoziierte Fließrichtung

3.6 Motivation der Materialgesetze

In diesem Unterkapitel werden die verwendeten mikropolaren Elastizitätsgesetze anhand einfacher eindimensionaler Betrachtungen auf mikroskopischer Ebene motiviert. Ähnliche Überlegungen sind der Arbeit von *Mühlhaus & Vardoulakis* [60] zu entnehmen.

Ausgangspunkt sind zwei elliptische Scheiben, die durch eine seitliche Kraft f aneinandergedrückt werden. Nach einer Verdrehung der Scheiben gegeneinander um den Winkel $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ wandert der Kontaktpunkt nach unten und es entsteht ein Rückstellmoment m_c , da neben der Kontakttangentialkraft auch die Kontaktnormalkraft einen Hebelarm besitzt (vgl. Bild 3.9).

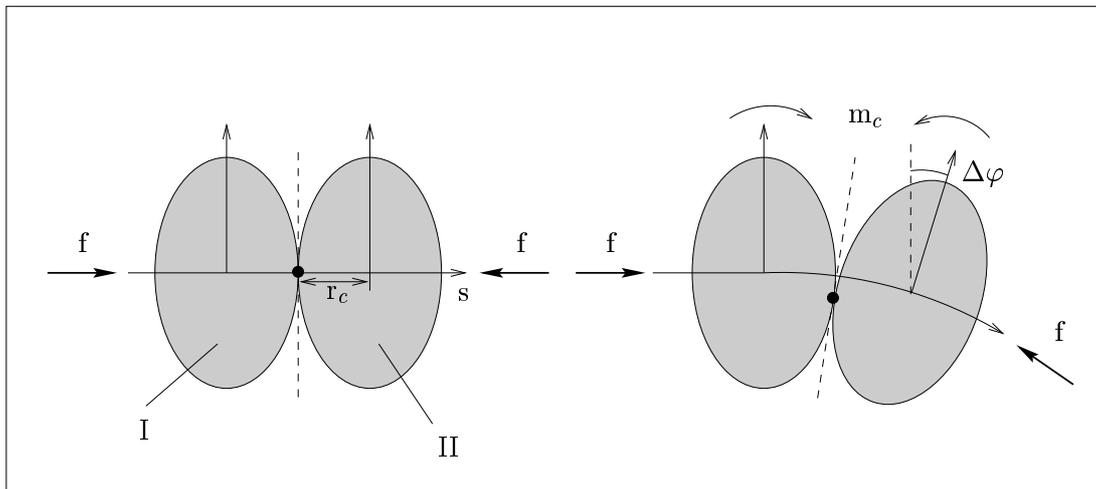


Bild 3.9: Rückstellmoment bei elliptischen Scheiben unter Seitendruck

Die spezielle Wahl der elliptischen Ausgangsgeometrie soll nur exemplarischen Charakter haben. Daher wird eine Transformation auf eine kreisförmige Geometrie durchgeführt, deren Radius r_c im vorliegenden Fall der kleineren Hauptachse der elliptischen Scheibe entsprechen soll. Es wird angenommen, daß das Rückstellmoment m_c der Kontaktnormalkraft in erster Näherung proportional zum relativen Verdrehwinkel $\Delta\varphi$ ist, während bei einer kreisförmigen Geometrie die Kontaktnormalkraft immer zentrisch wirkt und kein Moment verursacht. Die Transformation auf die kreisförmige Ersatzgeometrie macht daraufhin die Einführung einer Drehfeder erforderlich, die ein zusätzliches Rückstellmoment bewirkt, das proportional zu $\Delta\varphi$ ist (siehe Bild 3.10). Die Drehfederkonstante ν_c beschreibt mit dieser Argumentation physikalisch die Zwangskräfte, die bei einer Drehung durch die nicht kreisförmige Ausgangsgeometrie entstehen.

Es wird angenommen, daß die tangentialen Kontaktkräfte, die durch Haftreibung hervorgerufen werden, durch eine Tangentialfeder mit der Steifigkeit ζ_c beschrieben werden können (*Cundall & Strack* [17]). Man beachte, daß durch die Tangentialfeder keine Dissipation durch Gleiten entsteht und der gesamte Deformationsprozeß voll reversibel ist, d. h. es liegt rein elastisches Materialverhalten vor. In Bild (3.11) sind die Kräfte und Momente für die ausgelenkte Ersatzstruktur eingezeichnet.

Nach der Verdrehung ist die Drehfeder gespannt, während die Tangentialfeder noch unbelastet ist. Um das Momentengleichgewicht wiederherzustellen, verdrehen sich

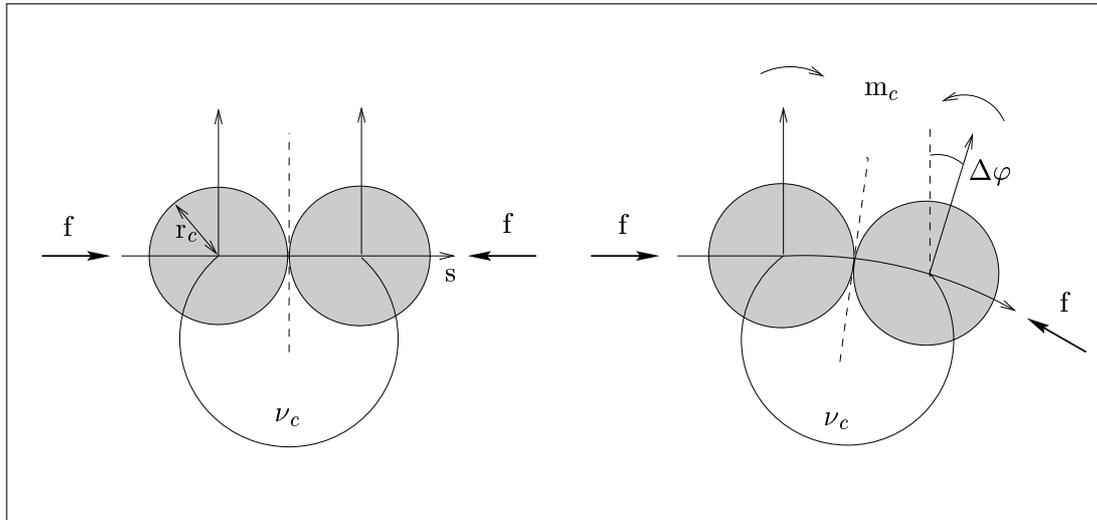


Bild 3.10: Einführung der Drehfeder auf kreisförmiger Geometrie

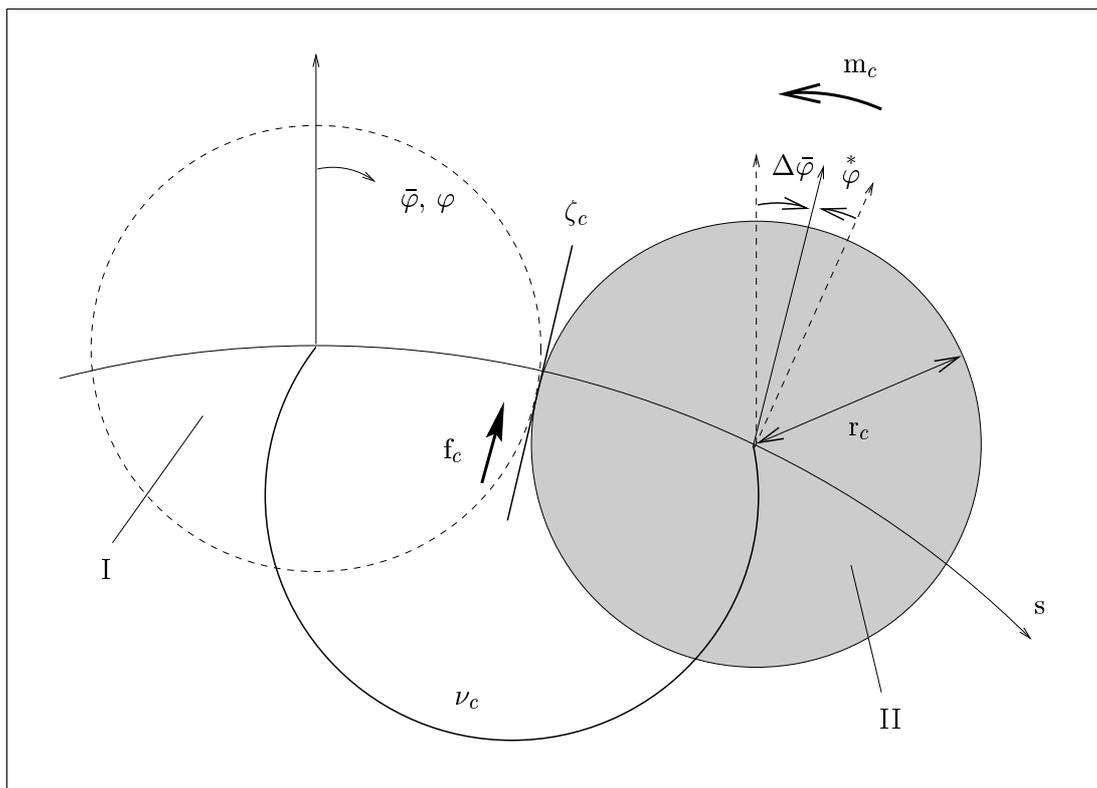


Bild 3.11: Kräfte und Momente auf Ersatzstruktur

die beiden Körper gegeneinander und die Tangentialfeder wird gespannt. Wenn das

Moment infolge der Tangentialkraft das Moment der Drehfeder egalisiert, ist die statische Ruhelage erreicht. Das Moment m_c hat dann den Wert

$$m_c = \nu_c (\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1) = \Delta \bar{\varphi}. \quad (3.72)$$

Die Entwicklung des Winkelinkrements $\Delta \bar{\varphi}$ über dem Linienparameter s liefert:

$$\Delta \bar{\varphi} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s} \Delta s, \quad \Delta s = 2 r_c. \quad (3.73)$$

Einsetzen der Beziehungen (3.73) in (3.72) ergibt für das Moment m_c

$$m_c = 2 \nu_c r_c \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s}. \quad (3.74)$$

Die Tangentialkraft f_c genügt der folgenden Beziehung:

$$f_c = \zeta_c r_c \overset{*}{\varphi}, \quad \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_2 - \varphi_2. \quad (3.75)$$

Es wird nun vorausgesetzt, daß der Momentenspannungsvektor \mathbf{m} den mittleren Momenten m_c auf einem Flächenelement $d\mathbf{a}$ mit der Flächennormalen \mathbf{n} entspricht und daß sich der Momentenspannungstensor \mathbf{M} durch ein *Cauchy*-Theorem für die Momente ergibt:

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} \mathbf{n}. \quad (3.76)$$

Im Rahmen einer quasistatischen Betrachtungsweise der Drallbilanz wird die Divergenz der Momentenspannungen durch den schiefsymmetrischen Anteil des Spannungszustands ins Momentengleichgewicht gebracht, vgl. (2.141). Im Beispiel aus Bild 3.11 sind die äußeren Ränder momentenspannungsfrei und das Moment m_c entspricht demnach dem Momentenfluß und steht somit in Analogie zum kontinuumsmechanischen Divergenzterm. Nun wird m_c im vorliegenden Beispiel durch das Moment infolge der Tangentialkraft ins Gleichgewicht gebracht, so daß der Analogieschluß naheliegt, daß die mittlere Tangentialkraft f_c pro Flächenelement $d\mathbf{a}$ die gleiche Bedeutung wie der schiefsymmetrische Anteil des Spannungstensors \mathbf{T}_{skw} in der kontinuumsmechanischen Beschreibung hat.

Ein Vergleich von (3.74) und (3.75) mit den elastischen Gesetzen der Momentenspannungen (3.50) bzw. der Spannungen (3.45) zeigt mit den genannten Überlegungen interessante Analogien. Die Verallgemeinerung der Linienableitung des Winkels $\bar{\varphi}$ ergibt den Gradienten, der im konstitutiven Ansatz der Momentenspannungen vorhanden ist. Der Proportionalitätsfaktor $2 \mu_c l_c^2$ beinhaltet nach dieser Argumentation sowohl Information über mittlere Partikelgröße und Partikelform. Die Tangentialfederkraft entspricht in diesem Zusammenhang dem schiefsymmetrischen Anteil des

Spannungstensors und ist proportional zum freien Rotationsfeld, sofern rein elastisches Materialverhalten vorausgesetzt wird. Der Proportionalitätsfaktor μ_c wird demnach durch den mittleren Teilchenradius und das lokale mechanische Kontaktverhalten bestimmt. Durch die Kopplung der drei fundamental unterschiedlichen mikroskopischen Eigenschaften, Partikelgröße, Partikelform und Kontaktgesetz in den Materialparametern μ_c und l_c , ist es prinzipiell unmöglich, in den etablierten Materialgesetzen die genannten Einflußgrößen zu separieren.

Zusammenfassend lassen sich die folgenden Aussagen gewinnen:

- Die mittlere Partikelform und Lagerungsdichte bestimmt die Drehfedersteifigkeit ν_c .
- Die mittlere Partikelgröße wird durch r_c bestimmt.
- Das lokale mikroskopische Kontaktverhalten wird durch die Steifigkeit ζ_c der Tangentialfeder wiedergegeben.
- Für den mikropolaren Materialparameter μ_c ergibt sich der Zusammenhang

$$\mu_c \sim \zeta_c r_c. \quad (3.77)$$

- Die interne Länge l_c repräsentiert das Verhältnis aus Drehfedersteifigkeit und Tangentialfedersteifigkeit:

$$l_c \sim \sqrt{\frac{\nu_c}{\zeta_c}}. \quad (3.78)$$

3.6.1 Gradiententheorie erster Ordnung

Ein interessanter Fall entsteht, wenn man die Steifigkeit der Tangentialfeder gegen unendlich gehen läßt. Dies bedeutet eine Übertragung der klassischen Annahme, daß Haftreibung nicht mit Deformationen verbunden ist, auf den Mikrobereich. Dies hat zur Folge, daß die freie Rotation $\overset{*}{\varphi}$ gegen null strebt. In der mikropolaren TPM entspricht dies nach den Überlegungen des vorhergehenden Unterkapitels einem unendlich großen μ_c in Verbindung mit einem verschwindenden freien Rotationsfeld $\overset{*}{\varphi}$:

$$\zeta_c \rightarrow \infty \iff \overset{*}{\varphi} \rightarrow 0, \quad \mu_c \rightarrow \infty \iff \overset{*}{\varphi} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (3.79)$$

Das mikropolare Verzerrungsmaß wird mit diesen Annahmen symmetrisch, und das mikropolare Krümmungsmaß entspricht der klassischen Krümmung:

$$\bar{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon, \quad \bar{\kappa} = \kappa = \text{grad } \varphi. \quad (3.80)$$

Der schiefsymmetrische Anteil des Spannungstensors \mathbf{T}_{skw} wird vom Verschiebungsfeld unabhängig und kann trotz eines symmetrischen Verzerrungsfelds ungleich null sein. Prinzipiell hat \mathbf{T}_{skw} dann die Bedeutung eines *Lagrange*-Multiplikators wie z. B. auch der Porendruck bei der hydrostatischen Belastung eines porösen Mediums mit inkompressiblem Porenfluid (vgl. auch *Steinmann & Stein* [78]). Im quasistatischen Fall kann \mathbf{T}_{skw} dann aus der Drallbilanz berechnet werden:

$$\mathbf{T}_{\text{skw}} = \frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} \operatorname{div} \mathbf{M}. \quad (3.81)$$

Die quasistatische Impulsbilanz erhält mit Hilfe von (3.81) die Form:

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_{\text{sym}} + \frac{1}{2} \operatorname{div} (\overset{3}{\mathbf{E}} \operatorname{div} \mathbf{M}) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (3.82)$$

Eine allgemeine Fließbedingung kann dann neben einer Abhängigkeit vom symmetrischen Anteil des Spannungstensors auch vom Momentenspannungstensor und dem schiefsymmetrischen Anteil \mathbf{T}_{skw} beeinflusst werden. Durch diese zusätzlichen Abhängigkeiten tritt in der Fließbedingung bzw. Fließregel neben der Abhängigkeit von der Verzerrung auch eine Abhängigkeit vom Verzerrungsgradienten auf.

Für eine numerische Simulation mit der Methode der finiten Elemente (vgl. Kapitel 4) bieten sich für die vorgestellte Gradiententheorie erster Ordnung drei verschiedene Umsetzungsmöglichkeiten an:

1. Die zusätzliche rotatorische Primärvariable $\bar{\varphi}$ wird durch \mathbf{T}_{skw} ersetzt. An der Anzahl der Freiheitsgrade ändert sich gegenüber der mikropolaren Formulierung nichts, lediglich die Anzahl der zusätzlichen Materialparameter reduziert sich, da für \mathbf{T}_{skw} kein konstitutiver Ansatz getroffen werden muß. Dies ist der physikalisch korrekteste Weg und dürfte für die beiden folgenden vereinfachenden Ansätze als Referenzlösung dienen.
2. Als Vereinfachung kann versucht werden, \mathbf{T}_{skw} nicht als globalen Freiheitsgrad, sondern als elementlokalen Freiheitsgrad einzuführen und mit Hilfe der sogenannten statischen Kondensation wieder zu eliminieren. Sofern vergleichbare Ergebnisse zu 1. erzielt werden, liegt der Vorteil dieser Variante in einer deutlich reduzierten Anzahl von globalen Primärvariablen.
3. Die größte Vereinfachung ist die prinzipielle Vernachlässigung von \mathbf{T}_{skw} in der Impulsbilanz. Inwieweit sich dieser systematische Fehler negativ auf die Ergebnisse auswirkt, muß noch untersucht werden.

Kapitel 4

Numerische Umsetzung

Mit den Bilanz- und Konstitutivgleichungen aus den vorhergehenden Kapiteln steht der beschreibende Satz von Differentialgleichungen zur Verfügung, die für ein gegebenes Anfangsrandwertproblem (ARWP) nach dem Primärvariablensatz $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_S, \mathbf{w}_F, p, \bar{\varphi}_S)^T$ gelöst werden sollen. In der Regel ist das ARWP nicht mehr analytisch lösbar, so daß numerische Lösungsmethoden angewendet werden müssen. Grundlagen zur numerischen Simulation eines ARWPs mit der Methode der finiten Elemente (FEM) sind die schwachen Formulierungen der beschreibenden Bilanzgleichungen, die für konservative statische Systeme auch aus einem Variationsfunktional hergeleitet werden können (vgl. *Steinmann* [75]).

4.1 Schwache Formen der Bilanzgleichungen

Für das binäre, mikropolare, quasistatische Modell mit inkompressiblen Konstituierenden werden die Inkompressibilitätsbedingung (3.32), die Impulsbilanz des gesamten Zweiphasenkontinuums als Summe der partialen Impulsbilanzen (3.34)₁ und (3.34)₂, die Impulsbilanz des Porenfluids (3.34)₂ sowie die Drallbilanz der Festkörperphase in der Form (3.36)₂ als beschreibende Bilanzgleichung gewählt:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} (n^F \mathbf{w}_F + \overset{l}{\mathbf{x}}_S), \\ \mathbf{0} &= \operatorname{div} \mathbf{T}^I + (\rho^F + \rho^S) \mathbf{g}, \\ \mathbf{0} &= \operatorname{div} (-n^F p \mathbf{I}) + \rho^F \mathbf{g} + \hat{\mathbf{p}}^F, \\ \mathbf{0} &= \operatorname{div} \mathbf{M}^S + \mathbf{I} \times \mathbf{T}^S. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Darin ist \mathbf{T}^I als „innerer Anteil“ des Spannungstensors \mathbf{T} aus (3.21) die aus \mathbf{T}^S und \mathbf{T}^F unter Berücksichtigung von $\mathbf{T}^F = -n^F p \mathbf{I}$ gebildete Spannungssumme. Die Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_F kann aus dem Primärvariablensatz eliminiert werden, indem die Impulsbilanz (4.1)₃ des Fluids mit den Konstitutivannahmen (3.37), (3.39)

und (3.45) nach der Filtergeschwindigkeit $\mathbf{n}^F \mathbf{w}_F$ aufgelöst und das Ergebnis in die Inkompressibilitätsbedingung (4.1)₁ eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^F \mathbf{w}_F &= -\frac{k^F}{\gamma^{FR}} (\text{grad } p - \rho^{FR} \mathbf{g}), \\ \implies 0 &= -\frac{k^F}{\gamma^{FR}} \text{div}(\text{grad } p - \rho^{FR} \mathbf{g}) + \text{div } \overset{!}{\mathbf{x}}_S. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Um zur schwachen Formulierung der lokalen Bilanzgleichungen zu gelangen, werden die Gleichungen (4.1)₂, (4.1)₄ und (4.2)₂ folgender Prozedur unterworfen (vgl. *Diebels & Ehlers* [20] bzw. *Ehlers & Volk* [36]):

- Multiplikation mit Testfunktionen $\delta \mathbf{u} \in \{\delta \mathbf{u}_S, \delta p, \delta \bar{\varphi}_S\}$.
- Umwandlung der lokalen (starken) Bilanzgleichung in die schwache Form durch Integration über das gesamte Volumen.
- Mit Hilfe partieller Integration (Auswertung des Divergenztheorems erfolgt eine Umwandlung der Integrale, die einen Divergenzterm enthalten, in ein Oberflächenintegral (*Gaußscher Integralsatz*) und ein Volumenintegral, bei dem die örtliche Ableitung auf die Testfunktionen $\delta \mathbf{u}$ übergegangen ist.

Dieses Vorgehen sei exemplarisch für die Impulsbilanz des Zweiphasenkontinuums durchgeführt:

Multiplikation von (4.1)₂ mit der Testfunktion $\delta \mathbf{u}_S$ liefert

$$0 = \text{div } \mathbf{T}^I \cdot \delta \mathbf{u}_S + (\rho^F + \rho^S) \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u}_S. \quad (4.3)$$

Durch Integration über das gesamte Volumen ergibt sich die schwache Form

$$0 = \int_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{T}^I \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv + \int_{\mathcal{V}} (\rho^F + \rho^S) \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv. \quad (4.4)$$

Auswertung des Divergenztheorems und des *Gaußschen Integralsatzes*, d. h. partielle Integration der Form

$$\int_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{T}^I \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{T}^I \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, da - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T}^I \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S \, dv \quad (4.5)$$

mit \mathbf{n} als dem nach außen gerichteten Oberflächennormaleneinheitsvektor führt schließlich zu

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{T}^I \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u}_S \, dv - \int_{\mathcal{V}} (\rho^F + \rho^S) \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{T}^I \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, da. \quad (4.6)$$

Ein analoges Vorgehen für die Inkompressibilitätsbedingung liefert mit der Testfunktion δp das Ergebnis

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \frac{k^F}{\gamma^{FR}} (\text{grad } p - \rho^{FR} \mathbf{b}) \cdot \text{grad } \delta p \, dv + \int_{\mathcal{V}} \text{div } \overset{!}{\mathbf{x}}_S \delta p \, dv &= \\ &= \int_S \frac{k^F}{\gamma^{FR}} (\text{grad } p - \rho^{FR} \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} \delta p \, da. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Schließlich erhält man für die schwache Form der Drallbilanz mit den Testfunktionen $\delta \bar{\varphi}_S$

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{I} \times \mathbf{T}) \cdot \delta \bar{\varphi}_S \, dv - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{M}^S \cdot \text{grad } \delta \bar{\varphi}_S \, dv = \int_S \mathbf{M}^S \mathbf{n} \cdot \delta \bar{\varphi}_S \, da. \quad (4.8)$$

Mit den Oberflächenintegralen in (4.6)-(4.8) können die Randbedingungen des Anfangswertproblems in expliziter Form berücksichtigt werden.

4.2 Orts- und Zeitdiskretisierung

4.2.1 Ortsdiskretisierung

Die schwachen Formulierungen (4.6)-(4.8) sind kontinuierliche Gleichungen, die auf dem gesamten Körper \mathcal{B} definiert sind. Für die Anwendung der Finite-Elemente-Methode ist daher eine Ortsdiskretisierung erforderlich, die folgendermaßen eingeführt wird:

Zuerst wird der Gesamtkörper \mathcal{B} in eine endliche Anzahl von abgeschlossenen Teilkörpern $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, N$ (Elemente) zerteilt. Die Vereinigung aller \mathcal{B}_i muß wieder den Gesamtkörper \mathcal{B} ergeben, d. h. jeder materielle Punkt \mathbf{X} gehört zu genau einem \mathcal{B}_i , wenn der Punkt innerhalb eines Teilkörpers liegt. Er kann zu mehreren Teilkörpern gehören, wenn er auf dem Rand eines Teilkörpers liegt. Die geometrische Zerteilung erfolgt durch die Auswahl spezieller Punkte, den sogenannten Knoten, deren Verbindungen miteinander als Kanten bezeichnet werden.

In einem nächsten Schritt wird der Primärvariablensatz \mathbf{u} mit Hilfe geeigneter Ansatzfunktionen \mathbf{N}^i und Multiplikatoren \mathbf{u}^i angenähert:

$$\mathbf{u} = \sum_i^m \mathbf{N}^i \mathbf{u}^i. \quad (4.9)$$

Setzt man den Ansatz (4.9) in die starken Bilanzgleichungen (4.1) ein, so werden diese im allgemeinen nicht mehr identisch erfüllt sein, und es verbleibt ein Residuum.

Wird nun gefordert, daß dieses Residuum, multipliziert mit gewissen Testfunktionen, im Integral über ein Element verschwindet, erhält man die Methode der gewichteten Residuen. Dies entspricht dem Einsetzen des Ansatzes (4.9) in die schwachen Formulierungen (4.6)-(4.8) und der Aufspaltung des Gesamtintegrals in Teilintegrale über die einzelnen Elemente. Wird zusätzlich der Satz der Testfunktionen $\delta \mathbf{u}$ mit den gleichen Ansatzfunktionen \mathbf{N}^i wie der Primärvariablensatz \mathbf{u} approximiert, ergibt sich das Standard-*Galerkin*-Verfahren, (siehe *Bathe* [2], *Schwarz* [73] oder *Zienkiewicz & Taylor* [86]):

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{N}^i. \quad (4.10)$$

Werden zudem die Knoten, mit denen die Geometrie gebildet wurde, auch zur Definition der Ansatzfunktionen verwendet, spricht man vom isoparametrischen Konzept. In diesem Fall können die Multiplikatoren \mathbf{u}^i aus (4.9) mit dem Wert der Primärvariablen an den Knotenpunkten identifiziert werden. Dieses Konzept hat gewisse numerische Vorteile (siehe z. B. *Schwarz* [73]) und soll aus diesem Grund im folgenden verwendet werden. Sofern die Approximation der Primärvariablen über Elementgrenzen hinweg stetig ist, wird von konformen Elementen gesprochen.

Es gibt grundsätzlich zwei unterschiedliche Arten von Randbedingungen. Die direkte Vorgabe der Primärvariablen wird als *Dirichlet*-Randbedingungen bezeichnet. Für Randstücke mit *Dirichlet*-Randbedingungen werden die Testfunktionen $\delta \mathbf{u}$ zu Null gesetzt. Die andere Möglichkeit ist die Vorgabe von verallgemeinerten Kraftrandbedingungen (*Neumann*-Randbedingungen). Für Randstücke mit Kraftrandbedingungen müssen die Oberflächenintegrale in (4.6)-(4.8) ausgewertet werden. Es darf jedoch nur eine Art von Randbedingung vorgegeben werden, d. h. die gleichzeitige Vorgabe von *Dirichlet*- und *Neumann*-Randbedingungen am selben Randstück ist verboten. Wird keine Randbedingung spezifiziert, entspricht dies einer Vorgabe einer Nullkraftrandbedingung.

Die Integration der gewichteten Residuen erfolgt durch numerische Integrationsformeln. Dabei wird an q ausgewählten Punkten (den Integrationspunkten) der Integrand ausgewertet. Die Multiplikation mit Integrationsgewichten w_q ergibt dann eine Näherung des Ausgangsintegrals

$$\int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^q w_i f(P^i). \quad (4.11)$$

Die Anzahl q der Integrationspunkte P^i wird in der Regel so gewählt, daß bei idealer Wahl der Position der Integrationspunkte gerade ein Polynom der Ordnung exakt integriert wird, das durch Einsetzen der Ansätze (4.9) und (4.10) in die schwachen Formen (4.6)-(4.8) entsteht. Werden weniger Integrationspunkte gewählt, erhält man eine Unterintegration, die bei gewissen Anwendungen von Vorteil sein kann.

Im Detail werden zur Ortsdiskretisierung 6-Knoten-Dreieckelemente mit drei Integrationspunkten verwendet. Dabei wird die Festkörperverschiebung \mathbf{u}_S mit Hilfe aller sechs Knoten quadratisch und der Porendruck p sowie die Gesamtrotation $\bar{\varphi}_S$ mit Hilfe der drei Eckknoten jeweils linear angesetzt (siehe auch Bild 4.1):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_S &= \sum_{i=1}^6 Q^i \mathbf{u}_S^i, \\ p &= \sum_{i=1}^3 L^i p^i, \\ \bar{\varphi}_S &= \sum_{i=1}^3 L^i \bar{\varphi}_S^i.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Darin sind Q^i und L^i jeweils die vollständigen quadratischen bzw. linearen Ansatzfunktionen, die der Literatur (z. B. *Schwarz* [73]) entnommen werden können.

Der lineare Ansatz der Gesamtrotation $\bar{\varphi}_S$ führt nach Gleichung (2.91)₂ zu einem linearen Verzerrungstensor $\bar{\epsilon}_S$.

Im Rahmen plastischen Materialverhaltens müssen zusätzlich noch sogenannte Geschichtsvariablen \mathbf{q} eingeführt werden, da sich z. B. das plastische Verzerrungsfeld nicht direkt aus dem Verschiebungs- und Rotationsfeld berechnen läßt, sondern durch zeitliche Integration der Fließregel (3.66) bestimmt werden muß. Das plastische Verzerrungsfeld $\bar{\epsilon}_{Sp}$ ergibt sich somit

$$\bar{\epsilon}_{Sp} = \int_t \dot{\bar{\epsilon}}_{Sp} d\tau.\tag{4.13}$$

Üblicherweise wird für die räumliche Approximation des plastischen Verzerrungsfeldes nicht das Standard-*Galerkin*-Verfahren, sondern die Punkt-Kollokationsmethode (siehe *Zienkiewicz & Taylor* [86]) verwendet. Bei der Punkt-Kollokationsmethode wird die exakte Übereinstimmung der Residuen an ausgewählten Punkten, sinnvollerweise den Integrationspunkten, gefordert.

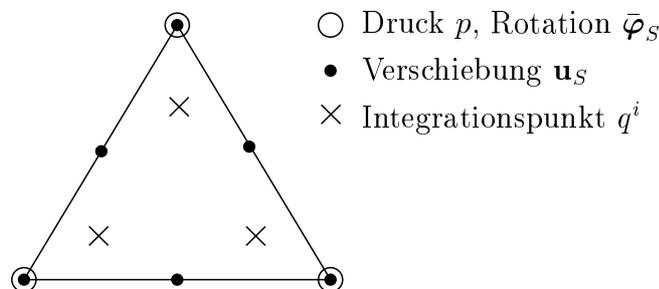


Bild 4.1: 6-Knoten-Dreieckelement

Dies geschieht prinzipiell durch Identifikation der Testfunktion in der schwachen Form der Fließregel mit der *Dirac- δ* -Distribution an den Integrationspunkten. Die *Dirac- δ* -Distribution an einer Stelle x_0 ist folgendermaßen definiert:

$$\delta(x)|_{x=0} = \infty, \quad \delta(x)|_{x \neq 0} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (4.14)$$

Der Nachteil der Punkt-Kollokationsmethode ist das Fehlen jeglicher Information über den Verlauf des plastischen Verzerrungsfeldes in der Umgebung eines Integrationspunkts. Somit ist die Bildung eines Gradienten prinzipiell unmöglich. Für die Berechnung der plastischen Krümmungsrate nach Gleichung (2.130) wird jedoch gerade der Gradient der plastischen Verzerrungsrate benötigt. Somit ist die Punkt-Kollokationsmethode für mikropolare Materialien in der üblichen Form nicht anwendbar.

Es gibt zwei prinzipiell unterschiedliche Lösungsansätze, um Informationen über den Gradienten von Geschichtsvariablen zu erhalten. Zum einen kann die Fließregel in eine schwache Form überführt werden und dann mit dem Standard-*Galerkin*-Verfahren gelöst werden. Diese Möglichkeit hat jedoch den Nachteil, daß die numerische Behandlung der Ungleichheitsrestriktionen (3.66)₃ zu sehr großen Schwierigkeiten führt.

Erfolgversprechender erscheint eine verallgemeinerte Punkt-Kollokationsmethode zu sein. Bei dieser Methode wird das plastische Verzerrungsfeld in jedem Element mit Hilfe von Ansatzfunktionen approximiert. Die diskreten Werte des plastischen Verzerrungsfeldes an den Elementknoten müssen so gewählt werden, daß an den Integrationspunkten eine exakte Übereinstimmung mit der kontinuierlichen Lösung vorliegt. Diese Anpassung erfolgt unabhängig für jedes Element, mit der Folge eines unstetigen Verlaufs des plastischen Verzerrungsfeldes über Elementgrenzen hinweg. Diese Tatsache ist jedoch nicht schwerwiegend, denn sowohl das plastische Verzerrungsfeld als auch dessen Gradient müssen nur an den Integrationspunkten, an denen das plastische Verzerrungsfeld per Definition eine exakte Übereinstimmung mit der kontinuierlichen Lösung hat, ausgewertet werden. Für das algorithmische Vorgehen hat die erweiterte Punkt-Kollokationsmethode weitreichende Auswirkungen, auf die im folgenden noch detailliert eingegangen wird.

Weiterhin ist bei einem linearen oder bilinearen Ansatz für das plastische Verzerrungsfeld die *Beltrami-Mitchell*-Kompatibilitätsbedingung (2.98) in jedem Fall identisch erfüllt. Somit kann der in Kapitel 2.6 angesprochene Zerschneidungsprozeß mit spannungsfreien Teilkörpern durch Schnitte entlang der Elementkanten erreicht werden. Die Differenzierbarkeit innerhalb eines jeden Elements ist somit mit den o. g. Annahmen sichergestellt.

Für ein diskretisiertes Modell mit N_u Knoten und N_q Integrationspunkten werden die Primärvariablen (Festkörperverschiebung \mathbf{u}_S , Porendruck p und Gesamtrotation

$\bar{\varphi}_S$) an den einzelnen Knoten in einem Vektor \mathbf{u} und die Geschichtsvariablen (plastische Verzerrung $\bar{\epsilon}_{Sp}$ und zeitintegrierter plastischer Multiplikator Λ) der einzelnen Integrationspunkte in einem Vektor \mathbf{q} gesammelt, die zusammen den Vektor der Unbekannten \mathbf{y} ergeben (*Diebels et al.* [22], *Ehlers & Ellsiepen* [32, 33]):

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (\mathbf{u}_S^1, p_S^1, \bar{\varphi}_S^1, \dots, \mathbf{u}_S^{N_u}, p_S^{N_u}, \bar{\varphi}_S^{N_u})^T, \\ \mathbf{q} &= (\bar{\epsilon}_{Sp}^1, \Lambda^1, \dots, \bar{\epsilon}_{Sp}^{N_q}, \Lambda^{N_q})^T, \\ \mathbf{y} &= (\mathbf{u}^T, \mathbf{q}^T)^T.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Der zeitintegrierte plastische Multiplikator Λ ist im strengen Sinne keine Geschichtsvariable. Da neben der Fließregel jedoch noch die Fließbedingung in Verbindung mit den *Kuhn-Tucker*-Bedingungen als algebraische Nebenbedingung zu erfüllen ist, wird der zeitintegrierte plastische Multiplikator als zusätzliche Geschichtsvariable eingeführt, so daß die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Variablen an den Integrationspunkten wieder übereinstimmt. Im Falle der Viskoplastizität kann Λ aus dem Satz der Geschichtsvariablen gestrichen werden, da hier die Bestimmungsgleichung für $\dot{\Lambda}$ in die Fließregel eingesetzt werden kann.

Das semi-diskrete Differentialgleichungssystem (ortsdiskret, zeitkontinuierlich) kann damit in die folgende Form gebracht werden (*Ehlers & Ellsiepen* [32, 33]):

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}'_S) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}'_S, \mathbf{q}) \\ \mathbf{F}_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}'_S, \mathbf{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{u}'_S + \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{q}) - \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{A}\mathbf{q}'_S - \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \end{pmatrix} = \mathbf{0}.\tag{4.16}$$

Die Anfangsrandwertbedingung des Problems lautet

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.\tag{4.17}$$

Gleichung \mathbf{F}_1 stellt die ortsdiskrete Zusammenfassung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen (4.6)-(4.8) dar (äußeres oder globales Gleichungssystem). Darin ist \mathbf{M} die verallgemeinerte Massenmatrix, die als Koeffizientenmatrix der höchsten auftretenden Ableitungen des Primärvariablenvektors \mathbf{u} definiert ist, \mathbf{k} wird als verallgemeinerter Steifigkeitsvektor bezeichnet, und \mathbf{f} beinhaltet die verallgemeinerten äußeren Kräfte, die nur zeitabhängig sein sollen. Gleichung \mathbf{F}_2 repräsentiert die ortsdiskreten Evolutionsgleichungen der internen (plastischen) Geschichtsvariablen an den Integrationspunkten (inneres oder lokales Gleichungssystem). Die Matrix \mathbf{A} entspricht für elastisch-plastisches Materialverhalten einer Einheitsmatrix, die für jeden Integrationspunkt um eine Nullzeile erweitert wurde. Damit wird dem algebraischen Nebenbedingungscharakter der Fließbedingung Rechnung getragen. Für das elastisch-viskoplastische Materialverhalten ist \mathbf{A} identisch mit der Einheitsmatrix.

Unter der Voraussetzung quasi-statischen, elastisch-plastischen Materialverhaltens besitzen \mathbf{M} und \mathbf{A} nicht den vollen Rang, so daß die Gleichungen (4.16) und

(4.17) sowohl für die globalen als auch die lokalen Gleichungen ein differential-algebraisches System (DAE) ergeben. Für das elastisch-viskoplastische Materialverhalten beschränkt sich der DAE-Charakter nur auf die globalen Gleichungen von (4.16) und (4.17).

4.2.2 Zeitdiskretisierung

Unter der Zeitdiskretisierung wird die numerische Integration der zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichungen bezüglich der Zeit verstanden.

Für einphasige Materialien fehlt die verallgemeinerte Massenmatrix \mathbf{M} in der Regel völlig, da keine Inkompressibilitätsbedingung in der Form (4.7) zu berücksichtigen ist. In diesem Fall wird die Fließregel üblicherweise mit dem unbedingt stabilen impliziten *Euler*-Verfahren integriert.

Für DAEs gelten höhere Stabilitätsanforderungen an den Zeitintegrator als für gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE). Das implizite *Euler*-Verfahren bleibt normalerweise anwendbar, jedoch darf die Zeitschrittweite nicht zu groß gewählt werden, denn *Diebels et al.* [22] haben gezeigt, daß aufgrund der Stabilität des impliziten *Euler*-Verfahrens bei zu großen Schrittweiten eine numerische Lösung gefunden werden kann, die sehr weit von der echten Lösung entfernt ist.

Alternativ wird dort vorgeschlagen, das DAE-System (4.16) und (4.17) mit mehrstufigen diagonalimpliziten *Runge-Kutta*-Verfahren numerisch zu integrieren, da in diesem Fall ein zeitadaptives Vorgehen basierend auf einen eingebetteten Fehlerschätzer möglich ist (siehe *Ehlers & Ellsiepen* [32, 33] sowie *Diebels et al.* [22]).

Im folgenden soll jedoch eine Beschränkung auf das implizite *Euler*-Verfahren mit der Forderung hinreichend kleiner Zeitschrittweiten stattfinden. Das zeitdiskrete Gleichungssystem für den Zeitpunkt t_{n+1} , ausgehend von einem im Gleichgewicht befindlichen Zustand $\mathbf{F}(t_n, \mathbf{y}_n, \frac{\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}) = \mathbf{0}$, lautet demnach

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\Delta t, \Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{q}) \\ \mathbf{r}_2(\Delta t, \Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{k}(\mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}, \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}) - \mathbf{f}_{n+1} \\ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{A} \Delta \mathbf{q} - \mathbf{g}(\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}, \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

mit den Abkürzungen

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n, \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n, \quad \Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n. \quad (4.19)$$

4.2.3 Algorithmisches Vorgehen

Zur Lösung des nicht-linearen Gleichungssystems (4.18) bietet sich aufgrund der speziellen Struktur ein sogenannter Operatorsplit an (siehe z. B. *Miehe* [57] oder

Simo & Hughes [74]). Dabei werden das globale und lokale Gleichungssystem algorithmisch entkoppelt und mit einem *Gauß-Seidel-Newton*-Verfahren gelöst. Im Detail werden folgende Schritte durchgeführt:

1. Gleichung (4.18)₁ wird für eine gegebene Zeitschrittweite Δt mit den Geschichtsvariablen des vergangenen Zeitschritts gelöst (elastischer Prädiktor). Der Iterationszähler I des äußeren *Newton*-Verfahrens wird auf null gesetzt:

$$\mathbf{r}_1(\Delta \mathbf{u}^0; \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \Delta \mathbf{u}^0 + \mathbf{k}(\mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}^0; \mathbf{q}_n) - \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0}. \quad (4.20)$$

Im Fall rein elastischen Materialverhaltens ist die Lösung von (4.20) auch die Lösung von (4.18).

2. Sollte die Fließbedingung (z. B. Gleichung (3.62)) in einem oder mehreren Elementen verletzt sein, wird ausgenutzt, daß die internen Variablen \mathbf{q} inkompatibel über Elementgrenzen hinweg sein dürfen. Dies bedeutet, daß (4.18)₂ sukzessiv in allen Elementen mit verletzter Fließbedingung gelöst werden kann, da keine Koppelterme zwischen den einzelnen Elementen vorhanden sind. Aus diesem Grund wird auch vom lokalen Gleichungssystem gesprochen. Das berechnete Primärvariableninkrement $\Delta \mathbf{u}^0$ wird während des Lösen des lokalen Gleichungssystems als konstant angesehen:

$$\mathbf{r}_2(\Delta \mathbf{q}; \Delta t, \Delta \mathbf{u}^I) = \frac{1}{\Delta t} \Delta \mathbf{q} - \mathbf{g}(\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}; \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}^I) = \mathbf{0}. \quad (4.21)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems erfolgt üblicherweise mit dem *Newton*-Verfahren und dem Iterationszähler i des lokalen *Newton*-Verfahrens:

$$\Delta \mathbf{q}^{i+1} = \Delta \mathbf{q}^i - \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2^i}{\partial \Delta \mathbf{q}^i} \right)^{-1} \mathbf{r}_2^i. \quad (4.22)$$

Die Schleife (4.22) wird solange durchlaufen, bis die Gleichung (4.21) mit einer hinreichenden Genauigkeit nach n Schritten erfüllt ist.

3. Als Lösung erhält man das Geschichtsvariableninkrement $\Delta \mathbf{q}^I$ in Abhängigkeit von $\Delta \mathbf{u}^I$ und Δt :

$$\Delta \mathbf{q}^I = \Delta \mathbf{q}^n(\Delta \mathbf{u}^I, \Delta t). \quad (4.23)$$

4. Das Einsetzen der Lösung (4.23) in (4.18)₁ wird in aller Regel nicht mehr das äußere Gleichgewicht erfüllen. Unter Berücksichtigung des Ergebnisses (4.23) wird ein *Newton*-Schritt des globalen Gleichungssystems (4.18)₁ berechnet:

$$\Delta \mathbf{u}^{I+1} = \Delta \mathbf{u}^I - (\mathbf{J}^I)^{-1} \mathbf{r}_1^I. \quad (4.24)$$

Darin ist \mathbf{J}^I die algorithmisch-konsistente Tangente

$$\mathbf{J}^I = \frac{d\mathbf{r}_1^I(\Delta\mathbf{u}^I, \Delta\mathbf{q}^I(\Delta\mathbf{u}^I))}{d\Delta\mathbf{u}^I} = \frac{\partial\mathbf{r}_1^I}{\partial\Delta\mathbf{u}^I} + \frac{\partial\mathbf{r}_1^I}{\partial\Delta\mathbf{q}^I} \frac{d\Delta\mathbf{q}^I}{d\Delta\mathbf{u}^I}. \quad (4.25)$$

Der erste Term in (4.25) entspricht dabei der rein elastischen Tangente, während der zweite Term aus der Linearisierung der diskreten Evolutionsgleichung der Geschichtsvariablen entsteht (vgl. *Diebels et al.* [22]).

5. Zur Bestimmung der Ableitung $d\Delta\mathbf{q}^I/d\Delta\mathbf{u}^I$ des globalen Gleichungssystems kann ausgenutzt werden, daß das lokale Gleichungssystem \mathbf{r}_2 bereits gelöst wurde. Somit gilt:

$$\mathbf{r}_2^n \equiv 0 \quad \implies \quad \frac{d\mathbf{r}_2^n}{d\Delta\mathbf{u}^I} = 0 = \frac{\partial\mathbf{r}_2^n}{\partial\Delta\mathbf{u}^I} + \frac{\partial\mathbf{r}_2^n}{\partial\Delta\mathbf{q}^n} \frac{d\Delta\mathbf{q}^n}{d\Delta\mathbf{u}^I}. \quad (4.26)$$

Aus (4.26) folgt direkt das Gleichungssystem zur Bestimmung von $d\Delta\mathbf{q}^I/d\Delta\mathbf{u}^I$ (implizite Differentiation):

$$\frac{\partial\mathbf{r}_2^n}{\partial\Delta\mathbf{q}^n} \frac{d\Delta\mathbf{q}^I}{d\Delta\mathbf{u}^I} = -\frac{\partial\mathbf{r}_2^n}{\partial\Delta\mathbf{u}^I}. \quad (4.27)$$

Bei der Auswertung von (4.27) kann die Ableitung des letzten *Newton*-Schritts $\partial\mathbf{r}_2^n/\partial\Delta\mathbf{q}^n$ aus (4.22) verwendet werden.

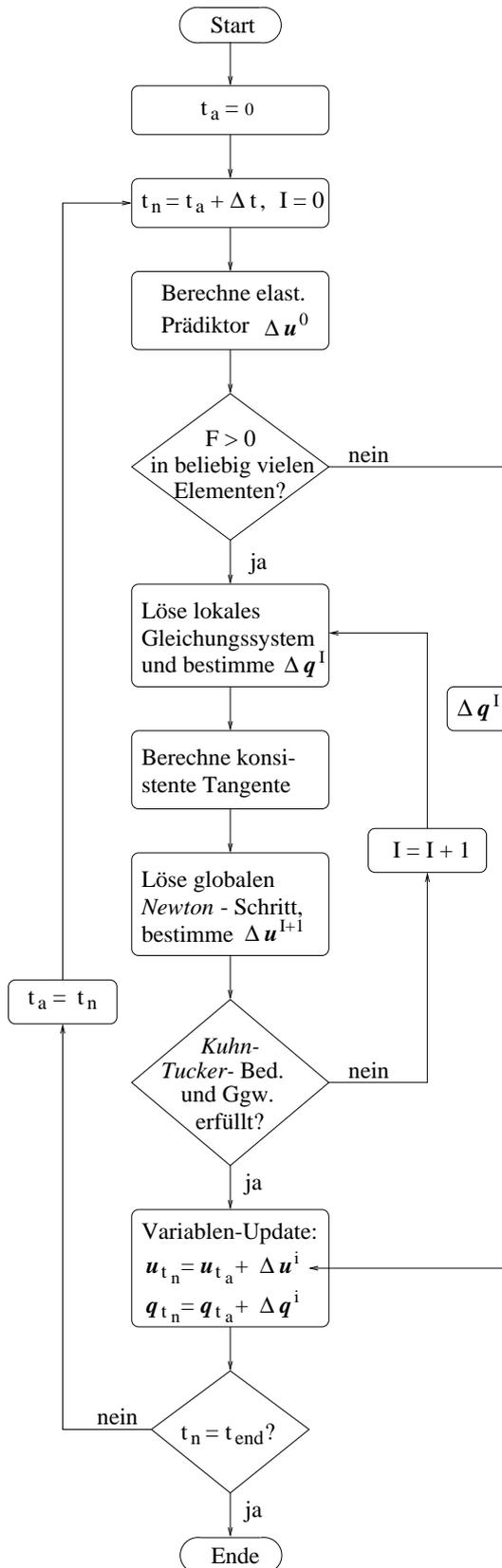
6. Wenn das Residuum $\mathbf{r}_1^{I+1}(\Delta\mathbf{u}^{I+1}, \Delta\mathbf{q}^n, \Delta t)$ kleiner als eine vom Benutzer gesetzte relative oder absolute Toleranz ist, gilt der Zeitschritt als ausiteriert, ansonsten wird $I = I + 1$ gesetzt und der Ablaufplan bei Punkt 2 fortgesetzt.

In Bild 4.2 ist der beschriebene Algorithmus in Form eines Flußdiagramms zusammengefaßt.

Man beachte, daß infolge der geschachtelten Struktur des Algorithmus' für jeden globalen *Newton*-Schritt ein komplettes *Newton*-Verfahren auf Lokalebene durchgeführt werden muß. Bei mittleren und großen Problemen ist vom Rechenzeitaufwand die globale Iteration maßgebend, denn aufgrund der elementweisen Entkopplung des lokalen Gleichungssystems ist hier der Aufwand $\mathcal{O}(n)$ mit der Elementzahl n , während für die globale Iteration bei direkten oder iterativen Lösern ein Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ bis $\mathcal{O}(n^3)$ entsteht.

4.3 Die verallgemeinerte Punkt-Kollokationsmethode

In Kapitel 4.2 wurden bereits die Grundideen der verallgemeinerten Punkt-Kollokationsmethode beschrieben. Als Grundvoraussetzung müssen mindestens so viele linear unabhängige Ansatzfunktionen benutzt werden wie Integrationspunkte vorhanden sind, da sonst eine eindeutige Lösung nicht möglich ist. Für den Fall, daß



Initialisierung des Problems.

Die Startzeit wird zu null gesetzt.

Addition des aktuellen Zeitinkrements, Zurücksetzen des Iterationszählers I.

Siehe Gleichung (4.20).

Es werden alle Elemente auf Verletzung der Fließbedingung (3.62) überprüft.

Siehe Gleichung (4.21).

Siehe Gleichung (4.25).

Die nächste globale Iteration mit neuer elasto-plastischer Tangente.

In jedem Element muß das System (4.18) erfüllt sein.

Die Lösung des Zeitschritts ist gefunden, d. h. „Update“ der Variablen.

Berechnungsende erreicht?

Ausgabe der Ergebnisse.

Bild 4.2: Schematische Darstellung des verwendeten Algorithmus

die Anzahl der unabhängigen Ansatzfunktionen die Zahl der Integrationspunkte übersteigt, muß die Lösung an den Integrationspunkten mit Hilfe der Methoden der Ausgleichsrechnung bestimmt werden. Die Forderung der exakten Übereinstimmung der Feldgleichungen mit den approximierten Werten an den Integrationspunkten ist deshalb nur möglich, wenn die Anzahl der Ansatzfunktionen mit der Anzahl der Integrationspunkte übereinstimmt.

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich 6-Knoten-Dreieckselemente mit drei Integrationspunkten verwendet. Somit werden für die internen Variablen (hier plastische Verzerrung) nur die linearen Ansatzfunktionen benötigt, die bekanntlich an den drei Eckpunkten definiert sind. Als Folge erhält man für den Gradienten der plastischen Verzerrung und infolge der Kompatibilitätsbedingung (2.129₁) auch für die plastische Krümmung einen konstanten Wert pro Element. Die Gesamtkrümmung ergibt sich durch Differentiation der linear approximierten Gesamtrotation $\bar{\varphi}$. Somit paßt der Ansatz der internen Variablen mit dem Ansatz der Primärvariablen zusammen. Die verallgemeinerten Punkt-Kollokationsmethode ist z. B. auch problemlos für Viereckselemente anwendbar.

Bei der Punkt-Kollokationsmethode der nicht-polaren Theorie kann das lokale Gleichungssystem in jedem Element unabhängig an jedem Integrationspunkt gelöst werden, denn die Fließbedingung (z. B. (3.53)) hängt nur von den plastischen Verzerrungen an diesem Integrationspunkt ab (lokale Theorie). Für die verallgemeinerten Punkt-Kollokationsmethode ist dieses Vorgehen nicht mehr möglich, denn durch die Abhängigkeit der Fließbedingung (3.62) an den Integrationspunkten vom plastischen Verzerrungsgradienten, der von den Werten der plastischen Verzerrung an allen Integrationspunkten des Elements beeinflußt wird, entsteht eine nicht-lokale Theorie. Anschaulich bedeutet dies, daß sich die Fließbedingung am Integrationspunkt 1 durch eine Veränderung der plastischen Verzerrung am Integrationspunkt 2 oder 3 in der Regel verändert. Somit muß das lokale Gleichungssystem \mathbf{r}_2 in jedem Element gleichzeitig an allen Integrationspunkten gelöst werden.

Die Nicht-Lokalität muß natürlich auch bei der konsistenten Tangente (4.25) berücksichtigt werden.

Die größten Schwierigkeiten bei der numerischen Umsetzung der verallgemeinerten Punkt-Kollokationsmethode ist die Behandlung der Ungleichheitsrestriktionen der *Kuhn-Tucker*-Bedingungen (3.66)₂ bzw. der *Föppl*-Klammer aus Gleichung (3.65). Nach der Berechnung des elastischen Prädiktors wird zuerst der aktive Satz der Ungleichheitsrestriktionen bestimmt. Im Fall, daß die Fließbedingung bei elastisch-plastischem Materialverhalten verletzt ist, muß der elastische Prädiktor wieder auf die Fließfläche „zurückgezogen“ werden, d. h. $\bar{F} = 0$ ist die aktive Restriktion. Sollte beim elastischen Prädiktor die Fließbedingung nicht verletzt sein, ist das Materialverhalten weiterhin rein elastisch, und $\Delta\Lambda = 0$ ist die aktive Restriktion. Diese Überlegungen lassen sich ganz entsprechend auf elastisch-viskoplastisches Materialverhalten mit den Ungleichheitsrestriktionen der *Föppl*-Klammer übertragen.

Im Laufe der Lösung des lokalen Gleichungssystems (4.22) ist es möglich, daß sich der aktive Satz der Ungleichheitsrestriktionen verändert. Dieser Wechsel der Re-

striktion findet statt, wenn die bisher aktive Restriktion erfüllt ist, während die nicht aktive Restriktion verletzt ist. Anschaulich bedeutet dies, daß z. B. an einem Integrationspunkt die Fließbedingung nach dem elastischen Prädiktor verletzt war; durch die plastische Deformation an den anderen Integrationspunkten können sich die elastischen Krümmungen und somit die Momentenspannung aber derart verändert haben, daß der Wert der Fließbedingung mit $\Delta \Lambda = 0$ kleiner null wäre, also elastisches Materialverhalten vorliegt. Die Erfüllung der ursprünglich aktiven Restriktion $\bar{F} = 0$ könnte in diesem Fall nur mit einem negativen Inkrement $\Delta \Lambda$ erreicht werden.

Infolge der Möglichkeit, daß die aktive Restriktion während des Lösen des lokalen Gleichungssystems (4.27) wechselt, muß auf jeden Fall verhindert werden, daß im Verlauf des Lösungsverfahrens ein Vorzeichenwechsel in der Restriktionsgleichung stattfindet, denn in diesem Fall kann nicht mehr eindeutig entschieden werden, ob ein Wechsel der Restriktion notwendig ist. Startet man beispielsweise mit einer verletzten Fließbedingung nach dem elastischen Prädiktor, ist $\bar{F} = 0$ die aktive Restriktion. Würde jetzt im Laufe der *Newton*-Iteration ein Fließwert kleiner Null vorkommen, wäre $\bar{F} < 0$ und in der Regel $\Delta \Lambda > 0$. In diesem Fall ist es nicht mehr klar, welche die aktive Restriktion ist, da beide erfüllt sind. Beim *Newton*-Verfahren ist jedoch ein Vorzeichenwechsel des Residuums durchaus möglich. Bei einem eventuellen Vorzeichenwechsel bietet sich die Anwendung eines gedämpften *Newton*-Verfahrens an:

$$\Delta \mathbf{q}^{i+1} = \Delta \mathbf{q}^i - \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2^i}{\partial \Delta \mathbf{q}^i} \right)^{-1} \mathbf{r}_2^i \quad \text{mit } 0 < \sigma < 1. \quad (4.28)$$

Der Faktor σ darf maximal so groß gewählt werden, daß die aktive Restriktion gerade erfüllt ist. Es handelt sich somit um ein eindimensionales Problem, das mit Hilfe von Einschachtelungsverfahren gelöst werden kann. Aufgrund der sehr guten Konvergenzeigenschaft wird im folgenden zur Lösung von (4.28) das *Illinois*-Verfahren verwendet (siehe *Törnig & Spellucci* [82]). Es handelt sich hierbei um eine Modifikation der *Regula-falsi*:

1. Gegeben sei $f(a_0) f(b_0) < 0$.
2. Man setze $t_0 = a_0$ und $t_{-1} = b_0$.
3. Beginn der Iteration, $i = 1$.
4. Wenn $f(t_{i-1}) f(t_{i-2}) < 0$, dann $\{a_i, b_i\} = \{t_{i-1}, t_{i-2}\}$,
wenn $f(t_{i-1}) f(t_{i-2}) > 0$ und
 $f(t_{i-1}) f(t_{i-3}) < 0$, dann $\{a_i, b_i\} = \{t_{i-1}, t_{i-3}\}$.
5. Man wähle t_i mit $a_i < t_i < b_i$.

6. Man setze

$$t_i = \begin{cases} t_{i-1} - f(t_{i-1}) \frac{t_{i-1} - t_{i-2}}{f(t_{i-1}) - f(t_{i-2})}, & \text{falls } f(t_{i-1}) f(t_{i-2}) < 0, \\ t_{i-1} - f(t_{i-1}) \frac{t_{i-1} - t_{i-3}}{f(t_{i-1}) - f(t_{i-2})/2}, & \text{falls } f(t_{i-1}) f(t_{i-2}) > 0 \\ & \text{und } f(t_{i-1}) f(t_{i-3}) < 0, \\ (a_i + b_i)/2 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.29)$$

7. Wenn $|f(t_i)| < \epsilon$ dann ist t_i die gesuchte Lösung x^* , ansonsten setze man

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= \begin{cases} a_i & \text{falls } f(a_i) f(t_i) < 0, \\ t_i & \text{sonst,} \end{cases} \\ b_{i+1} &= \begin{cases} t_i & \text{falls } f(a_i) f(t_i) < 0, \\ b_i & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.30)$$

8. Gehe zu 4.

Man kann zeigen, daß die Konvergenzrate des *Illinois*-Verfahrens über drei Schritte hinweg kubisch ist (*Törnig & Spellucci* [82]):

$$|t_{i+3} - x^*| \leq C |t_i - x^*|^3. \quad (4.31)$$

Darin ist C eine geeignete Konstante.

4.4 Elementformulierungen im Detail

Im folgenden werden zwei physikalisch unterschiedliche Elementformulierungen vorgestellt. Mit dem T2P1R1-Element wird ein fluidgesättigter, mikropolarer Festkörper beschrieben, mit den Primärvariablen Festkörperverschiebung \mathbf{u}_S , Porendruck p und Gesamttrotation $\bar{\varphi}_S$ des Festkörperskeletts. Wie bereits in Kapitel 4.2 erwähnt, wird \mathbf{u}_S mit quadratischen Ansatzfunktionen mit 6-Knoten-Dreieckselementen approximiert. Der üblichen Elementnomenklatur folgend, erscheint im Elementnamen „T2“ mit „T“ für Triangle und „2“ für die quadratischen Ansatzfunktionen. Die linearen Ansatzfunktionen für Druck und Rotation werden durch „P1“ bzw. „R1“ repräsentiert. Das beschreibende Gleichungssystem des T2P1R1-Elements wurde in den Kapiteln 4.1 und 4.2 angegeben.

Für den Fall eines leeren, mikropolaren Festkörpermaterials wird das T2R1-Element mit den Primärvariablen Festkörperverschiebung \mathbf{u}_S und Gesamttrotation $\bar{\varphi}_S$ des

Festkörperskeletts verwendet. Aus dem Gleichungssatz des T2P1R1-Elements wird folglich die Inkompressibilitätsbedingung (4.7) gestrichen.

Bei der numerischen Behandlung der Plastizität stellt man enorme Unterschiede im Hinblick auf Stabilität und Konvergenzverhalten zwischen elastisch-plastischem und elastisch-viskoplastischem Materialverhalten fest. In jeglicher Hinsicht verhält sich das elastisch-viskoplastische Materialmodell gutmütiger als das rein elastisch-plastische Modell. Die Ursache liegt im unterschiedlichen Charakter der zugrundeliegenden Differentialgleichungen. Während die viskoplastischen Bestimmungsgleichungen ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem (ODE) darstellen, handelt es sich bei den rein plastischen Bestimmungsgleichungen um ein Algebroidifferentialgleichungssystem (DAE). Wie bereits angesprochen, sind die Stabilitätseigenschaften der numerischen Verfahren bei DAEs deutlich schlechter als bei ODEs.

Die viskosen Eigenschaften des viskoplastischen Materialmodells haben bereits einen regularisierenden Einfluß auf Lokalisierungsprobleme (siehe *Ehlers & Ellsiepen* [34]). Allerdings hängt die regularisierende Eigenschaft infolge der enthaltenen Relaxationszeit von der Lastaufbringungsgeschwindigkeit ab. Diese Abhängigkeit wird jedoch experimentell bei quasistatischen Versuchen mit Scherbandbildung nicht festgestellt.

Die Kombination von mikropolarem mit viskoplastischem Materialverhalten führt bei hinreichend kleinen Relaxationszeiten η zu einer von der Lastaufbringungsgeschwindigkeit unabhängigen Breite der Lokalisierungszone. Der Vorteil der besseren Stabilitäts- sowie Konvergenzeigenschaften der numerischen Verfahren bleibt jedoch in der Regel bestehen. Zusätzlich kann eine kleine Relaxationszeit mit der vorhandenen Reibung zwischen den Mikropartikeln physikalisch erklärt werden.

Kapitel 5

Beispiele

Anhand einiger ausgewählter Beispiele mit Scherbandbildung wird im folgenden die Gültigkeit der in den vorhergehenden Kapiteln vorgestellten theoretischen und numerischen Ausführungen gezeigt.

Als erstes Beispiel wird mit dem Biaxial-Versuch ein Randwertproblem berechnet, das aus der Experimentaltechnik bekannt ist. Anschließend zeigt die Simulation eines Böschungsbruchs infolge Eigengewicht, daß die vorgestellte mikropolare Beschreibung auch für Problemstellungen geeignet ist, die in der Bauingenieurpraxis von Bedeutung sind.

5.1 Biaxial-Versuch

Der Biaxial-Versuch stellt einen ebenen Verzerrungszustand (EVZ) dar und eignet sich sehr gut für Materialparameterstudien wegen der einfachen Geometrie und den leicht formulierbaren Randbedingungen. Die Berechnungen erfolgen für elastisch-viskoplastisches Materialverhalten mit hinreichend kleiner Relaxationszeit (hier $\eta = 0,5$ s, $r = 1$, $F_0 = \kappa$), so daß die berechneten Scherbänder unabhängig von der Lastgeschwindigkeit sind, vgl. Kapitel 4.

Die verwendeten Materialparameter beschreiben prinzipiell einen bindigen Boden (z. B. Schluff). Die Parameter des Einflächenfließkriteriums entstammen einer modifizierten Anpassung an das Modell von *Schad* [68], vgl. *Ehlers* [27, 29] (siehe Tabelle 5.1).

Die mikropolaren Materialparameter sind als Standardsatz zu verstehen, da im folgenden einige Parameterstudien durchgeführt werden. Die Berechnungen erfolgen quasistatisch für ein leeres, poröses Festkörperskelett, so daß keine Materialparameter angegeben werden müssen, die das Porenfluid betreffen (T2R1-Element).

Die Geometrie und Randbedingungen des Biaxial-Versuchs können Bild 5.1 entnommen werden.

Parameter	Symbol	Wert
Lamé-Konstanten	μ^S	5 583 kN/m ²
	λ^S	8 375 kN/m ²
reale Dichten	ρ^{SR}	2 600 kg/m ³
Volumenanteile	n_{0S}^S	0,67
Parameter des Einfächen- fließkriteriums,	α	$1,074 \cdot 10^{-2}$
	β	0,119 6
	γ	1,000
	δ	$1,377 \cdot 10^{-4}$ m ² /kN
	ϵ	$4,330 \cdot 10^{-6}$ m ² /kN
	κ	10,269 kN/m ²
	m	0,75
Cosserat-Parameter	l_c^S	$1 \cdot 10^{-2}$ m
	μ_c^S	$4 \cdot 10^3$ kN/m ²
	k_1	12 m ⁻¹
	k_2	0

Tabelle 5.1: Materialparameter für den Biaxial-Versuch

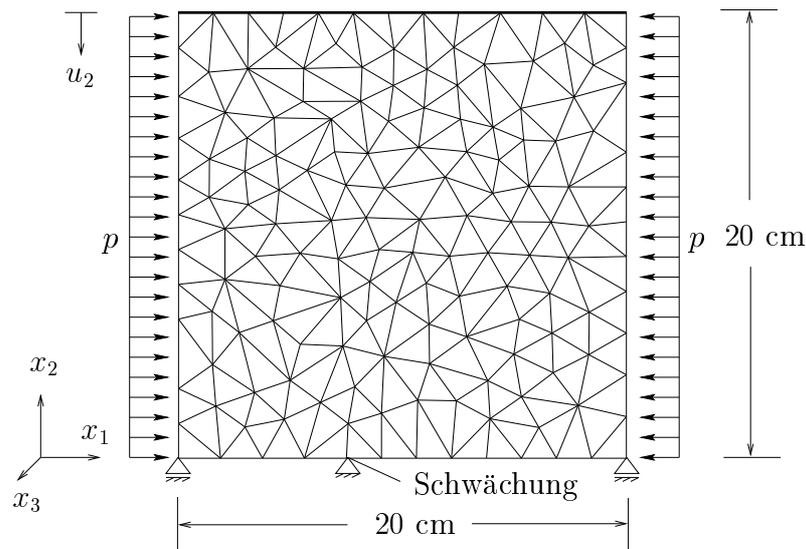


Bild 5.1: Der Biaxial-Versuch

Nach Aufbringung eines konstanten Horizontaldrucks p wird der obere Rand mit einer konstanten Geschwindigkeit v_2 abgesenkt. Die Verschiebung u_2 ergibt sich durch Multiplikation mit der Zeit t :

$$u_2 = v_2 t. \quad (5.1)$$

Als Standardwerte für die Beispielrechnungen werden $p = 50 \text{ kN/m}^2$ und $v_2 = 0,2 \text{ mm/s}$ gewählt.

Um einen nicht-homogenen Verzerrungszustand zu erreichen, werden in einem kleinen Bereich die *Laméschen* Konstanten λ und μ um 0,5 % geschwächt.

Ein typisches Last-Verschiebungs-Diagramm für den Biaxial-Versuch hat folgende Form (vergleiche die experimentellen Ergebnisse von *Hammad* [44]):

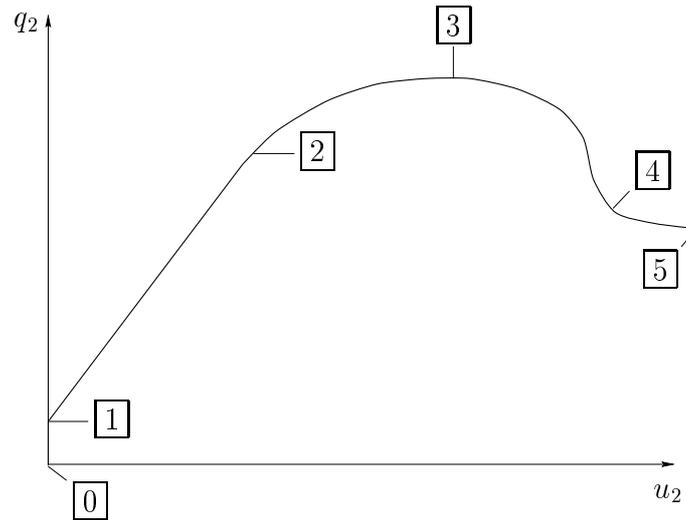


Bild 5.2: Schematischer Verlauf einer Last-Verschiebungskurve

Im Bereich $\boxed{0}$ bis $\boxed{1}$ wird die der Seitendruck p aufgebracht, so daß am oberen Rand eine Last q_2 notwendig ist, um die Vertikalverschiebung $u_2 = 0$ weiterhin sicherzustellen. Zwischen den gekennzeichneten Punkten $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ ist das Materialverhalten elastisch. Am Punkt $\boxed{2}$ stellt sich in der Spannungs-Deviatorebene ein *Lode*-Winkel ein, der durch den Seitendruck p und die Querkontraktionszahl ν des Materials bestimmt ist. Für den angegebenen Standard-Materialparametersatz liegt der *Lode*-Winkel bei einsetzendem plastischem Materialverhalten in der Nähe der Kompressionsrichtung (siehe Bild 3.6). Im vorkritischen plastischen Bereich $\boxed{2}$ bis $\boxed{3}$ besitzt das Material trotz idealer Plastizität (eigentlich Viskoplastizität s. o.) für den gegebenen Lastpfad eine Art Eigenverfestigung. Mit zunehmender Vertikalverschiebung steigt infolge der ansteigenden Last q_2 und somit auch größerer Druckspannung T_{22} in der Probe die negative erste Invariante des Spannungstensors \mathbf{T} an. Aus Bild 3.5 kann man entnehmen, daß dies im spröden Bereich zu einem größeren Fließradius führt.

Der kritische Punkt $\boxed{3}$ ist durch die horizontale Tangente im Last-Verschiebungsdiagramm (Bild 5.2) gekennzeichnet. Für die Berechnung im Rahmen einer quasistatischen, nicht-polaren Theorie ist bekannt, daß dies zu einem Verlust der strengen Elliptizität der zugrunde liegenden Differentialgleichungen führt (siehe z. B. *Rice*

[67]). Mit dem Wechsel des Typs der Differentialgleichungen von elliptisch auf hyperbolisch bzw. parabolisch verändert sich grundsätzlich das Verhalten der Lösung. Bei partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischem Typ wird die Lösung durch die Charakteristiken der Differentialgleichung bestimmt. Im Detail stellt man eine fundamentale Netzabhängigkeit der Lösung fest, denn die Breite der auftretenden Lokalisierungszone der plastischen Verzerrung verringert sich mit immer feinerer Ortsdiskretisierung, bis bei unendlich feinen Netzen eine singuläre Fläche entstehen würde. Somit handelt es sich um ein mathematisch schlecht gestelltes Problem. *Steinmann & Willam* [79] haben den regularisierenden Einfluß der *Cosserat*-Theorie auf Lokalisierungsprobleme detailliert untersucht.

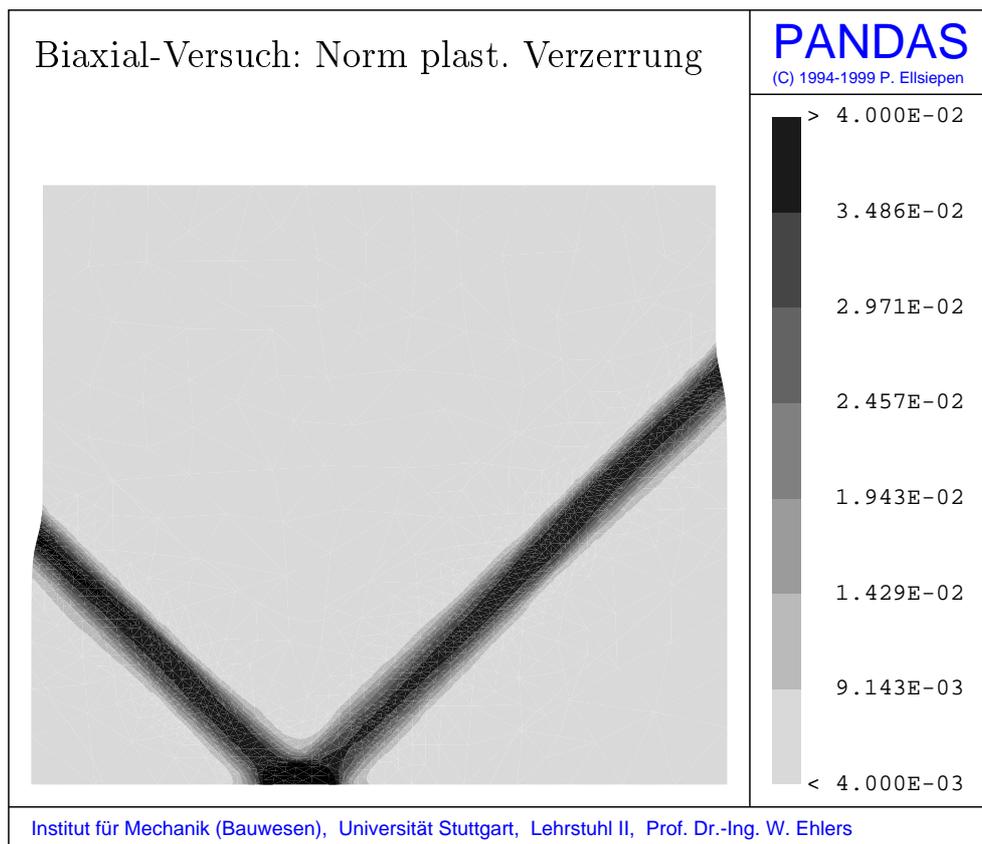


Bild 5.3: Scherbandbildung beim Biaxial-Versuch

Die Ursache für den entfestigenden Charakter der Last-Verschiebungskurve im Bereich $\bar{3}$ bis $\bar{4}$ liegt in der nicht kreisrunden Form der Fließfläche in der Deviatorebene. Mit ansteigendem *Lode*-Winkel nimmt der deviatorische Fließradius bis zum Extensionspunkt ab (vgl. Bild 3.6). Allerdings ist das Verzerrungsbild, das einem Spannungszustand mit ansteigendem *Lode*-Winkel zugeordnet ist, nur mit ansteigenden Schubverzerrungen erreichbar. Somit bildet sich ausgehend von der eingefügten Schwächung ein Scherband aus. Der Winkel des Scherbands gegenüber dem Rand ist in erster Linie durch die Fließregel in der hydrostatischen Ebene bestimmt.

Für eine kreisrunde Form der Fließfläche in der Deviatorebene (z. B. *Drucker-Prager*-Kriterium) ist eine nicht-assozierte Fließregel in der hydrostatischen Ebene Voraussetzung von Lokalisierungsphänomenen. *Neilsen & Schreyer* [62] haben gezeigt, daß der elasto-plastische Stofftensor für ein *Drucker-Prager*-Fließkriterium mit einer assoziierten Fließregel im Biaxial-Versuch immer positiv-definit ist, und somit eine horizontale Tangente im Last-Verschiebungsdiagramm und damit auch Lokalisierung nicht auftreten kann.

Für das vorliegende Randwertproblem würde die Lokalisierung infolge der nicht-assozierten Fließregel in der hydrostatischen Ebene allerdings erst bei viel größeren Vertikalverschiebungen einsetzen, so daß hier dieser Effekt auf das Lokalisierungsverhalten vernachlässigbar ist.

Im postkritischen Bereich [4] bis [5] verändert sich der *Lode*-Winkel des Spannungszustands im wesentlichen nicht mehr, bis im Bereich des Scherbands Materialversagen eintritt. In Bild 5.3 sind das Deformationsmuster (fünffach überhöht) und die Norm der plastischen Verzerrungen im postkritischen Bereich dargestellt. Es ist zu erkennen, daß sich der obere Bereich der Probe in Form eines Keils herunterdrückt, und die Spitze des Keils ist genau die Stelle mit den geschwächten *Lamé*-Konstanten. Das Deformationsmuster ist durch die Lage der Schwächung am unteren Rand eindeutig. Hätte man für die Imperfektion eine vertikale Lage in der Mitte der Probe gewählt, entstünde das bekannte Schmiedekreuzmuster mit zwei sich ausbildenden Scherbändern. Dies entspricht im postkritischen Bereich einem Bifurkationsproblem, da sich nur eines der beiden entstehenden Scherbändern durchsetzen wird. Es ist allerdings bei einem unregulären Netz nicht *a priori* festzustellen, welches der beiden Scherbänder das dominante sein wird. Dieses Problem wird mit der Schwächung am unteren Rand umgangen.

5.1.1 Netzunabhängigkeit

Um die Netzunabhängigkeit der Ergebnisse zu verdeutlichen, werden auf einem groben, einem mittleren und einem feinen Netz (siehe Bild 5.4) die Last-Verschiebungskurven und Schnitte durch die entstehenden Scherbänder einander gegenübergestellt.

Bei den Last-Verschiebungskurven wird die Gesamtkraft an der Oberseite durch Integration der Vertikalspannung gewonnen. Die Unabhängigkeit der Ergebnisse von der verwendeten Elementierung ist ersichtlich (siehe Bild 5.5). Zudem zeigen die entstehenden Last-Verschiebungskurven sehr gut die diskutierten Phänomene.

Die Schnitte durch die entstehenden Scherbänder werden ungefähr in der Mitte des rechten Asts in orthogonaler Richtung geführt. In Bild 5.6 ist die Norm der plastischen Verzerrung über dem Linienparameter des Schnitts aufgetragen.

Es ist zu erkennen, daß die Auflösung der Kurve beim feinen Netz am besten ist, da die größte Anzahl von Stützpunkten zur Verfügung steht. Die Breite ist dagegen bei allen Netzen ungefähr gleich, vgl. Bild 5.6.

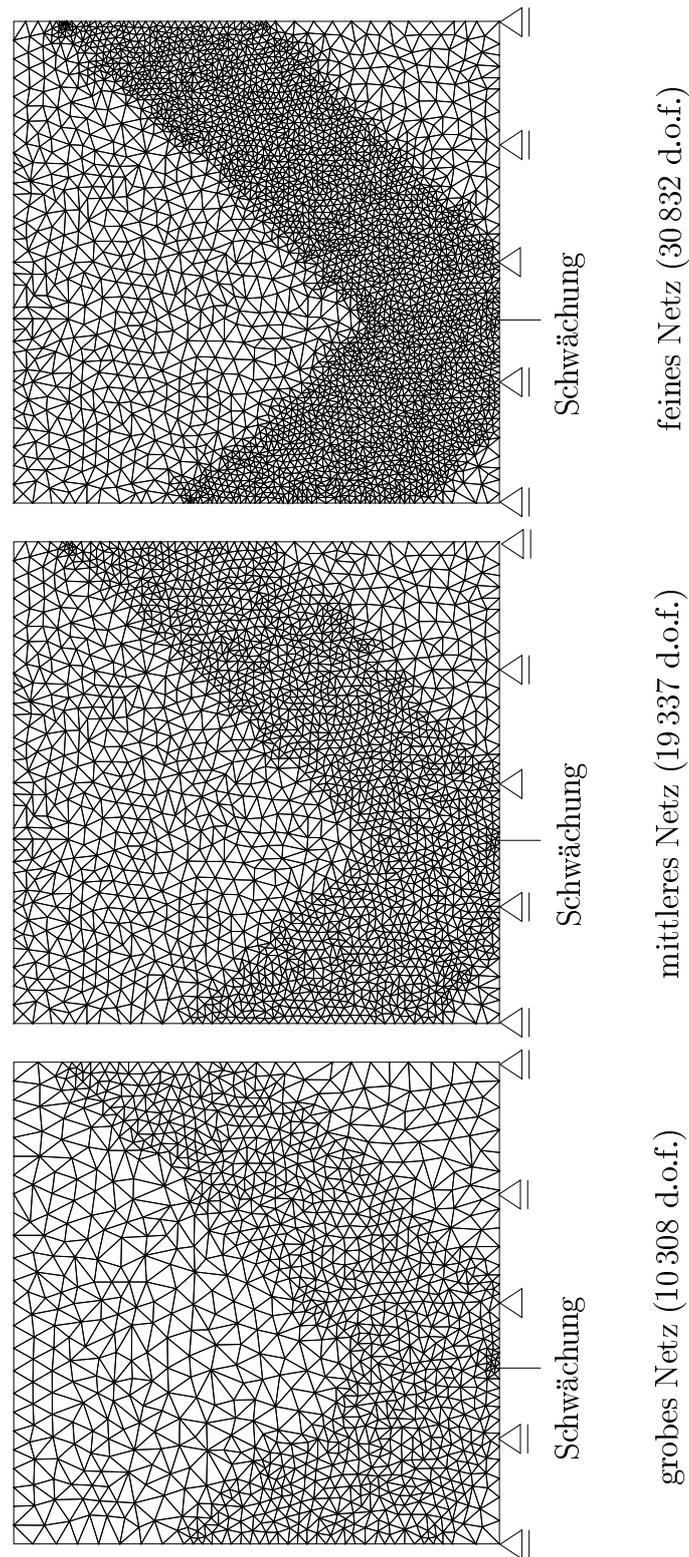


Bild 5.4: Grobes, mittleres und feines Netz

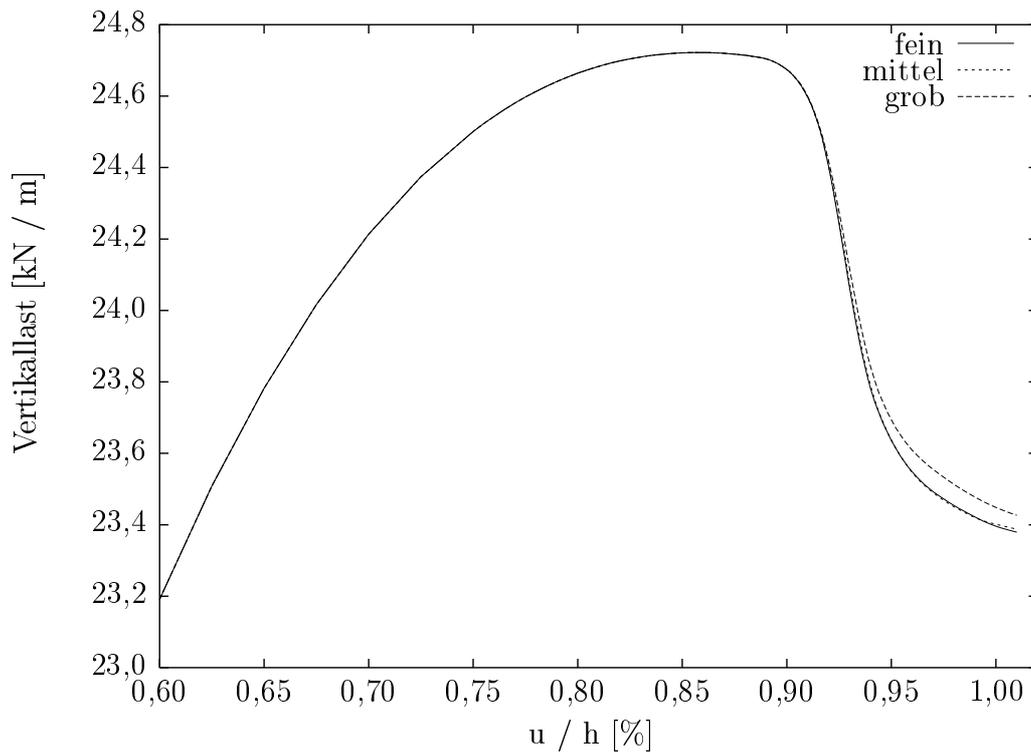


Bild 5.5: Last-Verschiebungskurven

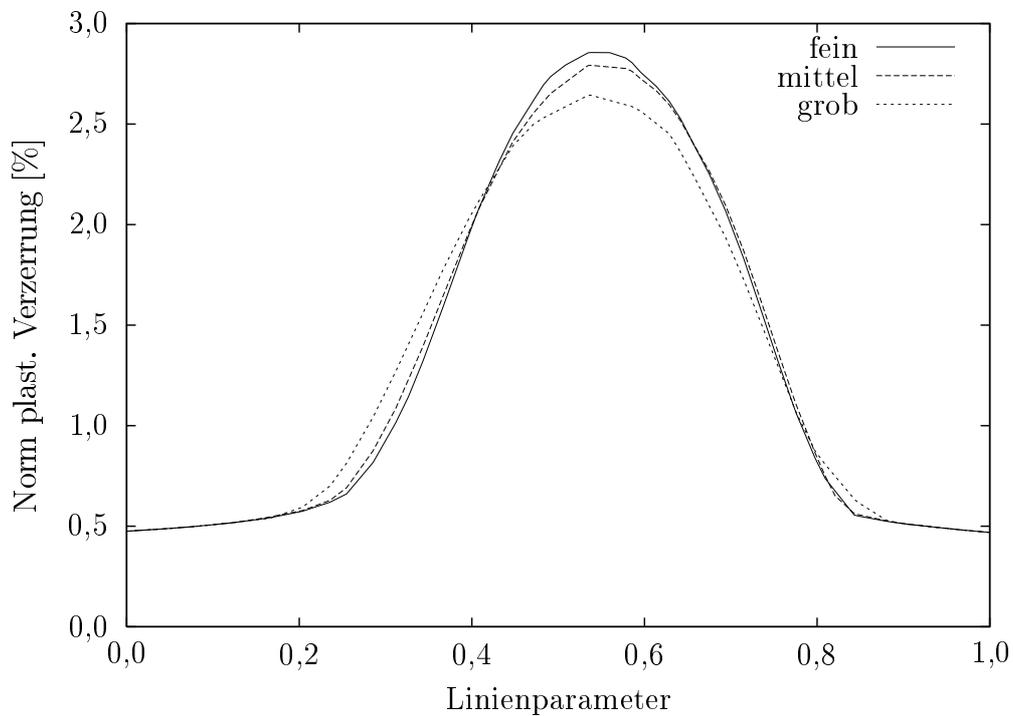


Bild 5.6: Orthogonale Schnitte durch die Scherbänder

5.1.2 Abhängigkeit der Ergebnisse von der internen Länge

Im folgenden werden zuerst einige Ergebnisse für zwei verschiedene interne Längen abgebildet. Die Resultate der oberen Abbildungen wurden für die interne Länge $l_c = 7,5 \text{ mm}$ erzielt, während die unteren Abbildungen sich auf eine interne Länge $l_c = 1,25 \text{ mm}$ beziehen. Als Ortsdiskretisierung wurde das feine Netz aus Bild 5.4 gewählt. In Bild 5.7 ist die Norm der plastischen Verzerrung wiedergegeben. Es ist zu erkennen, daß die Breite des Scherbands mit geringerer internen Länge abnimmt, jedoch liegt kein direkter linearer Zusammenhang zwischen der Scherbandbreite und der internen Länge vor.

Es wurde bereits diskutiert, daß die unterschiedlichen Fließradien in der Deviator-ebene eine Hauptursache für die Ausbildung von Scherbändern sind. Der *Lode*-Winkel des deviatorischen Spannungszustands ist für die beiden unterschiedlichen internen Längen in Bild 5.8 wiedergegeben. Es ist zu erkennen, daß im Bereich des Scherbands der *Lode*-Winkel mit 4 bis 5 Grad einen deutlich kleineren deviatorischen Fließradius zu Folge hat als der Außenbereich mit einem *Lode*-Winkel von bis zu -14° . Bei der kleineren internen Länge ist der Übergang zum Außenbereich deutlich steiler als beim großen l_c . Qualitativ und quantitativ sind die beiden Resultate hingegen vergleichbar.

Nach der geometrisch linearen plastischen Kompatibilitätsbedingung $(2.129)_1$ ist die plastische Krümmung $\bar{\kappa}_p$ eine Funktion des plastischen Verzerrungsgradienten $\text{grad } \bar{\epsilon}_p$. Bei den Schnittbildern durch das Scherband (Bild 5.6) ist zu erkennen, daß die Norm der plastischen Verzerrung eine symbolisierte Hütchenform über dem Linienparameter des Schnitts ergibt. Es ist demnach zu erwarten, daß die Norm der plastischen Krümmung in den Randbereichen des Scherbands einen nahezu konstanten Wert erreichen wird. Die Ergebnisse aus Bild 5.9 bestätigen diese Aussage.

Die Norm der Momentenspannung, die in Bild 5.10 dargestellt ist, zeigt qualitativ einen ähnlichen Verlauf wie die Norm der plastischen Krümmungen. Die Maximalwerte liegen jedoch deutlich weiter in den Randbereichen des Scherbands.

Die Gesamttrotation für die beiden angegebenen internen Längen kann aus Bild 5.11 entnommen werden. Der unterschiedliche Drehsinn im rechten und linken Ast des Scherbands ist erkennbar.

Zur genauen Definition der Scherbandbreite soll im folgenden die plastische Zone im postkritischen Bereich benutzt werden. Es werden zur Visualisierung der plastischen Zone alle Elemente in drei Unterbereiche mit jeweils einem Integrationspunkt unterteilt. Die Teilelemente, an denen die Fließbedingung des zugehörigen Integrationspunkts verletzt ist, werden dunkel eingefärbt, und die Teilelemente mit einer Fließbedingung kleiner null bleiben hell. So ist eine Bestimmung der Breite der plastischen Zone durch einfaches Ausmessen möglich (siehe Bild 5.12). Allerdings muß bei dieser Methode berücksichtigt werden, daß ein bei der Bestimmung der Scherbandbreite aus den berechneten Daten immer auch ein Ablesefehler auftritt.

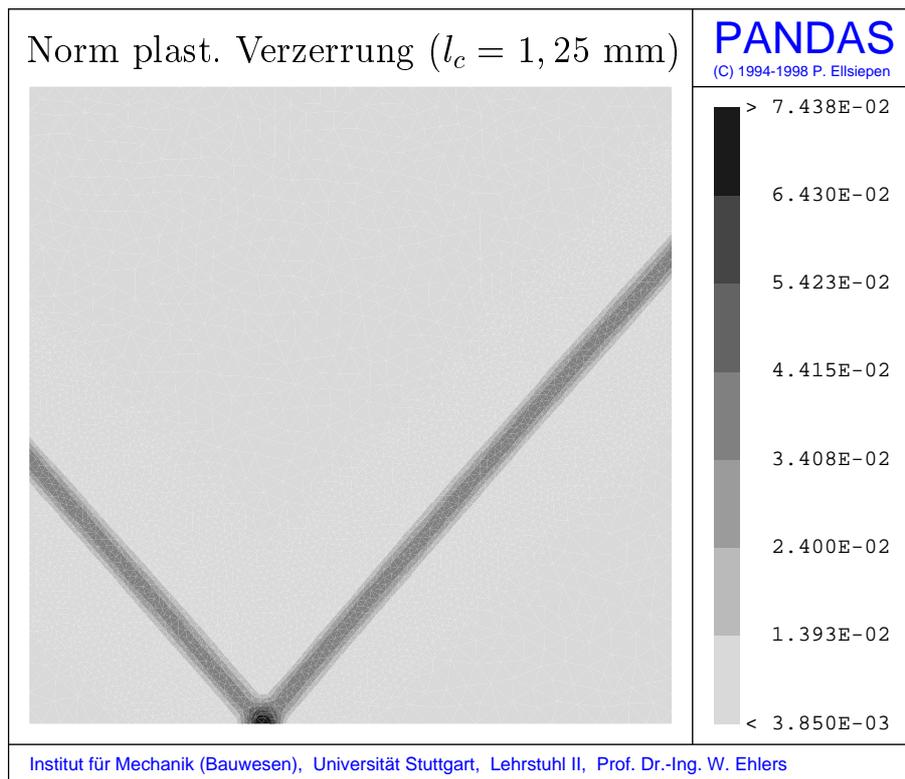
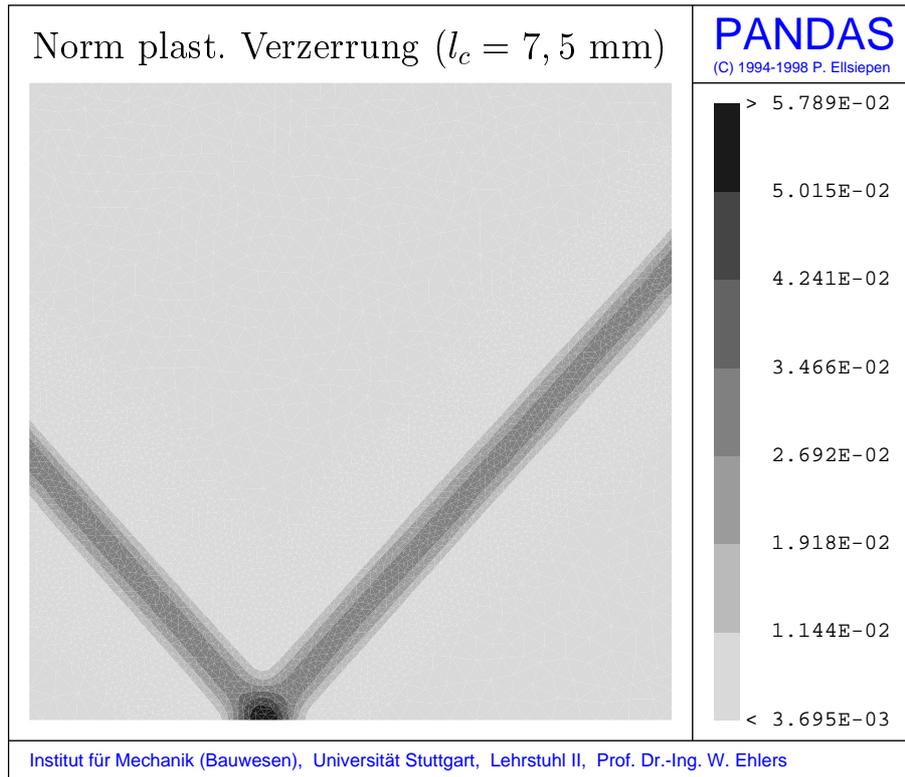


Bild 5.7: Norm der plastischen Verzerrung ($\sqrt{\bar{\epsilon}_p \cdot \bar{\epsilon}_p}$)

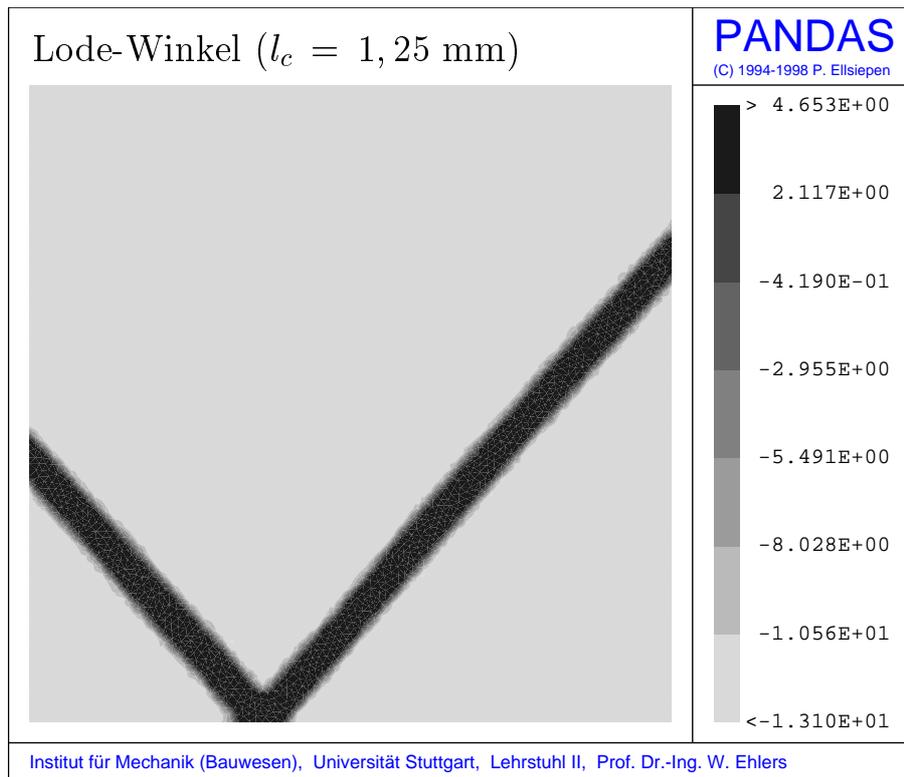
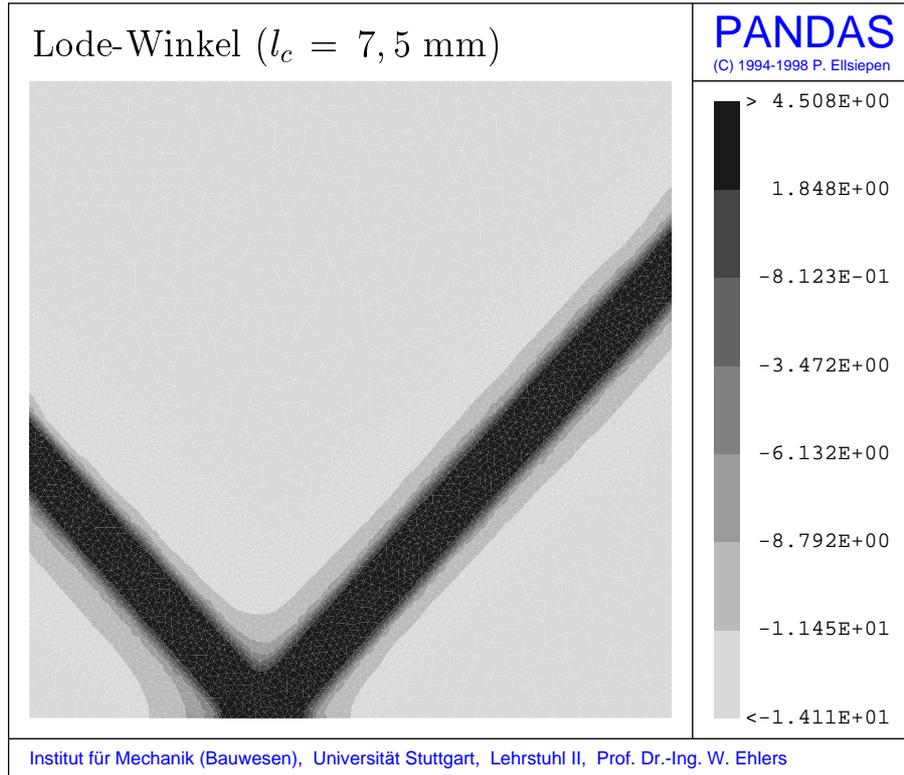


Bild 5.8: *Lode*-Winkel des Spannungsdeviators

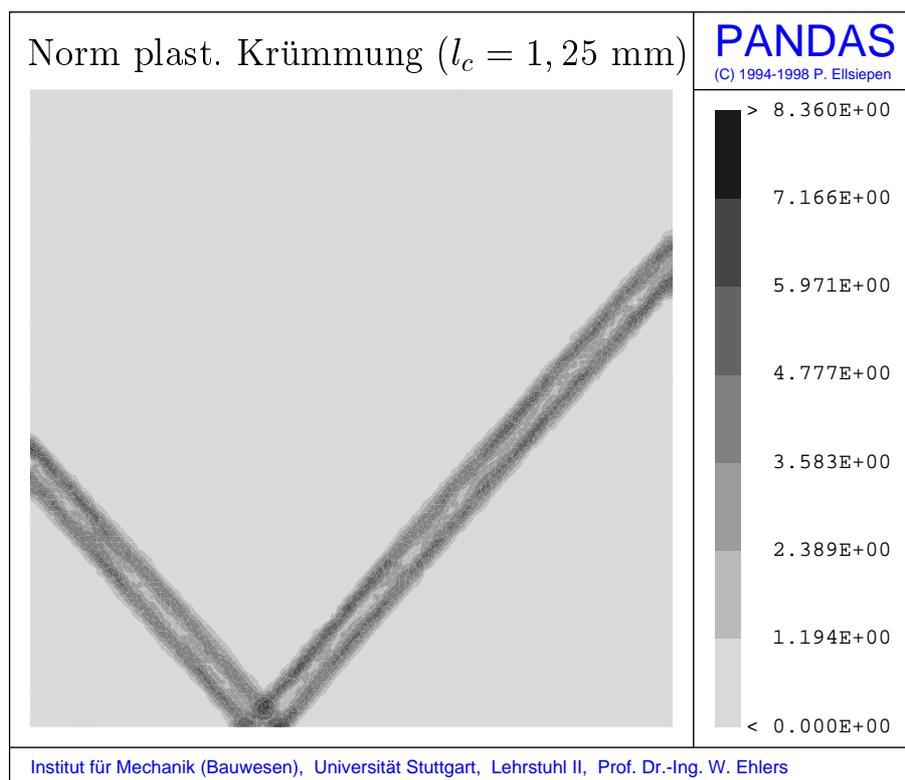
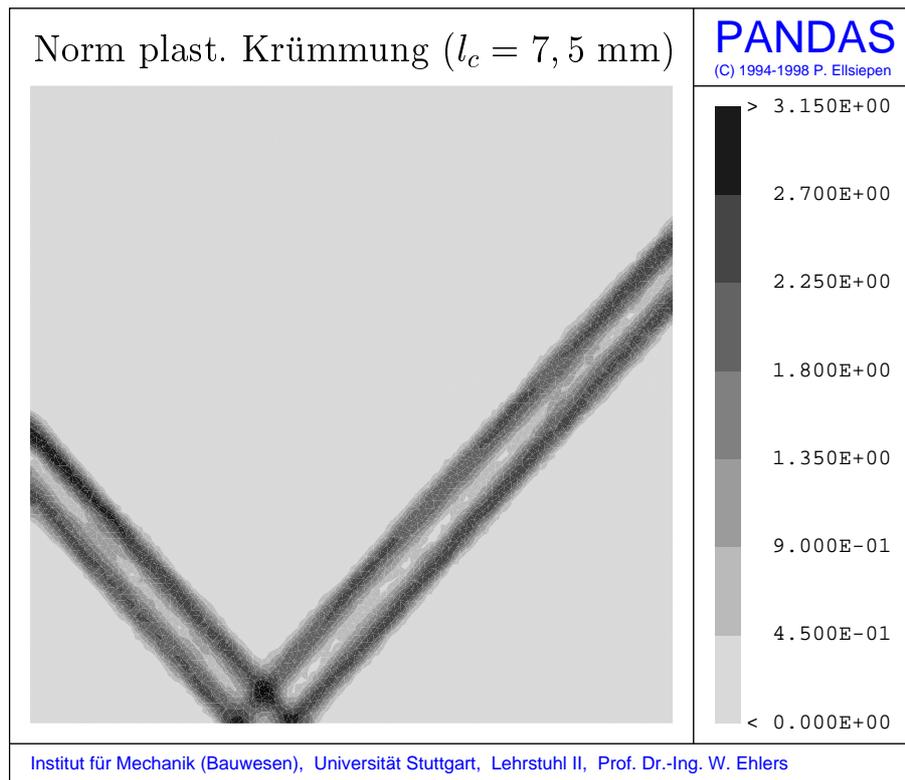


Bild 5.9: Norm der plastischen Krümmung ($\sqrt{\bar{\kappa}_p \cdot \bar{\kappa}_p}$)

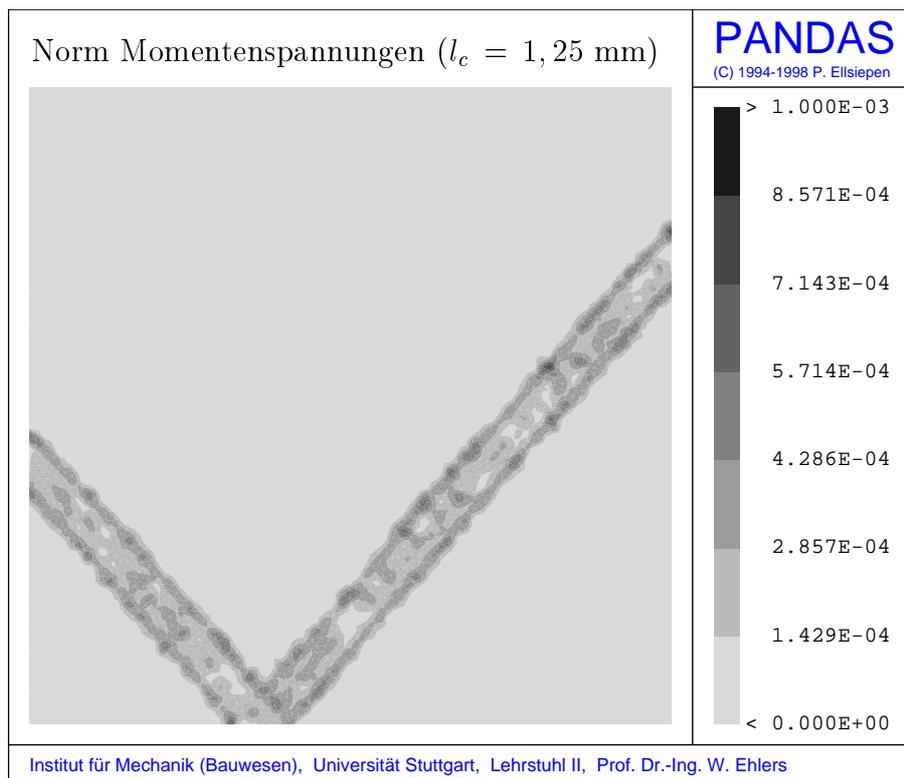
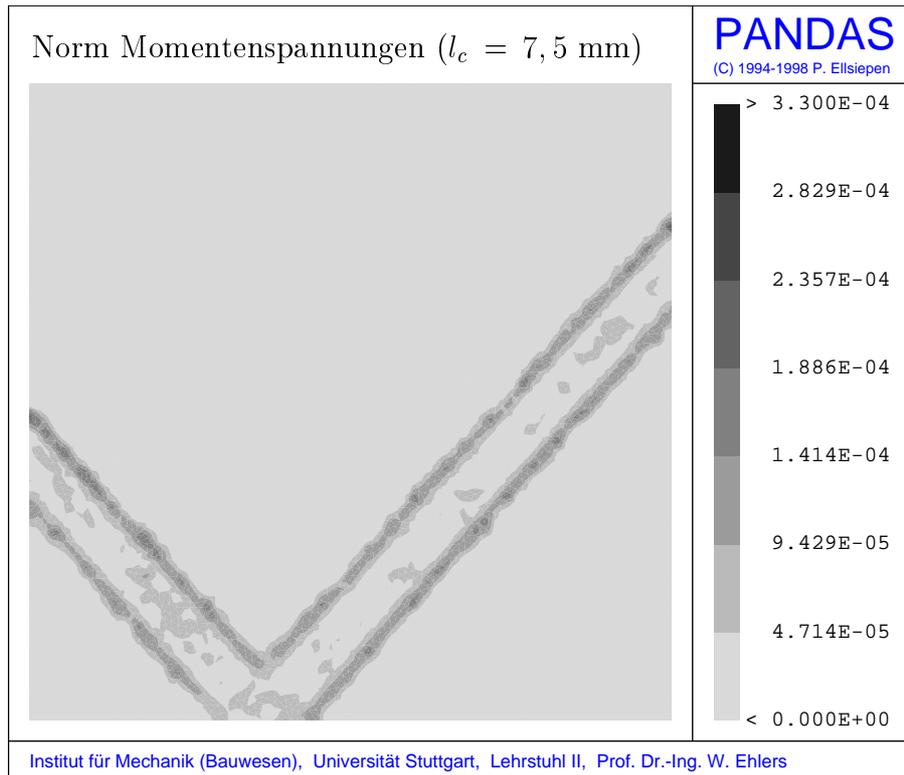


Bild 5.10: Norm der Momentenspannung ($\sqrt{M \cdot M}$)

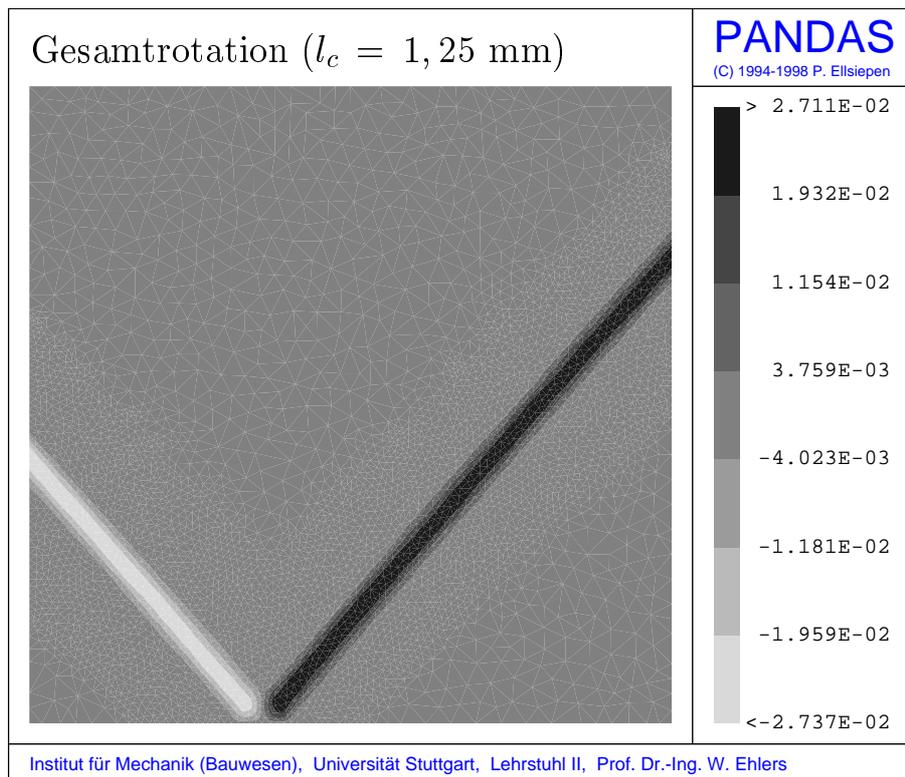
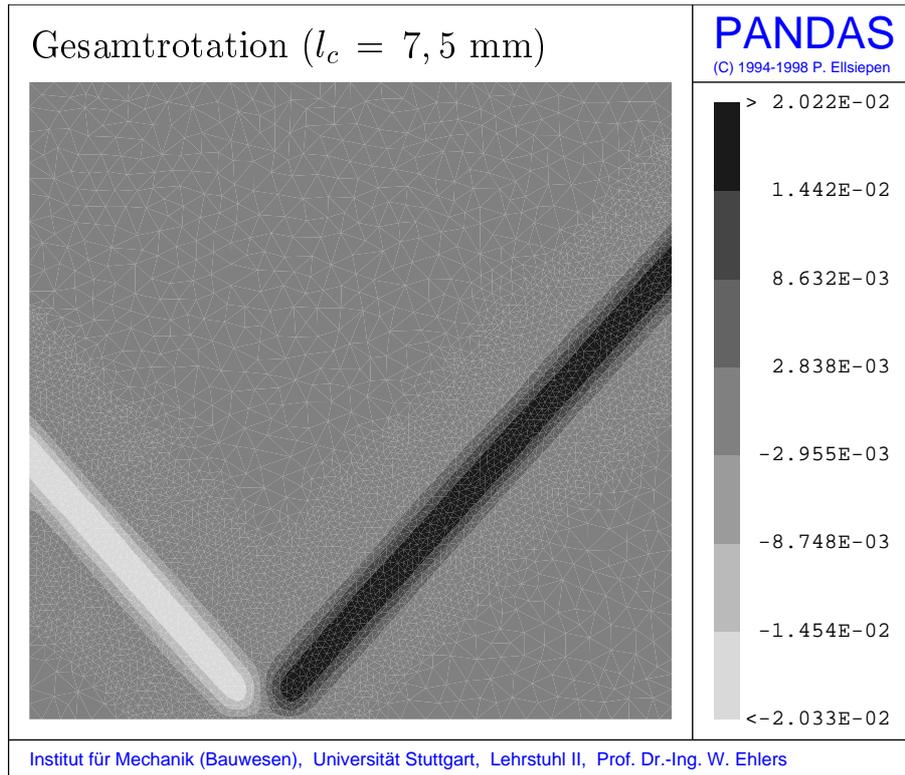


Bild 5.11: Gesamtrotation

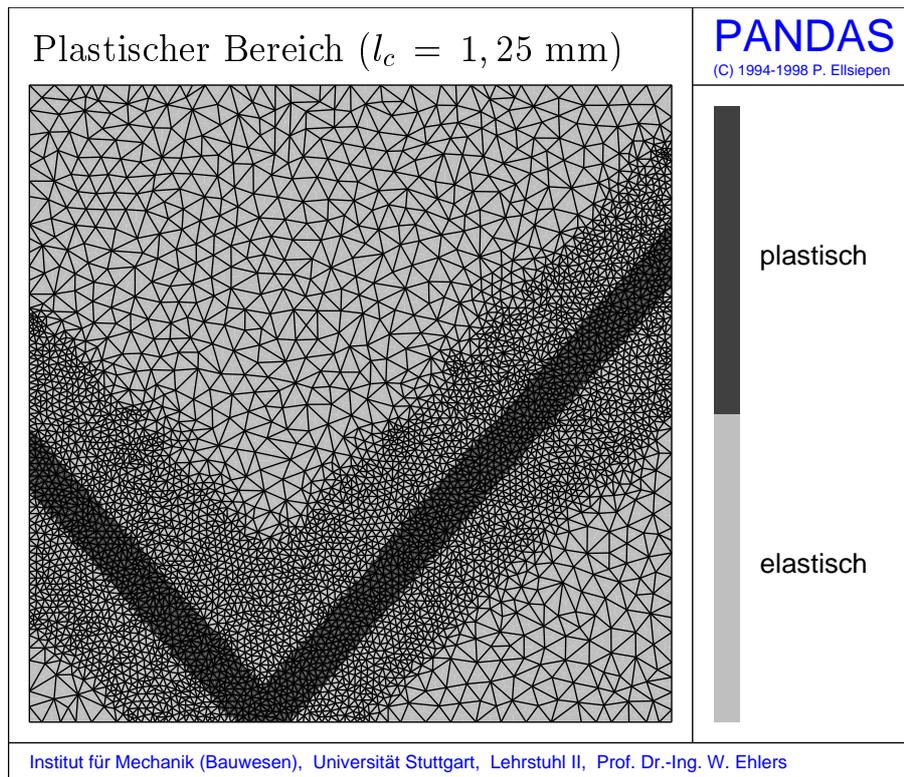
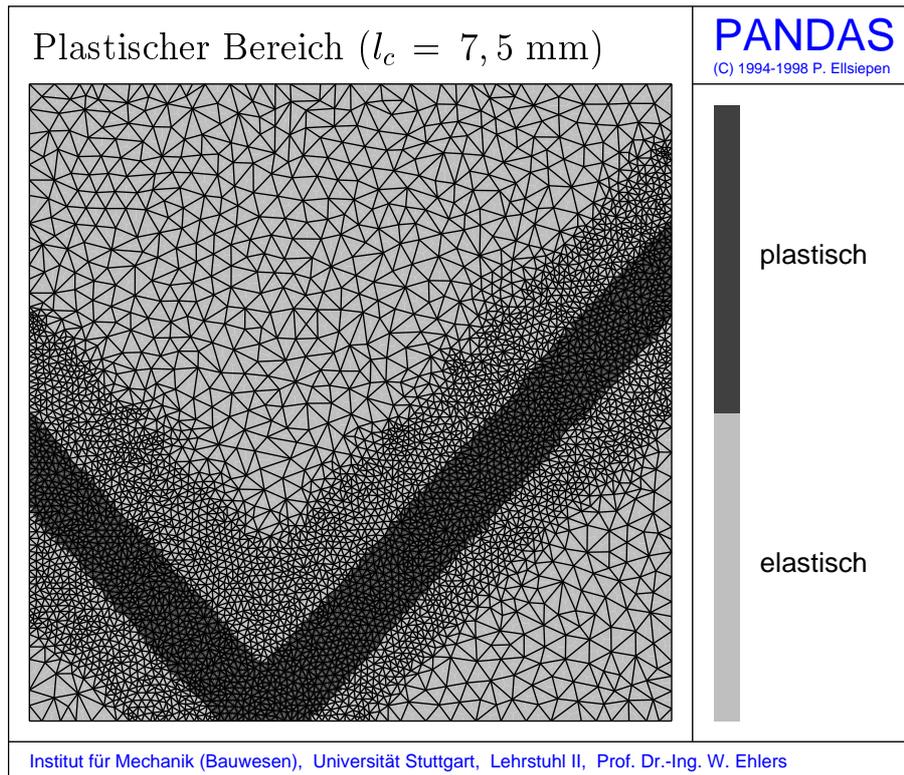


Bild 5.12: Plastische Zone im postkritischen Bereich

5.1.3 Funktionaler Zusammenhang zwischen Scherbandbreite und interner Länge

Um einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Scherbandbreite und der internen Länge zu gewinnen, reichen die Ergebnisse des vergangenen Kapitels bei weitem nicht aus.

Ausgehend vom Standardparametersatz wird die interne Länge in einem Bereich von 1,25 mm bis 1 cm variiert. In Bild 5.13 sind für einige verschiedene Werte von l_c die Norm der plastischen Verzerrung entlang eines Schnittes durch das Scherband aufgetragen.

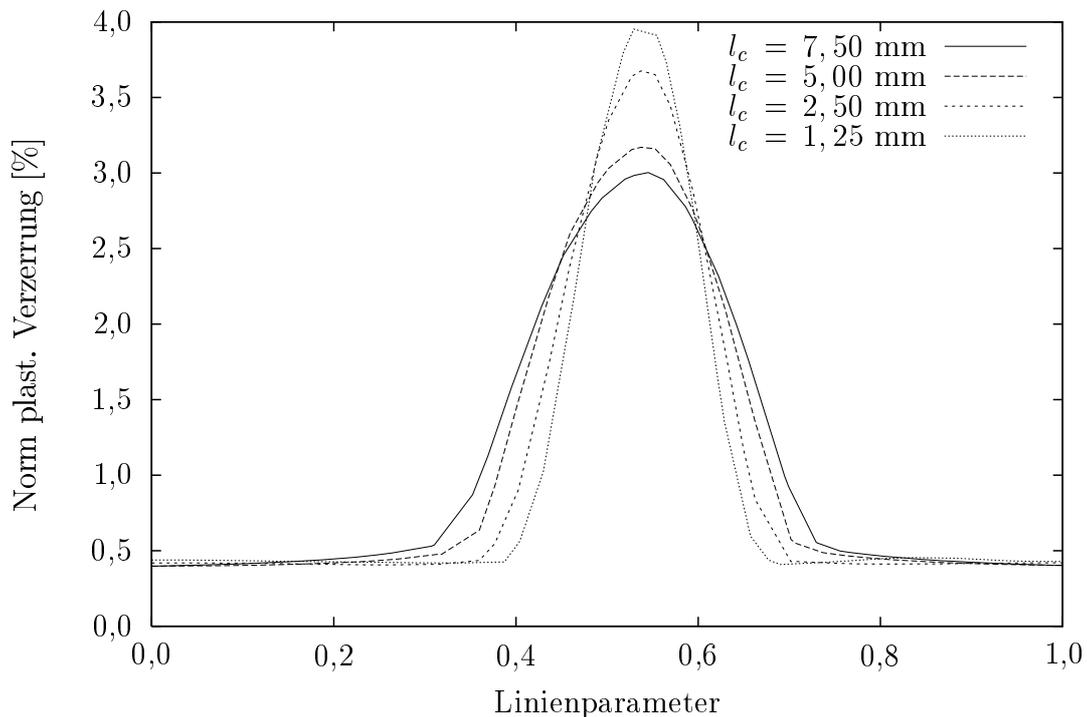


Bild 5.13: Variation der internen Länge

Es ist zu erkennen, daß die Scherbandbreite mit abnehmender interner Länge immer kleiner wird. Der funktionale Zusammenhang wird hingegen nicht deutlich. Eine etwas klarere Aussage erhält man durch Auftragung der Ergebnisse in einem Diagramm (Bild 5.14). Dabei geben die Fehlerbalken bei den berechneten Daten die Ableseungenauigkeit bei der Bestimmung der Scherbandbreite aus den berechneten Daten wieder.

Auffallend ist der lineare Zusammenhang zwischen der Scherbandbreite und der internen Länge für große l_c . Für den gewählten Parametersatz hat die Steigung der Geraden sogar den Wert eins. Für kleine l_c weichen die berechneten Scherbandbreiten von der Geraden nach unten ab, und vom theoretischen Standpunkt aus müßte

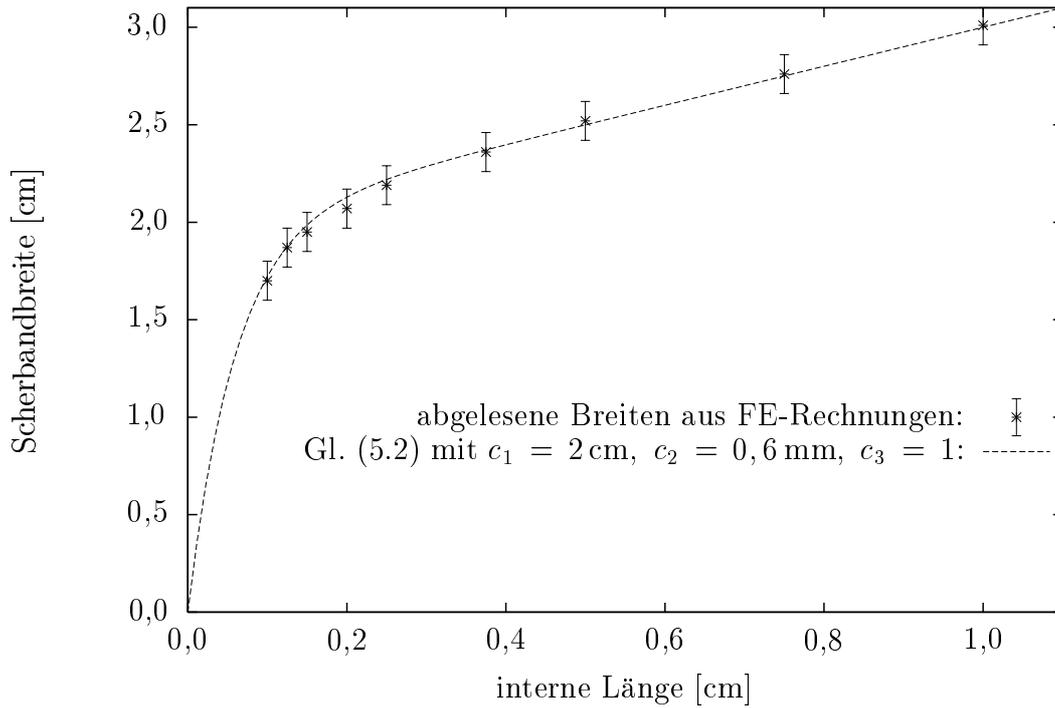


Bild 5.14: Abhängigkeit der Scherbandbreite von der internen Länge

bei einer internen Länge null schließlich auch eine singuläre Fläche (Scherband der Breite null) entstehen. Allerdings könnte dieses Ergebnis nur mit einem unendlich feinen Netz erzielt werden, so daß für sehr kleine l_c numerische Berechnungen nur mit einem sehr hohen Rechenaufwand gewonnen werden können.

Der abknickende Verlauf der Scherbandbreite für kleine interne Längen kann sehr gut mit einer abklingenden Exponentialfunktion approximiert werden. Mit diesen Überlegungen kann der folgende funktionale Zusammenhang zwischen Scherbandbreite b und interner Länge l_c postuliert werden:

$$b = c_1 [1 - \exp(-l_c / c_2)] + c_3 l_c. \quad (5.2)$$

In Bild 5.14 sind die Konstanten $c_1 - c_3$ mit den folgenden Werten identifiziert worden:

$$c_1 = 2 \text{ cm}, \quad c_2 = 0,6 \text{ mm}, \quad c_3 = 1. \quad (5.3)$$

Die Abhängigkeit der Scherbandbreite von der internen Länge bei variierendem μ_c (siehe Bild 5.15) liefert interessante Resultate:

- Der Parameter c_3 (Steigung der Geraden für große interne Längen) ist in einem weiten Bereich nicht von μ_c abhängig.

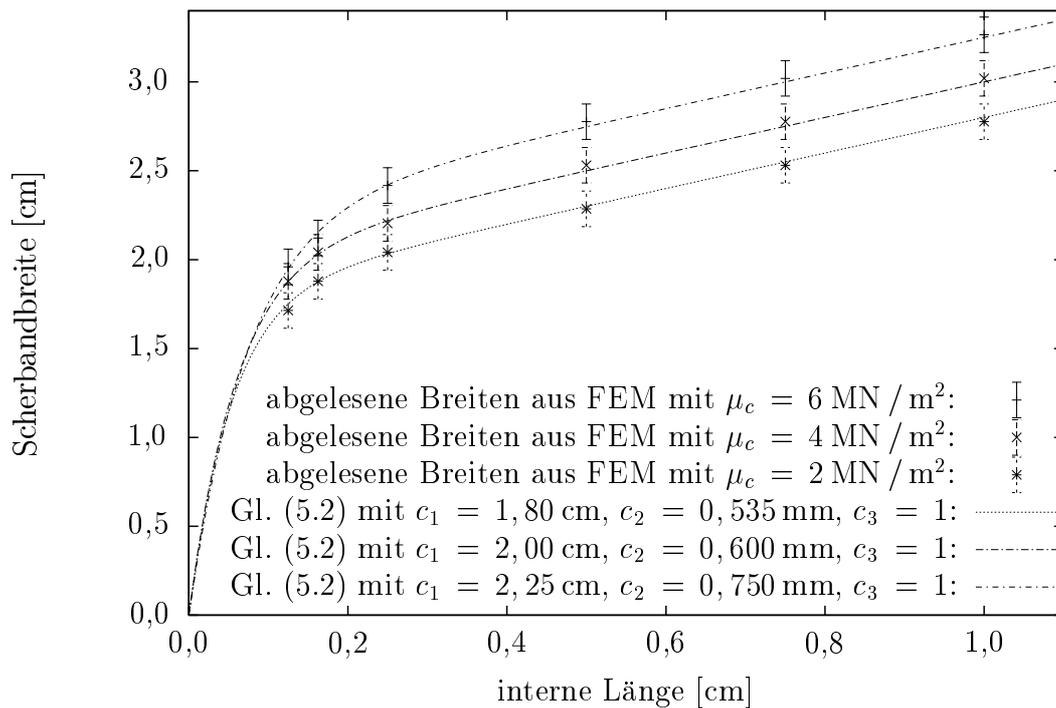


Bild 5.15: Abhängigkeit der Scherbandbreite von der internen Länge bei unterschiedlichen Werten von μ_c

- Die Parameter c_1 und c_2 werden deutlich von μ_c beeinflusst.

Eine experimentelle Bestätigung der numerisch erzielten Resultate aus den Bildern 5.14 und 5.15 wird mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden sein. Im Kapitel 3 wurde gezeigt, daß die mikroskopischen Eigenschaften Partikelform, Partikelgröße und Kontaktgesetz in den mikropolaren Materialparametern μ_c und l_c nicht entkoppelt auftreten. Es müssen daher erst weiterführende mikromechanische Untersuchungen durchgeführt werden, um den Einfluß der genannten mikroskopischen Eigenschaften auf die mikropolaren Materialparameter auch quantitativ erfassen zu können.

Bild 5.16 zeigt die Abhängigkeit der Scherbandbreite für $k_1 = 0$ und $k_2 = 12$, d. h. unter Berücksichtigung des schiefsymmetrischen Anteils des Spannungszustands und bei Vernachlässigung der Momentenspannung in der Fließbedingung.

Der qualitative Verlauf des funktionalen Zusammenhangs zwischen b und l_c bleibt erhalten. Lediglich die Konstanten c_1 bis c_3 nehmen andere Werte an (vgl. Bild 5.16).

Mit diesem Resultat wird deutlich, daß es für die Qualität der Ergebnisse nur von untergeordneter Bedeutung ist, ob in der Fließbedingung der Momentenspannungstensor \mathbf{M} (durch $k_1 \neq 0$) oder der schiefsymmetrische Anteil des Spannungstensors

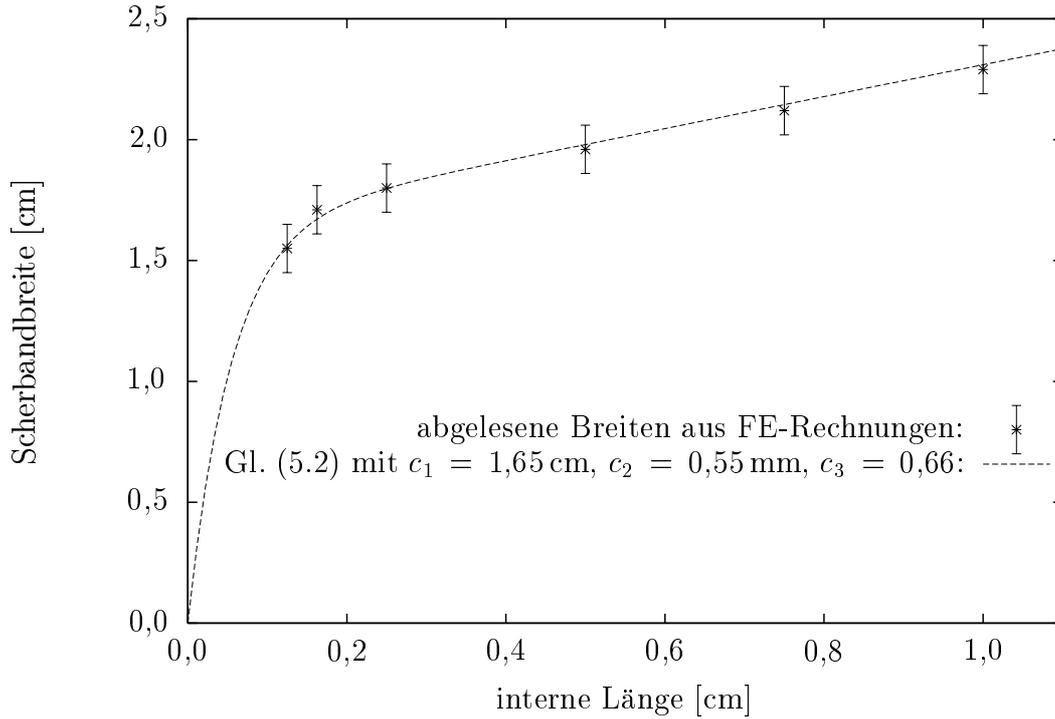


Bild 5.16: Abhängigkeit der Schersandbreite von der internen Länge bei Berücksichtigung von \mathbf{T}_{skw} in der Fließbedingung

\mathbf{T}_{skw} (durch $k_2 \neq 0$) berücksichtigt wird. Diese Erkenntnis ist auch durch die Kopplung von \mathbf{T}_{skw} und \mathbf{M} in der Drallbilanz verständlich. Es ist folglich zur Reduktion der Anzahl mikropolarer Materialparameter gerechtfertigt, entweder k_1 oder k_2 aus der Fließbedingung zu streichen. Vom numerischen Aufwand hat die Vernachlässigung von k_1 den Vorteil, daß die Fließbedingung \bar{F} keine direkte Abhängigkeit mehr vom plastischen Verzerrungsgradienten aufweist. Die Berechnung der plastischen Krümmung $\bar{\kappa}_p$ kann vom plastischen Korrektorschritt entkoppelt werden, und es entsteht kein zusätzlicher Aufwand beim Lösen des lokalen Gleichungssystems gegenüber der nicht-polaren Vorgehensweise.

5.2 Böschungsbruch

Als zweites Beispiel wird das aus der Geotechnik bekannte Problem des Böschungsbruchs infolge eines Aushebungsprozesses gewählt.

Bild 5.17 zeigt einen in der Realität aufgetretenen Fall eines Böschungsbruchs.

Aus der klassischen Literatur der Bodenmechanik (z. B. *Terzaghi & Jelinek* [81]) ist der Versagenszustand einer Geländestufe unter Eigengewicht zu entnehmen (siehe



Bild 5.17: Beispiel eines Böschungsbruchs

Bild 5.18). Darin ist ϕ der Winkel der inneren Reibung. Die kritische Höhe h_c der Geländestufe ist durch das Einsetzen des Versagensprozesses bestimmt und hängt neben materialspezifischen Größen von der Gesamthöhe und dem Winkel der Geländestufe ab.

Die numerische Simulation des Böschungsbruchs infolge eines Aushebungsprozesses erfolgt mit dem T2P1R1-Element, d. h. mit Berücksichtigung des Porenfluids. Die Berechnungen für das leere Festkörperskelett wurden in diesem Beispiel erreicht, in dem der *Darcy*-Parameter auf 10 m/s erhöht wurde, so daß sich praktisch kein Porendruck aufbauen kann. Es wird das elastisch-plastische Materialmodell verwendet. Es wird gezeigt, daß bei diesem Randwertproblem die Berücksichtigung des Porenfluids einen entscheidenden Einfluß auf die Ergebnisse hat (*Ehlers & Volk* [39]).

Die verwendeten Materialparameter sind in Tabelle 5.2 gegeben. Aus dem Materialparameter β des Einflächen-Fließkriteriums läßt sich der Winkel der inneren Reibung ϕ durch die Beziehung

$$\beta = \frac{1}{3} \sin \phi, \quad \phi = \arcsin(3\beta) \quad (5.4)$$

bestimmen. Für den vorliegenden Materialparametersatz ergibt sich ϕ zu 21° .

Die Geometrie und das Ausgangsnetz der FE-Rechnungen sind in Bild 5.19 gegeben. Der Aushebungsprozeß wird durch zeitlich veränderliche Randbedingungen im

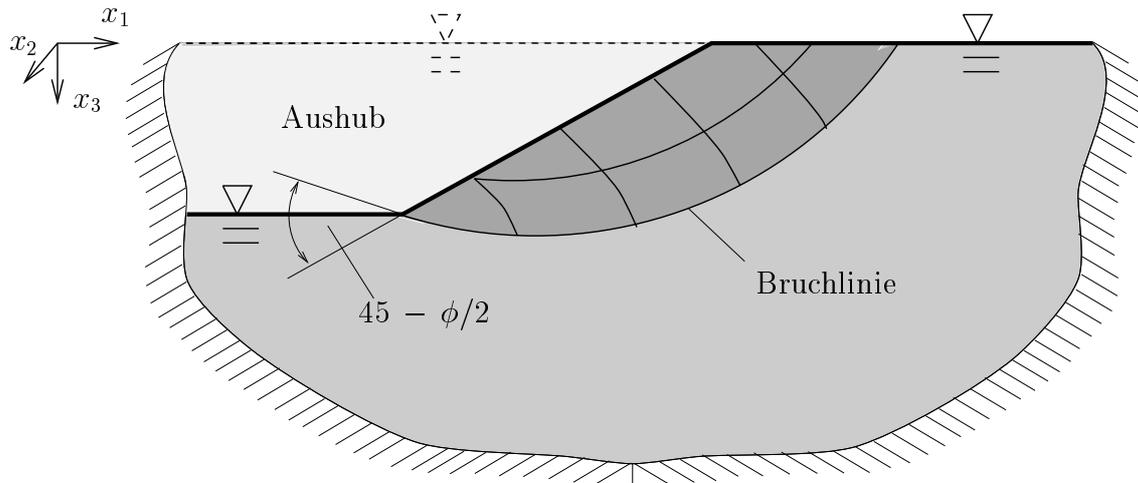


Bild 5.18: Versagen einer Böschung unter Eigengewicht
(nach Terzaghi & Jelinek [81])

Böschungsbereich simuliert. Dabei entspricht der Zeitpunkt $t = 0$ dem nicht ausgehobenen Zustand, der in Bild 5.19 durch den grau unterlegten Bereich angedeutet ist. Es ist zusätzlich darauf zu achten, daß der Porenwasserdruck bei $t = 0$ gleich dem geodätischen Wasserdruk sein muß, d. h.

$$p = \rho^{FR} g x_3 \quad (5.5)$$

mit der Erdbeschleunigung g und der geodätischen Höhe x_3 , die von der drainierten Oberfläche der Böschung ausgehend nach unten positiv genommen wird. Mit fortschreitender Zeit t werden die Randbedingungen derart verändert, so daß eine Aushebungsgeschwindigkeit von 67 cm pro Tag entsteht. Mit dieser Aushebungsgeschwindigkeit wird die kritische Höhe des vorliegenden Randwertproblem von 6,70 m nach zehn Tagen erreicht.

Das Netz wird in den Bereichen mit lokalisierender plastischer Verzerrung verfeinert, bis eine Diskretisierung erreicht ist, die fein genug ist, um das Scherband aufzulösen. In Bild 5.20 ist der interessante Ausschnitt des Netzes abgebildet, mit dem die folgenden Rechnungen durchgeführt wurden.

Als erste Variante wird ein leeres mikropolares Festkörperskelett mit einer internen Länge $l_c = 1$ mm angenommen. Ausgehend vom Fuß der Böschung bildet sich unmittelbar nach Erreichen der kritischen Höhe ein Scherband mit einer endlichen Breite aus (siehe Bild 5.21).

Im Scherband entstehen sehr große plastische Deformationen (bis zu 35 %), so daß eigentlich die Annahme einer geometrisch linearen Theorie keine Gültigkeit mehr be-

Parameter	Symbol	Wert
Lamé-Konstanten	μ^S	5 583 kN/m ²
	λ^S	8 375 kN/m ²
reale Dichten	ρ^{SR}	2 600 kg/m ³
	ρ^{FR}	1 000 kg/m ³
Volumenanteile	n_{0S}^S	0,67
	n_{0S}^F	0,33
reale Fluidwichte	γ^{FR}	10 kN/m ³
Darcy-Parameter	k^F	$1,2 \cdot 10^{-7}$ m/s
Parameter des Einflächenfließkriteriums,	α	$1,074 \cdot 10^{-2}$
	β	0,119 6
	γ	1,555
	δ	$1,377 \cdot 10^{-4}$ m ² /kN
	ϵ	$4,33 \cdot 10^{-6}$ m ² /kN
	κ	10,27 kN/m ²
	m	0,593 5
Cosserat-Parameter	l_c^S	$1 \cdot 10^{-3}$ m
	μ_c^S	$5 \cdot 10^3$ kN/m ²
	k_1	0
	k_2	1

Tabelle 5.2: Materialparameter für die Simulationen des Böschungsbruchs

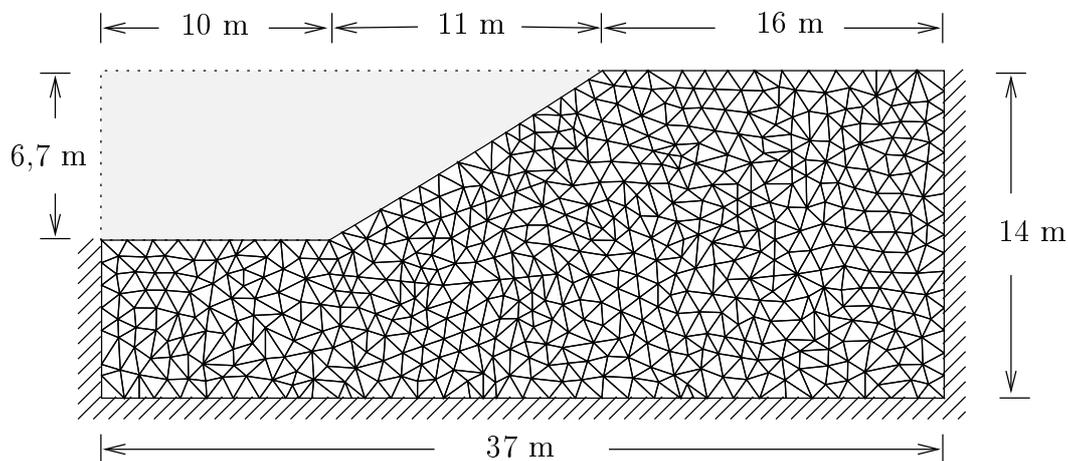


Bild 5.19: Geometrie und Startnetz der FE-Berechnungen

sitzt. Allerdings ist die entscheidende Aussage, ab welcher kritischen Höhe der Versagensprozeß einsetzt, noch im Gültigkeitsbereich der geometrisch linearen Theorie

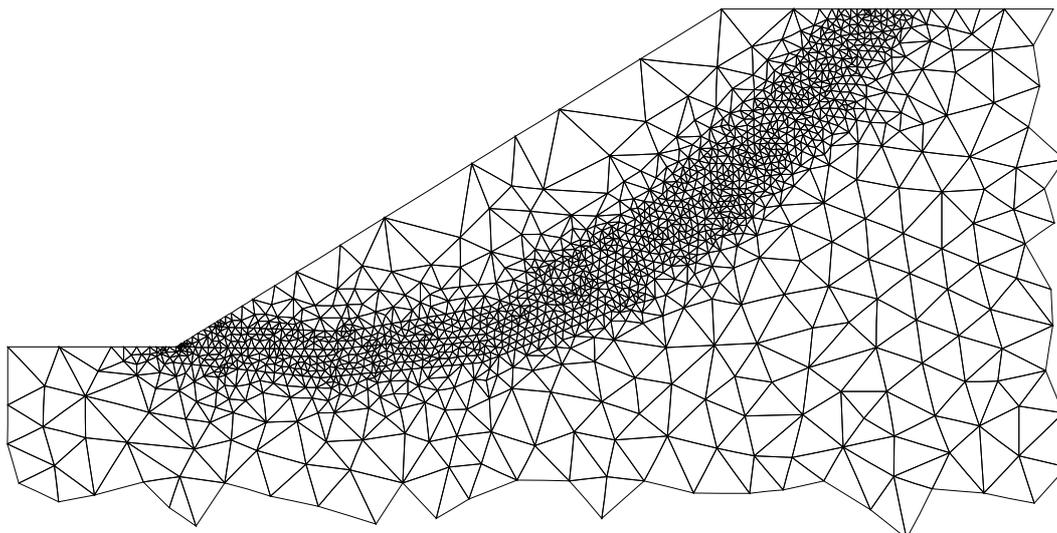


Bild 5.20: Verfeinerung im Bereich der Lokalisierungszonen

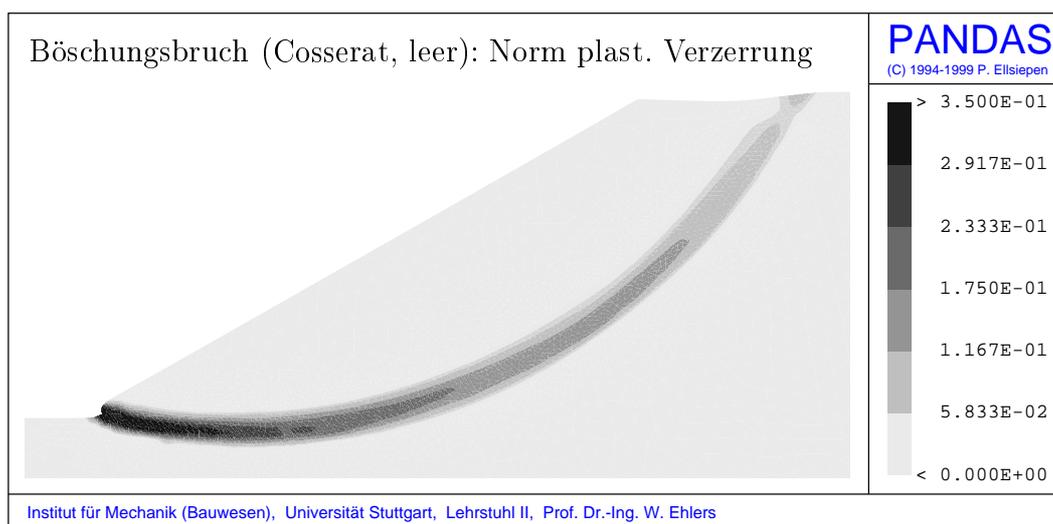


Bild 5.21: Leeres, mikropolares Festkörperskelett ($l_c = 1 \text{ mm}$) nach Erreichen der kritischen Höhe

zu treffen. Das Versagensmuster in Bild 5.21 paßt auch sehr gut mit den experimentell abgesicherten Resultaten aus Bild 5.18 zusammen. Der enorme zusätzliche Aufwand der geometrisch nicht-linearen Theorie wäre somit nicht gerechtfertigt.

Eine Vergrößerung der internen Länge auf $l_c = 5 \text{ cm}$ ergibt ein deutlich breiteres Scherband (vgl. Bild 5.22). Genau wie beim Biaxial-Versuch hängt die Breite eindeutig nicht-linear von der internen Länge ab.

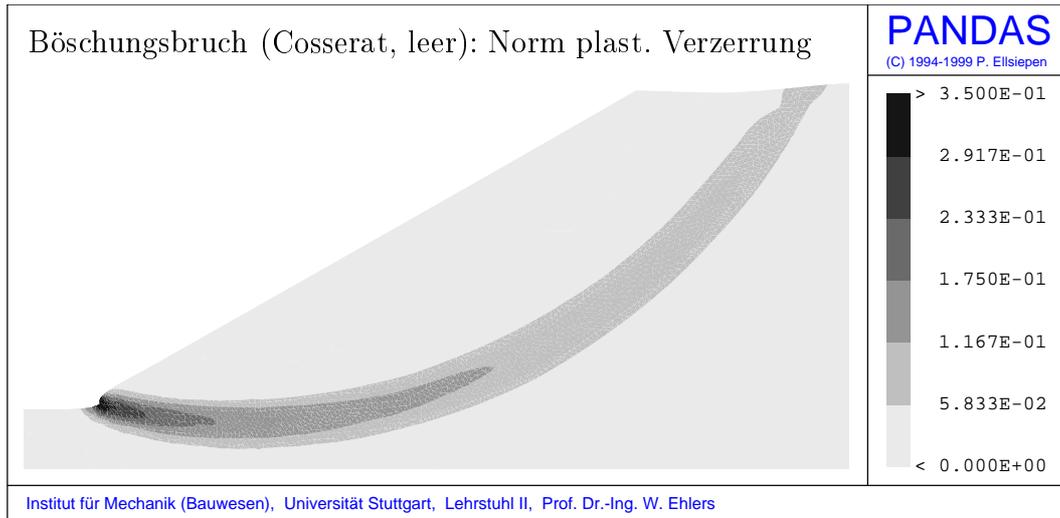


Bild 5.22: Leeres, mikropolares Festkörperskelett ($l_c = 50$ mm) nach Erreichen der kritischen Höhe

Als nächste Variante wird ein gesättigtes poröses Festkörperskelett mit $l_c = 1$ mm und $k^F = 1,2 \cdot 10^{-7}$ m/s angenommen. Durch die Viskosität des Fluids beginnt zwar der Versagensprozeß ebenfalls mit dem Erreichen der kritischen Höhe, allerdings tritt der Lokalisierungseffekt zeitverzögert auf. In Bild 5.23 ist der Versagenszustand 20 Tage nach Erreichen der kritischen Höhe aufgetragen.

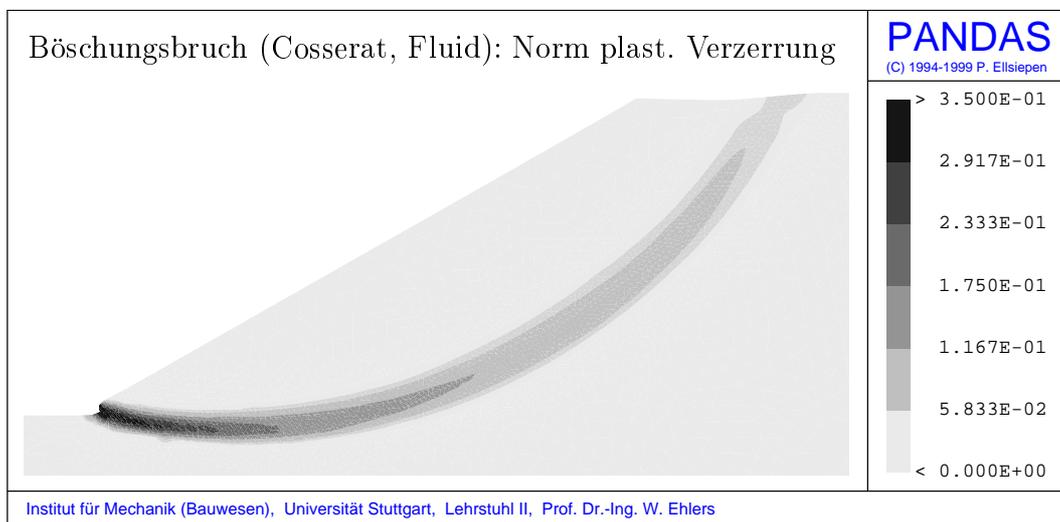


Bild 5.23: Gesättigtes, mikropolares Festkörperskelett 20 Tage nach Erreichen der kritischen Höhe

Durch den Vergleich der Bilder 5.21 und 5.23 lassen sich für das angegebene Rand-

wertproblem und die verwendeten Materialparameter die folgenden Aussagen treffen:

- Infolge der Mikropolarität des Festkörpermaterials bildet sich ein Scherband endlicher Breite aus. Die Breite des Scherbands wird von den mikropolaren Materialparametern bestimmt.
- Durch ein viskoses Porenfluid bleibt die kritische Höhe nahezu unverändert, allerdings setzt ein zeitverzögerter Versagensprozeß ein.
- Die Scherbandbreite wird für hinreichend große Materialparameter der mikropolaren Theorie von der Viskosität des Porenfluids nicht beeinflusst.

Die Viskosität des Porenfluids sorgt bereits ohne Berücksichtigung der Mikropolarität für eine Regularisierung des Böschungsbruchproblems. In Bild 5.24 ist der Versagenszustand eines gesättigten nicht-polaren Festkörperskeletts 20 Tage nach Erreichen der kritischen Höhe aufgetragen.

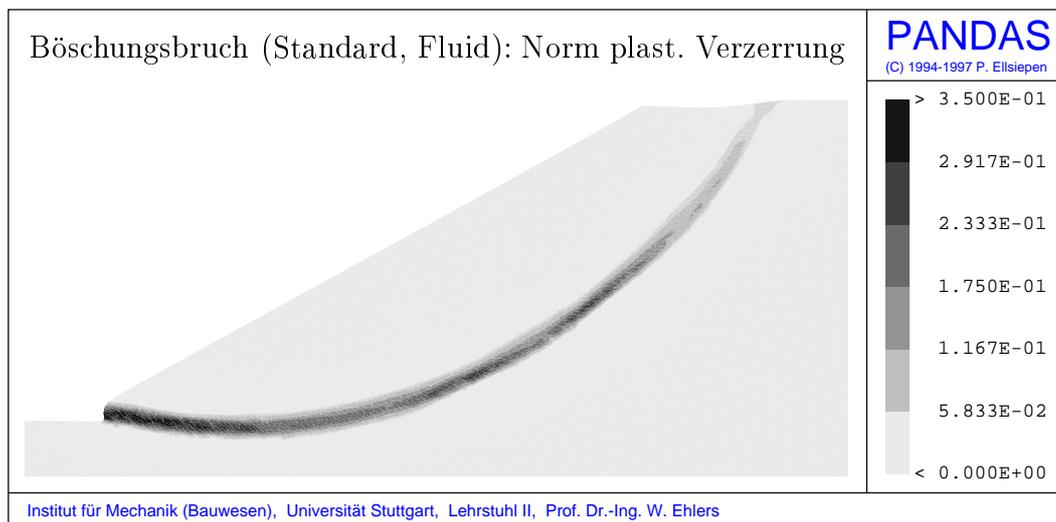


Bild 5.24: Gesättigtes, nicht-polares Festkörperskelett 20 Tage nach Erreichen der kritischen Höhe ($k^F = 1,2 \cdot 10^{-7}$ m/s)

Man erkennt, daß die Scherbandbreite deutlich kleiner ist als für das mikropolare Material. Eine Erhöhung der Viskosität des Porenfluids führt einerseits zu einem deutlich langsameren Versagensprozeß und zum anderen zu einer Verbreiterung des Scherbands. In Bild 5.25 wurde k^F auf $1,2 \cdot 10^{-10}$ m/s verringert. Eine vergleichbare maximale plastische Verzerrung wird im Scherband mit diesem *Darcy*-Parameter nach ca. zwei Jahren nach Erreichen der kritischen Höhe erreicht.

Der Nachteil der Regularisierung des Problems allein durch die Viskosität des Fluids wird hieraus klar ersichtlich, denn die Dauer und die Form des Versagensprozesses treten nicht entkoppelt auf.

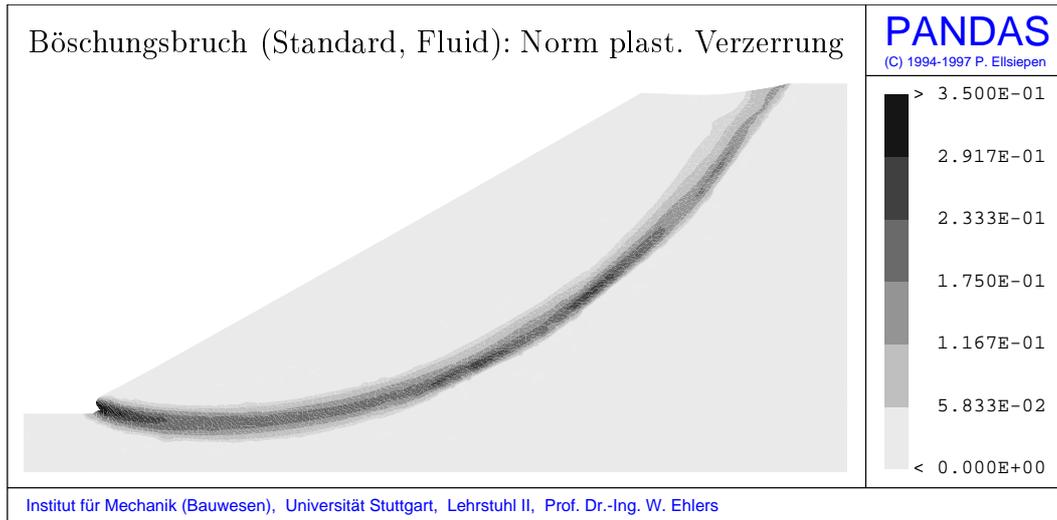


Bild 5.25: Gesättigtes, nicht-polares Festkörperskelett 2 Jahre nach Erreichen der kritischen Höhe ($k^F = 1,2 \cdot 10^{-10}$ m/s)

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Berücksichtigung der Mikropolarität ein deutlich stärkeres regularisierendes Werkzeug ist als die Berücksichtigung der Fluidviskosität allein.

Im folgenden sind noch einige interessante Ergebnisse abgebildet, die mit dem gesättigten mikropolaren Modell erzielt wurden.

Die plastische Dilatanz erkennt man sehr gut daran, daß in Bild 5.26 der Volumenanteil n^F des Fluids im Bereich des Scherbands mit den lokalisierten plastischen Verzerrungen deutlich größer ist als im Ausgangszustand.

Die Kinematik des Versagensprozesses wird deutlich von Bild 5.27 wiedergegeben. Im Bereich des Scherbands treten sehr große Gesamtrotationen auf. Der plastisch undeformierte Anteil der Böschung dreht sich quasi aus dem verbleibenden Grund heraus. Dies erkennt man an den negativen Rotationswerten des undeformierten Anteils der Böschung.

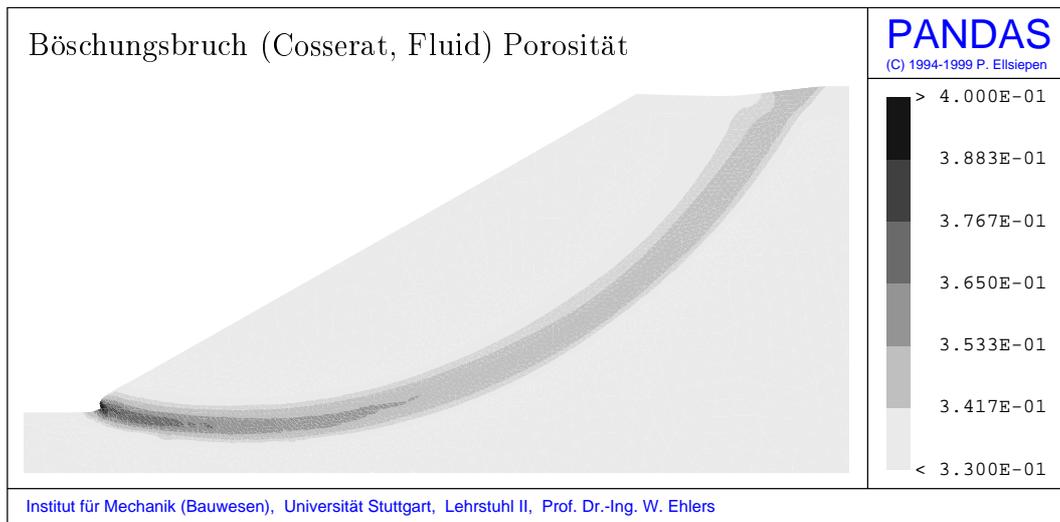


Bild 5.26: Porosität des gesättigten, mikropolaren Festkörperskeletts, 20 Tage nach Erreichen der kritischen Höhe

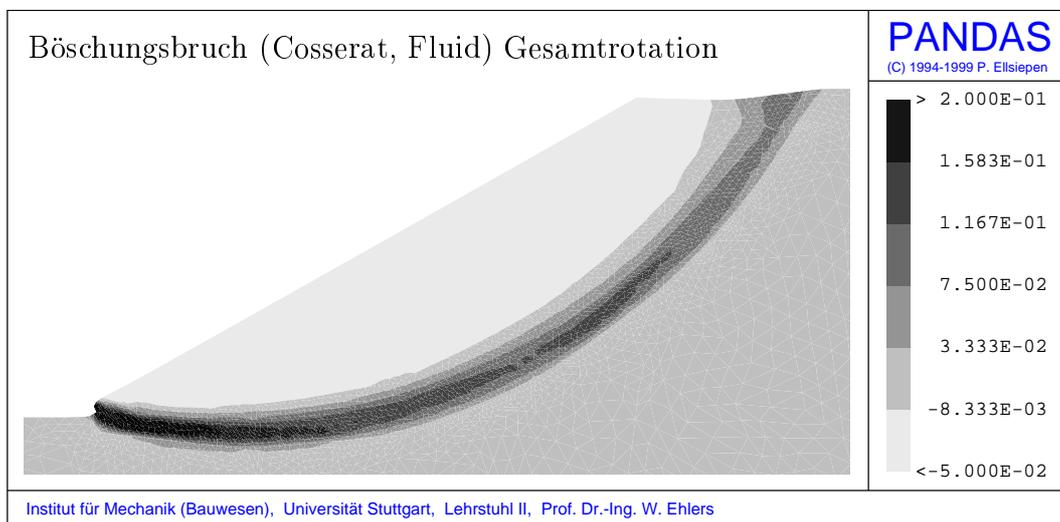


Bild 5.27: Gesamtrotation des gesättigten, mikropolaren Festkörperskeletts, 20 Tage nach Erreichen der kritischen Höhe

Schließlich ist in Bild 5.28 der Extraanteil des Porendrucks wiedergegeben, der durch die plastische Deformation der Böschung entsteht. Um den geodätischen Porendruck zu eliminieren, wird vom tatsächlich auftretenden Porendruck derjenige Druck subtrahiert, der in einem rein elastischen Referenzproblem entsteht.

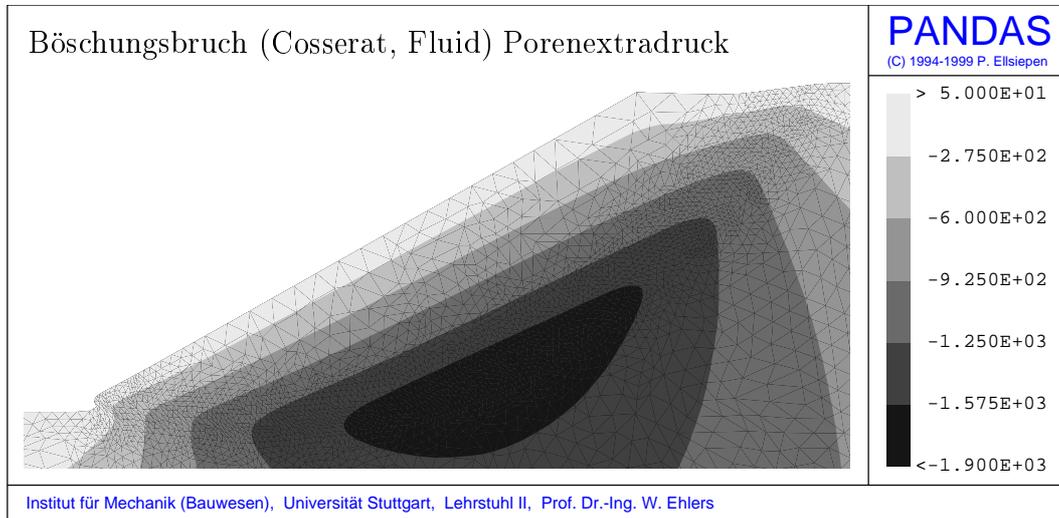


Bild 5.28: Porenextradruck des gesättigten, mikropolaren Festkörperskeletts, 20 Tage nach Erreichen der kritischen Höhe

Infolge der Volumenaufweitung entsteht in der Böschung bezüglich des Extraanteils des Porendrucks ein Sog. Der gesamte Porenfluiddruck (Extraanteil plus geodätischer Druck) wird demnach im Scherband durch die Dilatanz herabgesetzt.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

Die kontinuumsmechanische Beschreibung eines leeren oder gesättigten porösen Festkörperskeletts kann mit der Theorie Poröser Medien (TPM) erfolgen. Dabei wird die TPM durch die klassische Mischungstheorie repräsentiert, in der zusätzlich zur Berücksichtigung der lokalen Zusammensetzung des Materials skalare Strukturvariablen (die sogenannten Volumenanteile) eingeführt werden. Für die Beschreibung vieler Anwendungsbeispiele ist die genannte TPM ausreichend, sofern die makroskopischen Ergebnisse nicht von intrinsischen Längenskalen abhängen. Diese Abhängigkeit kann mit der klassischen TPM nicht berücksichtigt werden, so daß numerische Simulationen häufig ungenügende Ergebnisse liefern. Ein Beispiel für diese Problemklasse sind Randwertprobleme mit Scherbandbildung. Aus Experimenten ist bekannt, daß die makroskopische Scherbandbreite von Granulaten ein Vielfaches der Partikelgröße darstellt. Die klassische TPM muß somit erweitert werden, damit mehr Information aus der Mikroebene in eine kontinuumsmechanische Beschreibung auf der Makroebene eingehen kann.

In der vorliegenden Arbeit wurden aus diesem Grund unabhängige rotatorische Freiheitsgrade im Sinne der Gebrüder *Cosserat* eingeführt, die physikalisch die gemittelten Rotationen der Mikropartikel über ein repräsentatives Elementarvolumen (REV) darstellen. Die Kinematik dieser mikropolaren Beschreibung wurde detailliert dargestellt und die in weiten Bereichen vorhandenen Analogien zwischen der mikropolaren und nicht-polaren Beschreibungsweise aufgezeigt. Im Rahmen einer geometrisch nicht-linearen Theorie wurden Kompatibilitätsuntersuchungen für die Verzerrungs- und Krümmungstensoren durchgeführt und neue Beziehungen hergeleitet, die unter bestimmten Annahmen auf eine elastisch-plastische Formulierung übertragbar sind. Die Ergebnisse der geometrisch linearen Theorie wurden durch formale Linearisierung gewonnen. Die Linearisierung der angesprochenen Kompatibilitätsbedingungen ergab im geometrisch-linearen Bereich einen funktionalen Zusammenhang zwischen dem Krümmungsmaß und dem Verzerrungsgradienten.

Im Rahmen der Konstitutivmodellierung wurden für die Spannungsgrößen lineare Abhängigkeiten von den zugeordneten Deformationstensoren angenommen. Damit ergibt sich für den Spannungstensor, der in der mikropolaren Theorie im allgemeinen unsymmetrisch ist, ein erweitertes *Hookesches* Gesetz mit einem zusätzlichen mikropolaren Elastizitätsmodul, der die Proportionalitätskonstante zwischen dem schiefsymmetrischen Anteil des Spannungstensors und des elastischen Verzerrungstensors darstellt. Für den ebenen Fall liefert die Annahme der materiellen Linearität für die Momentenspannungen eine proportionale Abhängigkeit vom elastischen Krümmungstensor. Die zugehörige mikropolare Materialkonstante beinhaltet bereits aus Dimensionsgründen eine intrinsische Länge.

Mit Hilfe einfacher mikroskopischer Überlegungen wurde motiviert, daß die mikropolaren Elastizitätskonstanten des Spannungs- und Momentenspannungsgesetzes in prinzipieller Abhängigkeit zur mittleren mikroskopischen Partikelform und Partikelgröße sowie des mikroskopischen Kontaktverhaltens zwischen den Mikroteilchen stehen.

Das plastische Materialverhalten wurde durch ein Einflächenfließkriterium in Verbindung mit einer nicht-assozierten Fließregel berücksichtigt. Die Verwendung des Einflächenfließkriteriums hat gegenüber gebräuchlichen Kappenmodellen zur Beschreibung der plastischen Eigenschaften von Reibungsmaterialien den Vorteil der stetigen Differenzierbarkeit im gesamten Spannungsraum. Die Mikropolarität des Festkörpermateriale spiegelt sich in der Fließbedingung durch Zusatzterme wieder, die von den Invarianten des Momentenspannungstensors und des schiefsymmetrischen Anteils des Spannungstensors bestimmt werden.

Für die numerische Simulation von Anfangsrandwertproblemen mit der Methode der finiten Elemente wurden die beschreibenden Bilanzgleichungen in eine schwache Form überführt und nach einer durchgeführten Orts- und Zeitdiskretisierung mit Hilfe des Standard-*Galerkin*-Verfahrens numerisch gelöst. Die numerische Behandlung der plastischen Materialgleichungen gestaltet sich gegenüber nicht-polaren Beschreibungsweisen deutlich aufwendiger, da neben der plastischen Verzerrung auch Gradienten der plastischen Verzerrung berücksichtigt werden müssen.

Anhand des aus der Experimentaltechnik bekannten Biaxialversuchs wurde die Netzunabhängigkeit der Ergebnisse für die mikropolare Theorie gezeigt. Zudem lieferten Parameterstudien erste Ergebnisse für eine funktionale Abhängigkeit der Scherbandbreite von der internen Länge. Mit der Simulation des Böschungsbruchs infolge Eigengewicht wurde weiterhin die Anwendbarkeit der präsentierten mikropolaren Theorie auf kompliziertere Randwertprobleme gezeigt, die auch für die Bauingenieurpraxis von großem Interesse sind.

6.2 Ausblick

Das größte Problem aller erweiterten Kontinuumsmethoden ist die quantitative Bestimmung der zusätzlichen Materialparameter. In der vorliegenden Arbeit wurden

im Rahmen der mikroskopischen Motivation der elastischen Materialgesetze erste Ansätze präsentiert, um die mikropolaren Materialparameter nicht nur durch Gegenrechnung von Randwertproblemen mit inhomogenen Deformationsmustern zu bestimmen, sondern auch, um durch explizite Berücksichtigung der Mikrostruktur zusätzliche Informationen zu gewinnen. Aus diesem Grund ist es wünschenswert, die präsentierten Ideen auch für kompliziertere mikroskopische Strukturen zu überprüfen und eventuell quantitative Aussagen über die Größe der mikropolaren Materialparameter für bestimmte Modellmaterialien zu gewinnen.

Eine sehr interessante Aufgabe dürfte die numerische Umsetzung der angesprochenen mikropolar motivierten Gradientenplastizitätstheorie erster Ordnung sein (vergleiche Kapitel 3). Der erste konkrete Schritt in dieser Richtung ist die Einführung des schiefsymmetrischen Anteil des Spannungstensors als neue Primärvariable, anstelle der bisher verwendeten mikropolaren rotatorischen Freiheitsgrade. Die Anzahl der Freiheitsgrade bleibt dann zwar unverändert, das Verzerrungsmaß und der daraus abgeleitete symmetrische Anteil des Spannungstensors werden hingegen symmetrisch, so daß algorithmisch Vorteile entstehen sollten.

Hierauf aufbauend kann versucht werden, den schiefsymmetrischen Anteil nicht mehr auf dem gesamten Gebiet als Variable einzuführen, sondern zusätzliche lokale Freiheitsgrade auf Elementebene zu formulieren und diese mittels der statischen Kondensation auf der Lokalebene wieder zu eliminieren. Sofern dieser Ansatz funktioniert, würde eine enorme Rechenzeiterparnis die Folge sein.

Zur Behandlung von Problemen mit großen plastischen Deformationen sind im Kapitel 2 die kinematischen Grundbeziehungen vorgestellt worden. Allerdings müssen zur Vervollständigung noch Untersuchungen zur Materialmodellierung angestellt und insbesondere geeignete plastische Evolutionsgleichungen formuliert werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Altenbach, J., Altenbach, H.: Einführung in die Kontinuumsmechanik. Teubner, Stuttgart 1994.
- [2] Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden. Springer-Verlag, Berlin 1986.
- [3] Becker, E., Bürger, W.: Kontinuumsmechanik. Teubner, Stuttgart 1976.
- [4] Besdo, D.: Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums. Acta Mechanica **20** (1974), 105-131.
- [5] de Boer, R.: Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure. Springer-Verlag, Berlin 1982.
- [6] de Boer, R., Ehlers, W.: Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 40, Universität-GH-Essen 1986.
- [7] de Boer, R., Ehlers, W., Kowalski, S., Plischka, J.: Porous Media – A Survey of Different Approaches. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 54, Universität-GH-Essen 1991.
- [8] de Boer, R.: Highlights in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory. Appl. Mech. Rev. **49** (1996), 201-262.
- [9] de Borst, R.: Numerical modelling of bifurcation and localisation in cohesive-frictional materials. Pageoph. **137** (1991), 368-390.
- [10] de Borst, R.: A generalisation of J_2 -flow theory for polar continua. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **103** (1993), 347-362.
- [11] Bowen, R. M.: Theory of mixtures, in A. C. Eringen (ed.): Continuum Physics, Vol. III, pp. 1-127. Academic Press, New York 1976.
- [12] Bowen, R. M.: Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. Int. J. Engng. Sci. **18** (1980), 1129-1148.
- [13] Bowen, R. M.: Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. Int. J. Engng. Sci. **20** (1982), 697-735.
- [14] Bowen, R. M., Wiese, J. C.: Diffusion in Mixtures of Elastic Materials. Int. J. Engng. Sci. **7** (1969), 689-722.
- [15] Cosserat, E., Cosserat, F.: Théorie des Corps Déformable. A. Hermann et Fils, Paris 1909.

- [16] Cross, J. J.: Mixtures of fluids and isotropic solids. *Archives of Mechanics* **25** (1973), 1025-1039.
- [17] Cundall, P. A., Strack, O. D. L.: A discrete numerical model for granular assemblages. *Géotechnique* **29** (1979), 47-65.
- [18] Darcy, H.: *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris 1856.
- [19] Diebels, S.: A Micropolar Theory of Porous Media: Constitutive Modelling. *Transport in Porous Media*, accepted for publication, 1998.
- [20] Diebels, S., Ehlers, W.: Dynamic analysis of a fully saturated porous medium. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **39** (1996), 81-97.
- [21] Diebels, S., Ehlers, W.: On basic equations of multiphase micropolar materials. *Technische Mechanik* **16** (1996), 77-88.
- [22] Diebels, S., Ellsiepen, P., Ehlers, W.: Error-controlled Runge-Kutta Time Integration of a Viscoplastic Hybrid Two-phase Model. *Technische Mechanik*, accepted for publication, 1998.
- [23] Dietsche, A., Steinmann, P., Willam, K.: Micropolar elastoplasticity and its role in localisation. *Int. J. Plasticity* **9** (1993), 813-831.
- [24] Drucker, D. C., Prager, W.: Soil mechanics and plastic analysis of limit design. *Quart. Appl. Math.* **10** (1952), 157-165.
- [25] Ehlers, W.: Poröse Medien – ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie. *Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 47*, Universität-GH-Essen 1989.
- [26] Ehlers, W.: Toward finite theories of liquid saturated elasto-plastic porous media. *Int. J. Plasticity* **7** (1991), 433-475.
- [27] Ehlers, W.: Constitutive equations for granular materials in geomechanical context, in K. Hutter (ed.): *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*, CISM Courses and Lectures No. 337. Springer-Verlag, Wien 1993, pp. 313-402.
- [28] Ehlers, W.: Compressible, incompressible and hybrid two-phase models in porous media theories. *ASME: AMD-Vol.* **158** (1993), 25-38.
- [29] Ehlers, W.: A single surface yield function for geomaterials. *Arch. Appl. Mech.* **65** (1995), 63-76.
- [30] Ehlers, W.: Grundlegende Konzepte in der Theorie Poröser Medien. *Technische Mechanik* **16** (1996), 63-76.
- [31] Ehlers, W., Diebels, S., Volk, W.: Deformation and Compatibility for Elastoplastic Micropolar Materials with Application to Geomechanical Problems. *J. Physique IV* **8**, Pr8 (1998), 127-134.
- [32] Ehlers, W., Ellsiepen, P.: Zeitschrittgesteuerte Verfahren bei stark gekoppelten Festkörper-Fluid-Problemen. *ZAMM* **77**, Supp. 1 (1997), 81-82.

- [33] Ehlers, W, Ellsiepen, P.: Adaptive Zeitintegrations-Verfahren für ein elastisch-viskoplastisches Zweiphasenmodell. *ZAMM* **78**, Supp. 1 (1998), 361-362.
- [34] Ehlers, W, Ellsiepen, P.: PANDAS: Ein FE-System zur Simulation von Sonderproblemen der Bodenmechanik. In P. Wriggers, U. Meißner, E. Stein, W. Wunderlich (Hrsg.): *Finite Elemente in der Baupraxis – FEM'98, Modellierung, Berechnung und Konstruktion*, Ernst & Sohn, Berlin 1998, pp. 391-400.
- [35] Ehlers, W., Ellsiepen, P., Blome, P., Mahnkopf, D., Markert, B.: Theoretische und numerische Studien zur Lösung von Rand- und Anfangswertproblemen in der Theorie Poröser Medien. Abschlußbericht zum DFG-Forschungsprojekt Eh 107/6-2, Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen), Nr. 99-II-1, Universität Stuttgart 1999.
- [36] Ehlers, W., Volk, W.: On shear band localization phenomena of liquid-saturated granular elasto-plastic porous solid materials accounting for fluid viscosity and micropolar solid rotations. *Mech. Cohesive-frictional Mater.* **2** (1997), 301-320.
- [37] Ehlers, W., Volk, W.: On shear band localization phenomena induced by elasto-plastic consolidation of fluid-saturated soils, in D. J. R. Owen, E. Oñate and E. Hinton (eds.): *Computational Plasticity – Fundamentals and Applications*, CIMNE, Barcelona 1997, pp. 1657-1664.
- [38] Ehlers, W., Volk, W.: Localization Phenomena in Liquid-saturated and Empty Porous Solids, *Transport in Porous Media*, accepted for publication, 1998.
- [39] Ehlers, W., Volk, W.: On theoretical and numerical methods in the theory of porous media based on polar and non-polar solid materials, *Int. J. Solids Structures* **35** (1998), 4597-4617.
- [40] Eringen, A. C., Kafadar, C. B.: Polar field theories, in A. C. Eringen (ed.): *Continuum Physics, Vol. IV*, Academic Press, New York 1976, pp. 1-73.
- [41] Green, A. E., Naghdi, P. M.: A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **18** (1965), 251-281.
- [42] Green, R. J.: A plasticity theory for porous solids. *Int. J. Mech. Sci.* **14** (1972), 215-224.
- [43] Günther, W.: Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft* **10** (1958), 195-213.
- [44] Hammad, W. I.: Modélisation non linéaire et étude expérimentale des bandes cisaillement dans les sables. Dissertation Université Joseph Fourier - Grenoble I 1991.
- [45] Hassanizadeh, M., Gray, W. G.: General conservation equations for multi-phase systems: 1. Averaging procedure. *Adv. Water Res.* **2** (1979), 131-144.
- [46] Hassanizadeh, M., Gray, W. G.: General conservation equations for multi-phase systems: 2. Mass, momenta, energy, and entropy equations. *Adv. Water Res.* **2** (1979), 191-203.

- [47] Hartmann, S., Lührs, G., Haupt, P.: An efficient stress algorithm with applications in viscoplasticity and plasticity. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **40** (1997), 991-1013.
- [48] Haupt, P.: On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of viscoelastic-plastic material behavior. *Int. J. Plasticity* **1** (1985), 303-316.
- [49] Haupt, P.: Foundations of continuum mechanics, in K. Hutter (ed.): *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*, CISM Courses and Lecture Notes No. 337. Springer-Verlag, Wien 1993, pp. 1-77.
- [50] Haupt, P., Tsakmakis, Ch.: On the application of dual variables in continuum mechanics, *Continuum Mech. Thermodyn.* **1** (1989), 165-196.
- [51] Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon, Oxford 1950.
- [52] Khan, A. S., Huang, S.: *Continuum theory of plasticity*. Wiley & Sons, New York 1995.
- [53] Klingbeil, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*, BI-Wiss.-Verlag, Mannheim 1989.
- [54] Lemaitre, J., Chaboche, J. L.: *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Cambridge 1990.
- [55] Lade, P. V., Duncan, J. M.: Cubical triaxial tests on cohesionless soils. *ASME: J. Soil Mech. Found. Div.* **99** (1973), 793-812.
- [56] Kim, M. K., Lade, P. V.: Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials. I. Plastic Potential Function. *Computers and Geotechnics* **5** (1988), 307-324.
- [57] Mieke, C.: Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodynamische Formulierung und numerische Implementation. *Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover*, Nr. F 93/1, Hannover 1993.
- [58] Mises, R. von: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. *ZAMM* **8** (1928), 161-185.
- [59] Mühlhaus, H.-B., Aifantis, A. C.: A variational principle for gradient plasticity. *Int. J. Solids Structures* **28** (1991), 845-857.
- [60] Mühlhaus, H.-B., Vardoulakis, I.: The thickness of shear bands in granular materials. *Géotechnique* **37** (1987), 271-283.
- [61] Müller, I.: A Thermodynamic Theory of Mixtures of Fluids. *Arch. Rational Mech. Anal.* **28** (1968), 1-39.
- [62] Neilsen, M. K., Schreyer, H. L.: Bifurcations in Elastic-plastic Materials. *Int. J. Solids Structures* **30** (1993), 521-544.
- [63] Nowacki, W.: *Theory of Asymmetric Elasticity*. Pergamon Press, Oxford 1986.
- [64] Oldroyd, J. G.: On the formulation of rheological equations of state. *Proc. Roy. Soc. London (A)* **200** (1950), 523-541.

- [65] Perzyna, P.: Fundamental Problems in Viscoplasticity. *Adv. Appl. Mech.* **9** (1966), 243-377.
- [66] Plischka, J.: Die Bedeutung der Durchschnittsbildungstheorie für die Theorie poröser Medien. Dissertation, Fachbereich Bauwesen, Universität-GH-Essen 1992.
- [67] Rice, J. R.: The Localization of Plastic Deformation, in W. T. Koiter (ed.): *Theoretical and Applied Mechanics*, pp. 207-220, North Holland, Amsterdam 1976.
- [68] Schad, H.: Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden und ihre Verwendung bei der numerischen Analyse von Grundbauaufgaben. *Mitteilungen des Baugrundinstituts Stuttgart*, Heft 10, Universität Stuttgart 1979.
- [69] Schäfer, H.: Das Cosserat-Kontinuum. *ZAMM* **47** (1967), 485-598.
- [70] Schrefler, B. A., Majorna, C. E., Sanavia, L.: Shear band localization in saturated porous media. *Arch. Mech.* **47** (1995), 577-599.
- [71] Schrefler, B. A., Sanavia, L., Majorna, C.: A multiphase media model for localisation and post-localisation simulation in geomaterials. *Mech. Cohesive-frictional Mater.* **1** (1996), 95-114.
- [72] Schröder, J.: Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens. Dissertation, Bericht Nr. I-1, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart 1996.
- [73] Schwarz, H. R.: *Methode der finiten Elemente*. Teubner, Stuttgart 1991.
- [74] Simo, J. C., Hughes, T. J. R.: *Computational inelasticity*. Springer-Verlag, New York 1997.
- [75] Steinmann, P.: Lokalisierungsprobleme in der Plasto-Mechanik. Dissertation, Universität Karlsruhe 1992.
- [76] Steinmann, P.: A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures* **31** (1994), 1063-1084.
- [77] Steinmann, P.: Theory and numerics of ductile micropolar elastoplastic damage. *Int. J. Numer. Methods Eng.* **38** (1995), 583-606.
- [78] Steinmann, P., Stein, E.: A unifying treatise of variational principles for two types of micropolar continua. *Acta Mechanica* **121** (1997), 215-232.
- [79] Steinmann, P., Willam, K.: Localization within the framework of micropolar elasto-plasticity, in V. Mannl, J. Najjar, O. Brüller (eds.): *Advances in Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin 1991, pp. 296-313.
- [80] Tejchman, J., Wu, W.: Numerical study on pattering of shear bands in a Cosserat continuum. *Acta Mech.*, **99** (1993), 61-74.
- [81] Terzaghi, K., Jelinek, R.: *Theoretische Bodenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin 1954.

- [82] Törnig, W., Spellucci, P.: Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [83] Truesdell, C.: Thermodynamics of diffusion, in C. Truesdell (ed.): Rational Thermodynamics, Second Edition, Springer-Verlag, New York 1984, pp. 219-236.
- [84] Truesdell, C., Toupin, R. A.: The classical field theories, in S. Flügge (ed.): Handbuch der Physik, Band III/1, Springer-Verlag, Berlin 1960, pp. 226-902.
- [85] Wegener, K.: Zur Berechnung großer plastischer Deformation mit einem Stoffgesetz vom Überspannungstyp. Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 2-1991, TU Braunschweig, Braunschweig 1991.
- [86] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: The Finite Element Method. 4-th Edition, Volume I, II. McGraw-Hill, London 1989.

Anhang A

Rechenregeln

A.1 Beispiele der symbolischen Tensorrechnung

Anhand einiger typischer Verknüpfungen sollen im folgenden die Grundzüge der verwendeten symbolischen Tensorschreibweise nach *de Boer* [5] erläutert werden und einige hilfreiche Rechenregeln angegeben werden. Der Einfachheit halber wird eine normierte kartesische Basis verwendet, so daß keine Unterscheidung zwischen kovarianten und kontravarianten Basissystemen notwendig ist. Die *Einsteinsche* Summenkonvention besagt für kartesische Basissysteme, daß über doppelt auftretende Indizes in Produkttermen jeweils summiert wird. Die nachfolgenden Beziehungen können jedoch ohne Schwierigkeiten auch auf beliebige Basissysteme übertragen werden. Dabei gelten die folgenden Definitionen:

- $\overset{n}{\mathbf{A}}$ sei ein beliebiger nichtsingulärer Tensor n -ter Stufe ($n \in \mathbb{N}$; $n > 1$):

$$\begin{aligned} \overset{n}{\mathbf{A}} &= A_{i\dots i+n-1} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i+n-1}, \\ \mathbf{A} &= A_{ij} \quad \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, & \text{für } n = 2, \\ \overset{4}{\mathbf{A}} &= A_{ijkl} \quad \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, & \text{z. B. für } n = 4. \end{aligned} \tag{A.1}$$

- $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ sei ein beliebiger, nichtsingulärer Vektor, und
- α sei ein beliebiger Skalarwert ungleich null.

Im Koeffizientenschema $A_{i\dots i+n-1}$ ist i als Beginn einer geordneten Indexmenge zu sehen, während n die Bedeutung einer variablen Zahl hat.

A.1.1 Produkte zwischen Tensoren

Bei den Produkten zwischen Tensoren werden dyadische, Skalar- und verjüngende Produkte unterschieden.

Das dyadische Produkt zwischen Tensoren entsteht durch die dyadische Verknüpfung der in den Tensoren enthaltenen Basisvektoren. Z. B. ergibt die dyadische Verknüpfung eines Tensors zweiter und dritter Stufe einen Tensor fünfter Stufe:

$$\overset{5}{\mathbf{C}} = \mathbf{A} \otimes \overset{3}{\mathbf{B}} = A_{ij} B_{klm} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m. \quad (\text{A.2})$$

Für ein dyadisches Produkt von zwei beliebigen Tensoren n-ter und m-ter Stufe ergibt sich demnach im allgemeinen Fall

$$\overset{n+m}{\mathbf{C}} = \overset{n}{\mathbf{A}} \otimes \overset{m}{\mathbf{B}} = A_{i\dots i+n-1} B_{i+n\dots i+n+m-1} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i+n+m-1}. \quad (\text{A.3})$$

Das Skalarprodukt kann nur zwischen zwei Tensoren gleicher Stufe gebildet werden und ist durch die skalare Verknüpfung der in den Tensoren enthaltenen Basisvektoren definiert. Z. B. liefert das Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren dritter Stufe das Ergebnis

$$\alpha = \overset{3}{\mathbf{A}} \cdot \overset{3}{\mathbf{B}} = A_{ijk} B_{ijk} \quad (\text{A.4})$$

bzw. für Tensoren n-ter Stufe

$$\alpha = \overset{n}{\mathbf{A}} \cdot \overset{n}{\mathbf{B}} = A_{i\dots i+n-1} B_{i\dots i+n-1}. \quad (\text{A.5})$$

Das verjüngende Produkt ist eine Kombination aus dyadischen und Skalarprodukten der in den Tensoren enthaltenen Basisvektoren. Dabei werden die innenstehenden Basisvektoren skalar multipliziert. Die Anzahl der auftretenden Skalarprodukte ist bei Tensoren höherer Stufe nicht eindeutig, so daß die Stufe des Ergebnisses des verjüngenden Produkts mit einem unterstrichenen Index angegeben wird. Beispielsweise hat das verjüngende Produkt eines Tensors vierter mit einem Tensor dritter Stufe und einem Ergebnis dritter Stufe die folgende Bildungsvorschrift, vgl. Tafel A.1:

$$\overset{3}{\mathbf{C}} = (\overset{4}{\mathbf{A}} \overset{3}{\mathbf{B}})^{\underline{3}} = A_{ijkl} B_{klm} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m. \quad (\text{A.6})$$

Für ein allgemeines verjüngendes Produkt ergibt sich mit der Anzahl q der auftretenden Skalarprodukten und $s = n + m - 2q$:

$$\overset{s}{\mathbf{C}} = (\overset{n}{\mathbf{A}} \overset{m}{\mathbf{B}})^{\underline{s}} = A_{i\dots i+n-1} B_{i+n-q\dots i+n-q+m-1} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i+n-q-1} \otimes \mathbf{e}_{i+n} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i+m+n-q-1}. \quad (\text{A.7})$$

Die Anzahl q der Skalarprodukte muß dabei der Restriktion

$$q \in \{1, \dots, m\} \text{ für } n > m, \quad q \in \{1, \dots, n\} \text{ für } m > n \quad (\text{A.8})$$

genügen. Im Falle $q = m$, für $n > m$, und $q = n$ für $m > n$ werden alle Basisvektoren des Tensors mit niedrigeren Stufe einem skalaren Produkt unterzogen. In diesem Fall spricht man von einer linearen Abbildung für den Tensor mit der niedrigeren Stufe und es wird vereinbarungsgemäß nicht die Stufe des Ergebnisses angegeben. Der häufig auftretende Fall einer linearen Abbildung eines Tensors zweiter Stufe durch einen Tensor vierter Stufe ergibt:

$$\mathbf{C} = \overset{4}{\mathbf{A}} \mathbf{B} = A_{ijkl} B_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.9})$$

Für eine beliebige lineare Abbildung erhält man

$$\begin{aligned} m > n : \mathbf{C} &= \overset{m-n}{\mathbf{A}} \overset{m}{\mathbf{B}} = A_{i\dots i+m-1} B_{i+m-n\dots i+m-1} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i+m-n-1}, \\ m < n : \mathbf{C} &= \overset{n-m}{\mathbf{A}} \overset{m}{\mathbf{B}} = A_{i\dots i+m-1} B_{i\dots i+n-1} \mathbf{e}_{i+m} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i+n-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Es wird zusätzlich vereinbart, daß bei einem tensoriellen Produkt zwischen zwei Tensoren gleicher Stufe, die stufenerhaltende Abbildung ohne den unterstrichenen Stufenindex steht, da in diesem Fall die lineare Abbildung dem Skalarprodukt entspräche. Dies ist nur möglich für Tensoren mit geradzahlgiger Stufenzahl und entspricht einer verjüngenden Abbildung aus Gleichung (A.7) mit $q = n/2$ Skalarprodukten:

$$\begin{aligned} \overset{n}{\mathbf{C}} = \overset{n}{\mathbf{A}} \overset{n}{\mathbf{B}} &= A_{i\dots i+n-1} B_{i+n/2\dots i+(3/2)n-1} \\ &\mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i+n/2-1} \otimes \mathbf{e}_{i+n} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i+(3/2)n-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Für Tensoren höherer Stufe sind unterschiedliche Transpositionen möglich. Um eindeutig die Basisvektoren angeben zu können, die miteinander vertauscht werden, wird die Position der zu vertauschenden Basisvektoren über dem Transpositionszeichen angegeben. Man kann sich beispielsweise leicht davon überzeugen, daß die vierstufige Identität durch Vertauschung des zweiten mit dem dritten Basisvektor gebildet wird:

$$\overset{4}{\mathbf{I}} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{23}{T}} = \delta_{ij} \delta_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_l. \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned}
\overset{4}{\mathbf{C}} &= \overset{4}{\mathbf{A}} \overset{4}{\mathbf{B}} = A_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad B_{stuv} \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{e}_u \otimes \mathbf{e}_v \\
&= A_{ijkl} B_{stuv} \delta_{ks} \delta_{lt} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_u \otimes \mathbf{e}_v \\
&= A_{ijkl} B_{kluv} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_u \otimes \mathbf{e}_v \\
\alpha &= \overset{4}{\mathbf{A}} \cdot \overset{4}{\mathbf{B}} = A_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad B_{stuv} \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{e}_u \otimes \mathbf{e}_v \\
&= A_{ijkl} B_{stuv} \delta_{is} \delta_{jt} \delta_{ku} \delta_{lv} \\
&= A_{ijkl} B_{ijkl} \\
\mathbf{C} &= \overset{4}{\mathbf{A}} \mathbf{B} = A_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad B_{st} \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t \\
&= A_{ijkl} B_{st} \delta_{ks} \delta_{lt} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
&= A_{ijkl} B_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
\overset{3}{\mathbf{C}} &= (\overset{4}{\mathbf{A}} \overset{3}{\mathbf{B}})^3 = A_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad B_{stu} \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{e}_u \\
&= A_{ijkl} B_{stu} \delta_{ks} \delta_{lt} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_u \\
&= A_{ijkl} B_{klu} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_u
\end{aligned}$$

Tafel A.1: Beispiele für verschiedene Produkte von Tensoren

A.2 Definitionen

A.2.1 Invarianten

Die Invarianten eines Tensors \mathbf{A} zweiter Stufe ergeben sich als Koeffizienten des charakteristischen Polynoms bei der Eigenwertberechnung und sind folgendermaßen

definiert:

$$\begin{aligned} \text{I}_A &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} && (\text{Spur}), \\ \text{II}_A &= \frac{1}{2}(\text{I}^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T), && (\text{A.13}) \\ \text{III}_A &= \det \mathbf{A} && (\text{Determinante}). \end{aligned}$$

A.2.2 Deviator und Kugeltensor

Jeder beliebige Tensor zweiter Stufe kann eindeutig in einen Deviator und einen Kugeltensor aufgespalten werden:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_K + \mathbf{A}_{\text{dev}}, \quad \mathbf{A}_K := \frac{1}{3}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_{\text{dev}} := \mathbf{A} - \mathbf{A}_K. \quad (\text{A.14})$$

Der Deviator ist definitionsgemäß spurfrei.

A.2.3 Fundamentaltensoren

Unter Fundamentaltensoren versteht man Tensoren, deren Koeffizientenschemata ausschließlich durch Kombinationen der Basisvektoren gebildet werden und unabhängig von jeglichen Variablenfeldern sind.

Für Tensoren zweiter Stufe existiert mit der identischen Abbildung zwischen Vektoren ein Fundamentaltensor:

$$\mathbf{a} = \mathbf{I} \mathbf{a}. \quad (\text{A.15})$$

Darin ist

$$\mathbf{I} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.16})$$

Der *Ricci-Permutationstensor* $\overset{3}{\mathbf{E}}$ ist der Fundamentaltensor dritter Stufe, der z. B. bei der Bildung des axialen Vektors benötigt wird:

$$\overset{A}{\mathbf{a}} = -\frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} \mathbf{A}. \quad (\text{A.17})$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} \overset{3}{\mathbf{E}} &= \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = e_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k, \\ e_{ijk} &= \begin{cases} 1, & \text{wenn } ijk \in \{123, 231, 312\}, \\ -1, & \text{wenn } ijk \in \{132, 213, 321\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Für Tensoren vierter Stufe existieren mit der identischen, der transponierenden und der spurbildenden Abbildung zwischen Tensoren zweiter Stufe drei unabhängige Fundamentaltensoren

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \overset{4}{\mathbf{I}} \mathbf{A}, \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I} &= \overset{4}{\mathbf{I}} \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}^T &= \overset{4}{\overline{\mathbf{I}}} \mathbf{A}.\end{aligned}\tag{A.19}$$

Darin sind

$$\begin{aligned}\overset{4}{\mathbf{I}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\text{23}} = \delta_{ik}\delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \\ \overset{4}{\mathbf{I}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) = \delta_{ij}\delta_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \\ \overset{4}{\overline{\mathbf{I}}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\text{13}} = \delta_{kj}\delta_{il} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l.\end{aligned}\tag{A.20}$$

Aus den in (A.20) angegebenen Fundamentaltensoren lassen sich weitere hilfreiche Fundamentaltensoren ableiten, die z. B. bei Anwendung auf einen Tensor zweiter Stufe dessen Deviator oder symmetrischen bzw. schiefssymmetrischen Anteil ergeben

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\text{dev}} &= \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I} = \overset{4}{\mathbf{I}}_{\text{dev}} \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}_{\text{sym}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \overset{4}{\mathbf{I}}_{\text{sym}} \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}_{\text{skw}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = \overset{4}{\mathbf{I}}_{\text{skw}} \mathbf{A},\end{aligned}\tag{A.21}$$

Hierin sind

$$\begin{aligned}\overset{4}{\mathbf{I}}_{\text{dev}} &= \overset{4}{\mathbf{I}} - \frac{1}{3}\overset{4}{\mathbf{I}}, \\ \overset{4}{\mathbf{I}}_{\text{sym}} &= \frac{1}{2}(\overset{4}{\mathbf{I}} + \overset{4}{\overline{\mathbf{I}}}) \\ \overset{4}{\mathbf{I}}_{\text{skw}} &= \frac{1}{2}(\overset{4}{\mathbf{I}} - \overset{4}{\overline{\mathbf{I}}})\end{aligned}\tag{A.22}$$

A.2.4 Gradient und Divergenz von Produktausdrücken

Zur Definition der in der Tensoranalysis gebräuchlichen Operatoren zur Bildung des Gradienten und der Divergenz sei auf *de Boer* [5] verwiesen. Im folgenden sind einige Rechenregeln angegeben:

- Gradientenbildung:

$$\begin{aligned}
\text{grad}(\alpha \beta) &= \alpha \text{grad} \beta + \beta \text{grad} \alpha, \\
\text{grad}(\alpha \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \otimes \text{grad} \alpha + \alpha \text{grad} \mathbf{a}, \\
\text{grad}(\alpha \mathbf{A}) &= \mathbf{A} \otimes \text{grad} \alpha + \alpha \text{grad} \mathbf{A}, \\
\text{grad}(\mathbf{A} \mathbf{a}) &= (\text{grad} \mathbf{A})^T \mathbf{a} + \mathbf{A} \text{grad} \mathbf{a}, \\
\text{grad}(\mathbf{A} \mathbf{B}) &= [(\text{grad} \mathbf{A})^T \mathbf{B}]^T + \mathbf{A} \text{grad} \mathbf{B}.
\end{aligned} \tag{A.23}$$

- Divergenzbildung:

$$\begin{aligned}
\text{div} \mathbf{a} &= \text{grad} \mathbf{a} \cdot \mathbf{I}, \\
\text{div} \mathbf{A} &= \text{grad} \mathbf{A} \mathbf{I}, \\
\text{div}(\alpha \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \text{grad} \alpha + \alpha \text{div} \mathbf{a}, \\
\text{div}(\alpha \mathbf{A}) &= \mathbf{A} \text{grad} \alpha + \alpha \text{div} \mathbf{A}, \\
\text{div}(\mathbf{A} \mathbf{a}) &= (\text{div} \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{A}^T \cdot \text{grad} \mathbf{a}, \\
\text{div}(\mathbf{A} \mathbf{B}) &= (\text{grad} \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{div} \mathbf{B}.
\end{aligned} \tag{A.24}$$

A.2.5 Ableitungen nach Tensoren 2. Stufe

Im folgenden werden einige hilfreiche Regeln für Ableitungen nach Tensoren zweiter Stufe angegeben (vgl. *de Boer* [5] und *Ehlers* [25]).

- Einfache Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} &= \overset{4}{\mathbf{I}}, \\
\frac{\partial (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}}{\partial \mathbf{A}} &= \overset{4}{\mathbf{I}}, \\
\frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{A}} &= \overset{4}{\mathbf{I}}.
\end{aligned} \tag{A.25}$$

- Produktausdrücke:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial\mathbf{C}} &= \alpha \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{C}} + \beta \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{C}}, \\
\frac{\partial(\alpha\mathbf{a})}{\partial\mathbf{C}} &= \mathbf{a} \otimes \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{C}} + \alpha \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{C}}, \\
\frac{\partial(\alpha\mathbf{A})}{\partial\mathbf{C}} &= \mathbf{A} \otimes \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{C}} + \alpha \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{C}}, \\
\frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial\mathbf{C}} &= \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{C}}\right)^T \mathbf{B} + \left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{C}}\right)^T \mathbf{A}, \\
\frac{\partial(\mathbf{A}\mathbf{B})}{\partial\mathbf{C}} &= \left[\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{C}}\right)^T \mathbf{B}\right]^{4T} + \left[\mathbf{A} \left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{C}}\right)\right]^4.
\end{aligned} \tag{A.26}$$

- Invarianten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\text{I}_A}{\partial\mathbf{A}} &= \mathbf{I}, \\
\frac{\partial\text{II}_A}{\partial\mathbf{A}} &= \text{I}_A \mathbf{I} - \mathbf{A}, \\
\frac{\partial\text{III}_A}{\partial\mathbf{A}} &= \text{III}_A \mathbf{A}^{T-1}.
\end{aligned} \tag{A.27}$$

A.3 Rechenregel für Kompatibilitätsbedingungen

Gegeben sei folgende Tensorgleichung dritter Stufe,

$${}^3\mathbf{B} - \mathbf{B}^{23T} = ({}^3\mathbf{E} \mathbf{A})^{\mathfrak{z}} - ({}^3\mathbf{E} \mathbf{A})^{\mathfrak{z}23T}, \tag{A.28}$$

mit beliebigen Tensoren ${}^3\mathbf{B}$ und \mathbf{A} dritter bzw. zweiter Stufe. Es soll gezeigt werden, daß (A.28) nach \mathbf{A} aufgelöst werden kann und das folgende Ergebnis liefert:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [{}^3\mathbf{E} ({}^3\mathbf{B} + \mathbf{B}^{13T} - \mathbf{B}^{\mathfrak{z}23T})]^{\mathfrak{z}}. \tag{A.29}$$

Zum Beweis geht man folgendermaßen vor:

Zuerst wird Gleichung (A.29) als Ansatz verstanden und in die rechte Seite von (A.28) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
{}^3\mathbf{E} \mathbf{A} - ({}^3\mathbf{E} \mathbf{A})^{\mathfrak{z}23T} &= \frac{1}{2} \{ {}^3\mathbf{E} [{}^3\mathbf{E} ({}^3\mathbf{B} + \mathbf{B}^{13T} - \mathbf{B}^{\mathfrak{z}23T})]^{\mathfrak{z}} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \{ {}^3\mathbf{E} [{}^3\mathbf{E} ({}^3\mathbf{B} + \mathbf{B}^{13T} - \mathbf{B}^{\mathfrak{z}23T})]^{\mathfrak{z}23T} \}.
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Es gilt

$$(\mathbf{E} \mathbf{E})^4 = 2 \mathbf{I}_{\text{skw}}^4 = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{23} - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{13} \quad (\text{A.31})$$

mit der Eigenschaft

$$\mathbf{I}_{\text{skw}}^4 \mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{skw}} \quad \mathbf{I}_{\text{skw}}^4 \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}^{12}). \quad (\text{A.32})$$

Damit ergibt sich für (A.30)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{A} - (\mathbf{E} \mathbf{A})^{23} &= [\mathbf{I}_{\text{skw}}^4 (\mathbf{B} + \mathbf{B}^{13} - \mathbf{B}^{23})]^3 - \\ &\quad - [\mathbf{I}_{\text{skw}}^4 (\mathbf{B} + \mathbf{B}^{13} - \mathbf{B}^{23})]^3{}^{23}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Auswerten der Tensorprodukte liefert in einem nächsten Schritt

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{A} - (\mathbf{E} \mathbf{A})^{23} &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{B} - \mathbf{B}^{12} + \mathbf{B}^{13} - (\mathbf{B}^{13})^{12} - \mathbf{B}^{23} + (\mathbf{B}^{23})^{12} - \\ &\quad - \mathbf{B}^{13} + (\mathbf{B}^{13})^{23} - (\mathbf{B}^{13})^{12} + [(\mathbf{B}^{13})^{12}]^{23} + (\mathbf{B}^{23})^{23} - [(\mathbf{B}^{23})^{12}]^{23} \}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Im letzten Schritt wird ausgenutzt, daß folgende Transpositionen äquivalent sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{12} &= [(\mathbf{B}^{13})^{12}]^{23}, & \mathbf{B}^{13} &= [(\mathbf{B}^{23})^{12}]^{23}, \\ (\mathbf{B}^{13})^{12} &= (\mathbf{B}^{12})^{23}, & (\mathbf{B}^{23})^{12} &= (\mathbf{B}^{13})^{23}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Einsetzen der Äquivalenzbeziehungen (A.35) ergibt schließlich das gesuchte Ergebnis

$$(\mathbf{E} \mathbf{A})^3 - (\mathbf{E} \mathbf{A})^{23} = \mathbf{B} - \mathbf{B}^{23} \quad (\text{A.36})$$

für den Ansatz (A.29) q. e. d.

Anhang B

Elastisch-plastische Aufspaltungen

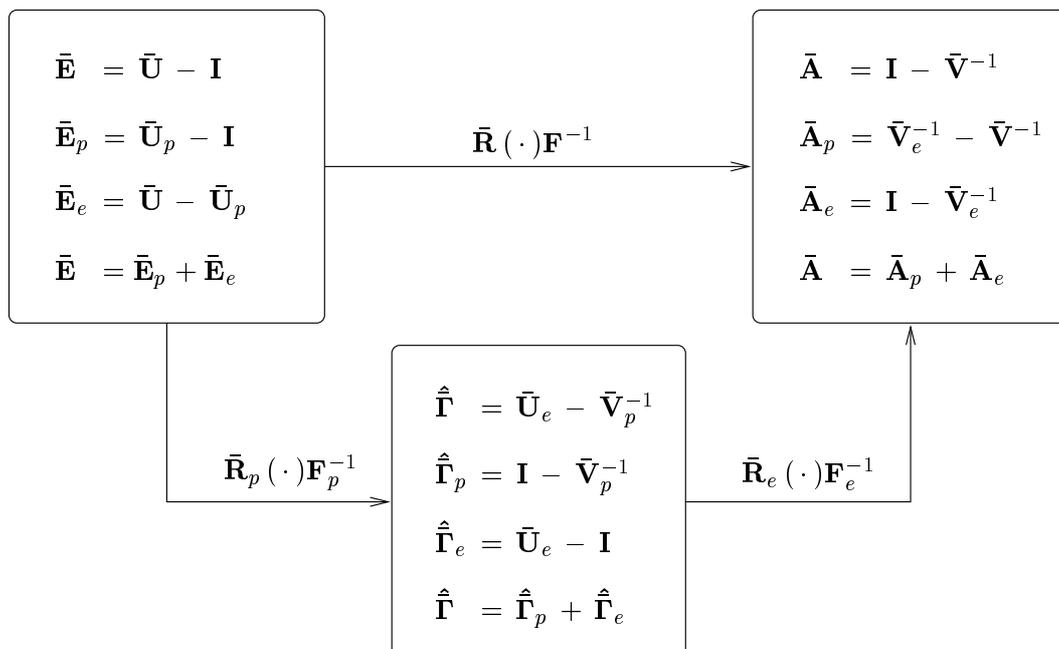
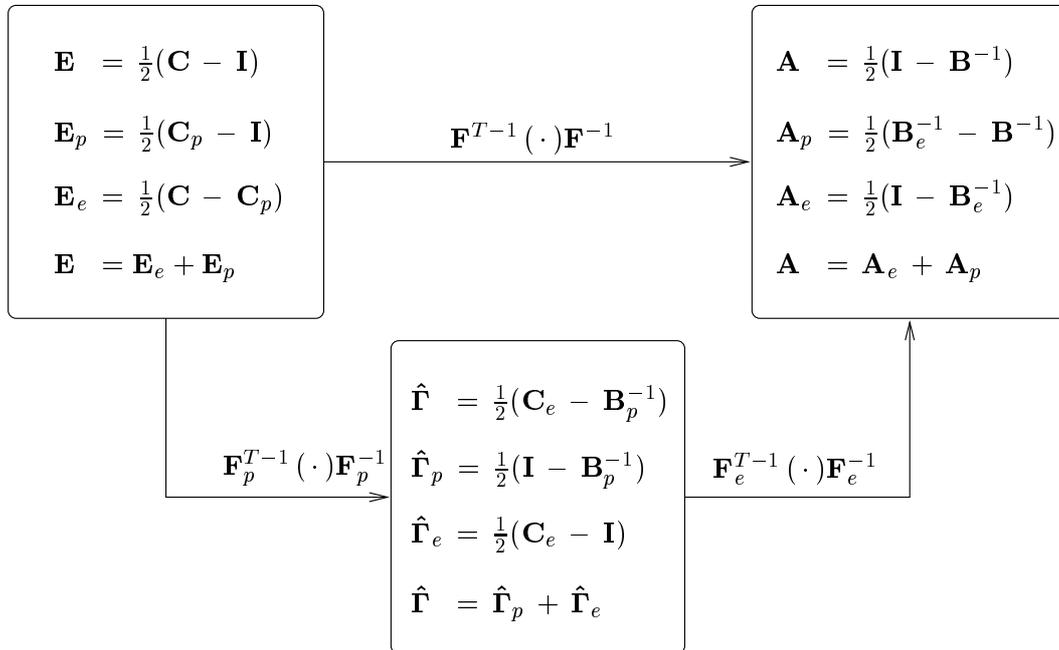
Im folgenden werden die elastisch-plastischen Aufspaltungen der Verzerrungs- und Krümmungsmaße sowie der Deformationsgradienten zweiter Ordnung in schematischer Form wiedergegeben. In den einzelnen Diagrammen ist in der ersten Zeile der Kästchen die Gesamtgröße und in der zweiten und dritten Zeile der elastische bzw. plastische Anteil der jeweiligen Größe zu finden. Das Transportverhalten von einer zur nächsten Konfiguration steht auf den Pfeilen.

Es sei nochmal darauf hingewiesen (vgl. Kapitel 2.6), daß lediglich auf den Zwischenkonfigurationen die Aufspaltungen in rein elastische und rein plastische Anteile möglich ist. Die entstehenden Aufspaltungen durch Anwendung der Transporttheoreme liefert zwar ebenfalls additive Aufspaltungen, doch es wird entweder ein rein plastischer Transport auf eine elastische Größe oder ein rein elastischer Transport auf eine plastische Größe angewendet. Es ist somit auf der aktuellen bzw. auf der Referenzkonfiguration im strengem Sinn nicht mehr möglich, die transportierten Größen in einen rein elastischen bzw. rein plastischen Anteil aufzuspalten. Die trotzdem verwendeten Indizes $(\cdot)_e$ und $(\cdot)_p$ geben dann nur noch den Charakter der entsprechenden Größe auf der Zwischenkonfiguration wieder.

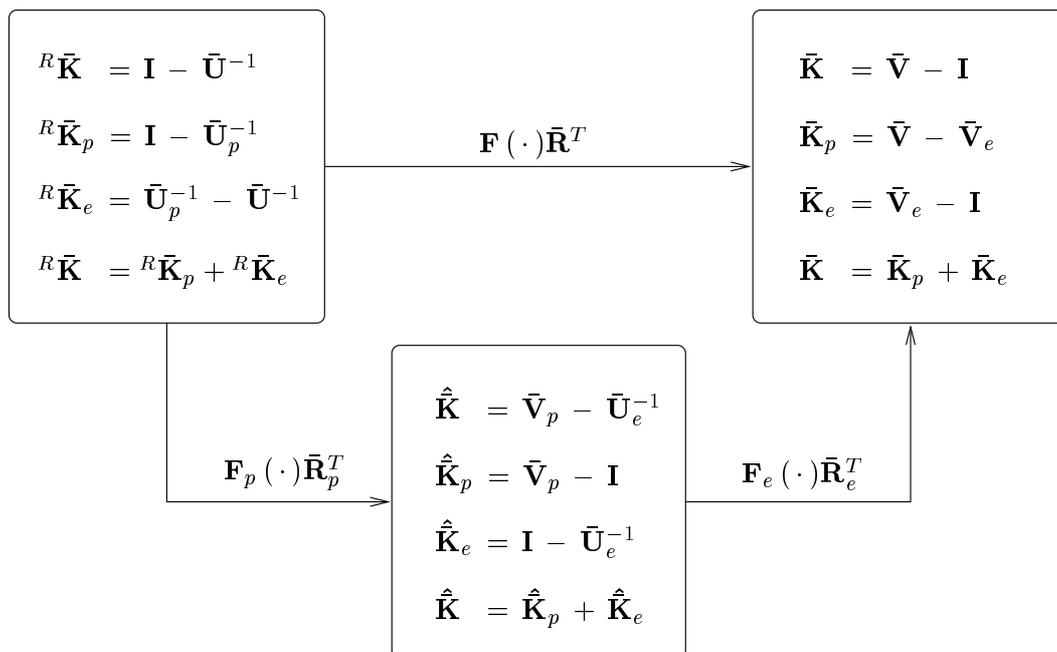
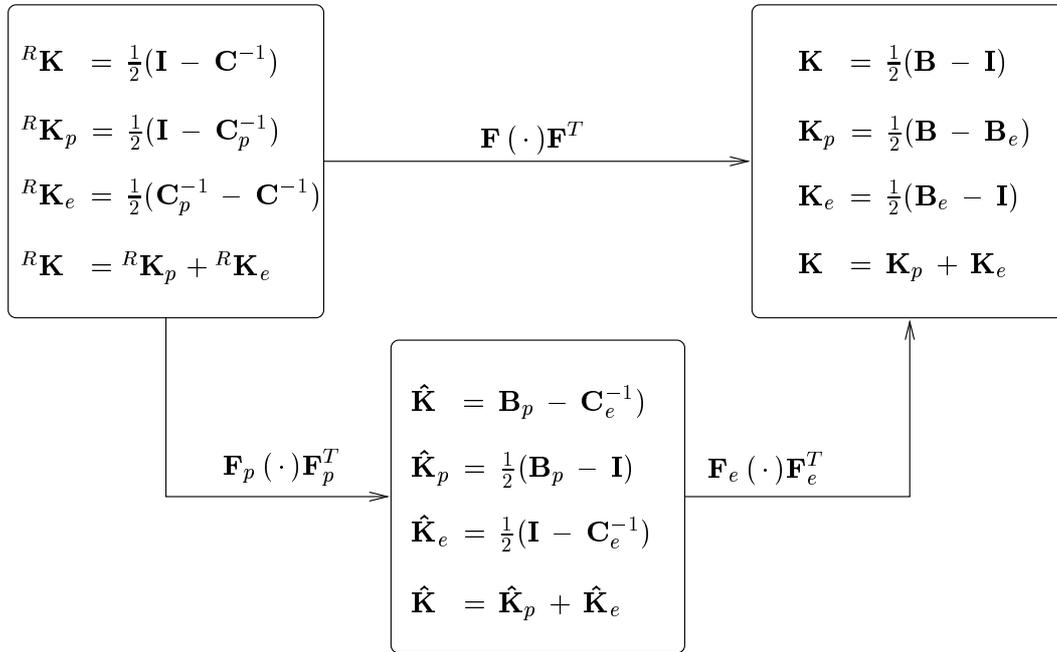
B.1 Nicht-polare und mikropolare Verzerrungsmaße

In den kommenden Diagrammen sind sowohl für die nicht-polaren als auch die mikropolaren Verzerrungsmaße die Aufspaltungen in elastische und plastische Anteile abgebildet. Dabei entstammen die Diagramme der nicht-polaren Verzerrungsmaße aus der Arbeit von *Ehlers* [26].

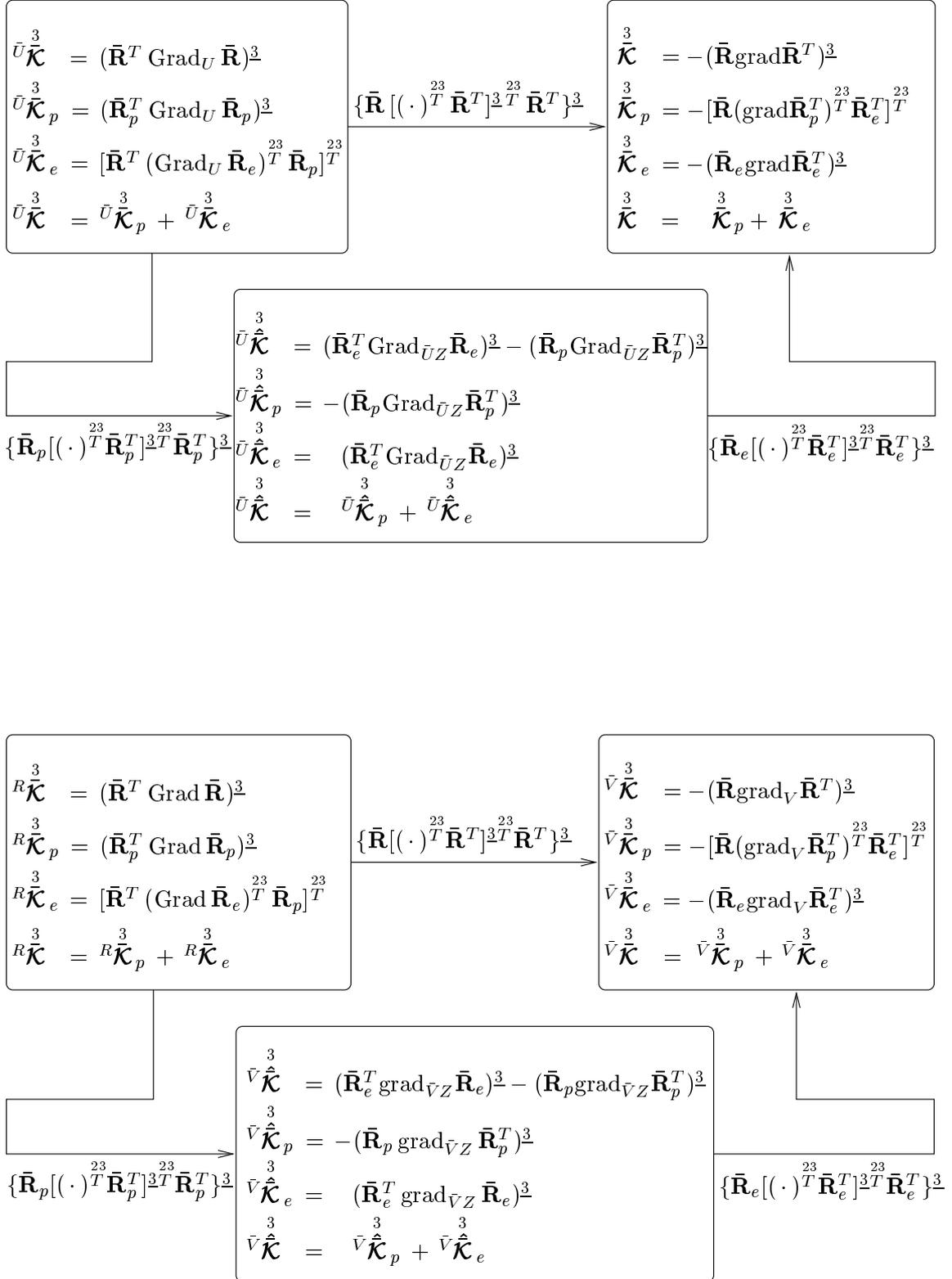
B.1.1 Beziehungen zwischen den Verzerrungstensoren vom *Green-* bzw. *Almansi*-Typ

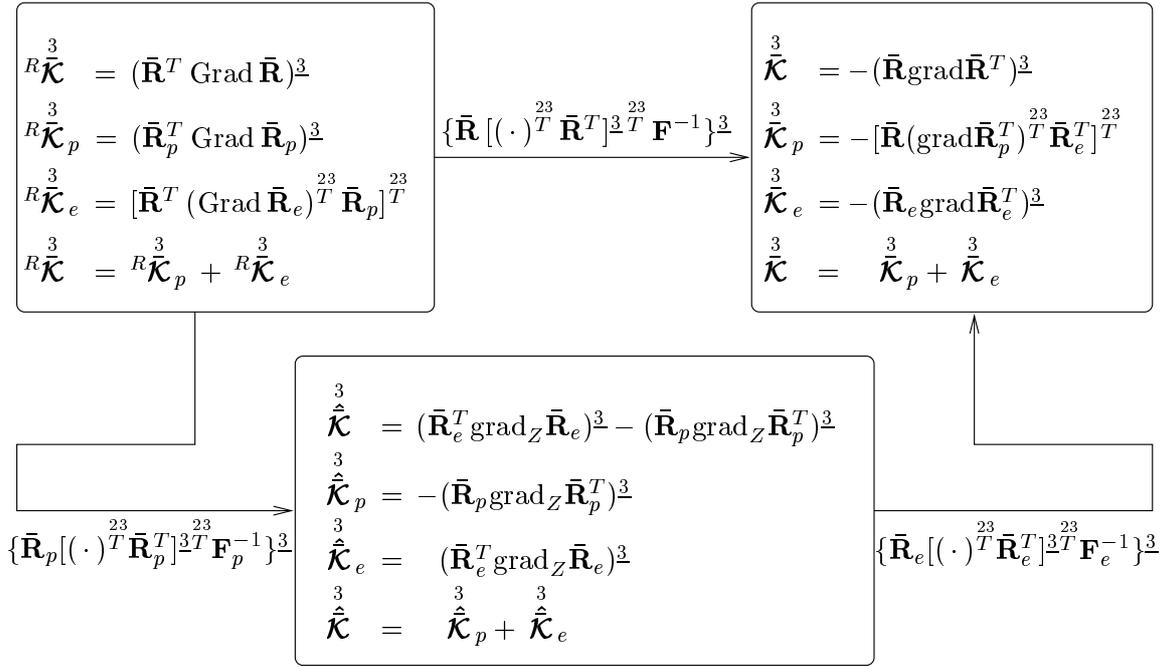


B.1.2 Beziehungen zwischen den Verzerrungstensoren vom *Karni-Reiner*-Typ



B.2 Mikropolare Krümmungstensoren





B.3 Deformationsgradienten 2. Ordnung

