

# Lokalisierung fluidgesättigter poröser Festkörper bei finiten elastoplastischen Deformationen

Der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde  
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
vorgelegte Abhandlung

von

Dipl.-Ing. Dirk Mahnkopf

aus

Offenburg

Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II,  
Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers



# Lokalisierung fluidgesättigter poröser Festkörper bei finiten elastoplastischen Deformationen

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde  
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von  
Dipl.-Ing. Dirk Mahnkopf  
aus  
Offenburg

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Peter Wriggers

Tag der mündlichen Prüfung: XX. Juni 1999

Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart  
1999

Bericht Nr. II-4 aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II,  
Universität Stuttgart

**Herausgeber:**

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

© Dirk Mahnkopf  
Institut für Mechanik (Bauwesen)  
Lehrstuhl II  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7  
70569 Stuttgart

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege zu vervielfältigen.

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der TH-Darmstadt und am Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers für die Anregung zu dieser Arbeit, seine Unterstützung und Förderung sowie für die Übernahme des Hauptberichts.

Herrn Professor Dr.-Ing. Peter Wriggers danke ich für die intensive Auseinandersetzung mit meiner Arbeit und für die freundliche Übernahme des Mitberichts.

Schließlich danke ich allen Mitarbeitern des Instituts für Mechanik (Bauwesen) für die freundschaftliche Zusammenarbeit.

Stuttgart, im September 1999

Dirk Mahnkopf

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die Mechanik der Mehrphasenkontinua</b>	<b>5</b>
1.1	Konzept der Volumenanteile . . . . .	5
1.2	Kinematik der Mischung . . . . .	7
1.2.1	Bewegungsfunktion . . . . .	7
1.2.2	Natürliche Koordinaten . . . . .	9
1.2.3	Deformations- und Verzerrungsmaße . . . . .	11
1.2.4	Deformations- und Verzerrungsgeschwindigkeiten . . . . .	12
1.2.5	Spannungsmaße . . . . .	14
1.3	Bilanzgleichungen . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Singuläre Flächen</b>	<b>19</b>
2.1	Kinematik . . . . .	19
2.1.1	<i>Hadamards</i> Lemma . . . . .	20
2.1.2	Kompatibilitätsbedingung zweiter Ordnung . . . . .	22
2.1.3	Theorem von <i>Maxwell</i> . . . . .	23
2.1.4	Kompatibilitätsbedingungen der Zeitableitungen . . . . .	25
2.2	Bilanzgleichungen . . . . .	27
2.2.1	Modifiziertes <i>Reynoldssches</i> Transporttheorem . . . . .	27
2.2.2	Globale Form der Bilanzgleichungen . . . . .	29
2.2.3	Lokale Form der Bilanzgleichungen . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Modellgleichungen</b>	<b>33</b>
3.1	Annahmen und Voraussetzungen . . . . .	34
3.2	Hybrides Model . . . . .	36
3.3	Hybrides Modell mit Mischphase . . . . .	39
3.4	Inkompressibles Modell . . . . .	43

<b>4</b>	<b>Plastizität</b>	<b>45</b>
4.1	Einführung . . . . .	45
4.2	Kinematik . . . . .	47
4.3	Konstitutive Modellierung . . . . .	55
4.3.1	Elastisches Materialverhalten . . . . .	55
4.3.2	Plastisches Materialverhalten . . . . .	60
4.3.3	Struktur der Materialgleichungen . . . . .	63
4.3.4	Fließbedingung . . . . .	67
4.3.5	Fließregel und plastisches Potential . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Lokalisierung</b>	<b>85</b>
5.1	Voraussetzungen und Annahmen . . . . .	87
5.2	1. Fall: Singuläre Fläche 2. Ordnung bzgl. $\chi_\alpha$ . . . . .	91
5.2.1	Einphasiger Körper . . . . .	91
5.2.2	Poröser Körper . . . . .	93
5.3	2. Fall: Singuläre Fläche 1. Ordnung bzgl. $\dot{\chi}_\alpha$ . . . . .	97
5.3.1	Einphasiger Körper . . . . .	98
5.3.2	Poröser Körper . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Numerische Umsetzung</b>	<b>103</b>
6.1	Schwache Form der Bilanzgleichungen . . . . .	103
6.2	Linearisierung . . . . .	105
6.3	Ortsdiskretisierung . . . . .	111
6.4	Zeitdiskretisierung . . . . .	113
6.5	Spannungsberechnung . . . . .	115
6.6	Auswertung der Akustiktensoren . . . . .	121
<b>7</b>	<b>Beispiele</b>	<b>123</b>
7.1	Konsolidationsproblem . . . . .	123
7.2	Kompressionspunkt . . . . .	129
7.3	Anpassung des Modells an einen Polymerschaum . . . . .	133
7.4	Biaxialversuch . . . . .	136
7.5	Anfangsrandwertproblem . . . . .	136
7.6	Einfluß des Porenfluids . . . . .	139

---

<b>8 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>149</b>
8.1 Zusammenfassung . . . . .	149
8.2 Ausblick . . . . .	150
<b>A Tensorrechnung</b>	<b>159</b>
A.1 Tensoralgebra . . . . .	159
A.1.1 Allgemeine Beziehungen . . . . .	159
A.1.2 spezielle Tensoren und Operationen . . . . .	160
A.2 Tensoranalysis . . . . .	163
A.2.1 Integralsätze . . . . .	163
<b>B Kompatibilitätsbedingungen</b>	<b>165</b>
B.1 Fläche erster Ordnung bezüglich $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ . . . . .	165
B.2 Fläche zweiter Ordnung bezüglich $\chi_\alpha$ . . . . .	166



## Einleitung

Poröse, fluidgesättigte, deformierbare Festkörper gewinnen zunehmend an Bedeutung für die Behandlung relevanter Probleme der Ingenieurspraxis. Es handelt sich hierbei um Materialien, die aus einem porösen Festkörperskelett bestehen, dessen Porenraum mit Flüssigkeiten oder Gasen gefüllt ist. Sie finden sich in den unterschiedlichsten Anwendungsbereichen, so z. B. in der Bodenmechanik beim Konsolidationsproblem, in der Biomechanik bei der Beschreibung poröser Knochen oder blutdurchströmtem Gewebes oder auch bei hochporösen Polymer- und Metallschäumen, deren Porenraum i. a. mit Gas gefüllt ist. Auch wenn die Materialien speziell im Bereich plastischer Deformation teilweise unterschiedlichstes Verhalten aufzeigen, wie beispielsweise Sand und Polymerschäume, ist ihnen gemein, daß das Deformationsverhalten des Festkörpers erheblich vom Porenfluid beeinflußt werden kann.

Das gestiegene Interesse an porösen, fluidgefüllten Festkörpern liegt zum Teil an der Entwicklung neuer Materialien und optimierter Herstellungsprozesse, die die Möglichkeit bieten, kostengünstig ausreichende Mengen für den industriellen Einsatz zur Verfügung zu stellen und neue Einsatzmöglichkeiten zu erschließen. Auch der immer stärker werdende Zwang zur Leichtbauweise führt zum verstärkten Einsatz beispielsweise als kostengünstiger Ersatz für Verbundwerkstoffe. In diesem Zusammenhang ist auch die Verwendung hochporöser Schäume als Dämpfungsmaterial im Fahrzeugbau zur Erhöhung der passiven Sicherheit zu nennen. Ein weiterer Grund liegt in der rasanten Entwicklung der Computertechnik, die die Beschreibung immer komplexerer Randwertprobleme ermöglicht.

In dem Maße, wie das Interesse an porösen, fluidgefüllten Körpern steigt, gewinnt auch deren Modellierung als Grundlage der Simulation an Bedeutung.

Eine Modellierung, die der Praxis gerecht wird, ist oftmals durch die klassische Kontinuumsmechanik allein nicht ausreichend möglich. Zur Beschreibung des volumengekoppelten Festkörper-Fluid-Problems wird im Rahmen dieser Arbeit ein Zugang mit Hilfe der Theorie Poröser Medien (TPM) gewählt, vgl. *Bowen* [9, 10], *Ehlers* [20]. Die TPM folgt aus der Mischungstheorie, einer kontinuumsmechanischen Theorie für heterogen zusammengesetzte Körper mit inneren Wechselwirkungen, ergänzt um das Konzept der Volumenanteile. Dabei liegt die Vorstellung eines statistisch verschmierten Modells zugrunde, bei dem alle Phasen, hier Festkörper und Fluid, gleichzeitig den gesamten Raum der Mischung einnehmen.

Bei der Wahl der konstitutiven Ansätze poröser Materialien sind einige Besonderheiten zu beachten. So zeigen Metall- und Polymerschäumen in ihrem üblichen Anwendungsbereich große elastoplastische Deformationen. Dies bedingt die Beschreibung im Rahmen der finiten bzw. geometrisch nichtlinearen Theorie. Beim Kompressionsversuch beispielsweise schließt sich an einen relativ kleinen elastischen Bereich ein plastisches Plateau mit nahezu konstanten Spannungen und großen Volumendeformationen an. Ihm folgt der Bereich der

Verdichtung mit einem extremen Anstieg der hydrostatischen Spannungen. Um diesem Verhalten Rechnung zu tragen, wird in dieser Arbeit ein elastoplastisches Materialgesetz für die Festkörpermatrix entwickelt, das mit Hilfe der „strukturellen Verfestigung“ den Kompressionspunkt sicherstellt. Die vorgeschlagene Formulierung hat darüber hinaus den Vorteil, daß sie nahezu keinen Mehraufwand bei der Berechnung im Vergleich zur klassischen Verfestigungsformulierung erfordert, bei der innere Variablen und die Auswertung der zugehörigen Entwicklungsgleichungen benötigt werden. Es wird besonderst auf eine sehr flexible Formulierung Wert gelegt, um eine möglichst umfassende Gruppe poröser Materialien mit z. T. unterschiedlichstem Verhalten, speziell im Bereich der Plastizität, beschreiben zu können.

Bei der Beschreibung realer Porenfluid zeigen sich sowohl inkompressible als auch idealkompressible Fluide, d. h. Fluide, die bis auf einen Punkt komprimierbar sind, wie z. B. ideales Gas, als ungeeignet. Um den Einfluß des Porenfluids auf das Verhalten der gesamten Mischung möglichst realistisch abbilden zu können, wird ein kompressibles Porenfluid benötigt, das lediglich bis zu einer maximalen, kritischen Dichte komprimiert werden kann. Hierzu wird konsistent im Rahmen der Theorie Poröser Medien aufbauend auf einem kompressiblen und einem inkompressiblen Porenfluid eine Mischphase entwickelt.

Speziell bei porösen Medien, deren Festkörperskelett sich wie Reibungsmaterialien verhalten, wird in der Natur häufig Lokalisierung beobachtet. Unter dem Begriff der Lokalisierung wird in diesem Zusammenhang die Anhäufung der Deformation in einem relativ kleinen, vom restlichen Körper klar abgegrenzten Bereich verstanden. Man spricht auch von Scherbandbildung. An den Grenzen des Bereichs treten dabei hohe Gradienten der Deformation auf. Derartiges Verhalten kann z. B. beim Böschungs- oder Grundbruch oder aber auch in Materialversuchen wie dem Biaxialversuch beobachtet werden und führt i. a. zum Versagen der Struktur. Auch wenn vorwiegend das Festkörperskelett für die Stabilität der gesamten Struktur ausschlaggebend ist, hat das Porenfluid einen beträchtlichen Einfluß auf dessen Lokalisierungsverhalten und somit auf das Versagen der gesamten Struktur. Es wird hierzu eine Lokalisierungsanalyse im Rahmen der Theorie Poröser Medien durchgeführt, um den Einfluß des Fluids aufzuzeigen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, im Rahmen der TPM ein Modell zur Beschreibung einer möglichst großen Gruppe unterschiedlicher Materialien bereitzustellen, das den oben genannten Anforderungen genügt. Dabei wird speziell auf das elastoplastische Festkörperskelett und das Porenfluid eingegangen. Die Lokalisierungsanalyse wird im Rahmen der TPM durchgeführt, um den Einfluß des Porenfluids erfassen zu können.

## Gliederung und Umfang der Arbeit

In Kapitel 1 werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen der Theorie Poröser Medien eingeführt. Hierzu wird zuerst das Konzept der Volumenanteile beschrieben. Darauf aufbauend werden die Kinematik und die allgemeinen Bilanzgleichungen erörtert.

In Kapitel 2 werden singuläre Flächen eingeführt. Es handelt sich dabei um nichtmateri-

elle, innere Flächen, über die eine beliebige Größe diskontinuierlich bzw. sprungbehaftet sein kann. Sie bilden die Voraussetzung für die in Kapitel 5 folgende Lokalisierungsanalyse, bei der Lokalisierung mit singulären Flächen identifiziert wird. Aufbauend auf *Hadamards* Lemma und dem Theorem von *Maxwell* angewandt auf Mehrphasenkontinua im Rahmen der Theorie Poröser Medien werden Kompatibilitätsbedingungen für die Sprünge der Ableitungen diskontinuierlicher Größen gewonnen. Zusätzlich werden die Bilanzgleichungen unter Beachtung singulärer Flächen behandelt.

In Kapitel 3 werden die Modellgleichungen für ein poröses Medium bestehend aus inkompressiblem Festkörper und wahlweise kompressiblem oder inkompressiblem Porenfluid behandelt. Um das Verhalten realer Fluide möglichst genau beschreiben zu können, wird aus einem inkompressiblen und einem kompressiblen Fluid eine Mischphase mit Hilfe der Theorie Poröser Medien abgeleitet. Sie genügt aufgrund ihrer Herleitung sowohl den Grenzzuständen eines inkompressiblen als auch eines ideal-kompressiblen Porenfluids für die Annäherung des Drucks gegen null und  $\infty$ . Prinzipiell handelt es sich dabei um eine Dreiphasenmodellierung, die aufgrund der getroffenen kinematischen Kopplung der beiden Porenfluide (es ist keine Entmischung zugelassen) einer Beschreibung mittels zweier Phasen zugänglich ist. Es ergibt sich somit kein Mehraufwand im Bereich der numerischen Umsetzung und Berechnung im Vergleich zu den Modellen mit ideal-kompressiblem oder inkompressiblem Porenfluid.

Das elastoplastische Materialgesetz zur Beschreibung des Deformationsverhaltens der Festkörpermatrix wird in Kapitel 4 ausführlich erörtert. Hierbei nimmt der Kompressionspunkt bzw. seine Sicherstellung eine zentrale Bedeutung ein. Beim Kompressionspunkt handelt es sich um den Zustand vollständig geschlossener Poren. Eine weitere Volumendeformation ist aufgrund der Annahme eines inkompressiblen Festkörperskeletts nicht mehr möglich. Im Gegensatz zur Metallplastizität mit volumenneutralen plastischen Formänderungen zeigen poröse Materialien sowohl ausgeprägte dilatante wie auch kontraktante plastische Volumendehnungen, die durch den Kompressionspunkt begrenzt werden. Hierfür wird eine geeignete Verzerrungsenergiefunktion von *Eipper* [30] mit einer neuen Formulierung für die Fließfläche und das plastische Potential kombiniert. Sie basieren auf der in dieser Arbeit vorgestellten „strukturellen Verfestigung“, die die Sicherstellung des Kompressionspunktes auch im Bereich plastischer Deformationen gewährleistet. Sie kommt dabei ohne zusätzliche innere Variablen und Entwicklungsgleichungen und dem damit verbundenen Aufwand aus.

In Kapitel 5 wird eine Lokalisierungsanalyse für die in Kapitel 3 beschriebenen Modelle unter Verwendung singulärer Flächen durchgeführt. Es wird angenommen, daß die Lokalisierung der Festkörperdeformation für die Stabilität der Struktur entscheidend ist. Ziel ist es, ein dem Akkustiktensor (vgl. *Hill* [43]) des einphasigen Problems entsprechendes Kriterium bereitzustellen. Dieses wird ausschließlich in kinematischen Größen des Festkörperskeletts formuliert, ohne dabei jedoch den Einfluß des Porenfluids zu vernachlässigen. Durch Auswertung des Akkustiktensors läßt sich feststellen, ob Lokalisierung möglich ist, und falls ja, deren Kinematik, d. h. beispielsweise im Falle eines Scherbandes dessen Ausrichtung. Sie erlaubt darüber hinaus auch Einblick in die Kopplung der Phasen und speziell den Einfluß des Porenfluids.

Kapitel 6 befaßt sich mit der numerischen Implementierung der Modelle und der Lokalisierungsanalyse. Hierzu werden die Modellgleichungen in eine schwache Form überführt und im Ort mit Hilfe der Methode der finiten Elemente diskretisiert. Das entstehende semidiskrete differentialalgebraische Gleichungssystem wird mittels diagonalimpliziter *Runge-Kutta*-Verfahren in der Zeit diskretisiert. Um das entstandene, nichtlineare, diskrete Gleichungssystem effektiv mit Hilfe des *Newton*-Verfahrens lösen zu können, kommt der Linearisierung eine entscheidende Bedeutung zu. Dabei sind sowohl geometrische Nichtlinearitäten, als auch Nichtlinearitäten die aus der Kopplung der Phasen (Fluid und Festkörper) und deren nichtlinearem Materialverhalten resultieren zu berücksichtigen. Besondere Bedeutung kommt dabei der Linearisierung des Algorithmus zur Berechnung der Festkörperspannungen im Rahmen der elastoplastischen Formulierung zu.

In Kapitel 7 werden zunächst die Eigenschaften der entwickelten Modelle, speziell der strukturelle Verfestigung und der Mischphase, verifiziert. Die Leistungsfähigkeit aber auch die Grenzen der Modellierung werden anhand der Anpassung an einen hochporösen Polymerschaum demonstriert. Der Einfluß des Fluids auf die Lokalisierung der Festkörperdeformation wird am Beispiel des Biaxialversuchs diskutiert. In diesem Zusammenhang wird auch die Lokalisierungsanalyse verifiziert.

Die Arbeit schließt mit einer kurzen Zusammenfassung und einem Ausblick.

# Kapitel 1

## Die Mechanik der Mehrphasenkontinua

Ziel des Kapitels sind die Einführung der Notation und Bereitstellung der kontinuumsmechanischen Grundlagen für die Beschreibung poröser, fluidgefüllter Festkörper mit Hilfe der Theorie Poröser Medien (TPM).

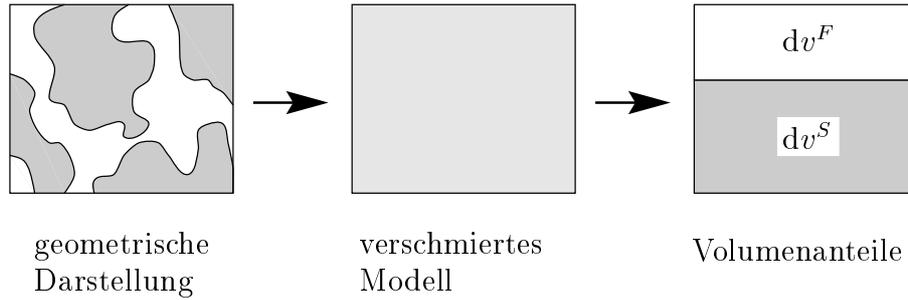
Ausgehend von der Mischungstheorie, einer kontinuumsmechanischen Theorie für heterogen zusammengesetzte Körper mit inneren Wechselwirkungen, folgt die TPM durch Ergänzung um das Konzept der Volumenanteile. Die Volumenanteile stellen dabei makroskopische Strukturvariablen zur Beschreibung der inneren Struktur des porösen Körpers bzw. Mehrphasenproblems dar. Die Theorie Poröser Medien stellt somit eine phänomenologische Theorie dar, bei der die Beschreibung des Körpers im Rahmen makroskopischer Betrachtungen durchgeführt wird, ohne auf die vorliegende Mikrostruktur einzugehen.

Für eine ausführliche Darstellung der Mischungstheorie und der Theorie Poröser Medien sei auf *Bowen* [9, 10], *Truesdell & Toupin* [93], *de Boer & Ehlers* [7] und *Ehlers* [20, 24] verwiesen. Die geschichtliche Entwicklung der Mischungstheorie und der Theorie Poröser Medien findet sich bei *Ehlers* [20].

### 1.1 Konzept der Volumenanteile

Für die Beschreibung poröser Körper auf der Basis der Mischungstheorie wird das Modell eines makroskopischen Ersatzkörpers vorausgesetzt. Es wird weiter angenommen, daß alle Partialkörper  $\varphi^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) in idealer Unordnung über den Kontrollraum verteilt sind, vgl. Abbildung 1.1. Dies bedingt die Betrachtung eines hinreichend großen Bereichs.

Jeder Partialkörper nimmt somit das gesamte Volumen des Ersatzkörpers ein (superponierte Kontinua) und alle Größen der Partialkörper wie z. B. Bewegung, Spannung und Impuls sind im gesamten Gebiet definiert. Sie sind als statistische Mittelwerte der tatsächlich auftretenden Größen zu verstehen. Daraus folgt, daß jeder Raumpunkt  $\mathbf{x}$  zu



**Abbildung 1.1:** Beispiel eines porösen Mediums bestehend aus dem Festkörperskelett  $\varphi^S$  gefüllt mit dem Porenfluid  $\varphi^F$

jeder Zeit  $t$  von Partikeln aller Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  eingenommen wird und jede Konstituierende ihrer eigenen Bewegungsfunktion  $\chi_\alpha$  folgt. Die einzelnen Konstituierenden sind aber trotzdem unmischbar. Ihre Anteile am Gesamtkörper werden durch die Volumenanteile  $n^\alpha(\mathbf{x}, t)$  definiert, die als lokale Verhältnisse der Teil- bzw. Partialvolumina  $dv^\alpha$  zum Gesamtvolumen  $dv$  definiert sind und i. a. eine Funktion des Ortes  $\mathbf{x}$  und der Zeit  $t$  darstellen:

$$n^\alpha = \frac{dv^\alpha}{dv}. \quad (1.1)$$

Der Index  $(\dots)^\alpha$  kennzeichnet hierbei die einzelnen Konstituierenden, die im folgenden auch als Phasen bezeichnet werden. Gleichung (1.1) stellt das Konzept der Volumenanteile dar. Aus der Definition der Volumenanteile  $n^\alpha$  folgt durch Integration über den Körper  $\mathcal{B}$  für die Partialvolumina

$$V^\alpha = \int_{\mathcal{B}} dv^\alpha = \int_{\mathcal{B}} n^\alpha dv. \quad (1.2)$$

Die folgenden Betrachtungen werden auf den Fall gesättigter poröser Körper beschränkt. Sättigung bedeutet in diesem Zusammenhang, daß die Summe der Partialvolumina gleich dem Volumen des Mischungskörpers ist:

$$V = \sum_{\alpha} V^\alpha, \quad dv = \sum_{\alpha} dv^\alpha. \quad (1.3)$$

Die Porenräume sind vollständig gefüllt, und es gibt keine leeren Räume bzw. kein „Vakuum“. Mit der Definition der Volumenanteile  $n^\alpha$  folgt die Sättigungsbedingung

$$1 = \sum_{\alpha} n^\alpha. \quad (1.4)$$

Analog zu den Partialvolumina lassen sich partielle Oberflächenelemente  $da^\alpha$  einführen (Delesse [13]):

$$da^\alpha = n^\alpha da. \quad (1.5)$$

Dabei kennzeichnet  $da$  die Oberfläche des Gesamtvolumens der Mischung und  $da^\alpha$  den Oberflächenanteil der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$ . Mit dem nach außen orientierten Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}$  und

$$d\mathbf{a} = \mathbf{n} da, \quad d\mathbf{a}^\alpha = \mathbf{n} da^\alpha \quad (1.6)$$

folgt aus der Annahme superponierter Kontinua

$$d\mathbf{a}^\alpha = n^\alpha d\mathbf{a}. \quad (1.7)$$

Das Konzept der Volumenanteile bedingt zwei verschiedene Dichtefunktionen. Zum einen die sogenannte materielle Dichte  $\rho^{\alpha R}$ , die als Quotient aus der Masse  $dm^\alpha$  der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  und dem von ihr ausgefüllten Partialvolumen  $dv^\alpha$  definiert ist:

$$\rho^{\alpha R} := \frac{dm^\alpha}{dv^\alpha}. \quad (1.8)$$

Die materielle Dichte  $\rho^{\alpha R}$  entspricht der effektiven Dichte der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$ . Bei der Partialdichte  $\rho^\alpha$  wird die Partialmasse  $dm^\alpha$  auf das gesamte Mischungsvolumen  $dv$  bezogen:

$$\rho^\alpha := \frac{dm^\alpha}{dv}. \quad (1.9)$$

Mit der Definition des Volumenanteils  $n^\alpha$  folgt die Beziehung zwischen der materiellen und der partialen Dichtefunktion

$$\rho^\alpha = n^\alpha \rho^{\alpha R}. \quad (1.10)$$

Die Dichte des Mischungskörpers (Mischungsdichte)  $\rho$  folgt durch Summation der Partialdichten über alle Konstituierenden  $\varphi^\alpha$ :

$$\rho = \sum_\alpha \rho^\alpha = \sum_\alpha n^\alpha \rho^{\alpha R}. \quad (1.11)$$

## 1.2 Kinematik der Mischung

### 1.2.1 Bewegungsfunktion

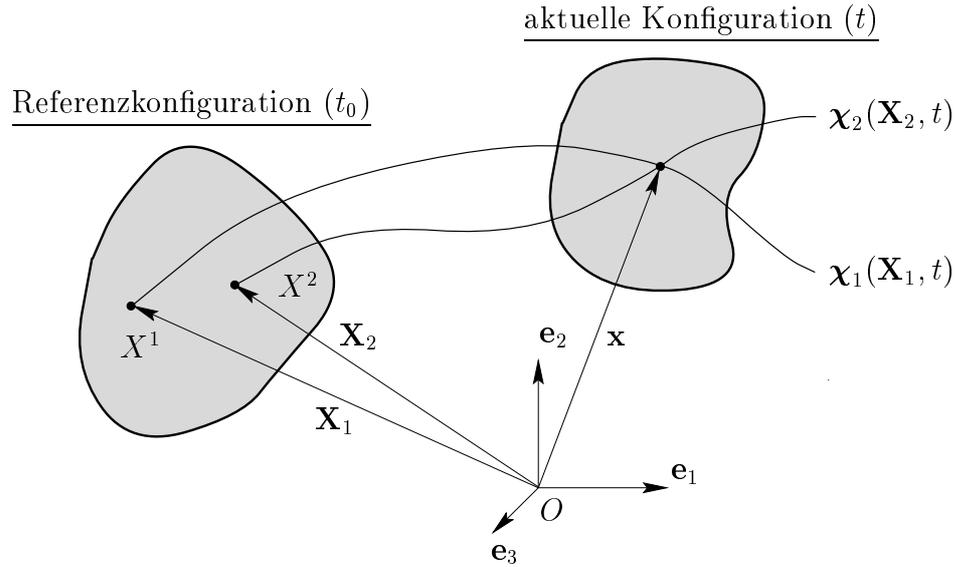
Ein Körper  $\mathcal{B}$  sei die zusammenhängende Menge der materiellen Körperpunkte  $X^\alpha$ . Die Menge der Randpunkte wird als Oberfläche  $\partial\mathcal{B}$  bezeichnet. Zur Beschreibung der Lage der materiellen Körperpunkte  $X^\alpha$  im dreidimensionalen, eigentlich *Euklidschen* Raum  $E^3$  ist die Vorgabe eines raumfesten Bezugspunktes, des Ursprungs  $O$ , erforderlich. Die Plazierung eines materiellen Punktes  $X^\alpha$  zum Zeitpunkt  $t$  wird durch die vektorwertige Bewegungsfunktion

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_\alpha(X^\alpha, t) \quad (1.12)$$

angegeben. Aus der Bewegungsfunktion folgt, daß sich zu jedem Zeitpunkt  $t$  Partikel aller Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  gleichzeitig im Raumpunkt  $\mathbf{x}$  befinden, obwohl sie unterschiedliche Referenzlagen

$$\mathbf{X}_\alpha = \boldsymbol{\chi}_\alpha(X^\alpha, t_0) \quad (1.13)$$

besitzen können. Dies entspricht der Vorstellung superponierter Kontinua, vgl. Abbildung 1.2.



**Abbildung 1.2:** Bewegungsfunktionen und Referenzlagen eines zweiphasigen Mediums

Mit der Definition der Referenzlage  $\mathbf{X}_\alpha$  der Phase  $\varphi^\alpha$  kann die materielle Beschreibung der Bewegung (1.12) in die *Lagrangesche* Form überführt werden:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t). \quad (1.14)$$

Mit der hinreichenden Voraussetzung, daß die *Jacobi-Determinante*  $J_\alpha$  der Bewegung  $\boldsymbol{\chi}_\alpha$ ,

$$J_\alpha = \det \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial \mathbf{X}_\alpha}, \quad (1.15)$$

ungleich null ist, läßt sich die *Lagrangesche* Bewegungsfunktion durch Invertierung in die *Eulersche* Form überführen:

$$\mathbf{X}_\alpha = \boldsymbol{\chi}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (1.16)$$

Da jeder Konstituierenden eine eigene Bewegungsfunktion zugeordnet ist, besitzen sie auch eigene Geschwindigkeitsfelder. Die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes  $X^\alpha$  der Phase  $\varphi^\alpha$  ist durch die materielle Zeitableitung der Bewegung  $\boldsymbol{\chi}_\alpha$  definiert:

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t). \quad (1.17)$$

Mit der inversen Bewegungsfunktion folgt die *Eulersche* Darstellung der Geschwindigkeit:

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = \dot{\mathbf{x}}_\alpha [\boldsymbol{\chi}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t), t] = \dot{\mathbf{x}}_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (1.18)$$

Die Beschleunigung eines materiellen Punktes ist analog über die Zeitableitung der Geschwindigkeit gegeben:

$$\ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{x}}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \ddot{\mathbf{x}}_\alpha [\boldsymbol{\chi}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t), t] = \ddot{\mathbf{x}}_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (1.19)$$

Die verschiedenen Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  bedingen die Existenz unterschiedlicher Zeitableitungen. Sei  $\psi$  eine differenzierbare, skalarwertige Funktion der Variablen  $\mathbf{x}$  und  $t$ , dann existiert gemäß (1.14) für jede Bewegungsfunktion  $\chi_\alpha$  eine unabhängige Zeitableitung:

$$\begin{aligned} (\psi)'_\alpha &= \frac{d_\alpha \psi}{dt} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{grad } \psi \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha . \end{aligned} \quad (1.20)$$

Für eine vektorwertige Funktion  $\boldsymbol{\psi}$  lautet die materielle Zeitableitung

$$(\boldsymbol{\psi})'_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} + (\text{grad } \boldsymbol{\psi}) \dot{\mathbf{x}}_\alpha . \quad (1.21)$$

Der Operator  $\text{grad}(\dots)$  bezeichnet die Ableitung nach dem Ortsvektor der aktuellen Konfiguration, während  $\text{Grad}_\alpha(\dots)$  die Ableitung nach dem Ortsvektor der Referenzkonfiguration der Phase  $\varphi^\alpha$  darstellt. Da jeder Phase eine eigene Bewegungsfunktion zugeordnet ist, besitzt sie auch einen eigenen materiellen Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial \mathbf{X}_\alpha} = \text{Grad}_\alpha \mathbf{x} , \quad (1.22)$$

der ein Maß für die lokale Deformation darstellt. Der inverse Deformationsgradient  $(\mathbf{F}_\alpha)^{-1}$  lautet

$$(\mathbf{F}_\alpha)^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}_\alpha}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad } \mathbf{X}_\alpha . \quad (1.23)$$

## 1.2.2 Natürliche Koordinaten

Durch die Einführung konvektiver, krummliniger Koordinaten  $(\theta_\alpha)^i$  ( $i=1,2,3$ ) für jede Phase  $\varphi^\alpha$  kann der Ortsvektor eines materiellen Punktes  $X^\alpha$  in der Referenzkonfiguration  $\mathbf{X}_\alpha$  und in der aktuellen Konfiguration  $\mathbf{x}$  durch

$$\mathbf{X}_\alpha = \mathbf{X}_\alpha((\theta_\alpha)^i, t_0) , \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}((\theta_\alpha)^i, t) \quad (1.24)$$

ausgedrückt werden. Es wird dabei gefordert, daß die jeweiligen Umkehrfunktionen

$$(\theta_\alpha)^i = (\theta_\alpha)^i(\mathbf{X}_\alpha, t_0) , \quad (\theta_\alpha)^i = (\theta_\alpha)^i(\mathbf{x}, t) \quad (1.25)$$

existieren. Die Ableitung des Ortsvektors  $\mathbf{X}_\alpha$  der Referenzkonfiguration nach den Koordinatenlinien  $(\theta_\alpha)^i$  liefert als natürliche Basis im materiellen Punkt  $X^\alpha$  die kovarianten Tangentenvektoren  $(\mathbf{h}_\alpha)_i$ ; die Ableitung des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  nach den mitverformten Koordinatenlinien der aktuellen Konfiguration die kovarianten Tangentenvektoren  $(\mathbf{a}_\alpha)_i$ , s. Abbildung 1.3:

$$(\mathbf{h}_\alpha)_i = \frac{\partial \mathbf{X}_\alpha}{\partial (\theta_\alpha)^i} , \quad (\mathbf{a}_\alpha)_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial (\theta_\alpha)^i} . \quad (1.26)$$

Die zugehörigen dualen (kontravarianten) Basissysteme ergeben sich aus den Vorschriften

$$(\mathbf{h}_\alpha)^i \cdot (\mathbf{h}_\alpha)_j = \delta_j^i , \quad (\mathbf{a}_\alpha)^i \cdot (\mathbf{a}_\alpha)_j = \delta_j^i . \quad (1.27)$$

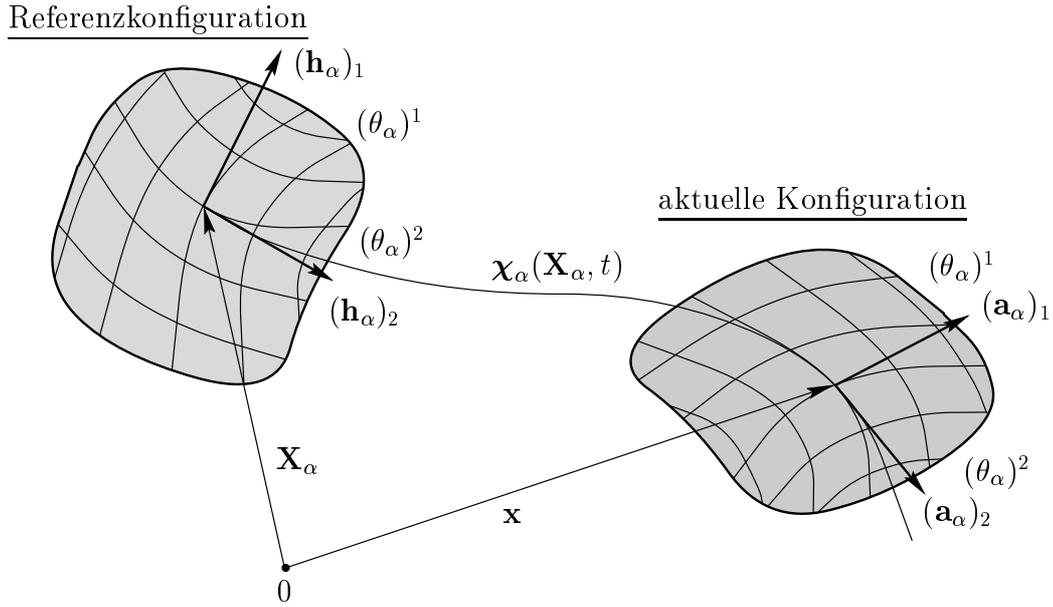


Abbildung 1.3: Krummlinige Koordinaten und kovariante Basisvektoren

Sie lassen sich auch aus den Ableitungen der inversen Darstellung (1.25) bestimmen:

$$(\mathbf{h}_\alpha)^k = \frac{\partial(\theta_\alpha)^k}{\partial \mathbf{X}_\alpha}, \quad (\mathbf{a}_\alpha)^k = \frac{\partial(\theta_\alpha)^k}{\partial \mathbf{x}}. \quad (1.28)$$

Mit den natürlichen Basissystemen (1.26), (1.28) und der Kettenregel erhält man den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_\alpha$  in natürlicher Basisdarstellung:

$$\mathbf{F}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial(\theta_\alpha)^i} \otimes \frac{\partial(\theta_\alpha)^i}{\partial \mathbf{X}_\alpha} = (\mathbf{a}_\alpha)_i \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^i. \quad (1.29)$$

Der Deformationsgradient stellt somit einen Zweifeldtensor dar, da seine beiden Basissysteme auf verschiedenen Konfigurationen definiert sind. Für den inversen Deformationsgradienten  $(\mathbf{F}_\alpha)^{-1}$  erhält man analog

$$(\mathbf{F}_\alpha)^{-1} = (\mathbf{h}_\alpha)_i \otimes (\mathbf{a}_\alpha)^i. \quad (1.30)$$

Die Anwendung von  $\mathbf{F}_\alpha$  auf  $(\mathbf{h}_\alpha)_k$  liefert mit (1.27)

$$\mathbf{F}_\alpha (\mathbf{h}_\alpha)_i = [(\mathbf{a}_\alpha)_k (\mathbf{h}_\alpha)^k] (\mathbf{h}_\alpha)_i = (\mathbf{a}_\alpha)_k \delta_i^k = (\mathbf{a}_\alpha)_i. \quad (1.31)$$

$\mathbf{F}_\alpha$  stellt einen kovarianten Vorwärtstransport dar, bzw.  $(\mathbf{F}_\alpha)^{-1}$  einen kovarianten Rückwärtstransport. Die kontravarianten Vorwärts- bzw. Rückwärtstransporte werden mit  $(\mathbf{F}_\alpha^T)^{-1}$  bzw.  $\mathbf{F}_\alpha^T$  durchgeführt. Die Transporte sind in Tabelle 1.1 zusammengefasst.

### Transporttheoreme

Mit Hilfe des materiellen Deformationsgradienten lassen sich differentielle Linien-, Flächen- und Volumenelemente  $d\mathbf{X}_\alpha$ ,  $d\mathbf{A}_\alpha$  und  $dV_\alpha$  der jeweiligen Referenzkonfiguration in die entsprechenden Größen  $d\mathbf{x}$ ,  $d\mathbf{a}$  und  $dv$  der aktuellen Konfiguration abbilden und umgekehrt.

kovarianter Transport		kontravarianter Transport		
$(\mathbf{h}_\alpha)_i$	$\xrightarrow{\mathbf{F}_\alpha}$	$(\mathbf{a}_\alpha)_i$	$(\mathbf{h}_\alpha)^i \xrightarrow{(\mathbf{F}_\alpha^T)^{-1}}$	$(\mathbf{a}_\alpha)^i$
$(\mathbf{a}_\alpha)_i$	$\xrightarrow{(\mathbf{F}_\alpha)^{-1}}$	$(\mathbf{h}_\alpha)_i$	$(\mathbf{a}_\alpha)^i \xrightarrow{\mathbf{F}_\alpha^T}$	$(\mathbf{h}_\alpha)^i$

Tabelle 1.1: Transportverhalten natürlicher Basisvektoren

Der Transport von differentiellen Linienelementen ist durch den Deformationsgradienten selbst gegeben (vgl. Tabelle 1.1). Die Transporttheoreme für Flächen- und Volumenelemente lassen sich aus dem Deformationsgradienten ableiten, vgl. *de Boer* [6]:

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{x} &= \mathbf{F}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha \\
 d\mathbf{a} &= \det \mathbf{F}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{T-1} d\mathbf{A}_\alpha \\
 dv &= \det \mathbf{F}_\alpha dV_\alpha
 \end{aligned}
 \tag{1.32}$$

### 1.2.3 Deformations- und Verzerrungsmaße

Der materielle Deformationsgradient  $\mathbf{F}_\alpha$  kann mit Hilfe der polaren Zerlegung

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{U}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha \mathbf{R}_\alpha
 \tag{1.33}$$

durch den eigentlich orthogonalen Tensor  $\mathbf{R}_\alpha$  und den symmetrischen und positiv definiten rechten bzw. linken Strecktensor  $\mathbf{U}_\alpha$  bzw.  $\mathbf{V}_\alpha$  dargestellt werden. Die Deformation eines Linienelements  $d\mathbf{X}_\alpha$  auf der Referenzkonfiguration von  $\varphi^\alpha$  läßt sich damit in eine reine Streckung und eine Drehung zerlegen:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{R}_\alpha(\mathbf{U}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha) = \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{R}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha).
 \tag{1.34}$$

Die Deformationsmaße werden über die Abbildung der Quadrate der Linienelemente aus der Referenzkonfiguration in die aktuelle Konfiguration und umgekehrt eingeführt. Mit den Längen der infinitesimalen Linienelemente  $ds$  auf der aktuellen Konfiguration und  $dS_\alpha$  auf der Referenzkonfiguration der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$ ,

$$ds := |d\mathbf{x}| = \sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}} \quad , \quad dS_\alpha := |d\mathbf{X}_\alpha| = \sqrt{d\mathbf{X}_\alpha \cdot d\mathbf{X}_\alpha},
 \tag{1.35}$$

folgt für das Quadrat der Linienelemente, ausgedrückt durch die Linienelemente der jeweils anderen Konfiguration,

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{F}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha) \cdot (\mathbf{F}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha) \\
 &= d\mathbf{X}_\alpha \cdot \mathbf{C}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha, \\
 dS_\alpha^2 &= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_\alpha^{-1} d\mathbf{x}.
 \end{aligned}
 \tag{1.36}$$

$\mathbf{C}_\alpha$  wird als rechter *Cauchy-Green-Tensor* und  $\mathbf{B}_\alpha$  als linker *Cauchy-Green-Tensor* bezeichnet:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_\alpha &= \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{U}_\alpha \mathbf{U}_\alpha, \\ \mathbf{B}_\alpha &= \mathbf{F}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^T = \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha.\end{aligned}\tag{1.37}$$

Beide *Cauchy-Green-Deformationstensoren* sind symmetrisch und positiv definit. Während der rechte *Cauchy-Green-Tensor*  $\mathbf{C}_\alpha$  bei Darstellung in natürlichen Koordinaten kontravariante Basissysteme besitzt und auf der Referenzkonfiguration definiert ist, besitzt der linke *Cauchy-Green-Tensor* kovariante Basissysteme und ist auf der aktuellen Konfiguration definiert:

$$\mathbf{C}_\alpha = (a_\alpha)_{ik} (\mathbf{h}_\alpha)^i \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^k, \quad \mathbf{B}_\alpha = (h_\alpha)^{ik} (\mathbf{a}_\alpha)_i \otimes (\mathbf{a}_\alpha)_k.\tag{1.38}$$

Hierbei sind  $(a_\alpha)_{ik}$  und  $(h_\alpha)^{ik}$  die Metrikkoeffizienten der jeweiligen Basissysteme. Durch Vorwärtsrotation kann  $\mathbf{C}_\alpha$  in  $\mathbf{B}_\alpha$  überführt werden:

$$\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{C}_\alpha \mathbf{R}_\alpha^T.\tag{1.39}$$

Über die Differenz der Quadrate der Linienelemente ( $ds^2 - dS_\alpha^2$ ) in der aktuellen und der Referenzkonfiguration können der kontravariante *Eulersche Verzerrungstensor*  $\mathbf{E}_\alpha$  der Referenzkonfiguration und der kontravariante *Almansische Verzerrungstensor*  $\mathbf{A}_\alpha$  der aktuellen Konfiguration eingeführt werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\alpha &= \frac{1}{2} (\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} [(a_\alpha)_{ik} - (h_\alpha)_{ik}] (\mathbf{h}_\alpha)^i \otimes (\mathbf{h}_\alpha)^k, \\ \mathbf{A}_\alpha &= \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha^{-1}) = \frac{1}{2} [(a_\alpha)_{ik} - (h_\alpha)_{ik}] (\mathbf{a}_\alpha)^i \otimes (\mathbf{a}_\alpha)^k.\end{aligned}\tag{1.40}$$

Die Koeffizienten von  $\mathbf{E}_\alpha$  und  $\mathbf{A}_\alpha$  stellen die Differenz der Metriken der aktuellen Konfiguration und der Referenzkonfiguration dar. Der *Almansische Verzerrungstensor* geht durch kontravarianten Vorwärtstransport der Basissysteme aus dem *Eulerschen Verzerrungstensor* hervor (vgl. Tabelle 1.1):

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{T-1} \mathbf{E}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1}.\tag{1.41}$$

### 1.2.4 Deformations- und Verzerrungsgeschwindigkeiten

Aus den Definitionen des materiellen und des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten,

$$(\mathbf{F}_\alpha)'_\alpha = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_\alpha}{\partial \mathbf{X}_\alpha} = \text{Grad}_\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha,\tag{1.42}$$

$$\mathbf{L}_\alpha = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_\alpha}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad} \dot{\mathbf{x}}_\alpha,\tag{1.43}$$

erhält man die Beziehungen zwischen den beiden Größen

$$\mathbf{L}_\alpha = (\mathbf{F}_\alpha)'_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1}.\tag{1.44}$$

Der räumliche Verzerrungsgeschwindigkeitsgradient  $\mathbf{L}_\alpha$  kann eindeutig in seinen symmetrischen Anteil  $\mathbf{D}_\alpha$  und seinen schiefssymmetrischen Anteil  $\mathbf{W}_\alpha$  zerlegt werden:

$$\mathbf{L}_\alpha = \mathbf{D}_\alpha + \mathbf{W}_\alpha \quad (1.45)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\alpha &= \frac{1}{2} (\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\alpha^T) \quad ; \quad \mathbf{D}_\alpha = \mathbf{D}_\alpha^T, \\ \mathbf{W}_\alpha &= \frac{1}{2} (\mathbf{L}_\alpha - \mathbf{L}_\alpha^T) \quad ; \quad \mathbf{W}_\alpha = -\mathbf{W}_\alpha^T. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Durch Differentiation der Transporttheoreme (1.32) lassen sich die materiellen Zeitableitungen der differentiellen Linien-, Flächen und Volumenelemente  $d\mathbf{x}$ ,  $d\mathbf{a}$  und  $dv$  der aktuellen Konfiguration mit Hilfe des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten ausdrücken (vgl. *de Boer* [6]):

$$\begin{aligned} (d\mathbf{x})'_\alpha &= \mathbf{L}_\alpha \mathbf{F}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha = \mathbf{L}_\alpha d\mathbf{x}, \\ (d\mathbf{a})'_\alpha &= [(\mathbf{L}_\alpha \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} - \mathbf{L}_\alpha^T] d\mathbf{a} = [(\mathbf{D}_\alpha \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} - \mathbf{L}_\alpha^T] d\mathbf{a}, \\ (dv)'_\alpha &= (\mathbf{L}_\alpha \cdot \mathbf{I}) dv = \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha dv. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Durch formale Zeitdifferentiation des rechten *Cauchy-Green*-Deformationstensors  $\mathbf{C}_\alpha$  erhält man für den Deformationsgeschwindigkeitstensor  $(\mathbf{C}_\alpha)'_\alpha$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_\alpha)'_\alpha &= (\mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{F}_\alpha)'_\alpha = (\mathbf{F}_\alpha^T)'_\alpha \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_\alpha^T (\mathbf{F}_\alpha)'_\alpha \\ &= \mathbf{F}_\alpha^T (\mathbf{L}_\alpha^T + \mathbf{L}_\alpha) \mathbf{F}_\alpha = 2 \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{D}_\alpha \mathbf{F}_\alpha. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Somit stellt  $(\mathbf{C}_\alpha)'_\alpha$  den kontravarianten Rückwärtstransport von  $2\mathbf{D}_\alpha$  dar, dem symmetrischen Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten. Für die materielle Zeitableitung des linken *Cauchy-Green*-Deformationstensors folgt

$$(\mathbf{B}_\alpha)'_\alpha = \mathbf{L}_\alpha \mathbf{B}_\alpha + \mathbf{B}_\alpha \mathbf{L}_\alpha^T. \quad (1.49)$$

Ausgangspunkt der Darstellung der Verzerrungsgeschwindigkeiten bildet, analog der Einführung der Verzerrungstensoren, die Geschwindigkeit der Differenz der Quadrate der Linienelemente:

$$(ds^2 - dS_\alpha^2)'_\alpha = (ds^2)'_\alpha. \quad (1.50)$$

Mit dem *Greenschen* Verzerrungstensor (1.40) erhält man

$$(ds^2 - dS_\alpha^2)'_\alpha = (d\mathbf{X}_\alpha \cdot 2\mathbf{E}_\alpha d\mathbf{X}_\alpha)'_\alpha = 2 d\mathbf{X}_\alpha \cdot (\mathbf{E}_\alpha)'_\alpha d\mathbf{X}_\alpha = d\mathbf{X}_\alpha \cdot (\mathbf{C}_\alpha)'_\alpha d\mathbf{X}_\alpha. \quad (1.51)$$

Für den *Almansi*-Verzerrungstensor folgt mit Hilfe der materiellen Zeitableitung eines Linienelements (1.47)

$$\begin{aligned} (ds^2 - dS_\alpha^2)'_\alpha &= (d\mathbf{x} \cdot 2\mathbf{A}_\alpha d\mathbf{x})'_\alpha \\ &= d\mathbf{x} \cdot 2 (\mathbf{L}_\alpha^T \mathbf{A}_\alpha + (\mathbf{A}_\alpha)'_\alpha + \mathbf{A}_\alpha \mathbf{L}_\alpha) d\mathbf{x} \\ &=: d\mathbf{x} \cdot 2 \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_\alpha d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Der Operator  $(\dots)_\alpha^\Delta$  bezeichnet die obere *Oldroyd*- bzw. *Lie*-Ableitung, die als relative Zeitableitung einer räumlichen Größe interpretiert werden kann, d. h. als Zeitableitung der Tensorkomponenten bei festgehaltenen natürlichen Basisvektoren der Momentankonfiguration:

$$(\dots)_\alpha^\Delta = (\dots)'_\alpha + \mathbf{L}_\alpha^T (\dots) + (\dots) \mathbf{L}_\alpha. \quad (1.53)$$

Die *Oldroyd*-Ableitung des *Almansi*-Verzerrungstensors ist dabei gleich dem symmetrischen Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten,

$$(\mathbf{A}_\alpha)_\alpha^\Delta = \mathbf{D}_\alpha, \quad (1.54)$$

und geht durch kontravarianten Vorwärtstransport aus dem *Greenschen* Verzerrungsgeschwindigkeitstensor  $(\mathbf{E}_\alpha)'_\alpha$  hervor:

$$(\mathbf{A}_\alpha)_\alpha^\Delta = \mathbf{F}_\alpha^{-T} (\mathbf{E}_\alpha)'_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1}. \quad (1.55)$$

Eine Zusammenfassung der Transportbeziehungen der Deformationsmaße und Deformationsgeschwindigkeiten befindet sich in Kapitel 4 Abbildung 4.2 und 4.3.

### 1.2.5 Spannungsmaße

Ausgangspunkt für die Einführung der Spannungstensen bildet das Theorem von *Cauchy*. Die Kraftwirkungen, die infolge Nahwirkung (Kontakt) auf eine Phase  $\varphi^\alpha$  einwirken, werden durch den partialen Oberflächenspannungsvektor  $\mathbf{t}^\alpha$  erfaßt. Durch das Theorem von *Cauchy*

$$\mathbf{T}^\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}^\alpha \otimes \mathbf{n} \quad (1.56)$$

wird der partielle *Cauchy*-Spannungstensor  $\mathbf{T}^\alpha$  definiert.  $\mathbf{n}$  stellt den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor an die Oberfläche dar. Der *Cauchysche* Spannungstensor wird auch als wahrer Spannungstensor bezeichnet, da er die in der aktuellen Konfiguration wirkenden Spannungen auf das aktuelle Flächenelement bezieht. Für den Kraftvektor, der auf ein differentielles Flächenelement  $d\mathbf{a}$  wirkt, folgt

$$d\mathbf{k}^\alpha = \mathbf{t}^\alpha da = \mathbf{T}^\alpha \mathbf{n} da = \mathbf{T}^\alpha d\mathbf{a}. \quad (1.57)$$

Mit Hilfe dieser Darstellung lassen sich weitere Spannungstensen einführen.  $d\bar{\mathbf{a}}$  sei ein Flächenelement mit der gleichen Normalenrichtung wie  $d\mathbf{a}$  und gewichtet mit dem Faktor  $\det \mathbf{F}_\alpha = dv/dV_\alpha$ . Es folgt

$$d\mathbf{k}^\alpha = \mathbf{T}^\alpha \det \mathbf{F}_\alpha d\bar{\mathbf{a}} =: \boldsymbol{\tau}^\alpha d\bar{\mathbf{a}} \quad (1.58)$$

mit dem *Kirchhoff*- bzw. gewichteten *Cauchy*-Spannungstensor

$$\boldsymbol{\tau}^\alpha = \det \mathbf{F}_\alpha \mathbf{T}^\alpha. \quad (1.59)$$

Der Bezug der wahren Spannungen auf ein Flächenelement der Referenzkonfiguration  $d\mathbf{A}_\alpha$  liefert mit Hilfe der Transporttheoreme (1.32) die Definition des ersten *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensors:

$$d\mathbf{k}^\alpha = \mathbf{T}^\alpha \det (\mathbf{F}_\alpha) \mathbf{F}_\alpha^{T-1} d\mathbf{A}_\alpha =: \mathbf{P}^\alpha d\mathbf{A}_\alpha. \quad (1.60)$$

Während der *Cauchy*- und der *Kirchhoff*-Spannungstensor in der Regel symmetrisch sind, ist der erste *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensor aufgrund des kovarianten Rückwärts- transports des zweiten Basissystems unsymmetrisch. Dieser Umstand motiviert die Einführung des zweiten *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensors, indem auch das erste Basissystem auf die Referenzkonfiguration zurückgezogen wird:

$$\mathbf{S}^\alpha := \mathbf{F}_\alpha^{-1} \mathbf{P}^\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{-1} \boldsymbol{\tau}^\alpha \mathbf{F}_\alpha^{T-1}. \quad (1.61)$$

Aus der unteren *Oldroyd*-Ableitung (*Lie*-Ableitung)

$$(\dots)_\alpha^\nabla = (\dots)'_\alpha - \mathbf{L}_\alpha (\dots) - (\dots) \mathbf{L}_\alpha^T. \quad (1.62)$$

eines kovarianten Tensors ergibt sich der *Oldroydsche* Spannungsfluß der *Kirchhoff*-Spannungen zu

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau}^\alpha)_\alpha^\nabla &= (\boldsymbol{\tau}^\alpha)'_\alpha - \mathbf{L}_\alpha (\boldsymbol{\tau}^\alpha) - (\boldsymbol{\tau}^\alpha) \mathbf{L}_\alpha^T \\ &= \mathbf{F}_\alpha (\mathbf{S}^\alpha)'_\alpha \mathbf{F}_\alpha^T, \end{aligned} \quad (1.63)$$

der einen objektiven Spannungsfluß darstellt, siehe z. B. *Marsden & Hughes* [65].

### 1.3 Bilanzgleichungen

Die Struktur der Bilanzgleichungen für Mehrphasenmaterialien basiert auf den von *Truesdell* eingeführten „Metaphysischen Prinzipien“, siehe *Truesdell* [92]:

1. All properties of the mixture must be mathematical consequences of properties of the constituents.
2. So as to describe the motion of a constituent, we may in imagination isolate it from the rest of the mixture, provided we allow properly for the actions of the other constituents upon it.
3. The motion of the mixture is governed by the same equations as is the single body.

Da sich demzufolge die Bilanzgleichungen der Mischung aus den Bilanzgleichungen der einzelnen Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  ergeben, werden zuerst die allgemeinen Formen der Bilanzgleichungen für eine einzelne Konstituierende mit Hilfe der zweiten *Truesdellschen* Forderung behandelt. Im Anschluß daran werden die Bilanzgleichungen der Mischung mit Hilfe der ersten und dritten *Truesdellschen* Forderung motiviert und die auftretenden Größen identifiziert. Die Darstellung wurde aus *Ehlers* [24] entnommen.

Mit der zweiten Forderung lautet die Bilanz einer skalarwertigen mechanischen Größe  $\psi^\alpha$  beziehungsweise vektorwertigen mechanischen Größe  $\boldsymbol{\psi}^\alpha$  einer Phase  $\varphi^\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{d_\alpha}{dt} \int_B \psi^\alpha dv &= \int_S \Phi^\alpha \cdot \mathbf{n} da + \int_B \sigma^\alpha dv + \int_B \hat{\psi}^\alpha dv, \\ \frac{d_\alpha}{dt} \int_B \boldsymbol{\psi}^\alpha dv &= \int_S \Phi^\alpha \mathbf{n} da + \int_B \boldsymbol{\sigma}^\alpha dv + \int_B \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha dv. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Darin sind  $\psi^\alpha$  bzw.  $\boldsymbol{\psi}^\alpha$  die volumenspezifische, skalar- bzw. vektorwertige Dichte der zu bilanzierenden mechanischen Größe (z. B. Massendichte, Bewegungsgröße, Energie),  $\boldsymbol{\phi}^\alpha \cdot \mathbf{n}$  bzw.  $\boldsymbol{\Phi}^\alpha \mathbf{n}$  die Oberflächendichte (bzw. der Ausfluß) der mechanischen Größe infolge äußerer Nahwirkung und  $\mathbf{n}$  ist der nach außen orientierte Oberflächennormaleneinheitsvektor.  $\sigma$  bzw.  $\boldsymbol{\sigma}$  stellt die Zufuhr der mechanischen Größe infolge äußerer Fernwirkung dar und  $\hat{\psi}^\alpha$  bzw.  $\hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha$  die Produktion der mechanischen Größe infolge möglicher Kopplungsmechanismen der Phase  $\varphi^\alpha$  mit seiner Umgebung, speziell mit anderen Phasen. Der Ausdruck  $d_\alpha/dt(\dots)$  bezeichnet die materielle Zeitableitung, die mit der Geschwindigkeit der Phase  $\varphi^\alpha$  gebildet wird, vgl. (1.20) bzw. (1.21). Die Struktur der Gleichung entspricht der eines Einphasenmaterials, ergänzt um den Austauschterm  $\hat{\psi}^\alpha$  bzw.  $\hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha$ . Die speziellen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls, Drall, Energie und Entropie können Tabelle 1.2 entnommen werden (vgl. Ehlers [24]).

	$\psi^\alpha, \boldsymbol{\psi}^\alpha$	$\Phi^\alpha, \boldsymbol{\Phi}^\alpha$	$\sigma^\alpha, \boldsymbol{\sigma}^\alpha$	$\hat{\psi}^\alpha, \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha$
Masse	$\rho^\alpha$	$\mathbf{0}$	$0$	$\hat{\rho}^\alpha$
Impuls	$\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha$	$\mathbf{T}^\alpha$	$\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$	$\hat{\mathbf{s}}^\alpha$
Drall	$\mathbf{x} \times (\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha)$	$\mathbf{x} \times \mathbf{T}^\alpha$	$\mathbf{x} \times (\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha)$	$\hat{\mathbf{h}}^\alpha$
Energie	$\rho^\alpha (\varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha)$	$\mathbf{T}^{T\alpha} \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{q}^\alpha$	$\rho^\alpha (\mathbf{b}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + r^\alpha)$	$\hat{e}^\alpha$
Entropie	$\rho^\alpha \eta^\alpha$	$-\Phi_\eta^\alpha$	$\sigma_\eta^\alpha$	$\hat{\eta}^\alpha$

Tabelle 1.2: Bilanzrelationen für eine einzelne Konstituierende  $\varphi^\alpha$

Die totalen Produktionsterme in Tabelle 1.2 können in einen direkten Anteil und einen Anteil, der durch die „niedrigeren“ Produktionsgrößen verursacht wird, zerlegt werden:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{s}}^\alpha &= \hat{\rho}^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha, \\
 \hat{\mathbf{h}}^\alpha &= \mathbf{x} \times (\hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha) + \hat{\mathbf{m}}^\alpha, \\
 \hat{e}^\alpha &= \hat{\varepsilon}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \hat{\rho}^\alpha (\varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha), \\
 \hat{\eta}^\alpha &= \hat{\zeta}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \eta^\alpha.
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Hierbei kann z. B. in (1.65)<sub>1</sub> die direkte Impulsproduktion  $\hat{\mathbf{p}}^\alpha$  als volumenbezogene, lokale Interaktionskraft zwischen der Phase  $\varphi^\alpha$  und den übrigen Konstituierenden verstanden werden, während der erste Summand den Anteil der Impulsproduktion darstellt, der infolge der Dichteproduktion  $\hat{\rho}^\alpha$  entsteht. Analog kann  $\hat{\mathbf{m}}^\alpha$  als volumenbezogenes, lokales Interaktionsmoment betrachtet werden, während die restlichen Anteile in (1.65)<sub>2</sub> die durch

die totale Impulsproduktion verursachte Drallproduktion beschreiben. In gleicher Weise lassen sich  $\hat{\varepsilon}^\alpha$  und  $\hat{\eta}^\alpha$  als entsprechende direkte Anteile verstehen, während der Rest der Gleichungen (1.65)<sub>3</sub> und (1.65)<sub>4</sub> wiederum Anteile aufgrund der „niedrigeren“ Bilanzen darstellen.

Mit den üblichen Voraussetzungen der Stetigkeit und stetigen Differenzierbarkeit lassen sich aus den globalen Formen der Bilanzgleichungen (1.64) die lokalen Formen gewinnen:

$$\begin{aligned} (\psi^\alpha)'_\alpha + \psi^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \operatorname{div} \Phi^\alpha + \sigma^\alpha + \hat{\psi}^\alpha, \\ (\boldsymbol{\psi}^\alpha)'_\alpha + \boldsymbol{\psi}^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi}^\alpha + \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Aus dem ersten *Truesdellschen* Prinzip folgt, daß die Bilanzgleichungen der Mischung sich aus den Bilanzgleichungen der einzelnen Konstituierenden durch Summation ergeben. Da die Mischung nicht „weiß“, ob sie eine Mischung ist oder nicht, haben ihre Bilanzgleichungen die gleiche Form, wie die eines Einphasenmaterials (vgl. drittes *Truesdellschen* Prinzip). Für die globalen Formen folgt umgekehrt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_B \psi \, dv &= \int_S \Phi \cdot \mathbf{n} \, da + \int_B \sigma \, dv + \int_B \hat{\psi} \, dv, \\ \frac{d}{dt} \int_B \boldsymbol{\psi} \, dv &= \int_S \boldsymbol{\Phi} \mathbf{n} \, da + \int_B \boldsymbol{\sigma} \, dv + \int_B \hat{\boldsymbol{\psi}} \, dv. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Die auftretenden Größen haben die gleiche Bedeutung wie bei den Bilanzgleichungen der einzelnen Konstituierenden  $\varphi^\alpha$ . Beim Mischungskörper gibt es aber in der Regel keine Produktionsterme, vergleiche Tabelle 1.3. Die lokale Form der Bilanzgleichungen für den Mischungskörper ergeben sich analog denen der einzelnen Phasen:

$$\begin{aligned} (\dot{\psi}) + \psi \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} &= \operatorname{div} \Phi + \sigma + \hat{\psi}, \\ (\dot{\boldsymbol{\psi}}) + \boldsymbol{\psi} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} &= \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\sigma} + \hat{\boldsymbol{\psi}}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Dabei bezeichnet  $(\dot{\cdot})$  bzw.  $d/dt$  die mit der Mischungsgeschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{\rho} \sum_\alpha \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \quad \text{mit} \quad \rho = \sum_\alpha \rho^\alpha \quad (1.69)$$

gebildete Zeitableitung. Die speziellen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls, Drall, Energie und Entropie können Tabelle 1.3 entnommen werden (vgl. *Ehlers* [24]).

Aus der Forderung der *Truesdellschen* Prinzipie, daß die Bilanzenrelationen der gesamten Mischung durch Summation aus den Bilanzen (1.66) der einzelnen Konstituierenden hervorgehen, ergeben sich Zwangsbedingungen in Form von Summenrelationen. Für die

	$\psi, \boldsymbol{\psi}$	$\Phi, \mathbf{\Phi}$	$\sigma, \boldsymbol{\sigma}$	$\hat{\psi}, \hat{\boldsymbol{\psi}}$
Masse	$\rho$	$\mathbf{0}$	0	0
Impuls	$\rho \dot{\mathbf{x}}$	$\mathbf{T}$	$\rho \mathbf{b}$	$\mathbf{0}$
Drall	$\mathbf{x} \times (\rho \dot{\mathbf{x}})$	$\mathbf{x} \times \mathbf{T}$	$\mathbf{x} \times (\rho \mathbf{b})$	$\mathbf{0}$
Energie	$\rho(\varepsilon + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})$	$\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{q}$	$\rho(\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + r)$	0
Entropie	$\rho \eta$	$-\Phi_\eta$	$\sigma_\eta$	$\hat{\eta}$

Tabelle 1.3: Bilanzrelationen für die Mischung

vektorwertigen mechanischen Größen erhält man z. B.:

- mechanische Größe :  $\boldsymbol{\psi} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{\psi}^{\alpha}$
- Fluß :  $\mathbf{\Phi} \mathbf{n} = \sum_{\alpha} \left[ \mathbf{\Phi}^{\alpha} - \boldsymbol{\psi}^{\alpha} \otimes (\dot{\mathbf{x}}_{\alpha} - \dot{\mathbf{x}}) \right] \mathbf{n}$
- Zufuhr :  $\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{\sigma}^{\alpha}$
- Produktion :  $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \sum_{\alpha} \hat{\boldsymbol{\psi}}^{\alpha}$

(1.70)

Aus dem Vergleich von Tabelle 1.2 und Tabelle 1.3 erhält man zusätzlich Zwangsbedingungen für die Produktionsterme der einzelnen Konstituierenden:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha} \hat{\rho}^{\alpha} &= 0, \\
 \sum_{\alpha} \hat{\mathbf{s}}^{\alpha} &= 0, \\
 \sum_{\alpha} \hat{\mathbf{h}}^{\alpha} &= \mathbf{0}, \\
 \sum_{\alpha} \hat{e}^{\alpha} &= 0, \\
 \sum_{\alpha} \hat{\eta}^{\alpha} &\geq 0.
 \end{aligned}$$
(1.71)

# Kapitel 2

## Singuläre Flächen

In Kapitel 5 wird Lokalisierung anhand singulärer Flächen untersucht. Hierfür werden Kompatibilitätsbedingungen der Ableitungen diskontinuierlicher Feldgrößen benötigt, die sich aus der in Kapitel 2.1 behandelten Kinematik singulärer Flächen ergeben. Es werden speziell singuläre Flächen erster und zweiter Ordnung betrachtet.

Anschließend werden die Bilanzgleichungen in Kapitel 2.2 ebenfalls als Vorbereitung für die Lokalisierungsanalyse unter Beachtung möglicher Diskontinuitäten der betrachteten Größen behandelt.

Die folgenden Ausführungen werden direkt für Mehrphasenkontinua im Sinne der TPM dargestellt. Sie orientieren sich im Bereich der Kinematik an dem Vorgehen von *Truesdell & Toupin* [93] für den einphasigen Körper und bezüglich der Bilanzgleichungen an *Haupt* [42]. Eine ausführliche Darstellung der Kinematik singulärer Flächen kann *Kosinski* [53] entnommen werden.

### 2.1 Kinematik

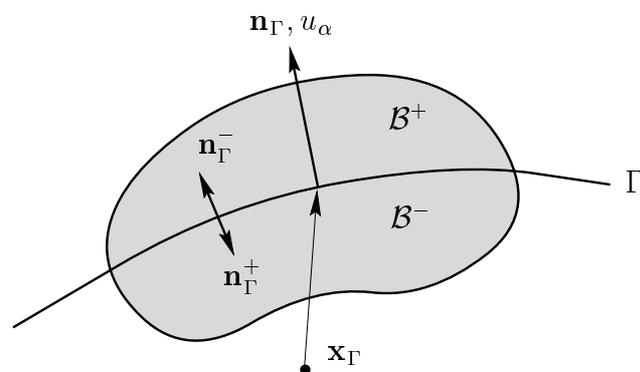


Abbildung 2.1: Singuläre Fläche  $\Gamma$

Gegeben sei ein Körper  $\mathcal{B}$  und eine Fläche  $\Gamma$ , die ihn in die Teilkörper  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  unterteilt, vgl. Abbildung 2.1. Die Fläche  $\Gamma$  ist immateriell und bedarf daher lediglich im Falle der Beschreibung relativ zu einer Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  der Indizierung mit  $(\dots)_\alpha$ , so z. B. beim Bild  $\bar{\Gamma}_\alpha$  der Fläche in der Referenzkonfiguration der Phase  $\varphi^\alpha$ .  $\mathbf{n}_\Gamma$  ist der Normaleneinheitsvektor auf die Fläche  $\Gamma$  in der aktuellen Konfiguration in Richtung von  $\mathcal{B}^-$  nach  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathbf{u}_\alpha$  die Geschwindigkeit, mit der sich die Fläche relativ zum Partialkörper der Konstituierende  $\varphi^\alpha$  bewegt. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_\alpha$  kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit senkrecht zur Fläche  $\Gamma$  angenommen werden:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_\alpha \mathbf{n}_\Gamma \quad \text{mit} \quad u_\alpha = (\dot{\mathbf{x}}_\Gamma - \dot{\mathbf{x}}_\alpha) \cdot \mathbf{n}_\Gamma. \quad (2.1)$$

$\dot{\mathbf{x}}_\Gamma$  stellt die Geschwindigkeit der Fläche dar. Eine skalarwertige Funktion  $\psi(\mathbf{x}, t)$  sei in  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  kontinuierlich (stetig und hinreichend oft stetig differenzierbar) und besitze auf der Fläche  $\Gamma$ , d. h. für  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ , die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \psi^+ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{n}_\Gamma), \\ \psi^- &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(\mathbf{x}_0 - \varepsilon \mathbf{n}_\Gamma). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Die Funktion  $\psi(\mathbf{x}, t)$  muß auf  $\Gamma$  selbst nicht notwendigerweise definiert sein. Der Sprung der Funktion  $\psi$  über die Fläche  $\Gamma$  ist definiert als die Differenz der Grenzwerte der Funktion in den Teilkörpern  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  an die Fläche:

$$\llbracket \psi(\mathbf{x}, t) \rrbracket := \psi^+ - \psi^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \psi(\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{n}_\Gamma) - \psi(\mathbf{x}_0 - \varepsilon \mathbf{n}_\Gamma) \}. \quad (2.3)$$

Falls der Sprung von  $\psi$  über  $\Gamma$  existiert und ungleich null ist, wird die Fläche singulär bezüglich  $\psi$  genannt. Eine singuläre Fläche  $n$ -ter Ordnung ist dadurch definiert, daß die Sprünge sämtliche Ortsableitungen der Ordnungen  $0, \dots, n-1$  gleich null sind:

$$\llbracket \text{Grad}_\alpha^k \psi \rrbracket = \mathbf{0}, \quad \text{für} \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (2.4)$$

Hierin bezeichnet  $\text{Grad}_\alpha^k$  die  $k$ -te Ortsableitung der Funktion  $\psi$ . Eine Einbeziehung der partiellen Ableitung nach der Zeit in die Definition der singulären Fläche  $n$ -ter Ordnung, wie sie in der Literatur zum Teil anzutreffen ist, ist nicht möglich, da die Sprünge der Zeitableitungen direkt an die der Ortsableitungen gekoppelt sind, vgl. (2.26). Der Normalenvektor  $\mathbf{n}_\Gamma$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $u_\alpha$  der Fläche relativ zum Partialkörper der Phase  $\varphi^\alpha$  sind ihrer Natur nach sprunghfrei.

### 2.1.1 Hadamards Lemma

Gegeben sei die kontinuierliche und stetig differenzierbare Ortskurve  $\mathbf{x}_\Gamma = \mathbf{x}_\Gamma(l)$  auf  $\Gamma$  in Abhängigkeit des Linienparameters  $l$ . Die Ortskurve  $\mathbf{X}_{\Gamma\alpha} = \mathbf{X}_{\Gamma\alpha}(l)$  auf der Referenzkonfiguration der Phase  $\varphi^\alpha$ , d. h. die Ortskurve bezüglich des Bildes  $\bar{\Gamma}_\alpha$  der Fläche  $\Gamma$  auf der Referenzkonfiguration der Phase  $\varphi^\alpha$ , folgt durch Transport:

$$\mathbf{X}_{\Gamma\alpha} = \mathbf{F}_\alpha^{-1} \mathbf{x}_\Gamma. \quad (2.5)$$

Es wird an dieser Stelle die Darstellung auf der Referenzkonfiguration gewählt. Eine Darstellung auf der aktuellen Konfiguration ist ebenfalls möglich, jedoch umständlicher.  $\bar{\Gamma}_\alpha$  wird im folgenden auch als Synonym für die Fläche selbst verwendet. Die Funktion  $\psi^+ = \psi^+(\mathbf{X}(l))$  sei entlang  $\mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)$  in  $\mathcal{B}^+$  stetig differenzierbar, d. h. der Grenzwert der Funktion  $\psi$  in  $\mathcal{B}^+$  an die Fläche  $\bar{\Gamma}_\alpha$  entlang der Kurve  $\mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)$  ist stetig differenzierbar. Für die Ableitung von  $\psi^+$  nach dem Linienparameter  $l$  folgt

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial l} = \frac{\partial \psi^+}{\partial \mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)}{\partial l}. \quad (2.6)$$

Im Teilkörper  $\mathcal{B}^-$  ergibt sich analog

$$\frac{\partial \psi^-}{\partial l} = \frac{\partial \psi^-}{\partial \mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)}{\partial l}. \quad (2.7)$$

Da die Ortsfunktion  $\mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)$  auf  $\bar{\Gamma}_\alpha$  kontinuierlich und stetig differenzierbar ist, ist der Tangentenvektor an  $\bar{\Gamma}_\alpha$  in  $\mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}$ ,  $\partial \mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)/\partial l$ , sprunghfrei über die Fläche. Aus der Differenz der Grenzwerte der Ableitungen ergibt sich damit

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial l} - \frac{\partial \psi^-}{\partial l} = \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)} - \frac{\partial \psi^-}{\partial \mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)}{\partial l}, \quad (2.8)$$

bzw. mit Hilfe des Sprungoperators

$$\frac{\partial}{\partial l} [\psi] = \left[ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)} \right] \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)}{\partial l} = \left[ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_{\Gamma_\alpha}(l)}{\partial l} \right] \right], \quad (2.9)$$

und somit schließlich

$$\frac{\partial}{\partial l} [\psi] = \left[ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial l} \right] \right]. \quad (2.10)$$

Die tangentielle Ableitung des Sprungs von  $\psi$  ist somit gleich dem Sprung der tangentialen Ableitung. Diese Aussage ist von zentraler Bedeutung und bildet den Ausgangspunkt für die folgenden Herleitungen der benötigten Kompatibilitätbedingungen. Da  $\psi^+$  und  $\psi^-$  im allgemeinen nicht miteinander verbunden sind, folgt für die Ableitung von  $\psi$  auf  $\bar{\Gamma}_\alpha$  in Normalenrichtung

$$\left[ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma_\alpha}} \right] \right] = \text{unbeschränkt}. \quad (2.11)$$

Hierbei stellt  $\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma_\alpha}$  das Bild des Normaleneinheitsvektors  $\mathbf{n}_\Gamma$  auf der Referenzkonfiguration der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  dar

$$\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma_\alpha} = \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{n}_\Gamma \quad (2.12)$$

und somit i. a. keinen Einheitsvektor mehr, s. (2.20), (2.21). Die Gleichungen (2.10) und (2.11) werden als *Hadamards Lemma* bezeichnet (*Hadamard* [38]) und stellen die erste wichtige Kompatibilitätsbedingung für die (tangentielle) Ableitung einer Funktion  $\psi$  auf einer bezüglich  $\psi$  singulären Fläche  $\Gamma$  dar.

Da die Funktion  $\psi$  in beiden Teilkörpern  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  kontinuierlich ist, sind auch die Funktionen ihrer Grenzwerte auf der Fläche  $\bar{\Gamma}_\alpha$  (2.2) kontinuierlich und es folgt, daß

der Sprung von  $\psi$  ebenfalls kontinuierlich auf  $\bar{\Gamma}_\alpha$  ist. Daher muß *Hadamards* Lemma für beliebige Parameterlinien  $(\theta_\Gamma)^i$  gelten:

$$\frac{\partial}{\partial (\theta_\Gamma)^i} \llbracket \psi \rrbracket = \left[ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_\alpha}{\partial (\theta_\Gamma)^i}. \quad (2.13)$$

Hierbei stellen  $(\theta_\Gamma)^i (i = 1, 2)$  die natürlichen Parameterlinien auf  $\Gamma$  bzw.  $\bar{\Gamma}_\alpha$  dar. Im Gegensatz zum vorhergehenden Kapitel werden die krummlinigen Koordinaten  $(\theta_\Gamma)^i$  nicht mit der Phase  $\varphi^\alpha$  indiziert, sondern mit der immaterielle Fläche  $\bar{\Gamma}_\alpha$ , auf die sie sich beziehen.

*Hadamards* Lemma ist in Tabelle 2.1 für skalarwertige Funktionen  $\psi$ , vektorwertige Funktionen  $\boldsymbol{\psi}$  und tensorwertige Funktionen  $\boldsymbol{\Psi}$  zusammengefaßt, unter Verwendung der Tangentenvektoren  $(\mathbf{h}_{\Gamma\alpha})_i = \partial \mathbf{X}_\alpha / \partial (\theta_\Gamma)^i$  an das Bild  $\bar{\Gamma}_\alpha$  der Fläche  $\Gamma$  in der Referenzkonfiguration der Phase  $\varphi^\alpha$ .

$\frac{\partial}{\partial (\theta_\Gamma)^i} \llbracket \psi \rrbracket = \left[ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \right] \cdot (\mathbf{h}_{\Gamma\alpha})_i$ $\frac{\partial}{\partial (\theta_\Gamma)^i} \llbracket \boldsymbol{\psi} \rrbracket = \left[ \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \right] (\mathbf{h}_{\Gamma\alpha})_i$ $\frac{\partial}{\partial (\theta_\Gamma)^i} \llbracket \boldsymbol{\Psi} \rrbracket = \left[ \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \right] (\mathbf{h}_{\Gamma\alpha})_i$
---

**Tabelle 2.1:** *Hadamards* Lemma in Größen der Referenzkonfiguration

### 2.1.2 Kompatibilitätsbedingung zweiter Ordnung

Als nächstes folgt die Darstellung der Kompatibilitätsbedingungen für die zweite tangentielle Ableitung von  $\psi$  auf  $\Gamma$  bzw.  $\bar{\Gamma}_\alpha$ . Für die tangentielle Ableitung von (2.10) für  $\psi$  auf  $\bar{\Gamma}_\alpha$  ergibt sich mit Tabelle 2.1 und der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial (\theta_\Gamma)^i \partial (\theta_\Gamma)^k} \llbracket \psi \rrbracket &= \frac{\partial}{\partial (\theta_\Gamma)^k} \left( \left[ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \right] \cdot (\mathbf{h}_{\Gamma\alpha})_i \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial (\theta_\Gamma)^k} \left[ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \right] \cdot (\mathbf{h}_{\Gamma\alpha})_i + \left[ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \right] \cdot (\mathbf{h}_{\Gamma\alpha})_{i,k}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

*Hadamards* Lemma (2.13), angewandt auf den Gradienten der Funktion  $\psi$  liefert

$$\frac{\partial}{\partial (\theta_\Gamma)^i} \left[ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \right] = \left[ \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha \otimes \partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \right] (\mathbf{h}_{\Gamma\alpha})_i. \quad (2.15)$$

Durch Einsetzen in (2.14) folgt die Kompatibilitätsbedingung für die zweite tangentielle Ableitung der Funktion  $\psi$  über  $\Gamma$  bzw.  $\bar{\Gamma}_\alpha$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial (\theta_\Gamma)^i \partial (\theta_\Gamma)^k} \llbracket \psi \rrbracket = \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha \otimes \partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \cdot (\mathbf{h}_{\Gamma_\alpha})_i \otimes (\mathbf{h}_{\Gamma_\alpha})_k + \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \cdot (\mathbf{h}_{\Gamma_\alpha})_{i,k}. \quad (2.16)$$

Auf die Darstellung des Ergebnisses für vektor- und tensorwertige Funktionen wird an dieser Stelle verzichtet.

### 2.1.3 Theorem von *Maxwell*

Im folgenden werden die Kompatibilitätsbedingungen (2.10) und (2.16) auf die speziellen Fälle singulärer Flächen erster und zweiter Ordnung angewendet. Die daraus resultierenden Bedingungen werden später im Rahmen der Lokalisierungsanalyse für poröse Medien benötigt. Die folgenden Betrachtungen bleiben auf die benötigten Gleichungen beschränkt.

#### Singuläre Fläche erster Ordnung

Für eine singuläre Fläche erster Ordnung bezüglich  $\psi$  folgt aus der Definition (2.4), daß lediglich der Sprung der Größe selbst gleich null ist, also  $\llbracket \psi \rrbracket = 0$ , und somit auch dessen Ableitung entlang der Fläche. Aus *Hadamards* Lemma (2.13) folgt

$$0 = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_\alpha}{\partial (\theta_\Gamma)^i} = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \cdot (\mathbf{h}_{\Gamma_\alpha})_i \quad (2.17)$$

mit den Tangentenvektoren  $(\mathbf{h}_{\Gamma_\alpha})_i$  an  $\bar{\Gamma}_\alpha$ . Da das Skalarprodukt zwischen dem Sprung des Gradienten von  $\psi$  und den Tangentenvektoren gleich null sein soll, folgt, daß die Richtung des Sprungs des Gradienten normal zur Fläche  $\bar{\Gamma}_\alpha$  orientiert sein muß. Für die Form des Sprungs von  $\text{Grad}_\alpha \psi$  ergibt sich somit

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] = \beta \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma_\alpha}. \quad (2.18)$$

Dieser Zusammenhang geht auf *Maxwell* [66] zurück und wird als *Maxwells* Theorem bezeichnet. Der Proportionalitätsfaktor  $\beta$  läßt sich durch skalare Multiplikation mit dem Normalenvektor  $\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma_\alpha}$  bestimmen:

$$\beta = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \cdot \frac{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma_\alpha}}{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma_\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma_\alpha}} = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \cdot \frac{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma_\alpha}}{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma_\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma_\alpha}} \right]. \quad (2.19)$$

Die Ergebnisse für skalarwertige Funktionen  $\psi$ , vektorwertige Funktionen  $\boldsymbol{\psi}$  und tensorwertige Funktionen  $\boldsymbol{\Psi}$  sind in in Tabelle 2.2 zusammengefaßt.

Dabei sind  $\beta$  eine skalarwertige,  $\boldsymbol{\beta}$  eine vektorwertige und  $\boldsymbol{\mathcal{B}}$  eine tensorwertige Größe. Die Kompatibilitätsbedingungen in Tabelle 2.2 gelten nicht nur für den Fall der singulären

$$\begin{array}{l}
\left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] = \beta \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \quad , \text{ mit } \beta = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \cdot \frac{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}}{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}} \right] \\
\left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] = \boldsymbol{\beta} \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \quad , \text{ mit } \boldsymbol{\beta} = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \frac{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}}{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}} \right] \\
\left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \right] = \boldsymbol{\mathcal{B}} \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \quad , \text{ mit } \boldsymbol{\mathcal{B}} = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \frac{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}}{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}} \right]
\end{array}$$

Tabelle 2.2: *Maxwells Theroem*

Fläche erster Ordnung, sondern auch für singuläre Flächen höherer Ordnung, die ebenfalls die Bedingung  $[[\psi]] = 0$  erfüllen, und für den allgemeineren Fall, wenn der Sprung von  $\psi$  selbst zwar ungleich null aber konstant auf  $\bar{\Gamma}_\alpha$  bzw.  $\Gamma$  ist.

**Anmerkung:** Da  $\mathbf{n}_\Gamma$  normiert eingeführt wurde, folgt, daß  $\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}$  i. a. nicht normiert ist. Der Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}_\Gamma$  kann in natürlichen Basen durch  $\mathbf{n}_\Gamma = 1/\sqrt{a_\Gamma^{33}} \mathbf{a}_\Gamma^3$  ausgedrückt und dann mittels kontravariantem Rückwärtstransport auf die Referenzkonfiguration der Phase  $\varphi^\alpha$  abgebildet werden (vgl. Tabelle 1.1):

$$\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} = \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{n}_\Gamma = \frac{1}{\sqrt{a_\Gamma^{33}}} \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{a}_\Gamma^3 = \frac{1}{\sqrt{a_\Gamma^{33}}} \mathbf{h}_{\Gamma\alpha}^3. \quad (2.20)$$

Die Norm von  $\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}$  ergibt sich somit zu

$$\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} = \frac{h_{\Gamma\alpha}^{33}}{a_\Gamma^{33}} \neq 1. \quad (2.21)$$

Alternativ kann anstatt  $\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}$  jedes beliebige Vielfache von  $\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}$  für die Formulierung der Kompatibilitätsbedingungen verwendet werden, insbesondere der Normaleneinheitsvektor der Referenzkonfiguration  $\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}^* = \sqrt{a_\Gamma^{33}/h_{\Gamma\alpha}^{33}} \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}$ .

### Singuläre Fläche zweiter Ordnung

Für eine singuläre Fläche zweiter Ordnung bezüglich  $\psi$  folgt aus deren Definition (2.4)

$$[[\psi]] = 0 \quad , \quad [[\text{Grad}_\alpha \psi]] = \mathbf{0}. \quad (2.22)$$

Die Kompatibilitätsbedingung der zweiten tangentialen Ableitung (2.16) vereinfacht sich dadurch zu

$$0 = \left[ \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha \otimes \partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \cdot (\mathbf{h}_{\Gamma\alpha})_i \otimes (\mathbf{h}_{\Gamma\alpha})_k \right]. \quad (2.23)$$

Der Sprung der zweiten tangentialen Ableitung einer Funktion  $\psi$  über eine singuläre Fläche zweiter oder höherer Ordnung ist somit ebenfalls normal zu der Fläche  $\bar{\Gamma}_\alpha$  orientiert. Die daraus resultierenden Formen der Sprünge für skalarwertige Funktionen  $\psi$ ,

vektorwertige Funktionen  $\psi$  und tensorwertige Funktionen  $\Psi$  sind in Tabelle 2.3 zusammengefaßt (vgl. Tabelle 2.2). Hierbei stellen  $\xi$  skalarwertige,  $\zeta$  vektorwertige und  $\chi$  tensorwertige Größen dar. Die Beziehungen in Tabelle 2.3 wurden erstmals von *Hadamard* [37] für den Fall des einphasigen Problems angegeben.

$$\begin{aligned}
 \left[ \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha \otimes \partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \right] &= \xi \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \\
 &\text{mit } \xi = \left[ \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha \otimes \partial \mathbf{X}_\alpha} \cdot \frac{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}}{(\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha})^2} \right] \right] \\
 \left[ \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha \otimes \partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \right] &= \zeta \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \\
 &\text{mit } \zeta = \left[ \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha \otimes \partial \mathbf{X}_\alpha} \frac{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}}{(\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha})^2} \right] \right] \\
 \left[ \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha \otimes \partial \mathbf{X}_\alpha} \right] \right] &= \chi \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \\
 &\text{mit } \chi = \left[ \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha \otimes \partial \mathbf{X}_\alpha} \frac{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}}{(\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha})^2} \right] \right]
 \end{aligned}$$

**Tabelle 2.3:** Kompatibilitätsbedingung für den den Sprung des zweiten Gradienten über eine singuläre Fläche zweiter Ordnung

### 2.1.4 Kompatibilitätsbedingungen der Zeitableitungen

Aus den Kompatibilitätsbedingungen der tangentialen Ableitungen können Kompatibilitätsbedingungen für die Zeitableitungen über eine singuläre Fläche gewonnen werden. Aus der Differenz der materiellen Zeitableitungen (1.21) der Funktion  $\psi$ , gebildet mit der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_\Gamma$  der Fläche  $\Gamma$  und der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$ ,

$$\begin{aligned}
 \psi'_\alpha &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{grad}(\psi) \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha, \\
 \psi'_\Gamma &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{grad}(\psi) \cdot \dot{\mathbf{x}}_\Gamma,
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

erhält man

$$\psi'_\alpha - \psi'_\Gamma = \text{grad}(\psi) \cdot (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma). \tag{2.25}$$

Mit der Annahme einer singulären Fläche mindestens erster Ordnung bezüglich  $\psi$  folgt, daß der Sprung von  $\psi$  über  $\bar{\Gamma}_\alpha$  gleich null ist. Somit ist auch der Sprung von  $\psi'_\Gamma$ , also der Sprung der mit der Bewegung der Fläche gebildeten Zeitableitung, die ein mitbewegter Beobachter wahrnimmt, ebenfalls null. Die Anwendung des Sprungoperators liefert dann

$$\left[ \left[ \psi'_\alpha \right] \right] = \left[ \left[ (\mathbf{F}_\alpha^{T-1} \text{Grad}_\alpha(\psi)) \cdot (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \right] \right]. \tag{2.26}$$

Der Zusammenhang gilt ebenfalls nicht nur für singuläre Flächen  $n$ -ter Ordnung mit  $n > 0$ , sondern auch bereits, wenn der Sprung von  $\psi$  auf  $\bar{\Gamma}_\alpha$  konstant ist.

Für die Herleitung der letzten beiden Kompatibilitätsbedingungen wird eine singuläre Fläche mindestens zweiter Ordnung bezüglich  $\psi$  vorausgesetzt. Neben der Geschwindigkeit der Fläche  $\dot{\mathbf{x}}_\Gamma$  seien nun zusätzlich der Deformationsgradient  $\mathbf{F}_\alpha$  und die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  sprunfrei. Eine Verifizierung dieser zusätzlichen Voraussetzungen erfolgt im Rahmen der Anwendung in Kapitel 5.1. Anwendung der Kompatibilitätsbedingung (2.26) für den Sprung der Zeitableitung von  $\psi$  auf die Zeitableitung von  $\text{Grad}_\alpha \psi$  liefert

$$\begin{aligned} \llbracket (\text{Grad}_\alpha \psi)'_\alpha \rrbracket &= \llbracket \text{Grad}_\alpha \psi'_\alpha \rrbracket \\ &= \left\llbracket \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha \otimes \partial \mathbf{X}_\alpha} \mathbf{F}_\alpha^{-1} (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \right\rrbracket. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Mit der Sprunfreiheit von  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_\Gamma$  und  $\mathbf{F}_\alpha$  folgt durch Umformung und mit Tabelle 2.3 und (2.12) für den Sprung der Zeitableitung des Gradienten

$$\begin{aligned} \llbracket (\text{Grad}_\alpha \psi)'_\alpha \rrbracket &= \left\llbracket \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{X}_\alpha \otimes \partial \mathbf{X}_\alpha} \right\rrbracket \mathbf{F}_\alpha^{-1} (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \\ &= \xi \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \left[ \mathbf{n}_\Gamma \cdot (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Mit der Definition der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $u_\alpha$  der Fläche  $\Gamma$  relativ zum Partialkörper der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$ , vgl. (2.1), folgt schließlich für den Sprung von  $\text{Grad} \psi'_\alpha$

$$\boxed{\llbracket (\text{Grad}_\alpha \psi)'_\alpha \rrbracket = \llbracket \text{Grad}_\alpha \psi'_\alpha \rrbracket = -u_\alpha \xi \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}}. \quad (2.29)$$

Aus dem Vergleich mit Tabelle 2.3 erkennt man, daß die Sprünge der zweiten tangentialen Ableitung und der materiellen Zeitableitung der ersten tangentialen Ableitung nicht unabhängig voneinander sind. Ist z. B. der Sprung von  $\text{Grad}_\alpha \psi'_\alpha$  bestimmt, folgt der Sprung der zweiten tangentialen Ableitung durch einsetzen von  $\xi$  in Tabelle 2.3 und umgekehrt. Im weiteren Verlauf wird von dieser Eigenschaft Gebrauch gemacht.

Für die letzte benötigte Kompatibilitätsbedingung gilt die oben genannte Annahme einer singulären Fläche mindestens zweiter Ordnung bezüglich  $\psi$ , wobei wieder  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_\Gamma$  und  $\mathbf{F}_\alpha$  sprunfrei seien. Aus der Kompatibilitätsbedingung für die materielle Zeitableitung des Gradienten (2.26), angewandt auf die erste Zeitableitung von  $\psi$  erhält man

$$\begin{aligned} \llbracket \psi''_\alpha \rrbracket &= \left\llbracket \text{Grad} \psi'_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \right\rrbracket \\ &= \llbracket \text{Grad} \psi'_\alpha \rrbracket \mathbf{F}_\alpha^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Einsetzen von (2.29) ergibt mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $u_\alpha$  (2.1)

$$\boxed{\llbracket \psi''_\alpha \rrbracket = u_\alpha^2 \xi}. \quad (2.31)$$

Die Herleitungen für vektor- und tensorwertige Funktionen verlaufen analog. Auf ihre Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet.

## 2.2 Bilanzgleichungen

In diesem Abschnitt werden die Bilanzgleichungen poröser Medien unter Beachtung diskontinuierlicher Feldgrößen dargestellt. Ausgehend von den globalen Formen (1.64) werden die lokalen Formen mit Hilfe des modifizierten *Reynoldsschen* Transporttheorems, d. h. unter Beachtung möglicher Diskontinuitäten der zu bilanzierenden mechanischen Größe, zur Verfügung gestellt.

### 2.2.1 Modifiziertes *Reynoldssches* Transporttheorem

Ausgangspunkt der Herleitung des modifizierten *Reynoldsschen* Transporttheorems stellt die materielle Zeitableitung des Integrals der mechanischen Größe  $\psi^\alpha$  über das Gebiet des Körpers  $\mathcal{B}$  dar, vgl. (1.64):

$$\begin{aligned} \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha dv &= \int_{\mathcal{B}} [(\psi^\alpha)'_\alpha dv + \psi^\alpha dv'_\alpha] \\ &= \int_{\mathcal{B}} \left[ \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t} dv + \text{grad } \psi^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha dv + \psi^\alpha dv'_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Mit Hilfe des Divergenztheorems und der materiellen Zeitableitung des Transporttheorems (1.47) für Volumenelemente folgt

$$\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha dv = \int_{\mathcal{B}} \left[ \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t} + \text{div} (\psi^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha) \right] dv. \quad (2.33)$$

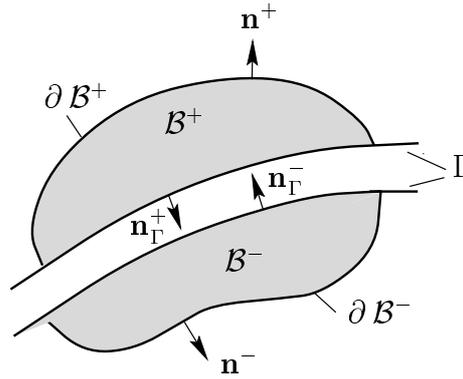
Man beachte, daß sich die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  auf das Transporttheorem auswirkt. Mit dem *Gaußschen* Integralsatz kann der zweite Summand von einem Volumen- in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden:

$$\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha dv = \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t} dv + \int_{\mathcal{S}} \psi^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \mathbf{n} da. \quad (2.34)$$

Angewandt auf zwei verschiedene Bewegungen  $\chi_\alpha$  und  $\chi_\beta$  erhält man durch Differenzbildung

$$\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha dv = \frac{d_\beta}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha dv + \int_{\mathcal{S}} \psi^\alpha (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\beta) \cdot \mathbf{n} dv. \quad (2.35)$$

Im weiteren existiere eine Fläche  $\Gamma$ , die den Körper  $\mathcal{B}$  in die beiden Teilkörper  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  unterteilt und sich mit der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_\Gamma$  bewegt, vgl. Abbildung 2.2. Alle Feldfunktionen seien in den Teilkörpern  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  und auf der Fläche  $\Gamma$  selbst stetig. Über die Fläche  $\Gamma$  seien Unstetigkeiten bzw. Sprünge der Feldgrößen zugelassen. Die Fläche  $\Gamma$  wird als Diskontinuitätsfläche bezeichnet und stellt eine singuläre Fläche im Sinne des vorhergehenden Abschnitts dar.

Abbildung 2.2: Singuläre Fläche  $\Gamma$ 

Da die totale Zeitableitungen in (2.35) nicht notwendigerweise mit den Bewegungsfunktionen der Phasen gebildet werden müssen, kann für die zweite Geschwindigkeit statt  $\dot{\mathbf{x}}_\beta$  auch  $\dot{\mathbf{x}}_\Gamma$  eingesetzt wird, d. h. die totale Zeitableitung wird mit der Bewegung der singulären Fläche  $\Gamma$  gebildet. Auswerten der Gleichung (2.35) in beiden Teilkörpern  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  liefert mit der Sprungfreiheit der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_\Gamma$

$$\begin{aligned} \text{in } \mathcal{B}^- : \quad \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}^-} \psi^\alpha dv &= \frac{d_\Gamma}{dt} \int_{\mathcal{B}^-} \psi^\alpha dv + \int_{\partial \mathcal{B}^-} \psi^\alpha [ \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma ] \cdot \mathbf{n}^- da \\ &+ \int_\Gamma (\psi^\alpha)^- [ ( \dot{\mathbf{x}}_\alpha )^- - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma ] \cdot \mathbf{n}_\Gamma^- da, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \text{in } \mathcal{B}^+ : \quad \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}^+} \psi^\alpha dv &= \frac{d_\Gamma}{dt} \int_{\mathcal{B}^+} \psi^\alpha dv + \int_{\partial \mathcal{B}^+} \psi^\alpha [ \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma ] \cdot \mathbf{n}^+ da \\ &+ \int_\Gamma (\psi^\alpha)^+ [ ( \dot{\mathbf{x}}_\alpha )^+ - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma ] \cdot \mathbf{n}_\Gamma^+ da. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Die Indizes  $(\dots)^-$  und  $(\dots)^+$  bezeichnen die Grenzwerte der Größen auf den beiden Seiten der singulären Fläche  $\Gamma$ , vgl. (2.2). Der Oberflächenterm aus Gleichung (2.35) wurde dabei in zwei Anteile aufgespalten. Das eine Integral geht über  $\partial \mathcal{B}^-$  bzw.  $\partial \mathcal{B}^+$ , die Oberfläche des Teilkörpers mit dem nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}^-$  bzw.  $\mathbf{n}^+$ , die auch gleichzeitig Oberfläche des gesamten Körpers  $\mathcal{B}$  ist, d. h. über die „äußere“ Oberfläche des Teilkörpers. Der zweite Anteil geht aus der Integration über die „innere“ singuläre Fläche hervor.  $\mathbf{n}_\Gamma^+$  und  $\mathbf{n}_\Gamma^-$  bezeichnen die nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektoren der Teilkörper (vgl. Abbildung 2.1) im Bereich von  $\Gamma$  mit

$$\mathbf{n}_\Gamma^+ = -\mathbf{n}_\Gamma^- =: -\mathbf{n}_\Gamma. \quad (2.38)$$

An dieser Stelle sei auf den Unterschied zwischen den Begriffen des Teilkörpers und des Partialkörpers hingewiesen. Mit dem Begriff des Partialkörpers wird der Körper, der durch eine Phase  $\varphi^\alpha$  gebildet wird, bezeichnet, während der Begriff des Teilkörpers einen Teil

des gesamten Mischungskörpers, der durch die Fläche  $\Gamma$  abgetrennt wird, bezeichnet. Aus der Summe der Gleichungen (2.36) und (2.37) folgt mit (2.38)

$$\begin{aligned} \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha dv &= \frac{d_\Gamma}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha dv + \int_{\partial \mathcal{B}} \psi^\alpha [ \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma ] \cdot \mathbf{n} da \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\psi^\alpha)^+ [ (\dot{\mathbf{x}}_\alpha)^+ - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma ] \cdot \mathbf{n}_\Gamma da - (\psi^\alpha)^- [ (\dot{\mathbf{x}}_\alpha)^- - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma ] \cdot \mathbf{n}_\Gamma da. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Durch Einsetzen der materiellen Zeitableitung (2.34) und Anwendung der Definition des Sprungoperators (2.3) folgt die fertige Form des modifizierten *Reynoldsschen* Transporttheorems:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha dv &= \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{B}} \psi^\alpha ( \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \mathbf{n} ) da \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left[ \left[ \psi^\alpha ( \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma ) \right] \right] \cdot \mathbf{n}_\Gamma da \end{aligned}} \quad (2.40)$$

Die linke Seite des *Reynoldsschen* Transporttheorems beschreibt die materielle Änderung von  $\psi^\alpha$  in bezug auf ein materielles (zeitlich veränderliches) Volumenelement  $dv$ . Die rechte Seite beschreibt mit dem ersten Summanden die lokale Änderung von  $\psi^\alpha$  bezogen auf ein räumlich fixiertes (zeitlich konstantes) Volumenelement  $dv$ . Der zweite Summand stellt den Konvektionsfluß von  $\psi^\alpha$  durch ein ebenfalls konstantes Oberflächenelement  $da$  des Kontrollraums dar. Für  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha \neq \dot{\mathbf{x}}_\Gamma$  beschreibt das Integral über  $\left[ \left[ \psi^\alpha ( \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma ) \right] \right] \cdot \mathbf{n}_\Gamma$  den inneren Fluß der mechanischen Größe  $\psi^\alpha$  über die Diskontinuitätsfläche  $\Gamma$  hinweg.

## 2.2.2 Globale Form der Bilanzgleichungen

Die Feldfunktionen  $\psi^\alpha$ ,  $\Phi^\alpha$  und  $\sigma^\alpha$  bzw.  $\psi^\alpha$ ,  $\Phi^\alpha$  und  $\sigma^\alpha$  und  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  seien in  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  und auf der Fläche  $\Gamma$  selbst stetig, aber unstetig beim Sprung über  $\Gamma$ . Die globalen Bilanzrelationen in der Form (1.64) haben nach wie vor Gültigkeit für die beiden Teilkörper  $\mathcal{B}^-$  und  $\mathcal{B}^+$ , die selbst keine Diskontinuitätsflächen enthalten:

$$\begin{aligned} \text{in } \mathcal{B}^- : \quad \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}^-} \psi^\alpha dv &= \int_{\partial \mathcal{B}^-} \Phi^\alpha \cdot \mathbf{n}^- da + \int_{\Gamma} (\Phi^\alpha)^- \cdot \mathbf{n}_\Gamma^- da \\ &\quad + \int_{\mathcal{B}^-} \sigma^\alpha dv + \int_{\mathcal{B}^-} \hat{\Psi}^\alpha dv \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \text{in } \mathcal{B}^+ : \quad \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}^+} \psi^\alpha \, dv &= \int_{\partial \mathcal{B}^+} \Phi^\alpha \cdot \mathbf{n}^+ \, da + \int_{\Gamma} (\Phi^\alpha)^+ \cdot \mathbf{n}_\Gamma^+ \, da \\ &+ \int_{\mathcal{B}^+} \sigma^\alpha \, dv + \int_{\mathcal{B}^+} \hat{\Psi}^\alpha \, dv \end{aligned} \quad (2.42)$$

Analog der Herleitung des modifizierten *Reynoldsschen* Transporttheorems (2.36) bzw. (2.37) muß dabei das Oberflächenintegral über den Fluß  $\Phi^\alpha \cdot \mathbf{n}$  in zwei Anteile aufgespalten werden, einen über die „Außenfläche“ des Teilkörpers ( $\partial \mathcal{B}^-$  bzw.  $\partial \mathcal{B}^+$ ), und einen über die Diskontinuitätsfläche  $\Gamma$ . Dabei ergeben  $\partial \mathcal{B}^+ \cup \Gamma$  bzw.  $\partial \mathcal{B}^- \cup \Gamma$  die gesamte Oberfläche des jeweiligen Teilkörpers. Aus der Summe der Bilanzen der beiden Teilkörper (2.41) und (2.42) folgt die globale Form der Bilanzgleichung unter Berücksichtigung einer Diskontinuitätsfläche  $\Gamma$ :

$$\boxed{\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha \, dv = \int_{\mathcal{B}} \sigma^\alpha \, dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\psi}^\alpha \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}} \Phi^\alpha \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{\Gamma} [\![\Phi^\alpha]\!] \cdot \mathbf{n}_\Gamma \, da.} \quad (2.43)$$

### 2.2.3 Lokale Form der Bilanzgleichungen

Mit Hilfe des modifizierten *Reynoldsschen* Transporttheorems (2.40) kann die globale Form der Bilanzgleichungen (2.43) direkt in die lokale Form überführt werden. Einsetzen von (2.40) in (2.43) ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}} \psi^\alpha (\dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \mathbf{n}) \, da - \int_{\Gamma} [\![\psi^\alpha (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma)]\!] \cdot \mathbf{n}_\Gamma \, da \\ = \int_{\partial \mathcal{B}} \Phi^\alpha \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{\Gamma} [\![\Phi^\alpha]\!] \cdot \mathbf{n}_\Gamma \, da + \int_{\mathcal{B}} \sigma^\alpha \, dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\psi}^\alpha \, dv. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Umwandlung der beiden Oberflächenterme über  $\partial \mathcal{B}$  mit dem *Gaußschen* Integralsatz und Zusammenfassen der Terme auf der singulären Fläche liefert

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t} + \text{div} (\psi^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha) - \text{div} \Phi^\alpha - \sigma^\alpha - \hat{\psi}^\alpha \right\} \, dv \\ = \int_{\Gamma} [\![\psi^\alpha (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \Phi^\alpha]\!] \cdot \mathbf{n}_\Gamma \, da. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Da das Volumenintegral außerhalb der Fläche  $\Gamma$  kontinuierlich ist, und die Aussage (2.45) für beliebige Teilvolumina gilt, erhält man die auf den materiellen Punkt  $X^\alpha$  bezogene lokale Aussage bzw. lokale Form der Bilanzgleichung, die identisch mit der Form (1.66) ist. Analog ergibt sich die lokale Aussage auf der Diskontinuitätsfläche  $\Gamma$ , die für skalarwertige

Größen  $\psi$  und vektorwertige Größen  $\boldsymbol{\psi}$  dargestellt ist:

$$\begin{aligned} \left[ \left[ \psi^\alpha (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \Phi^\alpha \right] \cdot \mathbf{n}_\Gamma \right] &= 0, \\ \left[ \left[ \boldsymbol{\psi}^\alpha \otimes (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \boldsymbol{\Phi}^\alpha \right] \mathbf{n}_\Gamma \right] &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Im Falle mehrere Diskontinuitätsflächen beschreibt  $\Gamma$  die Summe der einzelnen Flächen. Die Beziehungen (2.46) gelten entsprechend auf jeder einzelnen Fläche.

Die speziellen lokalen Formen der Bilanzgleichungen für Masse, Impuls, Drall, Energie und Entropie können wieder mit Hilfe der Tabelle 1.2 gewonnen werden. Für die lokale Form der Bilanzgleichungen der Mischung auf der singulären Fläche  $\Gamma$  erhält man in Verbindung mit Tabelle 1.3 und (1.70) entsprechend

$$\begin{aligned} \left[ \left[ \psi (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \Phi \right] \cdot \mathbf{n}_\Gamma \right] &= 0, \\ \left[ \left[ \boldsymbol{\psi} \otimes (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \boldsymbol{\Phi} \right] \mathbf{n}_\Gamma \right] &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.47)$$



# Kapitel 3

## Modellgleichungen

Basierend auf der Theorie Poröser Medien werden in diesem Kapitel die Modellgleichungen für ein Zweiphasenmodell behandelt, bestehend aus einer porösen Festkörpermatrix  $\varphi^S$ , die mit einem viskosen Porenfluid  $\varphi^F$  gesättigt ist, vgl. *de Boer & Ehlers* [7] und *Ehlers* [20, 22]. Sättigung bedeutet in diesem Zusammenhang, daß das gesamte Porenvolumen im Festkörperskelett vom Porenfluid ausgefüllt wird, d. h. es existiert kein leerer Porenraum. Die Betrachtungen beschränken sich dabei auf den isothermen Fall.

Das Festkörperskelett wird grundsätzlich als inkompressibel modelliert, da dessen materielle Kompressibilität im Vergleich zur Kompressibilität der Makrostruktur in guter Näherung vernachlässigt werden kann. Die partielle Dichte  $\rho^S$  der Makrostruktur kann sich jedoch trotzdem über den Volumenanteil  $n^S$  ändern, vgl. (1.10).

Es werden drei Varianten behandelt, die sich in der Modellierung des Porenfluids unterscheiden. Das Porenfluid wird wahlweise ebenfalls als materiell inkompressibel angesetzt, z. B. zur Beschreibung nahezu inkompressibler Fluide wie entgastem Wasser, oder als kompressibel zur Darstellung von Gasen (*Ehlers & Droste* [25]). Der dritte Ansatz dient der Beschreibung von kompressiblen Porenfluiden mit ausgezeichnetem Kompressionspunkt, im folgenden als Mischphase bezeichnet. Hierfür wird ein neuer Ansatz entwickelt, bei dem die Eigenschaften der Mischphase aus denen eines kompressiblen und eines inkompressiblen Porenfluids im Rahmen der TPM abgeleitet werden. Die Herleitung erfolgt formal über ein vereinfachtes Dreiphasenmodell, dessen Modellgleichungen unter Verwendung der Mischphase zur Beschreibung der beiden Porenfluide als eine gemeinsame Phase die identische Form annehmen wie beim kompressiblen Modell. Im folgenden werden die beiden letztgenannten Modellvarianten gemeinsam als „hybrides Modell“ bezeichnet.

Zunächst werden die allen Modellen gemeinsam zugrunde liegenden Voraussetzungen eingeführt. Anschließend wird das Modell mit kompressiblem Porenfluid unter Beachtung der Trägheitsterme zur Einbeziehung dynamischer Effekte behandelt und für den quasistatischen Fall vereinfacht. Darauf aufbauend wird das hybride Modell mit Mischphase eingeführt, dessen Modellgleichungen formal mit denen des hybriden Modells mit kompressiblem Porenfluid übereinstimmen. Das Modell mit inkompressiblem Fluid, als „inkompressibles Modell“ bezeichnet, wird zum Schluß analog behandelt.

Das elasto-plastische Materialgesetz zur Beschreibung der Festkörperspannungen wird im nächsten Kapitel ausführlich vorgestellt.

Auf die Auswertung der Entropieungleichung wird an dieser Stelle verzichtet. Es werden lediglich die benötigten Ergebnisse angegeben. Eine ausführliche Darstellung der Entropieungleichung und der daraus resultierenden thermodynamischen Restriktionen, die den Rahmen für die Modellierung der konstitutiven Ansätze bilden, findet sich bei *Ehlers* [20, 22] und speziell bezüglich des hybriden Modells bei *Diebels* [15].

### 3.1 Annahmen und Voraussetzungen

Die Bewegung des Festkörpers wird mit Hilfe des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}_S$  in der *Lagrange*-schen (materiellen) Form dargestellt:

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{x} - \mathbf{X}_S . \quad (3.1)$$

Daraus ergeben sich die Festkörpersverschiebungsgeschwindigkeit

$$(\mathbf{u}_S)'_S = \dot{\mathbf{x}}_S \quad (3.2)$$

und der materielle Deformationsgradient des Festkörperskeletts

$$\mathbf{F}_S = \text{Grad}_S (\mathbf{X}_S + \mathbf{u}_S) = \mathbf{I} + \text{Grad}_S \mathbf{u}_S . \quad (3.3)$$

Für das Porenfluid wird eine modifizierte *Eulersche* bzw. räumliche Beschreibung basierend auf der Sickergeschwindigkeit

$$\mathbf{w}_F = \dot{\mathbf{x}}_F - \dot{\mathbf{x}}_S \quad (3.4)$$

gewählt. Sämtliche materiellen Zeitableitungen werden mit Hilfe der Bewegung des Festkörpers  $\varphi^S$  ausgedrückt. Aus der Definition der materiellen Zeitableitung (1.21) folgt der Zusammenhang zwischen den materiellen Ableitungen, gebildet mit den Geschwindigkeiten des Festkörpers und des Porenfluids:

$$(\dots)'_F = (\dots)'_S + \text{grad}(\dots) \cdot \mathbf{w}_F . \quad (3.5)$$

Angewandt auf die Sickergeschwindigkeit ergibt sich

$$(\mathbf{w}_F)'_S = \ddot{\mathbf{x}}_F - \ddot{\mathbf{x}}_S - \text{grad}(\dot{\mathbf{x}}_F) \cdot \mathbf{w}_F . \quad (3.6)$$

Die Sättigungsbedingung (1.4) lautet für die betrachteten Zweiphasenmodelle, bestehend aus den beiden Konstituierenden  $\varphi^S$  und  $\varphi^F$ ,

$$n^S + n^F = 1 \quad (3.7)$$

und ihre materielle Zeitableitung, gebildet mit der Bewegung des Festkörpers  $\varphi^S$ ,

$$(n^S)'_S = -(n^F)'_S . \quad (3.8)$$

Die Forderung nach materieller bzw. mikroskopischer Inkompressibilität des Festkörperskeletts bedingt lediglich, daß die effektive Dichte  $\rho^{SR}$  konstant ist und die mit seiner Bewegung gebildete materielle Zeitableitung von  $\rho^{SR}$  gleich null:

$$(\rho^{SR})'_S = 0. \quad (3.9)$$

Die Partialdichte  $\rho^S$  kann sich nach wie vor, zum Beispiel infolge von Konsolidationsprozessen, über den Volumenanteil  $n^S$  ändern:

$$(\rho^S)'_S = (n^S)'_S \rho^{SR} \neq 0. \quad (3.10)$$

Die äußere Volumenkraft  $\mathbf{b}^\alpha$  pro Masseneinheit wird für beide Konstituierenden gleich angenommen:

$$\mathbf{b}^S = \mathbf{b}^F = \mathbf{b}. \quad (3.11)$$

Darüber hinaus seien Massenaustauschprozesse zwischen dem Festkörper und der Flüssigkeit, z. B. infolge chemischer Reaktionen oder Phasenumwandlung wie beim Schmelzen von Eis, ausgeschlossen. Für die Dichteproduktionsterme folgt

$$\hat{\rho}^S = \hat{\rho}^F = 0. \quad (3.12)$$

Da in der Mischung die einzelnen Konstituierenden im allgemeinen nur für sehr kurze Zeit unterschiedliche Temperaturen haben können, wird von einer gemeinsamen Temperatur für den Festkörper und das Porenfluid ausgegangen, die aufgrund der isothermen Annahme konstant ist:

$$\Theta^S = \Theta^F = \Theta \quad \text{mit} \quad \dot{\Theta} = 0. \quad (3.13)$$

Mit der zusätzlichen Einschränkung, daß die Temperaturverteilung homogen sei, also  $\text{grad } \Theta = \mathbf{0}$ , sind die materiellen Zeitableitungen der Temperatur ebenfalls null (vgl. 1.20):

$$(\Theta)'_S = (\Theta)'_F = 0. \quad (3.14)$$

Die lokale Form der Drallbilanz einer Konstituierenden liefert unter Einbeziehung der bisherigen Annahmen unsymmetrische Partialspannungen

$$\mathbf{T}^\alpha = \mathbf{T}^{\alpha T} - \hat{\mathbf{M}}^\alpha, \quad (3.15)$$

bedingt durch den schiefsymmetrischen Drallkopplungsterm  $\hat{\mathbf{M}}^\alpha$ . Die Partialspannungstensoren sind im Rahmen der Mischungstheorie somit lediglich für den Fall  $\hat{\mathbf{M}}^\alpha = \mathbf{0}$  symmetrisch, vgl. *Kelly* [47]. Für den Fall nichtpolarer Konstituierenden, die sich in ihrem Mikrobereich im Prinzip wie Einphasenmaterialien verhalten wird im folgenden das Verschwinden des Drallkopplungsterms  $\hat{\mathbf{M}}^\alpha$  vorausgesetzt (vgl. *de Boer & Ehlers* [7], *Hasanzadeh & Gray* [40]):

$$\hat{\mathbf{M}}^\alpha = \mathbf{0}. \quad (3.16)$$

Aus der Auswertung der Entropieungleichung lassen sich thermodynamische Restriktionen gewinnen, die den Rahmen für die konstitutiven Ansätze bilden. An dieser Stelle werden lediglich die benötigten Ergebnisse wiedergegeben. Bezüglich einer ausführlichen Darstellung sei auf die Arbeiten von *Ehlers* [20] und *Diebels* [15] verwiesen.

Durch Einbringen der Sättigungsbedingung (3.7) im Sinne einer Zwangsbedingung mit Hilfe des *Lagrangeschen* Multiplikators  $p$  in die Entropieungleichung wird ersichtlich, daß sowohl die Partialspannungstensoren  $\mathbf{T}^S$  und  $\mathbf{T}^F$  als auch die Impulsproduktion  $\hat{\mathbf{p}}^F$  des Fluids in zwei Anteile aufgespalten werden können:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^S &= \mathbf{T}_E^S - n^S p \mathbf{I}, \\ \mathbf{T}^F &= \mathbf{T}_E^F - n^F p \mathbf{I}, \\ \hat{\mathbf{p}}^F &= \hat{\mathbf{p}}_E^F + p \operatorname{grad} n^F.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Der *Lagrangeschen* Multiplikator  $p$  läßt sich dabei als effektiver Porenfluiddruck identifizieren. Für die Extragrößen, gekennzeichnet durch den zusätzlichen Index  $(\dots)_E$ , werden konstitutive Ansätze benötigt. Die Festkörperextraspansungen  $\mathbf{T}_E^S$  werden nach *Terzaghi* [90] auch als effektive Spannung bezeichnet.

Analog dem in der Hydromechanik üblichen Vorgehen werden die Extraspansungen des Porenfluids *a priori* vernachlässigt:

$$\mathbf{T}_E^F = 2\mu^F \mathbf{D}_F \approx \mathbf{0}.\tag{3.18}$$

Die innere Reibung bzw. Viskosität des Porenfluids wird ausschließlich durch den Impulsaustausch mit dem Festkörperskelett modelliert:

$$\hat{\mathbf{p}}_E^F = -\frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{w}_F.\tag{3.19}$$

Hierbei bezeichnet  $\gamma^{FR} = |\mathbf{b}| \rho^{FR}$  die effektive (wahre) Wichte des Fluids,  $k^F$  den *Darcy*-schen Durchlässigkeitskoeffizienten und  $\mathbf{w}_F$  die Sickergeschwindigkeit. In *Ehlers et. al.* [28] wurde gezeigt, daß die Vernachlässigung der Fluidextraspansungen keinen nennenswerten Einfluß auf die Ergebnisse hat. Im Rahmen dieser Arbeit wird näherungsweise angenommen, daß der Permeabilitätskoeffizient  $k^F$  deformationsunabhängig sei.

Das Materialmodell zur Beschreibung der Extraspansungen des Festkörperskeletts wird in Kapitel 4 ausführlich behandelt.

## 3.2 Hybrides Model

Für das hybride Modell wird zusätzlich zu den allgemeinen Annahmen ein konstitutiver Ansatz für die Entwicklungsgleichung der materiellen Dichte  $\rho^{FR}$  des Fluids benötigt:

$$\rho^{FR} = \rho^{FR}(p).\tag{3.20}$$

Für die Beschreibungen von Gasen als Porenfluid, wie z. B. im Falle von gasgefüllten Aluminium- oder Kunststoffschäumen, wird das ideale Gasgesetz verwendet:

$$\rho^{FR} = p \frac{M}{R\Theta}.\tag{3.21}$$

Darin bezeichnet  $\Theta$  die absolute *Kelvinsche* Temperatur,  $M$  die molare Masse des Gases und  $R = 8,314 \text{ kJ}/(\text{kmol K})$  die universelle Gaskonstante.

### Auswertung der Massenbilanzen

Die lokale Form der Massenbilanz einer einzelnen Konstituierenden folgt aus (1.66)<sub>1</sub> in Verbindung mit Tabelle 1.2 und (3.12):

$$(\rho^\alpha)'_\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\rho}^\alpha = 0. \quad (3.22)$$

Die Massenbilanz des Festkörpers kann aufgrund der Annahme materieller Inkompressibilität mit Hilfe der Anfangsbedingung  $\mathbf{F}_S(t=0) = \mathbf{I}$  und der Definition des Volumenanteils des Festkörpers in der Referenzkonfiguration  $n_0^S := n^S(t=0)$  analytisch integriert werden und liefert

$$n^S = n_0^S (\det \mathbf{F}_S) = \frac{n_0^S}{\det (\mathbf{F}_S)}. \quad (3.23)$$

Die Massenbilanz des Fluids enthält aufgrund der Kompressibilität des Fluids und der somit zeitlich veränderlichen Dichte einen zusätzlichen Term im Vergleich zum Festkörper und kann nicht mehr analytisch integriert werden:

$$(n^F)'_F \rho^{FR} + n^F (\rho^{FR})'_F + n^F \rho^{FR} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_F = 0. \quad (3.24)$$

Die materiellen Zeitableitungen gebildet mit der Bewegung des Fluids werden in die Zeitableitung gebildet mit der Bewegung des Festkörpers mit (3.5) umgeformt. Einsetzen der Sättigungsbedingung (3.7) bzw. (3.8) liefert schließlich

$$\rho^{FR} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S + \operatorname{div} (n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F) + n^F (\rho^{FR})'_S = 0. \quad (3.25)$$

**Anmerkung:** Anstatt die Massenbilanzen der einzelnen Konstituierenden  $\varphi^S$  und  $\varphi^F$  auszuwerten, ist es auch möglich, eine der beiden Bilanzgleichungen durch die Massenbilanz der Mischung zu ersetzen. Sie darf aber nicht als zusätzliche Gleichung ausgewertet werden, da sie aus deren Summe hervorgeht und somit linear abhängig ist. An dieser Stelle sei nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die materielle Dichte des Fluids  $\rho^{FR}$  in (3.25) vom Druck abhängt und somit auch eine Funktion der Zeit darstellt, während die materielle Dichte des Festkörpers  $\rho^{SR}$  konstant bzgl. Ort und Zeit ist.

### Auswertung der Impulsbilanzen

Für die lokale Form der Impulsbilanz einer Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  erhält man aus (1.66)<sub>2</sub> in Verbindung mit Tabelle 1.2 und unter Verwendung der Massenbilanz (3.22) mit (1.65)<sub>1</sub>, (3.11) und (1.71)

$$\rho^\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha - \operatorname{div} \mathbf{T}^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{b} = \hat{\mathbf{p}}^\alpha \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{p}}^S = \hat{\mathbf{p}}^F. \quad (3.26)$$

Als nächstes werden die konstitutiven Ansätze (3.17)<sub>2</sub> für die Fluidspannungen und (3.18) für die Extraspannungen des Fluids eingesetzt. Mit den Ansätzen für den Impulsaustausch (3.17)<sub>3</sub> und (3.19) lautet die Impulsbilanz des Fluids

$$n^F \rho^{FR} \ddot{\mathbf{x}}_F + \operatorname{div} (n^F p \mathbf{I}) - n^F \rho^{FR} \mathbf{b} = p \operatorname{grad} n^F - \frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{w}_F. \quad (3.27)$$

Die Fluidgeschwindigkeit wird durch die Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  ersetzt. Mit dem Zusammenhang (3.5) zwischen der materiellen Zeitableitung gebildet mit der Bewegung des Fluids und der des Festkörpers eingesetzt folgt:

$$\text{grad } p + \rho^{FR} \left[ \overset{\prime\prime}{\mathbf{x}}_S - \mathbf{b} + (\mathbf{w}_F)'_S + \text{grad}(\mathbf{w}_F + \overset{\prime}{\mathbf{x}}_S) \mathbf{w}_F \right] + \frac{n^F \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{w}_F = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

Die Impulsbilanz des Festkörpers ergibt mit den konstitutiven Ansätzen (3.17)

$$\rho^S \overset{\prime\prime}{\mathbf{x}}_S - \text{div}(\mathbf{T}_E^S - n^S p \mathbf{I}) - \rho^S \mathbf{b} = -\hat{\mathbf{p}}^F. \quad (3.29)$$

Durch Addition der Impulsbilanz Fluid (3.27) und der Impulsbilanz des Festkörpers (3.29) folgt die Impulsbilanz der Mischung:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I}) + (n^S \rho^{SR} + n^F \rho^{FR}) (\mathbf{b} - \overset{\prime\prime}{\mathbf{x}}_S) \\ - n^F \rho^{FR} \left[ (\mathbf{w}_F)'_S - \text{grad}(\mathbf{w}_F + \overset{\prime}{\mathbf{x}}_S) \mathbf{w}_F \right] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Mit der Massenbilanz (3.25) des Fluids, der Impulsbilanz (3.28) des Fluids und der Impulsbilanz (3.30) der Mischung stehen die fertigen Modellgleichungen für den Fall des hybriden Modells mit inkompressiblem Festkörperskelett und kompressiblem Porenfluid zur Verfügung. Der Variablensatz besteht aus der Festkörperverschiebung  $\mathbf{u}_S$ , der Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  und dem effektiven Porenfluiddruck  $p$ . Die Massenbilanz (3.23) des Festkörpers beschreibt dabei die Abhängigkeit des Volumenanteils  $n^S$  des Festkörpers von der Deformation  $\mathbf{F}_S$ , bzw. über die Sättigungsbedingung (3.7) auch des Volumenanteils  $n^F$  des Fluids:

$$n^F = n^F(\det \mathbf{F}_S) = 1 - \frac{n_{0S}^S}{\det \mathbf{F}_S}. \quad (3.31)$$

Durch Einsetzen in die Massenbilanz (3.25) des Fluids entsteht die Massenbilanz der Mischung. Im folgenden wird daher (3.25) auch als Massenbilanz der Mischung bezeichnet.

### Quasistatischer Fall

Für die quasistatische Formulierung werden die Beschleunigungsterme vernachlässigt, d. h. die zweiten Ableitungen (1.19) der Bewegungen nach der Zeit sind null:

$$\overset{\prime\prime}{\mathbf{x}}_S = \overset{\prime\prime}{\mathbf{x}}_F = \mathbf{0}. \quad (3.32)$$

Aufgrund der konvektiven Anteile der materiellen Zeitableitungen (vgl. (1.20) bzw. (1.21)) ist die materielle Ableitung der Sickergeschwindigkeit, gebildet mit der Festkörperbewegung, ungleich null:

$$(\mathbf{w}_F)'_S = -\text{grad}(\overset{\prime}{\mathbf{x}}_F) \mathbf{w}_F. \quad (3.33)$$

Während die Massenbilanzen von den Vereinfachungen des quasistatischen Falls unberührt bleiben, kann die Impulsbilanz des Fluids (3.28) mit (3.33) direkt nach der Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  aufgelöst werden:

$$\mathbf{w}_F = -\frac{k^F}{n^F \gamma^{FR}} (\text{grad } p - \rho^{FR} \mathbf{b}). \quad (3.34)$$

Die quasistatische Form der Impulsbilanz (3.34) des Fluids entspricht somit dem *Darcy*-schen Filtergesetz. Die Impulsbilanz der Mischung lautet für den quasistatischen Fall

$$\operatorname{div} (\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I}) + (n^S \rho^{SR} + n^F \rho^{FR}) \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (3.35)$$

Einsetzen der Sickergeschwindigkeit (3.34) in die Massenbilanz (3.25) der Mischung liefert

$$\rho^{FR} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S + \operatorname{div} \left[ \rho^{FR} \frac{k^F}{\gamma^{FR}} (\rho^{FR} \mathbf{b} - \operatorname{grad} p) \right] + n^F (\rho^{FR})'_S = 0. \quad (3.36)$$

Mit den Gleichungen (3.35) und (3.36) erhält man für den quasistatischen Fall ein reduziertes System in den Freiheitsgraden  $\mathbf{u}_S$  und  $p$ . Die Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  ist durch Auflösen der Impulsbilanz des Fluids als Variable aus dem System eliminiert worden.

**Anmerkung:** Im folgenden wird daher bei der Darstellung der Bilanzgleichungen  $\dot{\mathbf{x}}_S$  durch  $(\mathbf{u}_S)'_S$  ersetzt.

### 3.3 Hybrides Modell mit Mischphase

Unter dem Begriff der Mischphase werden Fluide mit ausgezeichnetem Kompressionspunkt verstanden, d. h. Fluide, die lediglich bis zu einer maximalen (kritischen) Dichte  $\rho_C^{FR}$  komprimiert werden können. Der neue Ansatz kann sowohl zur Modellierung echter Mischphasen, wie z. B. Wasser mit dispergierten, kompressiblen Luftblasen, als auch zur Beschreibung realer Gase eingesetzt werden.

Ausgehend von den Eigenschaften eines vollständig kompressiblen Fluids  $\varphi^G$  („Gas“) und eines inkompressiblen Fluids  $\varphi^L$  („Flüssigkeit bzw. Liquid“) wird die Dichtefunktion der Mischphase mit Hilfe der Theorie Poröser Medien hergeleitet. Es handelt sich dabei prinzipiell um ein Dreiphasenmodell, das aufgrund der folgenden Annahmen einer Beschreibung mittels zweier Phasen zugänglich ist. Der Index  $(\dots)^F$  für die Mischphase wurde in Analogie zum vorangegangenen Modell gewählt, da die Modellgleichungen unter Verwendung der Mischphase die gleiche Form annehmen.

Die partielle Mischungsdichte des Porenfluids  $\rho^F$  ergibt sich direkt aus der Summe der partialen Dichten der beiden Fluide  $\varphi^G$  und  $\varphi^L$  bzw. aus der Summe ihrer materiellen Dichten, gewichtet mit den jeweiligen Volumenanteilen:

$$n^F \rho^{FR} = n^G \rho^{GR} + n^L \rho^{LR}. \quad (3.37)$$

Die materielle Dichte der Flüssigkeit  $\rho^{LR}$  ist bedingt durch die Annahme materieller Inkompressibilität konstant (vgl. (3.9)), während die materielle Dichte  $\rho^{GR}$  des kompressiblen Fluids einer Entwicklungsgleichung folgt, z. B. dem idealen Gasgesetz (3.21). Die Sättigungsbedingung (1.4) lautet für die dreiphasige Formulierung

$$1 = n^S + n^G + n^L \quad (3.38)$$

bzw. bei Betrachtung der Mischphase als Summenphase der beiden Porenfluide  $\varphi^L$  und  $\varphi^G$  im Sinne der TPM

$$1 = n^S + n^F \quad \text{mit} \quad n^F = n^G + n^L. \quad (3.39)$$

Es wird im folgenden vorausgesetzt, daß keine Entmischung der beiden Fluide stattfindet und die Mischphase homogen bleibt. Die beiden Fluide  $\varphi^G$  und  $\varphi^L$  folgen somit der gleichen Bewegungsfunktion  $\chi_F$  und besitzen die gleichen Geschwindigkeiten:

$$\dot{\mathbf{x}}_F := \dot{\mathbf{x}}_L = \dot{\mathbf{x}}_G . \quad (3.40)$$

Dies stellt die zentrale Annahme dar, die die Mischphase in dem hier vorgestellten Modell charakterisiert.

Mit der Voraussetzung, daß Massenaustauschprozesse zwischen den beiden Porenfluiden, wie sie z. B. beim Lösen von Gas im inkompressiblen Fluid auftreten, ausgeschlossen sind, ergeben sich die Massenbilanzen der beiden Fluide zu

$$\begin{aligned} (\rho^G)'_F + \rho^G \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_F &= 0 , \\ (\rho^L)'_F + \rho^L \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_F &= 0 . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Die materiellen Zeitableitungen wurden dabei für beide Fluide mit der Bewegung der Mischphase gebildet, vgl. (3.40). Auflösen der beiden Massenbilanzen nach  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_F$  und gleichsetzen ergibt

$$\frac{(\rho^L)'_F}{\rho^L} = \frac{(\rho^G)'_F}{\rho^G} . \quad (3.42)$$

Analytische Integration führt auf

$$\rho^L = \rho^G M_{LG} \quad (3.43)$$

mit der Integrationskonstanten  $M_{LG}$ , die direkt aus Volumenanteilen und materiellen Dichten der beiden Fluide zum Zeitpunkt  $t = t_0$  bestimmt werden kann:

$$M_{LG} = \left. \frac{n^L \rho^{LR}}{n^G \rho^{GR}} \right|_{t=t_0} = \frac{n_{0F}^L \rho_{0F}^{LR}}{n_{0F}^G \rho_{0F}^{GR}} . \quad (3.44)$$

$M_{LG}$  stellt in diesem Sinne keinen zusätzlichen Materialparameter dar, der aus Versuchen bestimmt werden müßte, sondern vielmehr einen Strukturparameter, der die Zusammensetzung der Mischphase und somit ihre Eigenschaften kontrolliert. Zusammen mit (3.39)<sub>2</sub> folgt der Volumenanteil des Gases  $\varphi^G$  in Abhängigkeit seiner materiellen Dichte  $\rho^{GR}$ :

$$n^G = n^G(\rho^{GR}) = n^F \frac{1}{1 + M_{LG} \frac{\rho^{GR}}{\rho^{LR}}} . \quad (3.45)$$

Eingesetzt in die Dichtefunktion der Mischphase (3.37) folgt nach kurzer Umformung der gewünschte Zusammenhang zwischen dessen materieller Dichte  $\rho^{FR}$  und dem Druck  $p$ :

$$\boxed{\rho^{FR}(p) = \rho^{LR} \frac{1 + M_{LG}}{M_{LG} + \frac{\rho^{LR}}{\rho^{GR}(p)}}} \quad (3.46)$$

mit  $\rho^{GR} = \rho^{GR}(p)$ . Der umgekehrte Zusammenhang  $p(\rho^{FR})$  folgt aus der inversen Formulierung des verwendeten Gasgesetzes  $p = p(\rho^{GR})$ . Die materielle Dichte des Gases  $\rho^{GR}$  bestimmt sich dabei zu

$$\rho^{GR} = \frac{\rho^{FR}}{1 + M_{LG} \left(1 - \frac{\rho^{FR}}{\rho^{LR}}\right)}. \quad (3.47)$$

Gegenüber einem rein konstitutiven Ansatz für die Dichtefunktion der Mischphase mit Kompressionspunkt hat die Herleitung über die Theorie Poröser Medien den Vorteil, daß keine zusätzlichen Materialparameter bestimmt werden müssen. Darüber hinaus genügt der vorliegende Ansatz als Konsequenz aus der Herleitung automatisch den Grenzzuständen für rein kompressibles bzw. rein inkompressibles Fluid und den Grenzzuständen des Drucks  $p \rightarrow 0$  und  $p \rightarrow \infty$ .

Für rein kompressibles Fluid, also  $n^L = 0$  und  $n^G = n^F$ , folgt aus (3.44)  $M_{LG} = 0$  und für die materielle Dichte der Mischphase

$$\lim_{M_{LG} \rightarrow 0} \rho^{FR} = \lim_{M_{LG} \rightarrow 0} \rho^{LR} \frac{1 + M_{LG}}{M_{LG} + \frac{\rho^{LR}}{\rho^{GR}}} = \rho^{GR}(p). \quad (3.48)$$

Für den Fall, daß ausschließlich inkompressibles Fluid  $\varphi^L$  vorhanden ist, folgt mit  $n^G = 0$  und  $n^L = n^F$  entsprechend

$$\lim_{1/M_{LG} \rightarrow 0} \rho^{FR} = \rho^{LR}. \quad (3.49)$$

Sinkt der Druck auf null ab, muß die Dichte der Mischphase ebenfalls auf null absinken. Unter der Voraussetzung, daß die materielle Dichte des kompressiblen Fluids dieser Eigenschaft genügt, wie z. B. beim idealen Gasgesetz, folgt für die Mischungsdichte  $\rho^{FR}$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \rho^{FR} = \lim_{p \rightarrow 0} \rho^{LR} \rho^{GR} \frac{1 + M_{LG}}{\rho^{GR} M_{LG} + \rho^{LR}} = 0. \quad (3.50)$$

Bei einer Steigerung des Drucks auf unendlich wird die kritische bzw. maximale Dichte  $\rho_C^{FR}$  erreicht:

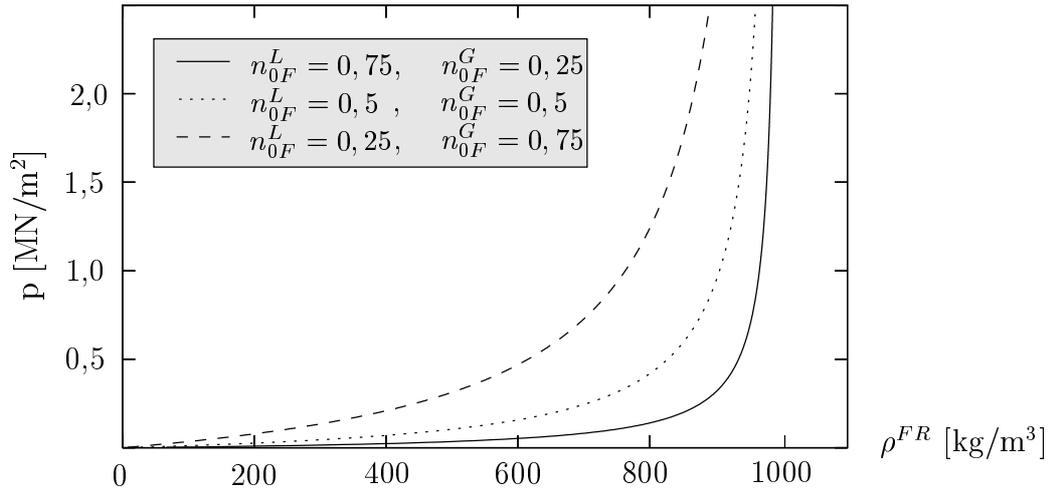
$$\lim_{p \rightarrow \infty} \rho^{FR} = \rho^{LR} \frac{1 + M_{LG}}{M_{LG} + \frac{\rho^{LR}}{\rho_C^{GR}}} =: \rho_C^{FR}. \quad (3.51)$$

Hierbei kennzeichnet  $\rho_C^{GR}$  die kritische Dichte des kompressiblen Fluids  $\varphi^G$ :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \rho^{GR} = \rho_C^{GR}. \quad (3.52)$$

Wird die materielle Dichte des kompressiblen Fluids beispielsweise über das ideale Gasgesetz (3.21) beschrieben, beträgt die kritische Dichte des Gases  $\rho_C^{GR} = \infty$  und die kritische Dichte  $\rho_C^{FR}$  der Mischphase lautet

$$\rho_C^{FR} = \rho^{LR} \frac{1 + M_{LG}}{M_{LG}}. \quad (3.53)$$



**Abbildung 3.1:** Entwicklung der materiellen Dichte der Mischphase in Abhängigkeit des Drucks mit  $\rho^{LR} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $R = 8,314 \text{ kJ/kmol K}$ ,  $\Theta = 293,15 \text{ °K}$  und  $M = 28,96 \text{ kg/kmol}$ .

Da das Gas kein Volumen mehr einnimmt, wird die Gesamtmasse auf das Volumen des inkompressiblen Fluids  $\varphi^L$  bezogen.

In Abbildung 3.1 ist der Verlauf des Drucks über der materiellen Dichte des Fluids für verschiedene Zusammensetzungen der Mischphase aufgetragen. Es wurden dabei Materialparameter für Wasser und Luft verwendet (s. Abbildung 3.1). Die Summe der Volumenanteile der beiden Fluide  $\varphi^L$  und  $\varphi^G$  beträgt ohne Beschränkung der Allgemeinheit jeweils eins und die Dichte des Gases in der Referenzkonfiguration  $1,293 \text{ kg/m}^3$ . Die Massenverhältnisse  $M_{LG}$  und die kritischen Dichten  $\rho_C^{FR}$  sind für die drei in Abbildung 3.1 dargestellten Fälle in Tabelle 3.1 zusammengefaßt.

$n_{0S}^L$	$n_{0S}^G$	$M_{LG}$	$\rho_C^{FR} [\text{kg/m}^3]$
0,75	0,25	2320,16	1000,43
0,5	0,5	773,40	1001,29
0,25	0,75	257,78	1003,88

**Tabelle 3.1:** Massenverhältnisse  $M_{LG}$  und kritische Dichte  $\rho_C^{FR}$  der Mischphase

Alle drei Kurven nähern sich ihrer kritischen Dichte  $\rho_C^{FR}$  an, mit unterschiedlichen Steigungen, bedingt durch die verschiedenen Volumenanteile der beiden Fluide. Während der Effekt der Mischphasenformulierung auf die kritische Dichte  $\rho_C^{FR}$  von geringer Bedeutung ist, ist der Einfluß auf den Porenfluiddruck  $p$  bzw. den Zusammenhang  $\rho^{FR}(p)$  von großer Bedeutung. Dies trifft speziell im Bereich großer Deformationen wie zu, wie z. B. beim Porenschluß, d. h. dem Zustand vollständig geschlossener Poren des Festkörperskeletts, vgl. Kapitel 7. Der Porenfluiddruck  $p$  wirkt sich dabei besonders bei Reibungsmaterialien

aus, deren Eigenschaften vom hydrostatischen Spannungszustand abhängen.

### Auswertung der Bilanzgleichungen

Die Massenbilanz der Mischphase folgt direkt aus der Summe der Massenbilanzen der beiden Porenfluide (3.41):

$$(\rho^G + \rho^L)'_F + (\rho^G + \rho^L) \operatorname{div} \mathbf{x}'_F = 0. \quad (3.54)$$

Sie ergibt durch Einsetzen der Definition (3.37) der materiellen Dichte der Mischphase die gleiche Form wie im Falle eines einphasigen Porenfluids (3.24), entsprechend den *Truesdellschen* Prinzipien. Die Summe der Impulsbilanzen (3.26) der beiden Porenfluide  $\varphi^G$  und  $\varphi^L$  ergibt unter Verwendung von (3.40)

$$(n^L \rho^{LR} + n^G \rho^{GR})'' \mathbf{x}_F + \operatorname{div} [(n^L + n^G) p \mathbf{I}] + (n^L \rho^{LR} + n^G \rho^{GR}) \mathbf{b} = \hat{\mathbf{p}}^F. \quad (3.55)$$

Dabei wurden die konstitutiven Ansätze für die Fluidspannungen (3.17) und (3.18) für beide Porenfluide getrennt getroffen. Der Impulsaustausch hingegen wird entsprechend der physikalischen Anschauung nach wie vor zwischen der gesamten Mischphase  $\varphi^F$  und dem Festkörperskelett  $\varphi^S$  über (3.17) und (3.19) modelliert. Darüber hinaus wurde der Volumenkraftvektor  $\mathbf{b}$  für beide Fluide gleich angenommen:  $\mathbf{b}^G = \mathbf{b}^L = \mathbf{b}$ . Mit der materiellen Dichte  $\rho^{FR}$  der Mischphase (3.37) und der Beziehung zwischen den Volumenanteilen (3.39) hat die Impulsbilanz des Fluids der Mischphase wieder die identische Form wie im Falle des einphasigen, kompressiblen Porenfluids (3.27).

Das hybride Modell mit Mischphase kann somit auf eine zweiphasige Beschreibung reduziert werden, die mit der Beschreibung eines einzelnen, kompressiblen Porenfluids identisch ist. Es genügt für die Implementierung, die Entwicklungsgleichung der materiellen Dichte des kompressiblen Porenfluids (3.21) durch das entsprechende Ergebnis für die Mischphase (3.46) zu ersetzen.

## 3.4 Inkompressibles Modell

Im Gegensatz zum hybriden Modell (3.20) wird nun auch das Porenfluid materiell inkompressibel angenommen:

$$\rho^{FR} = \text{konst.} \quad \text{bzw.} \quad (\rho^{FR})'_F = 0. \quad (3.56)$$

Die materielle Zeitableitung der Dichte des Fluids  $\rho^{FR}$  bezüglich der Bewegung des Festkörpers ist aufgrund des Konvektionsterms (vgl. (3.33) bzw. (3.5)) ungleich null:

$$(\rho^{FR})'_S = -\mathbf{w}_F \cdot \operatorname{grad} \rho^{FR}. \quad (3.57)$$

Einsetzen in die Massenbilanz (3.25) des Fluids führt auf

$$\rho^{FR} \operatorname{div} (\mathbf{u}_S)'_S + \operatorname{div} (n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F) - n^F \mathbf{w}_F \cdot \operatorname{grad} (\rho^{FR}) = 0. \quad (3.58)$$

Weitere Umformung mit Hilfe der Tensorrechnung und der Definition (3.4) der Sickergeschwindigkeit liefert die gewünschte Form der Massenbilanz des Fluids:

$$\operatorname{div}((\mathbf{u}_S)'_S + n^F \mathbf{w}_F) = 0. \quad (3.59)$$

Der Volumenanteil des Fluids  $n^F$  ist dabei ebenso wie beim hybriden Modell über die Sättigungsbedingung (3.7) und die integrierte Form der Massenbilanz des Festkörpers (3.23) an den Freiheitsgrad der Festkörperverschiebung  $\mathbf{u}_S$  gekoppelt, vgl. (3.31). In Verbindung mit (3.31) stellt (3.59) wieder die Massenbilanz der Mischung dar, die für den vorliegenden Fall des inkompressiblen Modells in eine reine Volumenbilanz übergegangen ist. Die Impulsbilanzen des Fluids und der Mischung bleiben identisch mit den Formen des hybriden Modells (3.28) und (3.30).

Die Modellgleichungen für den Fall eines inkompressiblen Fluids sind durch die Gleichungen (3.59), (3.28) und (3.30) gegeben. Die Freiheitsgrade sind, ebenso wie beim hybriden Modell, die Festkörperverschiebung  $\mathbf{u}_S$ , die Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  und der Porenfluiddruck  $p$ .

### Quasistatischer Fall

Für den quasistatischen Fall werden die zweiten Ableitungen nach der Zeit vernachlässigt, vgl. (3.32). Die Impulsbilanz (3.28) des Fluids, die identisch mit der des hybriden, quasistatischen Modells ist, kann ebenfalls nach  $\mathbf{w}_F$  aufgelöst werden, vgl. (3.34). Eingesetzt in die Massen- bzw. Volumenbilanz der Mischung (3.59) erhält man die Form

$$\operatorname{div} \left[ (\mathbf{u}_S)'_S + \frac{k^F}{\gamma^{FR}} (\rho^{FR} \mathbf{b} - \operatorname{grad} p) \right] = 0. \quad (3.60)$$

Die Impulsbilanz der Mischung ist wiederum identisch mit der quasistatischen Form des hybriden Modells (3.35) und ergibt zusammen mit der Massen- bzw. Volumenbilanz (3.60) der Mischung das fertige System der Modellgleichungen in den Freiheitsgraden  $\mathbf{u}_S$  und  $p$ . Es ist dabei jedoch zu beachten, daß die materielle Dichte  $\rho^{FR}$  beim vollständig inkompressiblen Modell im Gegensatz zum hybriden Modell einen konstanten Materialparameter darstellt und keine Abhängigkeit vom Porenfluiddruck aufweist.

# Kapitel 4

## Plastizität

### 4.1 Einführung

In der finiten Elastoplastizität kommt der Zerlegung der Deformation in reversible, elastische und irreversible, plastische Anteile zentrale Bedeutung zu. Im Rahmen der geometrisch linearen Theorie, auch als Theorie kleiner Deformationen bezeichnet, wird im allgemeinen der linearisierte *Greensche* Verzerrungstensor additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgespalten, motiviert durch das Verhalten einer einachsigen Zugprobe unter Be- und Entlastung:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S = \boldsymbol{\varepsilon}_{Se} + \boldsymbol{\varepsilon}_{Sp}. \quad (4.1)$$

Für die finite Theorie hat sich die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen plastischen Anteil bewährt,

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp}, \quad (4.2)$$

die *Lee* [60] zugeschrieben wird. Der multiplikative Ansatz geht dabei in das additive Konzept der geometrisch linearen Theorie (4.1) über (vgl. *Ehlers* [20], *Haupt* [41]).

Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten und die damit einhergehende Einführung einer gedachten, spannungsfreien Zwischenkonfiguration wurde in der Literatur eingehend diskutiert, so z. B. in dem Übersichtsartikel von *Naghdi* [69], oder den Arbeiten von *Green & Naghdi* [36], *Kleiber* [50], *Haupt* [41], *Ehlers* [21] und *Holsapple* [45].

Aufbauend auf der Kinematik, die aus der multiplikativen Zerlegung resultiert, werden konstitutive Ansätze zur Formulierung des materialabhängigen Verhaltens benötigt. Hierzu gehören die Fließfläche, die den elastischen vom plastischen Bereich trennt und den Beginn der plastischen Formänderung beschreibt, das im Rahmen dieser Arbeit verwendete isotrope Verfestigungsgesetz, daß die Änderung der Fließbedingung bzw. Fließfläche während des i. a. plastischen Deformationsprozesses regiert und eine Fließregel, die die Entwicklung der plastischen Deformation beschreibt. Darüberhinaus wird ein elastisches

Teilstoffgesetz für den Zusammenhang zwischen den Spannungen und den elastischen Deformationen benötigt.

Bei porösen Medien müssen die Materialgesetze im Bereich großer Verzerrungen zusätzlichen bzw. anderen Anforderungen genügen als z. B. im Falle der Metallplastizität. So kann es bei porösen Medien trotz materieller Inkompressibilität des Festkörperskeletts zu sehr großen Volumendehnungen der Festkörpermatrix kommen. Die makroskopischen Volumendehnungen resultieren dabei aus lokalen Porositätsänderungen und werden durch den sogenannten Kompressionspunkt begrenzt. Es handelt sich dabei um den Zustand vollständig geschlossener Poren. Es ist dann keine weitere Kompression des Porenraums mehr möglich ist. Das Porenfluid weicht dabei während der Deformation der Festkörpermatrix falls inkompressibel modelliert durch Ausströmen und falls kompressibel modelliert zusätzlich durch Kompression aus, vgl. Kapitel 7.1. Dies hat zur Folge, das sich die partialen Dichten  $\rho^\alpha$  auch bei materieller Inkompressibilität der Konstituierenden über die Volumenanteile  $n^\alpha$  ändern können (vgl. (1.10)).

Zur Beschreibung des elastischen Verhaltens wird ein Gesetz von *Ehlers & Eipper* [26] verwendet, das die Grenzbedingung des Kompressionspunktes einhält. Im Rahmen der elastoplastischen Formulierung muß der Kompressionspunkt jedoch unter Beachtung der plastischen Vordeformation modelliert werden. Lediglich der Porenanteil, der nach der plastischen Deformation verbleibt bzw. auf der Zwischenkonfiguration vorliegt, kann durch die elastische Deformation geschlossen werden.

Aus der Porosität in Verbindung mit der Forderung nach Einhaltung des Kompressionspunktes folgen speziell für die Modellierung der Plastizität zusätzliche Anforderungen an die konstitutive Formulierung. Die in der Plastizitätstheorie für nichtporöse metallische Werkstoffe übliche Forderung nach plastischer Inkompressibilität für das Festkörperskelett kann nicht aufrecht erhalten werden. So zeigen z. B. Versuche in der Geotechnik sowohl dilatantes als auch kontraktantes Materialverhalten im Bereich plastischer Deformation, vgl. *Kim & Lade* [49] sowie *Lade & Kim* [54, 55]. Die Forderung der plastischen Inkompressibilität ist vielmehr im Kompressionspunkt anzusetzen. Bei geschlossenem Porenraum dürfen keine kontraktanten Deformationen mehr auftreten, weder plastische noch elastische. Dilatante Volumendehnung, d. h. eine Aufweitung des Porenraums, bleibt aber nach wie vor möglich. Erreicht wird dies durch die Kombination aus einer geeigneten Fließfläche, einem neuen isotropen Verfestigungsgesetz und der zugehörigen Fließregel.

Das Verfestigungsgesetz sorgt dabei dafür, daß für den Grenzfall vollständig geschlossener Poren die Fließfläche und somit der elastische Bereich im Spannungsraum den Bereich unendlicher Drücke umfaßt. Die Fließregel ermöglicht darüber hinaus keine kontraktanten Volumendehnungen mehr, falls es z. B. durch Scherung zu plastischer Deformation kommt. Es hat sich darüber hinaus in Experimenten (*Yamada & Ishihara* [98]) gezeigt, daß für poröse Medien und speziell Reibungsmaterialien assoziierte Fließregeln ungeeignet sind. Es wird eine nichtassoziierte Formulierung benötigt, die die Möglichkeit bietet, den Dilatanzwinkel an Versuche anzupassen.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß die konstitutive Formulierung des elastoplastischen Materialmodells möglichst flexibel gestaltet sein sollte, um eine möglichst

große Klasse poröser Materialien mit z. T. unterschiedlichstem Verhalten beschreiben zu können wie beispielsweise Polymer- und Metallschäume oder Geomaterialien.

Die Betrachtungen in diesem Kapitel bleiben auf die rein mechanische Theorie beschränkt. Bezüglich der thermodynamischen Aspekte sei auf die Arbeiten von *Miehe* [67], *Naghdi* [69] und Zitate darin verwiesen, sowie *Ehlers* [20], wo speziell auf die Thermodynamik im Rahmen der Theorie Poröser Medien eingegangen wird.

Der Aufbau des Kapitels gliedert sich wie folgt: In Kapitel 4.2 wird zuerst die Kinematik, die aus der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten resultiert, dargestellt. In Kapitel 4.3 wird darauf aufbauend das konstitutive Modell beschrieben. Dazu wird zunächst nach einer kurzen Zusammenfassung der Grundlagen geschwindigkeitsunabhängiger Plastizität auf das verwendete elastische Gesetz von *Eipper* [30] eingegangen. Es folgen die Fließfläche von *Ehlers* [23], die in Verbindung mit dem neuen Verfestigungsgesetz und dem neuen plastischen Potential die plastische Inkompressibilität im Kompressionspunkt sicherstellt.

## 4.2 Kinematik

Gegeben sei ein Körper  $\mathcal{B}$  nach beliebiger, elastoplastischer Deformation. Dabei bezeichnet  $\mathbf{X}_S$  den Ortsvektor in der Referenzkonfiguration eines materiellen Punktes  $X^S$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_S$  den „Ortsvektor“ in der plastischen Zwischenkonfiguration und  $\mathbf{x}$  den Ortsvektor in der aktuellen Konfiguration, vgl. Abbildung 4.1. Die Größen  $d\mathbf{X}_S$ ,  $d\hat{\mathbf{x}}_S$  und  $d\mathbf{x}$  bezeichnen die jeweiligen differentiellen Linienelemente.

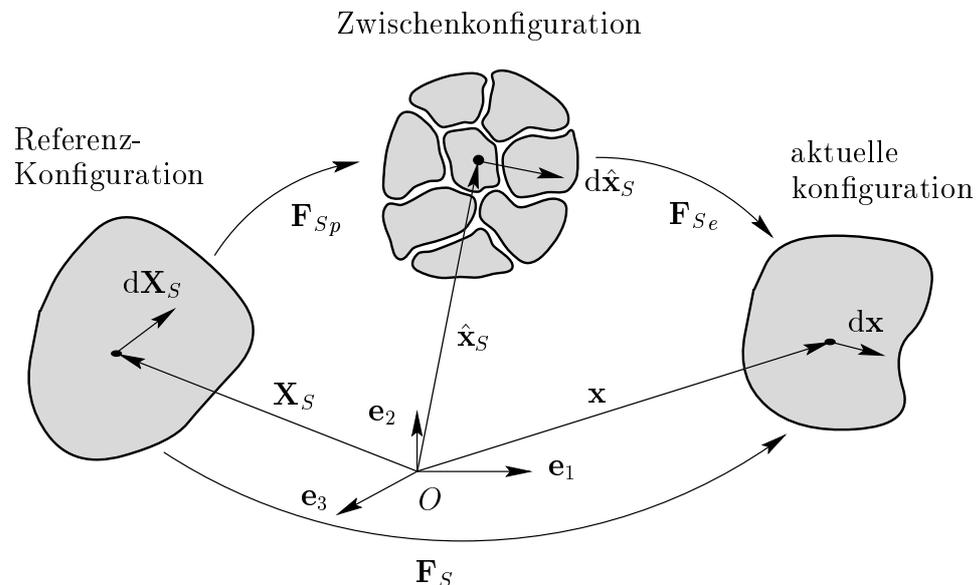


Abbildung 4.1: Zerlegung des Deformationsgradienten und Einführung der plastischen Zwischenkonfiguration

Die Wegnahme äußerer Lasten führt auf eine kompatible Konfiguration, deren Zustand aber in der Regel nicht spannungsfrei ist. Erst lokale Entlastung durch gedachtes Zerschneiden des Körpers in hinreichend kleine Teile führt auf einen spannungsfreien Zustand und somit zum gesamten Abbau elastischer Deformation. Dies ist Voraussetzung für die eindeutige Zerlegung der Deformation in elastische und plastische Anteile. Die dabei entstehende Konfiguration, im folgenden als plastische Zwischenkonfiguration oder kurz Zwischenkonfiguration bezeichnet, ist im allgemeinen inkompatibel. Die Kompatibilität wird durch die Deformation, die mit dem Eigenspannungszustand einhergeht, wieder hergestellt. Die Zerlegung des Deformationsgradienten in einen rein elastischen und einen rein plastischen Anteil geht somit mit der Einführung der inkompatiblen, plastischen Zwischenkonfiguration einher.

Aus der Vorstellung, daß die Zwischenkonfiguration durch lokale Entlastung gewonnen werden kann, wird im allgemeinen geschlossen, daß die plastische Deformation der elastischen vorgeschaltet ist, die Zerlegung also  $\mathbf{F}_S = \mathbf{F}_{S_e} \mathbf{F}_{S_p}$  und nicht  $\mathbf{F}_S = \mathbf{F}_{S_p} \mathbf{F}_{S_e}$  lautet. Die alternative Formulierung ist aber ebenfalls denkbar (s. *Kleiber* [50]).

Die aus der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten resultierenden elastischen und plastischen Anteile können dabei in der Regel nicht als Gradientenfelder der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{S_e} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_S} = \text{Grad}_{\hat{\mathbf{x}}_S} \mathbf{x}, \\ \mathbf{F}_{S_p} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_S}{\partial \mathbf{X}_S} = \text{Grad}_S \hat{\mathbf{x}}_S\end{aligned}\tag{4.3}$$

aufgefaßt werden, da die Zwischenkonfiguration inkompatibel ist. Dabei bezeichnet  $\text{Grad}_{\hat{\mathbf{x}}_S}$  den „Gradienten“ bezüglich der Zwischenkonfiguration des Festkörperskeletts  $\varphi^S$ .

Die Größen  $\mathbf{F}_{S_e}$  und  $\mathbf{F}_{S_p}$  sind vielmehr als tensorielle Punktfunktionen zu verstehen, die sich als lokale Grenzwerte des ebenfalls lokalen Entlastungsprozesses beim Wegschneiden des umgebenden Materials ergeben, vgl. *Ehlers* [20], *Kleiber* [50].

Entsprechend der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten (1.33) lassen sich auch dessen elastischer und plastischer Anteil in einen eigentlich orthogonalen Tensor  $\mathbf{R}_{S_e}$  bzw.  $\mathbf{R}_{S_p}$  und einen rechten bzw. linken Strecktensor zerlegen:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{S_e} &= \mathbf{R}_{S_e} \mathbf{U}_{S_e} = \mathbf{V}_{S_e} \mathbf{R}_{S_e}, \\ \mathbf{F}_{S_p} &= \mathbf{R}_{S_p} \mathbf{U}_{S_p} = \mathbf{V}_{S_p} \mathbf{R}_{S_p}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten (4.2) ist lediglich bis auf einen eigentlich orthogonalen Tensor  $\mathbf{Q}$  bestimmbar

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_S &= \mathbf{F}_{S_e} \mathbf{F}_{S_p} = \mathbf{F}_{S_e} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_{S_p} \\ &= \tilde{\mathbf{F}}_{S_e} \tilde{\mathbf{F}}_{S_p}\end{aligned}\tag{4.5}$$

und die Zwischenkonfiguration somit bis auf eine überlagerte Starrkörperrotation.

### Deformations- und Verzerrungsmaße

Über die Differenz der Quadrate der Linienelemente auf den verschiedenen Konfigurationen lassen sich entsprechend dem Vorgehen in Kapitel 1.2.3 Verzerrungstensoren einführen.

Die Differenz der Quadrate der Linienelemente auf der Zwischenkonfiguration ( $d\hat{s}_S^2$ ) und auf der Referenzkonfiguration ( $dS_S^2$ ) ergibt mit der multiplikativen Zerlegung (4.2) des Deformationsgradienten in Größen der Referenzkonfiguration ausgedrückt

$$\begin{aligned} d\hat{s}_S^2 - dS_S^2 &= d\hat{\mathbf{x}}_S \cdot d\hat{\mathbf{x}}_S - d\mathbf{X}_S \cdot d\mathbf{X}_S \\ &= (\mathbf{F}_{S_p} d\mathbf{X}_S) \cdot (\mathbf{F}_{S_p} d\mathbf{X}_S) - d\mathbf{X}_S \cdot d\mathbf{X}_S \\ &= d\mathbf{X}_S \cdot 2 \mathbf{E}_{S_p} d\mathbf{X}_S \end{aligned} \quad (4.6)$$

mit dem plastischen *Greenschen* Verzerrungstensor der Referenzkonfiguration

$$\mathbf{E}_{S_p} = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{S_p} - \mathbf{I}) . \quad (4.7)$$

Ausgedrückt in Größen der Zwischenkonfiguration erhält man

$$d\hat{s}_S^2 - dS_S^2 = d\hat{\mathbf{x}}_S \cdot 2 \hat{\mathbf{A}}_{S_p} d\hat{\mathbf{x}}_S \quad (4.8)$$

mit dem plastischen *Almansi*-Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration

$$\hat{\mathbf{A}}_{S_p} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{B}}_{S_p}^{-1}) . \quad (4.9)$$

$\mathbf{C}_{S_p}$  stellt dabei den rechten plastischen und  $\hat{\mathbf{B}}_{S_p}$  den linken plastischen *Cauchy-Green* Tensor dar, die analog den entsprechenden gesamten Deformationsmaßen (1.37) definiert sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{S_p} &= \mathbf{F}_{S_p}^T \mathbf{F}_{S_p} \quad , \quad \hat{\mathbf{B}}_{S_p} = \mathbf{F}_{S_p} \mathbf{F}_{S_p}^T , \\ \hat{\mathbf{C}}_{S_e} &= \mathbf{F}_{S_e}^T \mathbf{F}_{S_e} \quad , \quad \mathbf{B}_{S_e} = \mathbf{F}_{S_e} \mathbf{F}_{S_e}^T . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Aus dem Vergleich der beiden Formen (4.6) und (4.8) folgt, daß der plastische *Greensche* Verzerrungstensor  $\mathbf{E}_{S_p}$  der Referenzkonfiguration durch kontravarianten Vorwärtstransport mit  $\mathbf{F}_{S_p}^{T-1}(\dots)\mathbf{F}_{S_p}^{-1}$  in den plastischen *Almansi*-Verzerrungstensor  $\hat{\mathbf{A}}_{S_p}$  der Zwischenkonfiguration übergeht:

$$\mathbf{F}_{S_p}^{T-1} \mathbf{E}_{S_p} \mathbf{F}_{S_p}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}_{S_p} . \quad (4.11)$$

Entsprechend (4.6) folgt für die Differenz der Quadrate der Linienelemente auf der Zwischenkonfiguration ( $d\hat{s}_S^2$ ) und auf der aktuellen Konfiguration  $(ds)^2$

$$\begin{aligned} ds^2 - d\hat{s}_S^2 &= d\mathbf{x} \cdot 2 \mathbf{A}_{S_e} d\mathbf{x} \\ &= d\hat{\mathbf{x}}_S \cdot 2 \hat{\mathbf{E}}_{S_e} d\hat{\mathbf{x}}_S \end{aligned} \quad (4.12)$$

mit den elastischen *Almansi*- bzw. *Greenschen* Verzerrungstensoren  $\mathbf{A}_{S_e}$  und  $\hat{\mathbf{E}}_{S_e}$ :

$$\hat{\mathbf{E}}_{S_e} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{C}}_{S_e} - \mathbf{I}) \quad , \quad \mathbf{A}_{S_e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{S_e}^{-1}) . \quad (4.13)$$

Der elastische *Greensche* Verzerrungstensor  $\hat{\mathbf{E}}_{S_e}$  der Zwischenkonfiguration geht durch kontravarianten Vorwärtstransport mit  $\mathbf{F}_{S_e}^{T-1}(\dots)\mathbf{F}_{S_e}^{-1}$  in den elastischen *Almansi*-Verzerrungstensor der aktuellen Konfiguration  $\mathbf{A}_{S_e}$  über

$$\mathbf{F}_{S_e}^{T-1} \hat{\mathbf{E}}_{S_e} \mathbf{F}_{S_e}^{-1} = \mathbf{A}_{S_e} . \quad (4.14)$$

Aus der Summe der beiden Beziehungen (4.6) und (4.12) läßt sich aus der Differenz der Quadrate der Linienelemente der Referenz- und der aktuellen Konfiguration der Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_S$  motivieren:

$$ds^2 - dS_S^2 =: d\hat{\mathbf{x}}_S \cdot (2\hat{\mathbf{\Gamma}}_S) d\hat{\mathbf{x}}_S \quad (4.15)$$

mit

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_S = \hat{\mathbf{E}}_{S_e} + \hat{\mathbf{A}}_{S_p} =: \hat{\mathbf{\Gamma}}_{S_e} + \hat{\mathbf{\Gamma}}_{S_p} . \quad (4.16)$$

Die elastischen und plastischen Verzerrungsanteile liegen dabei in entkoppelter Form vor. Durch Transport von  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_S$  auf die aktuelle Konfiguration bzw. auf die Referenzkonfiguration,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{S_p}^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_S \mathbf{F}_{S_p} &= \mathbf{F}_{S_p}^T (\hat{\mathbf{\Gamma}}_{S_e} + \hat{\mathbf{\Gamma}}_{S_p}) \mathbf{F}_{S_p} = \mathbf{E}_{S_e} + \mathbf{E}_{S_p} , \\ \mathbf{F}_{S_e}^{T-1} \hat{\mathbf{\Gamma}}_S \mathbf{F}_{S_e}^{-1} &= \mathbf{F}_{S_e}^{T-1} (\hat{\mathbf{\Gamma}}_{S_e} + \hat{\mathbf{\Gamma}}_{S_p}) \mathbf{F}_{S_e}^{-1} = \mathbf{A}_{S_e} + \mathbf{A}_{S_p} , \end{aligned} \quad (4.17)$$

lassen sich die elastischen und plastischen Anteile des *Almansi*- bzw. des *Greenschen* Verzerrungstensors identifizieren. Mit (4.15), (4.17)<sub>1</sub> und (4.17)<sub>2</sub> liegen somit additive Zerlegungen der Verzerrungsmaße in elastische und plastische Anteile auf allen drei Konfigurationen vor. Das Konzept der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten ist somit kompatibel mit dem Konzept der additiven Zerlegung (4.1) des Verzerrungstensors der linearen Theorie, in dem Sinne, daß auf jeder Konfiguration entsprechende Verzerrungsmaße zur Verfügung stehen. Das Transportverhalten der einzelnen Verzerrungstensoren bzw. ihrer Anteile ist in Abbildung 4.2 zusammengefaßt.

**Anmerkung:** Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß  $\hat{\mathbf{A}}_{S_p}$  und  $\mathbf{A}_{S_p}$  bzw.  $\hat{\mathbf{E}}_{S_e}$  und  $\mathbf{E}_{S_e}$  nicht identisch sind. Es handelt sich dabei vielmehr um die Pendanten auf der jeweils anderen Konfiguration, die aus dem Transport von  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_S = \hat{\mathbf{\Gamma}}_{S_e} + \hat{\mathbf{\Gamma}}_{S_p}$  hervorgehen.

### Deformations- und Verzerrungsgeschwindigkeiten

Die multiplikative Zerlegung (4.2) des Deformationsgradienten eingesetzt in die Definition des räumliche Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{L}_S$  (1.43) ergibt

$$\mathbf{L}_S = \left[ (\mathbf{F}_{S_e})'_S \mathbf{F}_{S_e}^{-1} \right] + \mathbf{F}_{S_e} \left[ (\mathbf{F}_{S_p})'_S \mathbf{F}_{S_p}^{-1} \right] \mathbf{F}_{S_e}^{-1} . \quad (4.18)$$

Es liegt nahe, entsprechend der Definition des räumlichen Geschwindigkeitsgradient (1.43) die Größen

$$\mathbf{L}_{Se} = (\text{Grad}_{\hat{s}\mathbf{x}})'_S \mathbf{F}_{Se}^{-1} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_S} \right)'_S \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_S}{\partial \mathbf{x}}, \quad (4.19)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_{Sp} = (\text{Grad}_S \hat{\mathbf{x}}_S)'_S \mathbf{F}_{Sp}^{-1} = \frac{\partial (\hat{\mathbf{x}}_S)'_S}{\partial \mathbf{x}}$$

einzuführen. Mit der Voraussetzung, daß nur solche Größen als Geschwindigkeitsgradienten eingeführt werden sollen, die im Falle homogener Deformationen tatsächlich Geschwindigkeitsgradienten darstellen, sich also formal als Gradient eines Geschwindigkeitsfeldes bezüglich  $\mathbf{x}$  oder  $\hat{\mathbf{x}}_S$  darstellen lassen, gibt es nur den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}_S$  und den plastischen räumlich Geschwindigkeitsgradienten  $\hat{\mathbf{L}}_{Sp}$ , vgl. Ehlers [20]:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_S &= \mathbf{F}_S \mathbf{F}_S^{-1} & \text{mit} & \quad d \hat{\mathbf{x}}_S = \mathbf{L}_S d\mathbf{x}, \\ \hat{\mathbf{L}}_{Sp} &= \mathbf{F}_{Sp} \mathbf{F}_{Sp}^{-1} & \text{mit} & \quad d(\hat{\mathbf{x}}_S)'_S = \hat{\mathbf{L}}_{Sp} d\hat{\mathbf{x}}_S. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Da  $\hat{\mathbf{x}}_S$  nicht konstant bezüglich der Zeit ist, besitzt  $\mathbf{L}_{Se}$  nicht die Form eines Geschwindigkeitsgradienten. Die symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteile der Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}_S$  und  $\hat{\mathbf{L}}_{Sp}$  werden analog zu (1.46) eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_S &= \frac{1}{2} (\mathbf{L}_S + \mathbf{L}_S^T) & , & & \mathbf{W}_S &= \frac{1}{2} (\mathbf{L}_S - \mathbf{L}_S^T) , \\ \hat{\mathbf{D}}_{Sp} &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{L}}_{Sp} + \hat{\mathbf{L}}_{Sp}^T) & , & & \hat{\mathbf{W}}_{Sp} &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{L}}_{Sp} - \hat{\mathbf{L}}_{Sp}^T) . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ausgangspunkt der Darstellung der Verzerrungsgeschwindigkeiten bilden die Geschwindigkeiten der Differenz der Quadrate von Linienelementen auf den jeweiligen Konfigurationen, d. h. deren mit der Bewegung des Festkörpers  $\varphi^S$  gebildete materielle Zeitableitung. Wie bereits bei der Darstellung der Verzerrungsmaße werden zuerst die Verzerrungsgeschwindigkeiten, die mit der elastischen bzw. der plastischen Teildeformation einhergehen, behandelt. Die Summe der beiden Fälle führt schließlich auf die additive Zerlegung der gesamten Verzerrungsgeschwindigkeiten in einen elastischen und einen plastischen Anteil.

Aus der materiellen Zeitableitung der Differenz der Quadrate eines Linienelements ( $d\hat{s}_S^2$ ) auf der Zwischenkonfiguration und ( $dS_S^2$ ) auf der Referenzkonfiguration folgt

$$\begin{aligned} (d\hat{s}_S^2 - dS_S^2)'_S &= (d\hat{\mathbf{x}}_S \cdot d\hat{\mathbf{x}}_S - d\mathbf{X}_S \cdot d\mathbf{X}_S)'_S \\ &= d\mathbf{X}_S \cdot (2\mathbf{E}_{Sp})'_S d\mathbf{X}_S \\ &= d\hat{\mathbf{x}}_S \cdot 2(\hat{\mathbf{A}}_{Sp})_p^\Delta d\hat{\mathbf{x}}_S . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die obere plastische *Lie*- bzw. *Oldroyd*-Ableitung des plastischen *Almansi*-Verzerrungstensors, definiert durch

$$(\dots)_p^\Delta = (\dots)'_S + \hat{\mathbf{L}}_{Sp}^T (\dots) + (\dots) \hat{\mathbf{L}}_{Sp} , \quad (4.23)$$

ist dabei gleich dem symmetrischen Anteil des plastischen Geschwindigkeitsgradienten:

$$(\hat{\mathbf{A}}_{Sp})_p^\Delta = \hat{\mathbf{D}}_{Sp}. \quad (4.24)$$

Im folgenden beziehen sich alle *Lie*- bzw. *Oldroyd*-Ableitungen auf die Bewegung des Festkörperskeletts  $\varphi^S$ . Eine Indizierung mit  $(\dots)_S$  erfolgt nicht.

Die materielle Zeitableitung der Differenz der Quadrate eines Linienelements ( $ds^2$ ) der aktuellen Konfiguration und ( $d\hat{s}_S^2$ ) der Zwischenkonfiguration lautet mit (4.12)

$$\begin{aligned} (ds^2 - d\hat{s}_S^2)'_S &= d\mathbf{x} \cdot 2(\mathbf{A}_{Se})^\Delta d\mathbf{x} \\ &= d\hat{\mathbf{x}}_S \cdot 2(\hat{\mathbf{E}}_{Se})_p^\Delta d\hat{\mathbf{x}}_S. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Für die Differenz der Quadrate eines Linienelements auf der aktuellen Konfiguration und auf der Referenzkonfiguration erhält man aus der Summe von (4.22) und (4.25) mit (4.16):

$$\begin{aligned} (ds^2 - dS_S^2)'_S &= \left( d\hat{\mathbf{x}}_S \cdot 2\hat{\mathbf{T}}_S d\hat{\mathbf{x}}_S \right)'_S \\ &= d\hat{\mathbf{x}}_S \cdot 2(\hat{\mathbf{T}}_S)_p^\Delta d\hat{\mathbf{x}}_S \\ &= d\hat{\mathbf{x}}_S \cdot 2 \left[ (\hat{\mathbf{E}}_{Se})_p^\Delta + (\hat{\mathbf{A}}_{Sp})_p^\Delta \right] d\hat{\mathbf{x}}_S. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ebenso wie bei den Verzerrungsmaßen selbst erhält man auch für deren Geschwindigkeiten  $(\hat{\mathbf{T}}_S)_p^\Delta$  auf der Zwischenkonfiguration eine additive Aufspaltung in einen elastischen Anteil  $(\hat{\mathbf{T}}_{Se})_p^\Delta$  und einen plastischen Anteil  $(\hat{\mathbf{T}}_{Sp})_p^\Delta$ . Die entsprechenden Aufteilungen auf der Referenzkonfiguration und der aktuellen Konfiguration ergeben sich durch die Transporte mit  $\mathbf{F}_{Se}^{T-1}(\dots)\mathbf{F}_{Se}^{-1}$  bzw.  $\mathbf{F}_{Sp}^T(\dots)\mathbf{F}_{Sp}$ . Das Transportverhalten der einzelnen Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren bzw. ihrer elastischen und plastischen Anteile ist in Abbildung 4.3 zusammengefaßt.

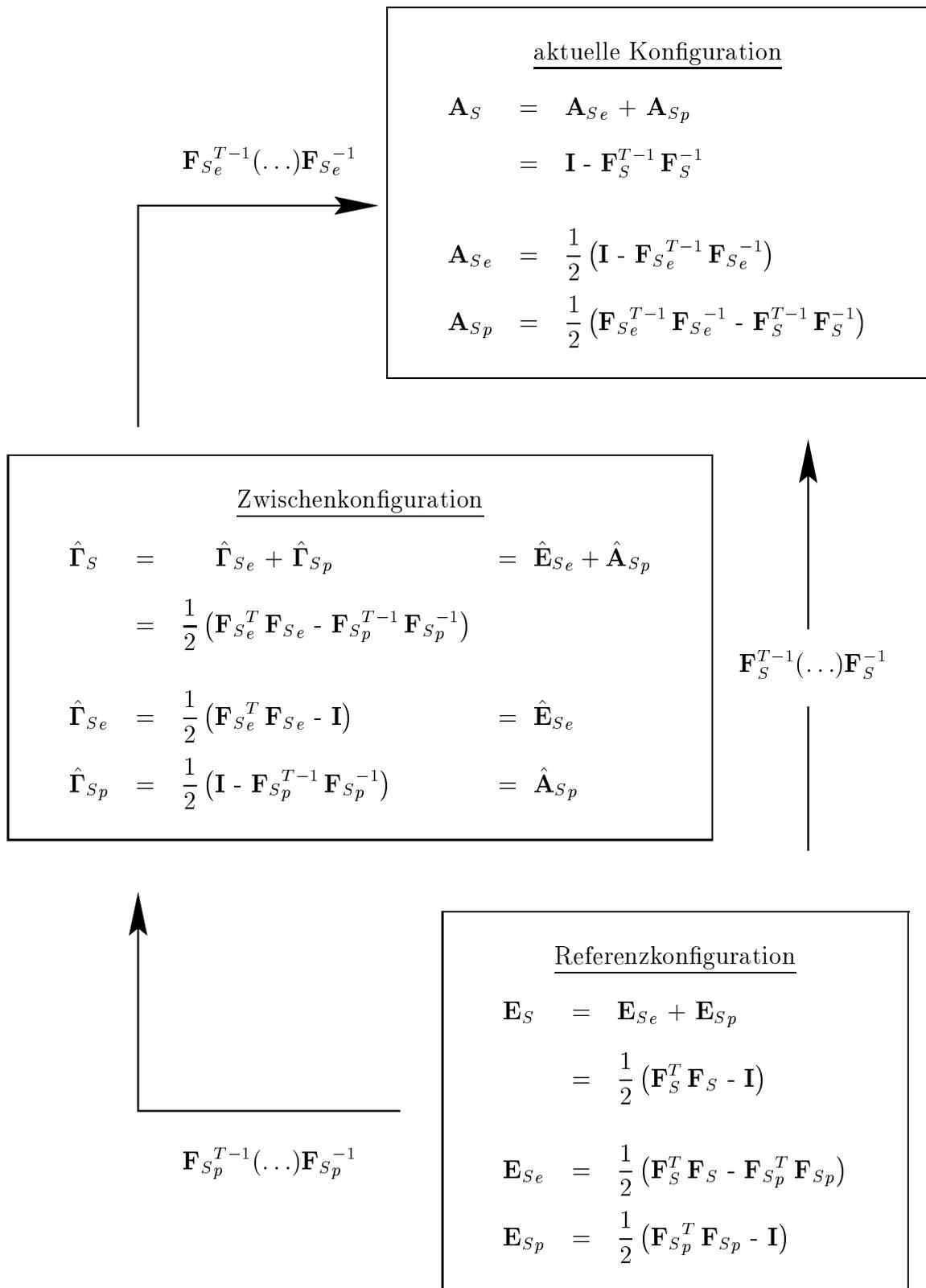
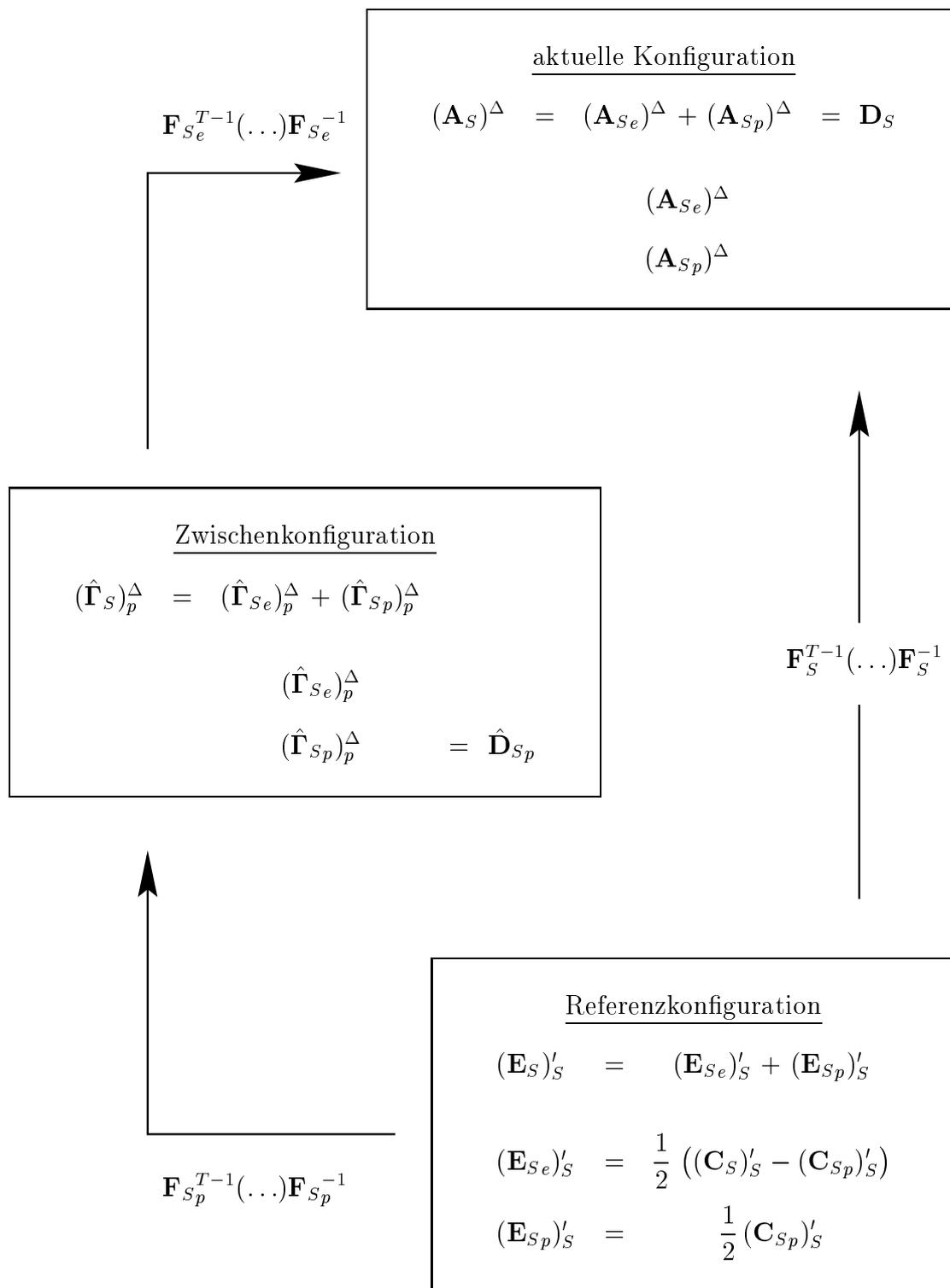


Abbildung 4.2: Zerlegung in elastische und plastische Anteile und Transportverhalten der Greenschen und Almansi-Verzerrungstensoren



**Abbildung 4.3:** Zerlegung in elastische und plastische Anteile und Transportverhalten der Greenschen und Almansi-Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren

## 4.3 Konstitutive Modellierung

Aufbauend auf den kinematischen Betrachtungen in Kapitel 4.2 werden die konstitutiven Ansätze des verwendeten elastoplastischen Materialgesetzes vorgestellt. Die Betrachtungen beschränken sich dabei auf die rein mechanische Theorie. Eine umfassende Darstellung der Auswertung der Entropiebilanz bzw. Entropieungleichung für ein elastoplastisches poröses Medium bestehend aus Festkörper und Porenfluid findet sich bei *Ehlers* [20]. Es werden hier lediglich die benötigten Ergebnisse zitiert.

Beim vorgestellten elastoplastischen Materialmodell handelt es sich um eine klassische fließflächenbehafte und geschwindigkeitsunabhängige Formulierung. Es wird im folgenden sowohl im elastischen als auch im plastischen Bereich des Materialverhaltens Isotropie vorausgesetzt.

### 4.3.1 Elastisches Materialverhalten

Ausgehend vom Prinzip der materiellen Objektivität kann gezeigt werden, daß die freie *Helmholtzsche* Energie  $\psi^S$  des Festkörperskeletts nicht mehr von den elastischen und plastischen Deformationsgradienten selbst, sondern von den symmetrischen elastischen und plastischen *Greenschen* Verzerrungstensoren  $\mathbf{E}_{S_e}$  und  $\mathbf{E}_{S_p}$  abhängt:

$$\psi^S(\Theta, \mathbf{F}_{S_e}, \mathbf{F}_{S_p}) \rightarrow \psi^S(\Theta, \mathbf{E}_{S_e}, \mathbf{E}_{S_p}). \quad (4.27)$$

Das Prinzip der materiellen Objektivität wurde dabei sowohl auf die Abhängigkeit der freien Energie von  $\mathbf{F}_{S_e}$  als auch von  $\mathbf{F}_{S_p}$  angewandt, s. *Ehlers* [20], wobei letzteres in der Literatur auch als „Forderung der Invarianz der Materialgleichungen gegenüber Drehung der plastischen Zwischenkonfiguration“ bezeichnet wird, vgl. *Hartmann* [39]. Die fehlende Eindeutigkeit der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten (4.5) hat somit keine Auswirkung auf die Formulierung der Materialgleichungen. In (4.27) wurde vorausgesetzt, daß die freie Energie des Festkörpers nur von dessen Prozeßvariablen, nicht aber von denen des Porenfluids abhängt (vgl. *Ehlers* [20]). Mit der Beschränkung auf hyperelastisches Materialverhalten kann die freie *Helmholtzsche* Energie in der Form

$$\psi^S(\Theta, \mathbf{E}_{S_e}, \mathbf{E}_{S_p}) \rightarrow \psi^\Theta(\Theta) + \psi^{S_e}(\mathbf{E}_{S_e}) + \psi^{S_p}(\mathbf{E}_{S_e}, \mathbf{E}_{S_p}). \quad (4.28)$$

angesetzt werden. Der Anteil  $\psi^{S_e}(\mathbf{E}_{S_e})$  stellt dabei die gespeicherte elastische Energie dar. Mit Hilfe von Tabelle 4.2 läßt sich der elastische *Greensche* Verzerrungstensor durch rein elastische und rein plastische Deformationsanteile ausdrücken:

$$\mathbf{E}_{S_e} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_S - \mathbf{C}_{S_p}) = \mathbf{F}_{S_p}^T \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{C}}_{S_e} - \mathbf{I}) \mathbf{F}_{S_p}. \quad (4.29)$$

Für die Darstellung der gespeicherten elastischen Energie folgt unter Beachtung der Objektivität

$$\psi^{S_e}(\mathbf{E}_{S_e}) \rightarrow \psi^{S_e}(\hat{\mathbf{C}}_{S_e}, \mathbf{F}_{S_p}) \Big|_{\mathbf{F}_{S_p}=\text{konst.}} \rightarrow \psi^{S_e}(\hat{\mathbf{C}}_{S_e}, \mathbf{E}_{S_p}) \Big|_{\mathbf{E}_{S_p}=\text{konst.}}. \quad (4.30)$$

Die Abhängigkeit der gespeicherten elastischen Energie von der (festgehaltenen) plastischen Deformation läßt sich anhand des Kompressionspunktes veranschaulichen: Während zur Beschreibung des Kompressionspunktes rein elastischen Materialverhaltens zusätzliche Parameter genügen, die in Abhängigkeit der Anfangsporosität  $1 - n_{0S}^S$  formuliert sind (vgl. *Ehlers* [20], *Eipper* [30]), muß im Falle elastoplastischen Materialverhaltens die Porosität auf der Zwischenkonfiguration  $n_p^S$  eingehen. Je nach plastischer Vordeformation stellt sich somit unterschiedliches elastisches Materialverhalten ein. Da der plastische Deformationsgradient  $\mathbf{F}_{Sp}$  während rein elastischer Deformation konstant bleibt, kann er in diesem Sinne als Parameter der gespeicherten elastischen Energie  $\psi^{Se}$  und somit auch des elastischen Gesetzes aufgefaßt werden. Eine ausführliche Diskussion des Zusammenhangs folgt in Kapitel 4.3.2.

Wie bei *Ehlers* [20] gezeigt wurde, kann der Extraanteil des *Cauchy*-Spannungstensors (3.17) auch bei einem fluidgefüllten, porösen Festkörper analog der klassischen Theorie unter Beachtung materieller Objektivität über

$$\mathbf{T}_E^S = \rho^S \mathbf{F}_S \frac{\partial \psi^{Se}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \mathbf{F}_S^T \quad (4.31)$$

bestimmt werden. Da die weiteren Ausführungen sich ausschließlich auf die Extraanteile beziehen, wird dies nicht mehr explizit erwähnt. Sie werden lediglich durch den Index  $(\dots)_E$  kenntlich gemacht. Für den *Kirchhoff*-Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}_E^S = \det \mathbf{F}_{Se} \mathbf{T}_E^S$  der aktuellen Konfiguration,  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S$  der Zwischenkonfiguration und den zweiten *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensor  $\mathbf{S}_E^S$  erhält man analog

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_E^S &= \rho_{0S}^S \mathbf{F}_S \frac{\partial \psi^{Se}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \mathbf{F}_S^T, \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S &= \rho_{0S}^S \mathbf{F}_{Sp} \frac{\partial \psi^{Se}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \mathbf{F}_{Sp}^T, \\ \mathbf{S}_E^S &= \rho_{0S}^S \frac{\partial \psi^{Se}}{\partial \mathbf{E}_{Se}}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

mit der Partialdichte  $\rho_{0S}^S = n_{0S}^S \rho^{SR}$  des materiell inkompressiblen Festkörpers in dessen Referenzkonfiguration. Das Transportverhalten der Spannungstensoren kann Abbildung 4.4 entnommen werden.

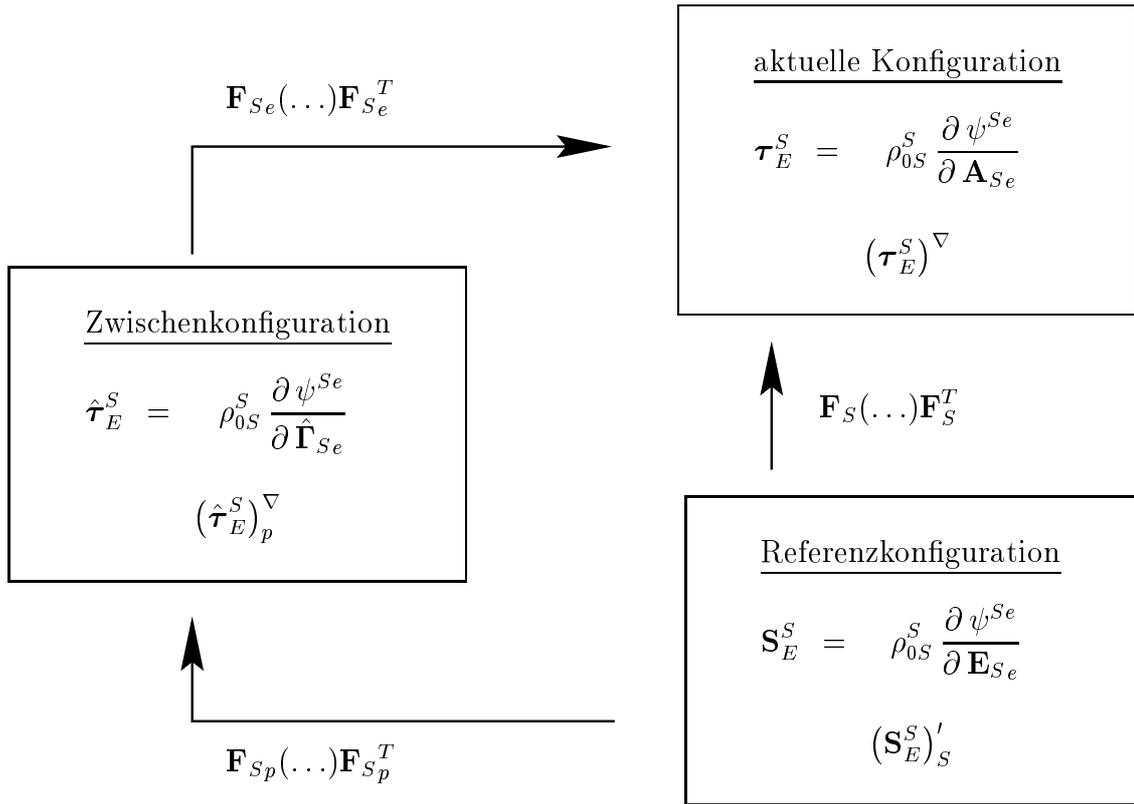
### Elastizitätstensoren

Über die materielle Zeitableitung des zweiten *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensors bei festgehaltener plastischer Zwischenkonfiguration,

$$(\mathbf{S}_E^S)'_S = \frac{\partial \mathbf{S}_E^S}{\partial \mathbf{E}_{Se}} (\mathbf{E}_{Se})'_S, \quad (4.33)$$

läßt sich durch Einsetzen der Beziehung  $\mathbf{S}_E^S = \mathbf{F}_S^{-1} \boldsymbol{\tau}_E^S \mathbf{F}_S^{T-1}$  der Elastizitätstensor der Referenzkonfiguration motivieren:

$$\mathbf{B}_e^4 = \rho_{0S}^S \frac{\partial^2 \psi^{Se}}{\partial \mathbf{E}_{Se} \otimes \partial \mathbf{E}_{Se}}. \quad (4.34)$$



**Abbildung 4.4:** Transportverhalten der Spannungstensoren und Spannungsgeschwindigkeiten

Dem Konzept der *Lie*- bzw. *Oldroyd*-Ableitung folgend ergibt sich durch kovarianten Vorwärtstransport mit  $\mathbf{F}_S(\dots)\mathbf{F}_S^T$  auf die aktuelle Konfiguration der entsprechende Ausdruck für den *Kirchhoff*-Spannungstensor

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau}_E^S)^\nabla &= \mathbf{F}_S (\mathbf{S}_E^S)'_S \mathbf{F}_S^T \\ &= \mathbf{F}_S \left[ \overset{4}{\mathbf{B}}_e (\mathbf{E}_{S_e})'_S \right] \mathbf{F}_S^T \end{aligned} \quad (4.35)$$

mit der unteren *Lie*- bzw. *Oldroyd*-Ableitung

$$(\dots)^\nabla = (\dots)'_S - \mathbf{L}_S (\dots) - (\dots) \mathbf{L}_S^T. \quad (4.36)$$

Einsetzen der Transportbeziehung zwischen der materiellen Zeitableitung  $(\mathbf{E}_{S_e})'_S$  des elastischen *Greenschen* Verzerrungstensors und der oberen *Lie*- bzw. *Oldroyd*-Ableitung  $(\mathbf{A}_{S_e})^\Delta$  des elastischen *Almansi*-Verzerrungstensors der aktuellen Konfiguration (vgl. Tabelle 4.3) liefert

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau}_E^S)^\nabla &= \mathbf{F}_S \left[ \overset{4}{\mathbf{B}}_e (\mathbf{F}_S^T (\mathbf{A}_{S_e})^\Delta \mathbf{F}_S) \mathbf{F}_S^T \right] \\ &=: \overset{4}{\mathbf{C}}_e (\mathbf{A}_{S_e})^\Delta \end{aligned} \quad (4.37)$$

mit dem Elastizitätstensor der aktuellen Konfiguration (vgl. *Ehlers* [20])

$$\overset{4}{\mathbf{C}}_e = (\mathbf{F}_S \otimes \mathbf{F}_S)^{\overset{23}{T}} \overset{4}{\mathbf{B}}_e (\mathbf{F}_S^T \otimes \mathbf{F}_S^T)^{\overset{23}{T}}. \quad (4.38)$$

Mit der Einführung der unteren plastischen *Lie*- bzw. *Oldroyd*-Ableitung der Zwischenkonfiguration

$$(\hat{\cdot})_p^\nabla = (\hat{\cdot})_S' - \hat{\mathbf{L}}_{Sp}(\hat{\cdot}) - (\hat{\cdot})\hat{\mathbf{L}}_{Sp}^T \quad (4.39)$$

erhält man analog über kovarianten Vorwärtstransport der materiellen Zeitableitung des zweiten *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensors (4.33) mit  $\mathbf{F}_{Sp}(\dots)\mathbf{F}_{Sp}^T$  auf die Zwischenkonfiguration

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)_p^\nabla &= \mathbf{F}_{Sp}(\mathbf{S}_E^S)'_S \mathbf{F}_{Sp}^T \\ &= \mathbf{F}_{Sp} \left[ \overset{4}{\mathbf{B}}_e (\mathbf{E}_{Se})'_S \right] \mathbf{F}_{Sp}^T. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Einsetzen des Transports der materiellen Zeitableitung des elastischen *Greenschen* Verzerrungstensor auf die Zwischenkonfiguration (vgl. Abbildung 4.3) liefert schließlich

$$(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)_p^\nabla = \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}_e (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se})_p^\Delta \quad (4.41)$$

mit dem Elastizitätstensor der Zwischenkonfiguration

$$\overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}_e = (\mathbf{F}_{Sp} \otimes \mathbf{F}_{Sp})^T \overset{23}{\mathbf{B}}_e (\mathbf{F}_{Sp}^T \otimes \mathbf{F}_{Sp}^T)^T. \quad (4.42)$$

Die Elastizitätstensoren und ihr Transportverhalten sind zusammen mit der alternativen Darstellung über die Ableitung aus der gespeicherten elastischen Energie  $\psi^{Se}$  in Abbildung 4.5 zusammengefaßt.

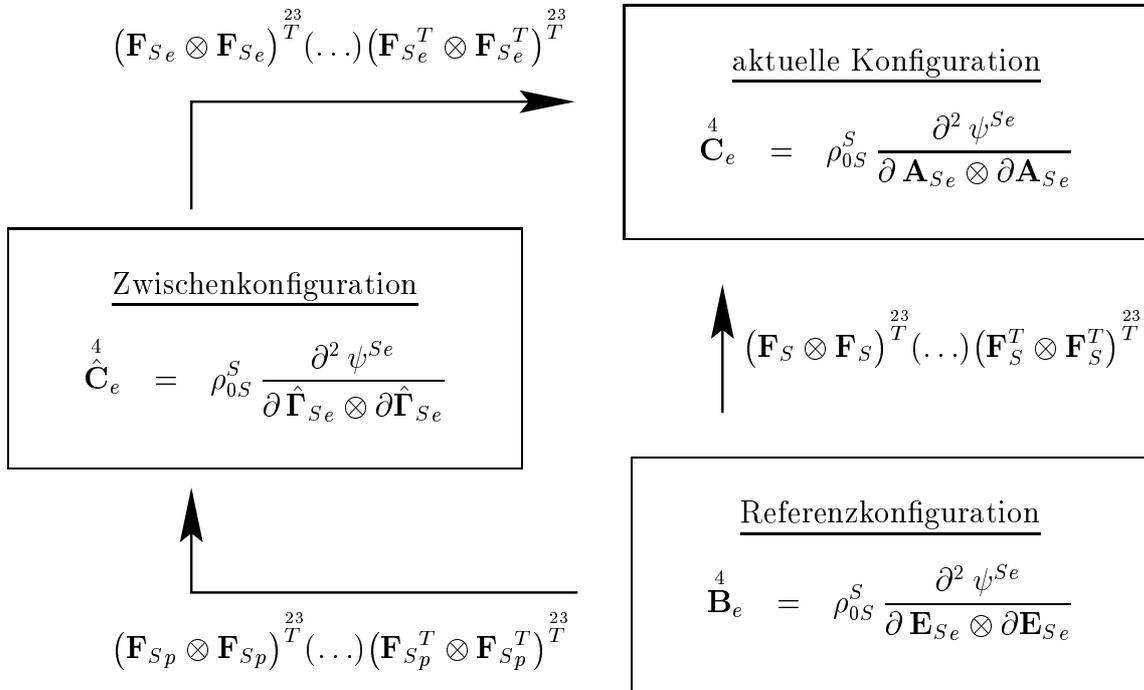


Abbildung 4.5: Elastizitätstensoren und deren Transportverhalten

### Elastizitätsgesetz

Für die vorliegende Arbeit wurde eine Verzerrungsenergiefunktion vom *Neo-Hooke*-Typ verwendet, die einen volumetrischen Erweiterungsterm zur Beschreibung des Kompressionspunktes enthält. Die Verzerrungsenergiefunktion und das daraus abgeleitete elastische Gesetz wurden für rein elastisches Materialverhalten von *Ehlers & Eipper* [26] vorgeschlagen und in *Eipper* [30] ausführlich diskutiert.

Die Verzerrungsenergiefunktion, modifiziert zur Anwendung im Rahmen einer elastoplastischen Formulierung, lautet

$$\psi^{Se} = \frac{1}{\rho_{0S}^S} \left[ \frac{\mu^S}{2} (I_S^e - 3) - \mu^S \ln(J_{Se}) + \lambda^S (1 - n_p^S)^2 \left( \frac{J_{Se} - 1}{1 - n_p^S} - \ln \frac{J_{Se} - n_p^S}{1 - n_p^S} \right) \right]. \quad (4.43)$$

Hierbei stellt  $I_S^e$  die erste Invariante des linken bzw. rechten elastischen *Cauchy-Green*-Deformationstensors  $\mathbf{B}_{Se}$  bzw.  $\hat{\mathbf{C}}_{Se}$  dar und  $J_{Se} = \det \mathbf{F}_{Se}$  die Determinante des elastischen Anteils des Deformationsgradienten. Der Ausdruck  $n_p^S$  beschreibt den Volumenanteil des Festkörpers auf der Zwischenkonfiguration:

$$n_p^S := \frac{n_{0S}^S}{\det \mathbf{F}_{Sp}}. \quad (4.44)$$

Der Kompressionspunkt ist erreicht, wenn

$$n^S = 1 \quad (4.45)$$

gilt, d. h. auf der aktuellen Konfiguration kein Porenvolumen mehr vorhanden ist. Aus der integrierten Form der Massenbilanz des Festkörpers (3.23) folgt mit der multiplikativen Zerlegung (4.2) des Deformationsgradienten

$$\det \mathbf{F}_{Se} \det \mathbf{F}_{Sp} = \frac{n_{0S}^S}{n^S}. \quad (4.46)$$

Durch Umformung mit der Definition (4.44) des Volumenanteils auf der Zwischenkonfiguration und der Definition der elastischen und plastischen Volumendehnungen  $J_{Se}$  und  $J_{Sp}$

$$\det \mathbf{F}_S = \frac{n_{0S}^S}{n_p^S} \frac{n_p^S}{n^S} =: J_{Sp} J_{Se} \quad (4.47)$$

erhält man für den Kompressionspunkt mit  $n^S = 1$  die alternative Darstellung

$$J_{Se} = n_p^S. \quad (4.48)$$

Die elastische Volumendehnung  $J_{Se}$  ist durch die Porosität auf der Zwischenkonfiguration beschränkt und der Kompressionspunkt erreicht, wenn der volumetrische Anteil

$J_{Se}$  der elastischen Deformation gleich der Porosität auf der Zwischenkonfiguration ist. Der *Kirchhoff*-Spannungstensor  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S$  der Zwischenkonfiguration folgt aus der Funktion  $\psi^{Se}$  durch Ableitung nach dem elastischen Verzerrungstensor  $\hat{\mathbf{F}}_{Se}$  der Zwischenkonfiguration, vgl. Abbildung 4.4

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S = \mu^S (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1}) + \lambda^S (1 - n_p^S)^2 \left( \frac{J_{Se}}{1 - n_p^S} - \frac{J_{Se}}{J_{Se} - n_p^S} \right) \hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1}, \quad (4.49)$$

wobei  $2\hat{\mathbf{K}}_{Se} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1})$  den elastischen *Karni-Reiner*-Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration darstellt. Der zweite *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensor und der *Kirchhoff*-Spannungstensor der aktuellen Konfiguration lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_E^S &= \mu^S (\mathbf{C}_{Sp}^{-1} - \mathbf{C}_S^{-1}) + \lambda^S (1 - n_p^S)^2 \left( \frac{J_{Se}}{1 - n_p^S} - \frac{J_{Se}}{J_{Se} - n_p^S} \right) \mathbf{C}_S^{-1}, \\ \boldsymbol{\tau}_E^S &= \mu^S (\mathbf{B}_{Se} - \mathbf{I}) + \lambda^S (1 - n_p^S)^2 \left( \frac{J_{Se}}{1 - n_p^S} - \frac{J_{Se}}{J_{Se} - n_p^S} \right) \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Hierin stellen  $2\mathbf{K}_{Se} = (\mathbf{B}_{Se} - \mathbf{I})$  und  $2\overset{R}{\mathbf{K}}_{Se} = (\mathbf{C}_{Sp}^{-1} - \mathbf{C}_S^{-1})$  die elastischen *Karni-Reiner*-Verzerrungstensoren der aktuellen und der Referenzkonfiguration dar. Die Elastizitätstensoren ergeben sich aus den zweiten Ableitungen der Funktion  $\psi^{Se}$  nach den jeweiligen Verzerrungsmaßen. Die Elastizitätstensoren der Zwischenkonfiguration  $\overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}_e$ , der Referenzkonfiguration  $\overset{4}{\mathbf{B}}_e$  und der aktuellen Konfiguration  $\overset{4}{\mathbf{C}}_e$  lauten:

$$\begin{aligned} \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}_e &= \alpha \left( \hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \right)^{\overset{23}{T}} + \beta \left( \hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \right), \\ \overset{4}{\mathbf{B}}_e &= \alpha \left( \mathbf{C}_S^{-1} \otimes \mathbf{C}_S^{-1} \right)^{\overset{23}{T}} + \beta \left( \mathbf{C}_S^{-1} \otimes \mathbf{C}_S^{-1} \right), \\ \overset{4}{\mathbf{C}}_e &= \alpha \left( \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)^{\overset{23}{T}} + \beta \left( \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Hierin bezeichnen  $\alpha$  und  $\beta$  skalare Größen (vgl. *Eipper* [30]):

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu^S - \lambda^S (1 - n_p^S) J_{Se} \frac{J_{Se} - 1}{J_{Se} - n_p^S}, \\ \beta &= \lambda^S \left[ (1 - n_p^S) J_{Se} \frac{J_{Se}^2 - 2n_p^S J_{Se} + (n_p^S)^2}{(J_{Se} - n_p^S)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

### 4.3.2 Plastisches Materialverhalten

#### Motivation

Einen zentralen Aspekt der Formulierung der materialabhängigen Gleichungen der Plastizität stellt die Frage dar, auf welcher Konfiguration die konstitutiven Gleichungen eingeführt werden sollen. Aufbauend auf der Arbeit von *Paulun* [72] wird die Frage anhand

der plastischen Volumendehnung  $e_p$  behandelt:

$$e_p = \det \mathbf{F}_{Sp} - 1. \quad (4.53)$$

Für die materielle Ableitung der plastischen Volumendehnung des Festkörperskeletts, gebildet mit dessen Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_S$ , erhält man mit (4.19)

$$(e_p)'_S = (\det \mathbf{F}_{Sp}) \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \cdot (\mathbf{F}_{Sp})'_S = \det \mathbf{F}_{Sp} (\hat{\mathbf{L}}_{Sp} \cdot \mathbf{I}) \quad (4.54)$$

bzw. unter Ausnutzung der Tatsache, daß das innere Produkt eines schiefsymmetrischen Tensors mit einem symmetrischen Tensor gleich dem inneren Produkt zwischen deren symmetrischen Anteilen ist

$$(e_p)'_S = \det \mathbf{F}_{Sp} (\hat{\mathbf{D}}_{Sp} \cdot \mathbf{I}). \quad (4.55)$$

Bei der Betrachtung von metallischen, nichtporösen Materialien wird i. a. von plastischer Inkompressibilität ausgegangen. Die plastische Volumendehnung (4.53) ist somit konstant:

$$e_p = \text{konst.} \quad , \quad (e_p)'_S = 0. \quad (4.56)$$

Es folgt, daß zur Sicherung plastischer Inkompressibilität der plastische Deformationsgeschwindigkeitstensor  $\hat{\mathbf{D}}_{Sp}$  die Form eines Deviators aufweisen muß:

$$\hat{\mathbf{D}}_{Sp} = \hat{\mathbf{D}}_{Sp}^D. \quad (4.57)$$

Für die materielle Zeitableitung der plastischen Volumendehnungen (4.55) folgt:

$$(e_p)'_S = \det \mathbf{F}_{Sp} (\hat{\mathbf{D}}_{Sp}^D \cdot \mathbf{I}) = 0. \quad (4.58)$$

Die Einhaltung der Bedingung (4.56) ist somit sichergestellt. Der hochgestellte Index  $(\dots)^D$  bezeichnet dabei den Deviator eines Tensors. Da, wenn beispielsweise  $\hat{\mathbf{D}}_{Sp}$  auf der Zwischenkonfiguration die Form eines Deviators besitzt, die entsprechende Größe der Referenzkonfiguration  $(\mathbf{E}_{Sp})'_S$  bzw. der aktuellen Konfiguration  $(\mathbf{A}_{Sp})^\Delta$  i. a. nicht mehr die Form eines Deviators aufweist, liegt es nahe, die Fließregel auf der Zwischenkonfiguration einzuführen. Die Formulierungen auf der aktuellen und der Referenzkonfiguration ergeben sich durch die entsprechenden Transporte (vgl. Abbildung 4.3).

Im Falle poröser Festkörperskelette können die Bedingungen (4.56) im allgemeinen nicht aufrechterhalten werden, da plastische Volumendehnungen zugelassen sind, vgl. Kapitel 4.2. Stattdessen ist die Einhaltung des Kompressionspunktes zu fordern. Dies kann alternativ über

$$J_{Se} \geq n_p^S \quad \text{oder} \quad n^S \leq 1 \quad (4.59)$$

formuliert werden. Für die plastische Volumendehnung  $e_p$  folgt mit (4.46) und (4.44)

$$e_p = \det \mathbf{F}_{Sp} - 1 \leq \frac{\det \mathbf{F}_S}{n_p^S} - 1. \quad (4.60)$$

Es darf somit lediglich der Porenraum, der nach Abzug der elastischen Volumendeformation verbleibt, durch plastische Deformation geschlossen werden. Im Falle geschlossener Poren darf aufgrund der materiellen Inkompressibilität der Festkörpermatrix keine weitere kontraktante plastische Volumendehnung ( $(e_p)'_S < 0$ ) mehr auftreten. Dilatante und volumenneutrale plastische Volumendehnungen, also  $(e_p)'_S \geq 0$ , bleiben jedoch nach wie vor möglich. Die Poren können sich sowohl durch elastische als auch durch plastische Deformationen wieder öffnen. Für den plastischen Deformationsgeschwindigkeitstensor  $\hat{\mathbf{D}}_{Sp}$  folgt die Bedingung

$$\boxed{\lim_{n^S \rightarrow 1} \hat{\mathbf{D}}_{Sp} \cdot \mathbf{I} \geq 0} . \quad (4.61)$$

Die beiden im Falle plastischer Inkompressibilität zu erfüllenden Gleichungen (4.56) sind für den Fall poröser Festkörper durch die Pendanten (4.60) und (4.61) zu ersetzen.

Aufgrund der Struktur der Gleichung (4.61), die ebenfalls die Spur  $\hat{\mathbf{D}}_{Sp} \cdot \mathbf{I}$  des plastischen Deformationsgeschwindigkeitstensors enthält, liegt es auch im Falle poröser Festkörper aus den gleichen Gründen wie im Falle der klassischen Metallplastizität nahe, die Materialgleichungen auf der Zwischenkonfiguration einzuführen. Darüber hinaus ist eine Formulierung der konstitutiven Ansätze der Plastizität in Abhängigkeit des Volumenanteils  $n^S$  und somit des gesamten Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_S$  nötig, um die Bedingung (4.61) sicherstellen zu können.

Der Effekt des Kompressionspunktes soll an einem eindimensionalen Beispiel, bestehend aus einer porösen Festkörpermatrix mit einer einfachen, periodischen Struktur ohne Porenfluid unter horizontaler Belastung (vgl. Abbildung 4.6) verdeutlicht werden. Die grau unterlegten Flächen entsprechen der Festkörpermatrix. Eine Deformation entspricht der Änderung des Abstands der Strukturelemente, deren Inkompressibilität sich in der auf allen Konfigurationen gleichen Dicke  $r$  äußert. Die Länge der Struktur sei konstant.

Die Porosität  $1 - n^S$  entspricht in Abbildung 4.6 dem Verhältnis der Flächen zwischen den Strukturelementen zur Gesamtfläche. Da das Matrixmaterial selbst inkompressibel angenommen wurde, reduziert sich der Volumenanteil  $n^S$  auf das Verhältnis der Breite der Strukturelemente  $r$  zur Periodenlänge  $d$ . Die Porosität lautet somit

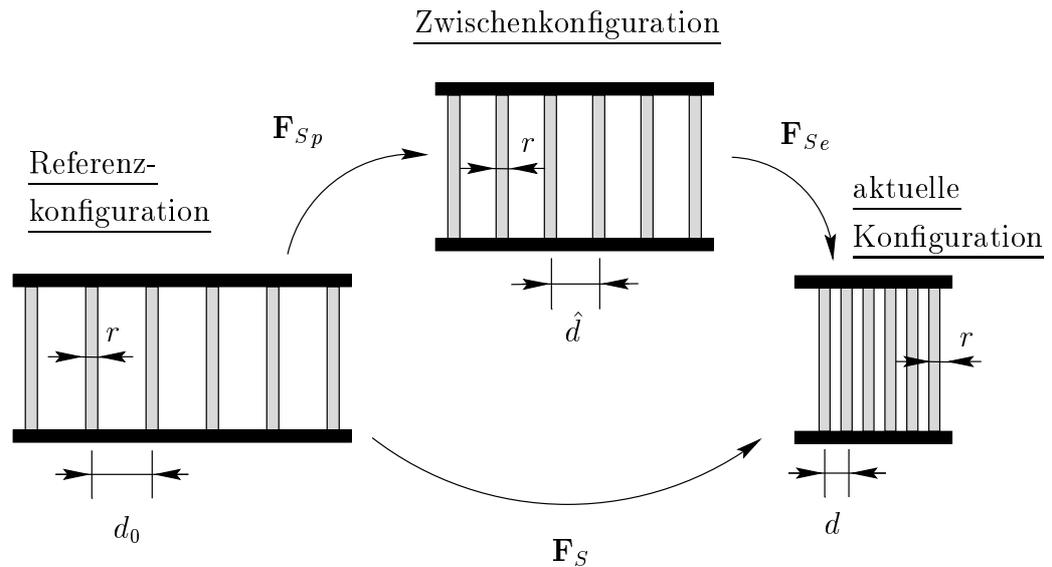
$$1 - n^S = 1 - \frac{r}{d}. \quad (4.62)$$

Zuerst wird die aktuelle Konfiguration betrachtet. Die gesamte Volumendehnung ist durch den Porenschluß begrenzt, d. h. die Elemente der Struktur dürfen sich maximal berühren und es muß  $r \leq d$  gelten. Durchdringung und Kompression der Strukturelemente selbst sind ausgeschlossen. Die Porosität muß den beiden Ungleichungen

$$1 \geq 1 - n^S = 1 - \frac{n_{0S}^S}{\det \mathbf{F}_S} \geq 0 \quad (4.63)$$

genügen. Für das Beispiel erhält man mit  $n_{0S}^S = r/d_0$  und  $\det \mathbf{F}_S = d/d_0$

$$r \leq d, \quad (4.64)$$



**Abbildung 4.6:** Eindimensionales Beispiel mit periodischer Struktur zur Verdeutlichung der strukturellen Verfestigung

was auch aus Abbildung 4.6 umgehend ersichtlich ist. Auf der Zwischenkonfiguration muß entsprechend  $r \leq \hat{d}$  gelten. Mit  $\hat{d} \geq d$ , d. h. im Fall der Kompression ist die Beziehung jedoch bereits über (4.64) sichergestellt. Man erhält keine neue Aussage. Der Kompressionspunkt kann ausschließlich durch Betrachtung des Volumenanteils bzw. der Porosität auf der aktuellen Konfiguration sichergestellt werden.

**Anmerkung:** Die Einhaltung des Kompressionspunktes stellt keine konstitutive Annahme dar, sondern folgt vielmehr aus der Einhaltung der Massenbilanz des Festkörpers. Dies wird in der Form (4.45) deutlich, die direkt aus der Massenbilanz des Festkörpers (3.23) folgt. Da die Abhängigkeit der konstitutiven Gleichung der Plastizität von der Gesamtdeformation aus der Struktur resultiert, wird sie im folgenden als „strukturelle Verfestigung“ bezeichnet, im Gegensatz zur Verfestigung des Matrixmaterials, der „materiellen Verfestigung“. Die strukturelle Verfestigung stellt dabei keinen Ersatz für die materielle Verfestigung dar, sondern vielmehr eine im Bereich finiter Deformation poröser Medien notwendige Ergänzung des Materialgesetzes. So sind ihr bereits durch ihre reversible Natur enge Grenzen bei der Modellierung realer Werkstoffe gesetzt, vgl. Kapitel 7.3.

### 4.3.3 Struktur der Materialgleichungen

Bevor die eigentlichen konstitutiven Gleichungen zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens behandelt werden, folgt zunächst ein kurzer Überblick über die Struktur bzw. allgemeine Formulierung der geschwindigkeitsunabhängigen, fließflächenbehaferten, isotropen Plastizität. Aufgrund der Betrachtungen im vorhergehenden Abschnitt werden die folgenden Ausführungen vorwiegend in Größen der Zwischenkonfiguration dargestellt. Die

entsprechenden Formulierungen auf der Referenzkonfiguration bzw. der aktuellen Konfiguration folgen durch Transport.

Der Bereich rein elastischen Materialverhaltens, auch als elastischer Bereich bezeichnet, und der Bereich elastoplastischen Materialverhaltens werden durch die Fließbedingung  $F$  getrennt:

$$\begin{aligned} F(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S, \mathbf{q}, \mathbf{r}) &< 0 & , & \quad \text{elastisch} \\ F(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S, \mathbf{q}, \mathbf{r}) &= 0 & , & \quad \text{plastisch} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Die im Spaltenvektor  $\mathbf{q}$  subsummierten Parameter beschreiben die Abhängigkeit der Fließbedingung von der plastischen Deformationsgeschichte (materielle Verfestigung) und die im Spaltenvektor  $\mathbf{r}$  enthaltenen Parameter von der gesamten Deformation  $\mathbf{F}_S$  (strukturelle Verfestigung). Unter die erstgenannte Gruppe  $\mathbf{q}$  fallen die klassischen Verfestigungsmodellierungen die i. a. in Abhängigkeit der hydrostatischen und deviatorischen plastischen Verzerrungspfade  $p^D$  und  $p^V$

$$p^D = \int \frac{2}{3} \hat{\mathbf{D}}_{Sp}^D \cdot \hat{\mathbf{D}}_{Sp}^D dt \quad , \quad p^V = \int \frac{1}{3} \hat{\mathbf{D}}_{Sp} \cdot \mathbf{I} dt \quad (4.66)$$

oder der plastischen Arbeit  $W_p$

$$W_p = \int \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S \cdot \hat{\mathbf{D}}_{Sp} dt \quad (4.67)$$

formuliert werden. Die Darstellung der Menge aller Punkte im Spannungsraum, die der Bedingung  $F(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = 0$  genügen wird als Fließfläche bezeichnet. Unter der Voraussetzung isotropen Materialverhaltens kann die Fließbedingung  $F$  in Abhängigkeit der ersten, zweiten deviatorischen und dritten deviatorischen Invarianten des *Kirchhoff*-Spannungstensors der Zwischenkonfiguration formuliert werden

$$F = F(\hat{\mathbb{I}}, \hat{\mathbb{I}}^D, \hat{\mathbb{I}}^D, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \quad (4.68)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{I}} &= \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S \cdot \mathbf{I}, \\ \hat{\mathbb{I}}^D &= \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^{SD} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^{SD}, \\ \hat{\mathbb{I}}^D &= \frac{1}{3} \det \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^{SD} = \frac{1}{3} \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^{SD} \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^{SD} \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^{SD}). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im folgenden für die Darstellung die Abhängigkeit vom gesamten Spannungstensor  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S$  beibehalten. Im Falle rein elastischen Materialverhaltens, also für  $F < 0$ , wird die Spannungs-Dehnungsbeziehung allein durch das elastische Gesetz (4.31) bei konstanten plastischen Deformationen bestimmt. Für den Fall, daß die Fließbedingung (4.65) erfüllt ist, ist die Entwicklung plastischer Deformation zusätzlich an die Belastungsbedingung gekoppelt:

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)_p^\nabla \begin{cases} < 0 & : & \text{Entlastung,} \\ = 0 & : & \text{neutrale Belastung,} \\ > 0 & : & \text{plastische Belastung.} \end{cases} \quad (4.70)$$

$(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)_p^\nabla$  stellt dabei die untere plastische *Lie*-Ableitung des *Kirchhoff*-Spannungstensors der Zwischenkonfiguration, d. h. die Spannungsänderung bei festgehaltener Zwischenkonfiguration, dar und unter der Voraussetzung, daß  $F(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = 0$  gilt,  $\partial F(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S, \mathbf{q}, \mathbf{r})/\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S$  die Normale an die Fließfläche im Spannungsraum.

Für den Fall, daß sowohl die Fließbedingung (4.65) als auch die Belastungsbedingung (4.70) erfüllt sind, wird die Entwicklung der eintretenden plastischen Deformation durch die Fließregel

$$\hat{\mathbf{D}}_{Sp} = \lambda \frac{\partial G(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S, \mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \quad (4.71)$$

bestimmt und die Entwicklung der isotropen materiellen Verfestigung durch deren Evolutionsgleichungen  $\mathbf{Q}$ :

$$(\mathbf{q})'_S = \lambda \mathbf{Q}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{D}}_{Sp}). \quad (4.72)$$

Die Funktion  $G$  stellt das plastische Potential dar. Im Falle der Isotropie können die Entwicklungsgleichungen (4.71) und (4.72) ebenso wie die Fließbedingung (4.68) in Abhängigkeit der Invarianten dargestellt werden. Für assoziierte Plastizität geht das plastische Potential  $G$  in die Fließfläche  $F$  über. Die skalare Variable  $\lambda$  wird als plastischer Parameter oder Konsistenzparameter bezeichnet. Letztere Bezeichnung resultiert aus der Tatsache, daß  $\lambda$  durch die sogenannte Konsistenzbedingung bestimmt werden kann.

Da die Entwicklung plastischer Deformationen an die Fließbedingung gekoppelt ist und somit nur für  $F = 0$  stattfinden kann, muß die Fließbedingung auch während des gesamten plastischen Deformationsprozesses eingehalten werden. Es folgt daraus die Konsistenzbedingung unter Beachtung der strukturellen Verfestigung:

$$[F(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S, \mathbf{q}, \mathbf{r})]'_S = 0 = \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)'_S + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot (\mathbf{q})'_S + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r})'_S. \quad (4.73)$$

Einsetzen der unteren plastischen *Lie*-Ableitung des *Kirchhoff*-Spannungstensors (4.39)

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)_p^\nabla + 2 \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_{Sp} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot (\mathbf{q})'_S + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r})'_S \quad (4.74)$$

und der Evolutionsgleichungen (4.71) für  $\hat{\mathbf{D}}_{Sp}$  und (4.72) für  $\mathbf{q}$  liefert

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)_p^\nabla + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'_S}{2 \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S \right) \cdot \frac{\partial G}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{Q}}. \quad (4.75)$$

Somit kann der Konsistenzparameter  $\lambda$  in den Evolutionsgleichungen (4.71) und (4.72) ersetzt werden.

Der elastoplastische Tangentenmodul  $\hat{\mathbf{C}}_{ep}$ , auch als Gesamtstofftensor bezeichnet, verknüpft den gesamten Verzerrungsgeschwindigkeitstensor  $(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_S)_p^\Delta$  mit der unteren plastischen *Lie*-Ableitung des *Kirchhoff*-Spannungstensors  $(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)_p^\nabla$ :

$$(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)_p^\nabla = \hat{\mathbf{C}}_{ep}^4 (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_S)_p^\Delta. \quad (4.76)$$

Die inkrementelle Materialgleichung entspricht dabei dem Pendant (4.41) für den Fall rein elastischen Materialverhaltens. Die Elastoplastizitätstensoren auf den verschiedenen Konfigurationen,  $\overset{4}{\mathbf{B}}_{ep}$  auf der Referenzkonfiguration,  $\overset{4}{\mathbf{C}}_{ep}$  auf der Zwischenkonfiguration und  $\overset{4}{\mathbf{C}}_{ep}$  auf der aktuellen Konfiguration, besitzen das gleiche Transportverhalten wie die entsprechenden Elastizitätstensoren, vgl. Abbildung 4.5.

Zur Herleitung der Elastoplastizitätstensoren wird die additive Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeiten (4.26) in die Elastizitätsbeziehung (4.41) eingesetzt,

$$(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)^\nabla = \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}_e (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_S - \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Sp})^\Delta, \quad (4.77)$$

und ergibt mit der Fließregel (4.71) und  $\lambda$  aus (4.75)

$$(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)^\nabla = \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}_e \left[ (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_S)^\Delta - \frac{1}{h} \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)^\nabla + \frac{\partial F}{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'_S \right) \frac{\partial G}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \right]. \quad (4.78)$$

Der skalare Faktor  $h$

$$h := 2 \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S \right) \cdot \frac{\partial G}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{Q} \quad (4.79)$$

wird auch als Verfestigungsmodul bezeichnet, in Analogie an die Form des elastoplastischen Tangentenmoduls der *von-Mises*-Plastizität. Da die Parameter  $\mathbf{r}$  von den Gesamtverzerrungen abhängen, erhält man mit

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'_S = \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_S} \cdot (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_S)^\Delta \quad (4.80)$$

aus (4.78)

$$(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)^\nabla = \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}_e \left[ (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_S)^\Delta - \frac{1}{h} \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)^\nabla + \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_S} \cdot (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_S)^\Delta \right) \frac{\partial G}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \right]. \quad (4.81)$$

Auflösen nach dem Ausdruck  $(\partial F / \partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S) \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S)^\nabla$  und Einsetzen in (4.81) liefert schließlich nach einigen Umformungen den inkrementellen Zusammenhang der Form (4.76) zwischen der Spannungsänderung und den gesamten Verzerrungsgeschwindigkeiten mit dem elastoplastischen Tangentenmodul der Zwischenkonfiguration unter Beachtung der strukturellen Verfestigung:

$$\overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}_{ep} = \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}_e - \frac{\overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}_e \frac{\partial G}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \otimes \left[ \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}_e \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} + \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_S} \right]}{h + \overset{4}{\hat{\mathbf{C}}}_e \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \otimes \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} \right)}. \quad (4.82)$$

**Anmerkung:** Unter der Voraussetzung der Invertierbarkeit der elastischen Beziehung (4.31), die vom hier gewählten Ansatz (4.49) von *Eipper* [30] gewährleistet wird, können

die Gesamtverzerrungen  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_S$  in Abhängigkeit der Spannungen  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S$  und der plastischen Verzerrungen  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{Sp}$  angegeben werden:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S = \bar{\mathbf{T}}^S(\hat{\mathbf{\Gamma}}_S, \hat{\mathbf{\Gamma}}_{Sp}) \rightarrow \hat{\mathbf{\Gamma}}_S = \bar{\mathbf{T}}^{S-1}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S, \hat{\mathbf{\Gamma}}_{Sp}). \quad (4.83)$$

Hierbei bezeichnet  $\bar{\mathbf{T}}^S$  den funktionalen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen und  $\bar{\mathbf{T}}^{S-1}$  die entsprechende inverse Formulierung. Durch Einsetzen der inversen Formulierung in die Fließbedingung geht die Abhängigkeit der Parameter  $\boldsymbol{r}$  von den Gesamtverzerrungen über in eine Abhängigkeit von den Spannungen und den plastischen Verzerrungen:

$$\boldsymbol{r}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_S) \rightarrow \boldsymbol{r}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S, \hat{\mathbf{\Gamma}}_{Sp}). \quad (4.84)$$

Die Abhängigkeit der Parameter  $\boldsymbol{r}$  kann somit identisch wie die Abhängigkeit der Parameter  $\boldsymbol{q}$  dargestellt werden. In der Fließbedingung (4.65) kann somit formal die explizite Abhängigkeit von den Gesamtverzerrungen vermieden werden.

Motiviert durch die physikalische Anschauung wird im folgenden die Formulierung in Abhängigkeit der Gesamtverzerrungen beibehalten. Sie bietet nicht nur Vorteile bei der Formulierung der konstitutiven Beziehungen, vgl. Kapitel 4.3.4 und 4.3.5, sondern darüber hinaus auch bei der numerischen Implementierung. Da  $\boldsymbol{r}$  keine inneren Variablen darstellen, werden somit auch keine Evolutionsgleichungen und der damit verbundene Aufwand für  $\boldsymbol{r}$  benötigt, vgl. Kapitel 6.

#### 4.3.4 Fließbedingung

Die verwendete Fließbedingung zur Beschreibung poröser Materialien wurde von *Ehlers* entwickelt und in [22] ausführlich diskutiert. An dieser Stelle wird lediglich die Fließbedingung mit ihren wichtigsten Eigenschaften und den durchgeführten Änderungen vorgestellt.

Die Fließbedingung lautet

$$F = \hat{\Phi}^{1/2} + \beta \hat{\mathbf{I}} + \varepsilon \hat{\mathbf{I}}^2 - \kappa \quad (4.85)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= \hat{\mathbf{I}}^D (1 + \gamma \hat{\vartheta})^m + \frac{1}{2} \alpha \hat{\mathbf{I}}^2 + \delta^2 \hat{\mathbf{I}}^4 \\ \hat{\vartheta} &= \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{I}}^D / \hat{\mathbf{I}}^D{}^{3/2}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Durch Einführung der *Reußschen* Variablen,  $\hat{r}$  und  $\hat{\Theta}$

$$\hat{r} = \sqrt{2 \hat{\mathbf{I}}^D}, \quad \hat{\Theta} = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{\sqrt{27}}{2} \frac{\hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{I}}^D}{\hat{\mathbf{I}}^D}\right), \quad (4.87)$$

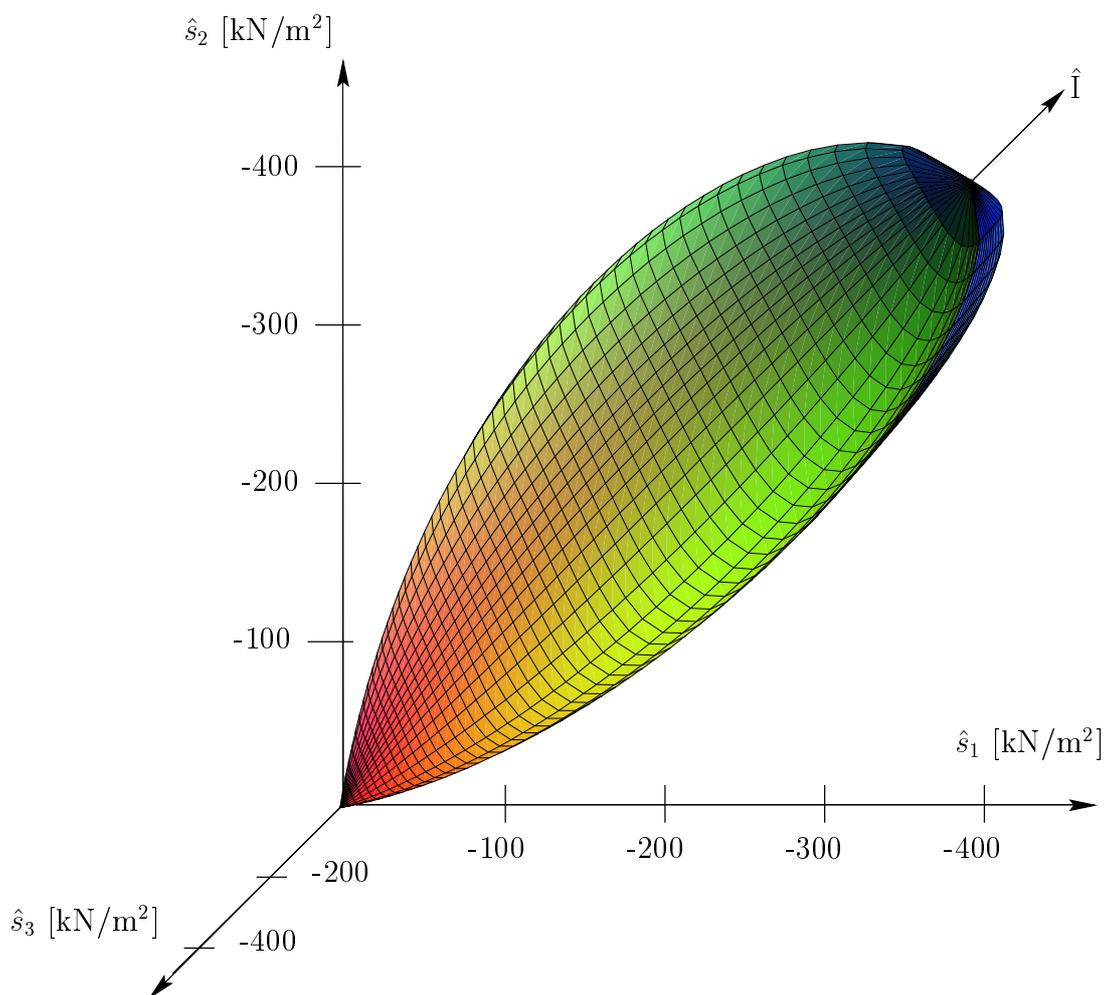
im folgenden als Fließradius und *Lodewinkel* bezeichnet, läßt sich die Beschreibung der Fließfläche multiplikativ in zwei Anteile aufspalten:

$$\hat{r}(\hat{\Theta}, \hat{\mathbf{I}}) = F_h(\hat{\mathbf{I}}) F_d(\hat{\Theta}). \quad (4.88)$$

Dabei wird der Fließradius  $\hat{r}$ , der den Abstand der Fließfläche von der hydrostatischen Achse im Hauptspannungsraum darstellt, in Abhängigkeit der ersten Invarianten  $\hat{I}$  über die Funktion  $F_h$  und in Abhängigkeit des *Lodewinkels*  $\hat{\Theta}$  über die Funktion  $F_d$  dargestellt:

$$\begin{aligned} F_h &= \sqrt{2} \left[ (\varepsilon^2 - \delta^2) \hat{I}^4 + 2\beta\varepsilon \hat{I}^3 + \left( \beta^2 - \frac{\alpha}{2} - 2\varepsilon\kappa \right) \hat{I}^2 - 2\beta\kappa \hat{I} + \kappa^2 \right]^{1/2}, \\ F_d &= \left[ 1 + \frac{2}{\sqrt{27}} \gamma \sin(3\hat{\Theta}) \right]^{-m/2}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

In Abbildung 4.7 ist die Fließbedingung im Hauptspannungsraum für einen kohäsionslosen Sand mit Materialparametern nach *Ehlers & Müllerschön* [29] dargestellt.



**Abbildung 4.7:** Fließbedingung von *Ehlers* [22] für einen kohäsionslosen Sand mit den Parametern nach *Ehlers & Müllerschön* [29]:  $\alpha = 0,001$ ,  $\beta = 0,25$ ,  $\gamma = 1,664$ ,  $m = 0,569$ ,  $\delta = 1,53 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kN}$ ,  $\varepsilon = 2,65 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{kN}$ ,  $\kappa = 1,0 \text{ m}^2/\text{kN}$ .

Durch die multiplikative Darstellung (4.88) der Fließfläche sind die hydrostatische und die deviatorische Ebene einer getrennten Betrachtung zugänglich.

### Hydrostatische Ebene

Die Form der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene wird durch die fünf Parameter  $\{\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \kappa\}$  bestimmt. Im Rahmen der klassischen isotropen Verfestigung können prinzipiell alle fünf Parameter beispielsweise in Abhängigkeit der plastischen Vergleichsdehnungen  $p^D$  und  $p^V$  aus (4.66) oder in Abhängigkeit der plastischen Arbeit  $W_p$  aus (4.67) formuliert werden. Die im Rahmen der Beispiele in Kapitel 7 eingesetzte materielle Verfestigung wurde *Ehlers & Müllerschön* [29] entnommen. Im folgenden wird lediglich die Formulierung der strukturellen Verfestigung vorgestellt. Bei hochporösen Materialien, wie z. B. Polymerschäumen, genügt diese im allgemeinen zur Beschreibung des plastischen Verfestigungsverhaltens, vgl. Kapitel 7.3.

Die Tatsache, daß Reibungsmaterialien bei höheren hydrostatischen Spannungen auch eine erhöhte Scherfestigkeit aufweisen, ist zwar ebenfalls eine Eigenschaft, die auf der Struktur des Materials beruht, jedoch kein Verfestigungseffekt im eigentlichen Sinne, weder struktureller noch materieller Natur. Während Verfestigung im hier verwendeten Sinne die Änderung der Fließbedingung beschreibt, resultiert die erhöhte Scherfestigkeit aus deren Form. Sie stellt vielmehr einen verfestigungsähnlichen Effekt dar.

Für die weiteren Betrachtungen genügt es aufgrund der multiplikativen Aufspaltung (4.88) der Fließfläche, die hydrostatische Ebene bei konstantem *Lodewinkel* zu betrachten, z. B. für den Fall der einfachen Scherung mit  $\hat{\Theta} = 0^\circ$ :

$$\hat{r}(\hat{\Theta}, \hat{\mathbb{I}}) \Big|_{\hat{\Theta}=0^\circ} =: \hat{r}_0(\hat{\mathbb{I}}). \quad (4.90)$$

Zur Beschreibung des Kompressionspunktes ist es nun nötig, daß die Fließfläche im Hauptspannungsraum für sich schließende Poren, also für zunehmenden Volumenanteil  $n^S$  des Festkörpers, den Bereich immer größerer hydrostatischer Spannungen umfaßt und die entsprechenden Spannungszustände somit im elastischen Bereich liegen. Für den Grenzzustand vollständig geschlossener Poren muß die Fließfläche den Bereich unendlicher Drücke umfassen. Unter Beachtung der Konvexität der Fließbedingung und der Forderung nach Erhalt des Schnittpunktes der Fließfläche mit der hydrostatischen Achse im Zugbereich läßt sich dies durch eine durchweg negative Steigung der Fließbedingung sicherstellen:

$$\boxed{\lim_{n^S \rightarrow 1} \frac{\partial F_h(\hat{\mathbb{I}})}{\partial \hat{\mathbb{I}}} \leq 0}. \quad (4.91)$$

Eine Möglichkeit zur geeigneten Erweiterung der Fließbedingung von *Ehlers* liegt darin, die Abwärtskompatibilität des Modells zu nutzen. So hat *Ehlers* in [22] gezeigt, daß für spezielle Wahl der Materialparameter die Fließbedingung auch die Darstellung einfacherer bekannter Fließkriterien beinhaltet.

Mit der speziellen Wahl der Parameter

$$\alpha = \delta = \varepsilon = 0 \quad (4.92)$$

folgt für den hydrostatischen Anteil der Fließfläche  $F_h$  die Form

$$F_h(\hat{\mathbb{I}}) = \sqrt{2}(\kappa - \beta \hat{\mathbb{I}}), \quad (4.93)$$

die vor allem als Versagenskriterium geeignet ist. Es handelt sich bei der Form (4.93) um das Kriterium nach *Drucker & Prager* [19], das im Hauptspannungsraum einen im Druckbereich offenen Kegel beschreibt. Für die spezielle Wahl der Parameter

$$\beta = \delta = \varepsilon = 0 \quad (4.94)$$

geht der hydrostatische Anteil  $F_h$  der Fließbedingung in das Kriterium von *Green* [35] zur Beschreibung duktiler Materialien über:

$$\left(\hat{\mathbb{I}}^D + \frac{\alpha}{2} \hat{\mathbb{I}}^2\right)^{1/2} - \kappa = 0. \quad (4.95)$$

Wird zusätzlich noch der Parameter  $\alpha$  zu null gesetzt, erhält man schließlich nach kurzer Umformung die Fließbedingung nach *von-Mises* [94]:

$$\hat{\mathbb{I}}^D - \kappa^2 = 0. \quad (4.96)$$

Da das *Drucker & Prager*-Kriterium die zur Beschreibung des Kompressionspunktes gewünschten bzw. benötigten Eigenschaften erfüllt, liegt es nahe, für den hydrostatischen Anteil  $F_h$  der Fließbedingung den Übergang von der ursprünglichen Form (4.89) zur entsprechenden Formulierung des *Drucker & Prager*-Kriteriums durchzuführen. Es wurde der folgende Ansatz gewählt

$$F_h = \sqrt{2} \left[ (\tilde{\varepsilon}^2 - \tilde{\delta}^2) \hat{\mathbb{I}}^4 + 2\beta \tilde{\varepsilon} \hat{\mathbb{I}}^3 + \left( \beta^2 - \frac{\tilde{\alpha}}{2} - 2\tilde{\varepsilon} \kappa \right) \hat{\mathbb{I}}^2 - 2\beta \kappa \hat{\mathbb{I}} + \kappa^2 \right]^{1/2}. \quad (4.97)$$

mit

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 h(n^S), \quad \tilde{\delta} = \delta_0 h(n^S), \quad \tilde{\alpha} = \alpha_0 h(n^S). \quad (4.98)$$

Die Funktion  $h(n^S)$  muß dabei den folgenden Eigenschaften genügen:

$$\begin{aligned} h(n_{0S}^S) &= 1, \\ h(1) &= 0, \\ h(0) &= \infty. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Die erste Bedingung stellt die Abwärtskompatibilität zur Formulierung ohne struktureller Verfestigung sicher und die zweite Bedingung den Übergang des hydrostatischen Anteils der *Ehlers*-Fließbedingung (4.89) zum *Drucker & Prager*-Kriterium (4.93) bei Erreichen des Kompressionspunktes mit  $n^S = 1$ . Die dritte Bedingung besagt, daß die Festigkeit der Struktur bei unendlicher Ausdehnung auf null absinkt. Sie ist bei der Formulierung

von Reibungsmaterialien eher von theoretischem Interesse, da sie in der Natur oftmals nur eine geringe bis gar keine Kohäsion aufweisen und es somit kaum zu nennenswerten Volumenaufweitungen kommen kann, ohne daß Materialversagen eintritt.

**Anmerkung:** In der Praxis ist es nicht nötig, auch den Parameter  $\alpha$  zu null zu setzen. Die Auswertung der Bedingung (4.91) liefert, daß die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  der Ungleichung

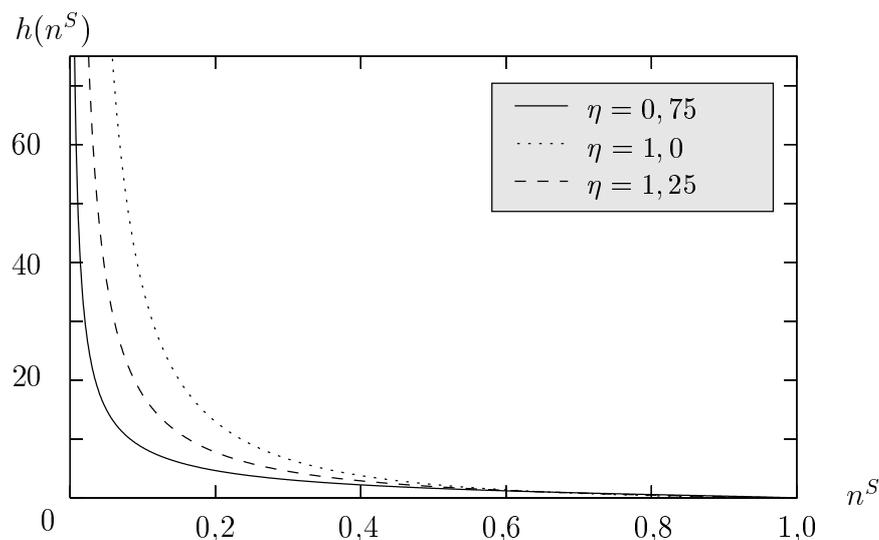
$$\beta^2 \geq \frac{\alpha}{2}, \quad (4.100)$$

genügen müssen. Für den Fall  $\alpha = 0$  entwickelt sich zudem die Kappe im Zugbereich zu einer Spitze. Die Ableitung der Fließbedingung ist an dieser Stelle nicht mehr stetig, was speziell bei der numerischen Lösung der Plastizität zu Problemen führen kann.

Für die Funktion  $h(n^S)$  wurde der Ansatz

$$h(n^S) = \left( \frac{n_{0S}^S}{n^S} \frac{1 - n^S}{1 - n_{0S}^S} \right)^\eta \quad (4.101)$$

gewählt mit dem Materialparameter  $\eta$ . Die Funktion  $h$  ist in Abbildung 4.8 über dem Volumenanteil  $n^S$  für verschiedene Werte von  $\eta$  aufgetragen.

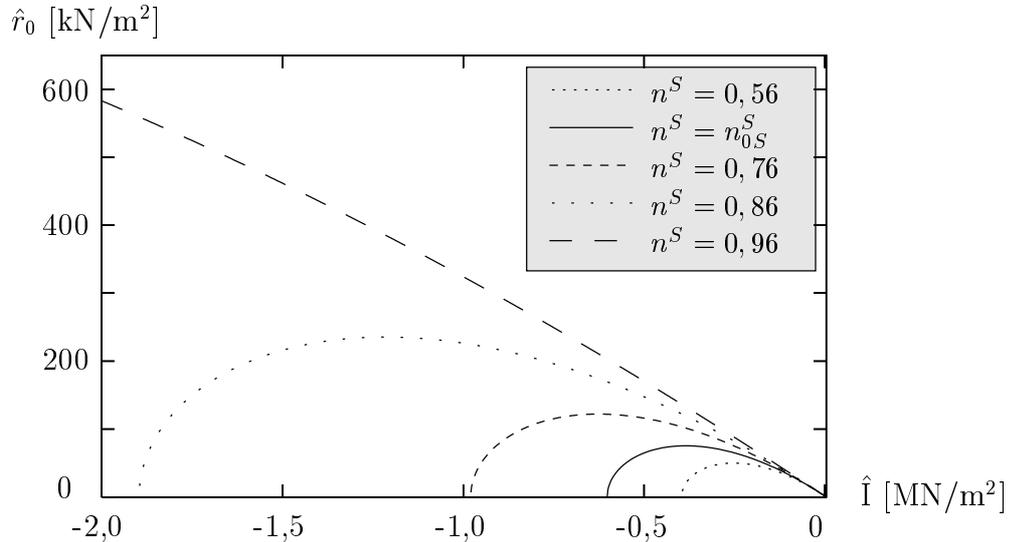


**Abbildung 4.8:** Funktion  $h(n^S)$  zur Beschreibung der Verfestigung in Abhängigkeit des Volumenanteils  $n^S$

Es ist mit komplexeren Ansätzen zwar möglich, das Verhalten realer Werkstoffe unter Verwendung zusätzlicher Parameter genauer zu beschreiben, jedoch um den Preis entsprechend höherer Anforderungen an die im Bereich von Reibungsmaterialien ohnehin sehr aufwendige Versuchstechnik und Parameterbestimmung.

In Abbildung 4.9 sind die Fließradien  $\hat{r}_0$  in der hydrostatischen Ebene in Abhängigkeit der ersten Invarianten  $\hat{I}$  des *Kirchhoff*-Spannungstensors der Zwischenkonfiguration für

verschiedene Volumenanteile  $n^S$  aufgetragen. Der Volumenanteil in der Referenzkonfiguration beträgt beim gewählten Beispiel  $n_{0S}^S = 0,66$  und der Parameter  $\eta$  eins. Die Annäherung der Form der Fließbedingung an das Kriterium von *Drucker & Prager* für steigende Volumenanteile bzw. sich schließende Poren ist deutlich zu erkennen. Auch die Verkleinerung der Fließfläche bei großer Volumenaufweitung ist modelliert. Dieser Bereich ist vorwiegend bei hochporösen, duktilen Materialien von Bedeutung.



**Abbildung 4.9:** Darstellung der strukturellen Verfestigung der Fließfläche für sich schließende Poren in Abhängigkeit des Volumenanteils  $n^S$  über der ersten Invarianten  $\hat{I}$

**Anmerkung:** Zur Beschreibung von Metall- oder Polymerschäumen ist diese Formulierung nur bedingt geeignet, da sie sich nur in einem gewissen Bereich wie Reibungsmaterialien verhalten. Bei steigenden hydrostatischen Spannungen steigt auch die aus der Struktur der Materialien resultierende Scherfestigkeit nahezu beliebig an. Ab einem gewissen Wert tritt eine Sättigung ein, bedingt durch den Maximalwert der Scherfestigkeit des reinen Matrixmaterials. Es ist in diesem Fall im Bereich großer hydrostatischer Drücke eine Annäherung der Form der Fließbedingung an den *von-Mises*-Typ (4.96) entsprechend dem reinen Matrixmaterial zu erwarten. Eine Modellierung ist durch Nutzung der Abwärtskompatibilität zur *von Mises*-Formulierung (4.96) im Rahmen der strukturellen Verfestigung ebenfalls möglich. Hierbei sind zusätzlich zur bisherigen Formulierung die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  mit einzubeziehen. Bei echten Reibungsmaterialien spielt dieser Effekt eine geringere Rolle, vorausgesetzt die Zerstörung der einzelnen granularen Körner wird ausgeschlossen.

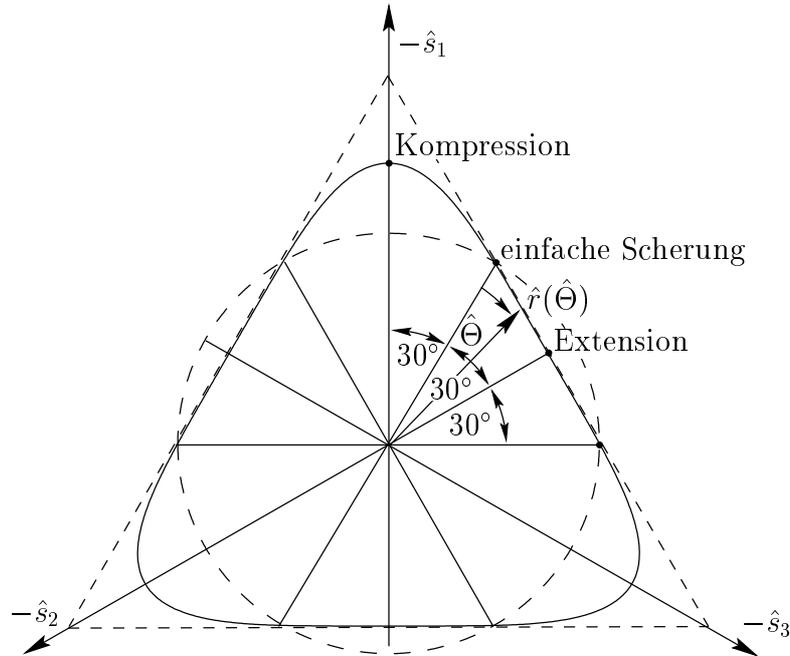
## Deviatorebene

Die Form der Fließbedingung in der Deviatorebene wird durch die Parameter  $\{m, \gamma\}$  bestimmt. Zur weiteren Betrachtung wird, analog dem Vorgehen in der hydrostatischen

Ebene, die erste Invariante  $\hat{I}$  konstant gehalten:

$$\hat{r}(\hat{\Theta}, \hat{I}) \Big|_{\hat{I}=\text{konst.}} = F_h(\hat{I}) \Big|_{\hat{I}=\text{konst.}} \quad F_d(\hat{\Theta}) =: \hat{r}_d(\hat{\Theta}). \quad (4.102)$$

Durch einen Schnitt durch den Fließkörper in Abbildung 4.7 senkrecht zur hydrostatischen Achse erhält man die Darstellung der Fließbedingung in der Deviatorebene in Abb. 4.10.



**Abbildung 4.10:** Form der Fließbedingung (4.89) in der Deviatorebene mit den Parametern  $m = 0,569$  und  $\gamma = 1,664$ .

Die Fließradien  $\hat{r}_d$  für die speziellen *Lodewinkel*  $\hat{\Theta} = 0^\circ + n \cdot 60^\circ$ ,  $\hat{\Theta} = 30^\circ + n \cdot 120^\circ$  und  $\hat{\Theta} = 90^\circ + n \cdot 120^\circ$  werden als Radius einfacher Scherung, Extensionsradius und Kompressionsradius bezeichnet:

$$\begin{aligned} \hat{r}_s &:= \hat{r}(\hat{I}, n \cdot 60^\circ), \\ \hat{r}_t &:= \hat{r}(\hat{I}, 30^\circ + n \cdot 120^\circ) = \hat{r} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{27} \gamma}\right)^{-m/2}, \\ \hat{r}_c &:= \hat{r}(\hat{I}, 90^\circ + n \cdot 120^\circ) = \hat{r} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{27} \gamma}\right)^{-m/2}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

In Abbildung 4.10 ist die für Reibungsmaterialien typische Abweichung vom Radius der einfachen Scherung  $\hat{r}_s$  in Richtung der Extensions- und Kompressionsradien  $\hat{r}_t$  und  $\hat{r}_c$  zu erkennen. Das Verhalten einiger Materialien nähert sich im Kompressionspunkt, der nicht mit dem Kompressionsradius zu verwechseln ist, entsprechend obigen Überlegungen dem Verhalten des reinen Matrixmaterials an. Dies bedingt speziell bei der Beschreibung von Metall- und Polymerschäumen die Annäherung der Form der Fließbedingung an die Form des *von Mises*-Kriteriums. Mit der durch Experimente fundierten Annahme, die Form der

Fließbedingung solle der Dreiecksform möglichst nahe kommen, vgl. Ehlers [22] und Zitate darin, lassen sich aus der Forderung nach Konvexität (Grenzfall) die Bedingungen

$$\gamma = \frac{\sqrt{27}}{9m-2} \quad , \quad m \geq \frac{6}{11} \quad (4.104)$$

ableiten. Der Ansatz für die Entwicklung von  $m$  in Abhängigkeit des Volumenanteils des Festkörpers  $n^S$  zur Modellierung des Übergangs lautet

$$\tilde{m} = m_0 h_d(n^S) \quad (4.105)$$

mit der monotonen und stetigen Funktion  $h_d(n^S)$ . Im Gegensatz zur strukturellen Verfestigung in der hydrostatischen Ebene sind dabei an die Entwicklung von  $\tilde{m}$  und somit von  $h_d(n^S)$  andere Anforderungen zu stellen.

Zum einen muß die aus der Konvexitätsbedingung resultierende Schranke (4.104)<sub>2</sub> eingehalten werden. Vorausgesetzt  $m_0$  genüge der Bedingung (4.104)<sub>2</sub>, folgt direkt  $h_d(n^S) > 1$ . Zum anderen soll der Wert von  $\tilde{m}$  für  $n^S \rightarrow 1$  gegen unendlich gehen, wodurch die Fließbedingung in der Deviatorebene die Form eines Kreises annimmt. Darüber hinaus soll die Funktion  $h_d(n^S)$  im Bereich  $0 \dots n_{0S}^S$  möglichst gering ansteigen. Der Grund dafür liegt darin, daß die Bedingung der Abwärtskompatibilität die für den hydrostatischen Teil berücksichtigt wurde (4.99) nicht mehr möglich ist. Sie soll daher zumindest möglichst weitgehend angenähert werden. Eine exakte Erfüllung ist im allgemeinen nicht mehr möglich, da mit  $m_0 = \tilde{m}(n_{0S}^S)$  und  $h(n^S)$  monoton steigend bei fallendem Volumenanteil  $n^S$  auch  $\tilde{m}$  fällt und die Verletzung der Konvexitätsbedingung (4.104)<sub>2</sub> droht. Der gewählte Ansatz für die Funktion  $h_d(n^S)$  lautet

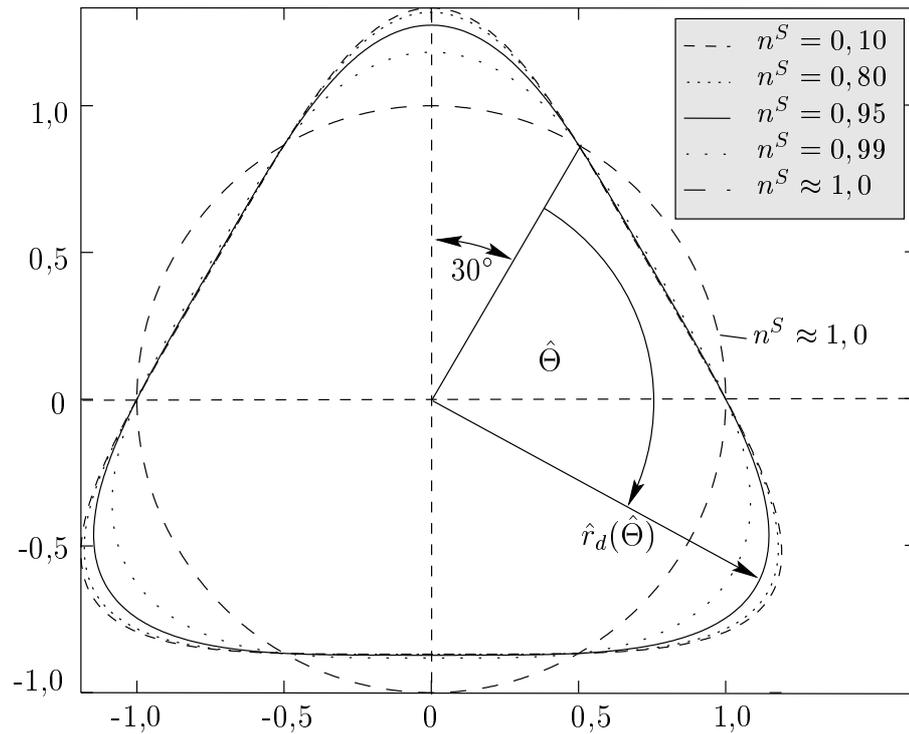
$$h_d(n^S) = \left(1 + \frac{\eta_1}{1 - n^S}\right)^{\eta_2} \quad (4.106)$$

mit den Materialparametern  $\eta_1$  und  $\eta_2$ . Auf die Darstellung der Funktion  $h_d(n^S)$  selbst wird an dieser Stelle verzichtet.

In Abbildung 4.11 ist die Form der Fließbedingung in der Deviatorebene in Abhängigkeit des Volumenanteils  $n^S$  dargestellt. Die gewünschte Eigenschaft, daß die Form im Bereich  $0 \leq n^S \leq n_{0S}^S$  möglichst unverändert bleiben soll, konnte eingehalten werden, ebenso wie die Annäherung der Form an einen Kreis bei geschlossenen Poren. Das Ansprechverhalten dieser Form der strukturellen Verfestigung, d. h. wie schnell die Veränderung der Form in Abhängigkeit des Volumenanteils  $n^S$  eintritt, kann durch die Parameter  $\eta_1$  und  $\eta_2$  in weiten Bereichen zur Anpassung an verschiedene Materialtypen variiert werden.

### 4.3.5 Fließregel und plastisches Potential

Die Beschreibung der Entwicklung plastischer Deformation bei porösen Medien, speziell im Bereich großer Deformationen, stellt ebenfalls besondere Anforderungen an die Formulierung der konstitutiven Ansätze. So sind zum einen theoretische Grenzzustände wie



**Abbildung 4.11:** Entwicklung der Form der Fließbedingung in der Deviatorebene für veränderliche Volumenanteile  $n^S$  mit den Parameter:  $\eta_1 = 0,001$ ,  $\eta_2 = 6,0$ ,  $m_0 = 0,569$  und  $\gamma = \sqrt{27}/(9m - 2) = 1,665$ .

beim bereits diskutierten Kompressionspunkt zu berücksichtigen und zum anderen Anforderungen, die aus der Beobachtung realen Materialverhaltens, speziell Experimenten, resultieren. Besonders der letzte Punkt erfordert ein großes Maß an Flexibilität bei der Formulierung der konstitutiven Ansätze, um eine möglichst große Gruppe poröser Materialien beschreiben zu können. So zeigt bereits der gleiche Sand in Abhängigkeit der Lagerungsdichte im Bereich großer Drücke ein gänzlich unterschiedliches Verhalten. Der dicht gelagerte Sand zeigt deutlich ausgeprägtere dilatante, plastische Deformationen als der locker gelagerte Sand, vgl. *Lade & Kim* [55] und *Wood* [96]. Bei der Entwicklung des plastischen Potentials  $G(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ , aus der die Fließregel durch Ableitung nach dem *Kirchhoff*-Spannungstensor  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S$  der Zwischenkonfiguration hervorgeht, wurden speziell die folgenden Anforderungen berücksichtigt:

1. Einhaltung des Kompressionspunktes,
2. Abwärtskompatibilität zu bestehenden Modellen,
3. im Kappenbereich Übergang zu rein volumetrischem Fließen,
4. Anpassung des Dilatanzwinkels zur Beschreibung assoziierten und nichtassozierten Fließens,
5. sowohl strukturelle als auch materielle Verfestigung,
6. Modellierung des Übergangs zu rein deviatorischem Fließen,
7. stetige und stetig differenzierbare Einflächenformulierung.

Dabei ist die gleichzeitige Erfüllung aller Anforderungen nicht immer nötig. So sind besonders die Punkte 4 - 6 lediglich als Optionen zur Modellierung speziellen Materialverhaltens zu verstehen, die über Materialparameter zu steuern sind. Sie sind nicht als fest eingebaute Eigenschaften des konstitutiven Modells zu formulieren.

Der erste Punkt wurde bereits ausgiebig diskutiert und bedarf keiner weiteren Erläuterung. Es sei lediglich angemerkt, daß es zur Erfüllung der Anforderung genügt, die Einhaltung der Gleichung (4.61) sicherzustellen. Die zweite Anforderung ist weder theoretischer Natur, noch direkt durch Experimente begründet. Ihr liegt vielmehr die Überlegung zu Grunde, in Verbindung mit der Abwärtskompatibilität der Fließbedingung (4.93), (4.95) und (4.96) die Abwärtskompatibilität des gesamten plastischen Materialmodells sicherzustellen. Darüber hinaus können die sich aus der Abwärtskompatibilität ergebenden Eigenschaften zur Sicherung der anderen Anforderungen genutzt werden, wie dies z. B. auch bei der Formulierung der strukturellen Verfestigung der Fließbedingung durch den Übergang zum *Drucker & Prager*-Kriterium durchgeführt wurde. Die dritte Anforderung ist offensichtlich, besagt sie doch nichts anderes, als daß bei rein hydrostatischen Spannungszuständen keine deviatorischen plastischen Deformationen einsetzen können. Darüber hinaus handelt es sich hierbei auch um eine Konsequenz aus der Forderung nach stetiger Differenzierbarkeit des plastischen Potentials. Da speziell Reibungsmaterialien ausgeprägtes, nichtassoziertes Fließen aufweisen, vgl. *Kim & Lade* [49], *Lade & Kim* [54], [55] und *Wood* [96], wurde die vierte Anforderung aufgenommen. Dem fünften Punkt liegt die Tatsache zugrunde, daß das plastische Potential bzw. die Fließregel nur für Spannungszustände ausgewertet wird, die auf der Fließfläche liegen, also für  $F(\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = 0$ . Es liegt daher nahe, das plastische Potential gemeinsam mit der Fließbedingung zu verfestigen, ungeachtet der Art der Verfestigung. Der sechsten Anforderung liegen zwei verschiedene Effekte zugrunde. Zum einen ist speziell bei Polymer- und Metallschäumen bei Annäherung bzw. Erreichen des Kompressionspunktes davon auszugehen, daß auch die Fließregel sich der Form des reinen Matrixmaterials annähert. Ob dabei die Poren „verschweißen“ oder nicht ist von untergeordneter Bedeutung, da die durch Reibungseffekte erzeugte strukturbedingte Scherfestigkeit bei großen Drücken entsprechend ansteigt und somit die Scherfestigkeit des Matrixmaterials den Grenzwert darstellt. Zum anderen stellt sich bei einigen Reibungsmaterialien, z. B. locker gelagerten Sanden, nur eine geringe Dilatanz während der plastischen Deformation ein, da die loseste Lagerung einen natürlichen Grenzwert darstellt. Die Fließregel muß daher die Möglichkeit bieten, speziell auch im Rahmen der strukturellen Verfestigung den Übergang zu isochorem Fließen abzubilden, d. h. eine Annäherung des plastischen Potentials an die Form der *von-Mises*-Fließbedingung (4.96). Zur Vermeidung von Problemen, die Unstetigkeiten bei der Implementierung verursachen können, soll das plastische Potential schließlich ebenso wie die Fließbedingung als eine stetige und stetig differenzierbare Fläche formuliert werden.

Experimente wie z. B. von *Kim & Lade* [49] oder *Yamada & Ishihara* [98] haben gezeigt, daß die Fließregel in der Deviatorebene in guter Näherung koaxial angesetzt werden kann. Das plastische Potential  $G$  besitzt somit die Form eines Kreises, vgl. Abbildung 4.11 für  $n^S \approx 1$ . Eine multiplikative Zerlegung des plastischen Potentials in Anlehnung an die Zerlegung der Fließbedingung (4.88) wird daher nicht benötigt, und die Abhängigkeit von der dritten deviatorischen Invarianten  $\hat{\text{III}}^D$  des *Kirchhoff*-Spannungstensors entfällt. Die

folgenden Ausführungen beziehen sich entsprechend ausschließlich auf die hydrostatische Ebene.

Aufbauend auf der von *Ehlers* zur Beschreibung von Reibungsmaterialien entwickelten Fließbedingung (4.85) und (4.86) wurde der folgende neue Ansatz für das plastische Potential konstruiert:

$$G(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}^D, \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}}^D, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \left( \Psi_1 \hat{\mathbf{I}}^D + \frac{1}{2} \tilde{\alpha} \hat{\mathbf{I}}^2 + \tilde{\delta}^2 \hat{\mathbf{I}}^4 \right)^{1/2} + \Psi_2 \beta \hat{\mathbf{I}} + \tilde{\varepsilon} \hat{\mathbf{I}}^2. \quad (4.107)$$

Die Entwicklung der Parameter  $\tilde{\alpha}, \tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon}$  wird dabei entsprechend der Fließbedingung (4.98) und (4.101) gewählt. Sollte dort eine abweichende Form der Verfestigung eingesetzt werden, sind die Parameter in (4.107) entsprechend zu wählen, so daß sie denselben Entwicklungsgleichungen folgen. Der Einfachheit halber wird der Index (...) für die im Rahmen der Verfestigung veränderlichen Parameter im folgenden weggelassen. Die beiden neuen Materialparameter  $\Psi_1 > 0$  und  $\Psi_2 > 0$  dienen in erster Linie der Einstellung des Dilatanzwinkels und können speziell im Rahmen der strukturellen Verfestigung auch als Funktionen z. B. des Volumenanteils  $n^S$  formuliert werden.

Der Dilatanzwinkel  $\hat{\nu}_p$  ist als das Verhältnis zwischen den Beträgen des Kugelanteils und des deviatorischen Anteils des symmetrischen plastischen Verzerrungsgeschwindigkeitstensors  $\hat{\mathbf{D}}_{Sp}$  definiert:

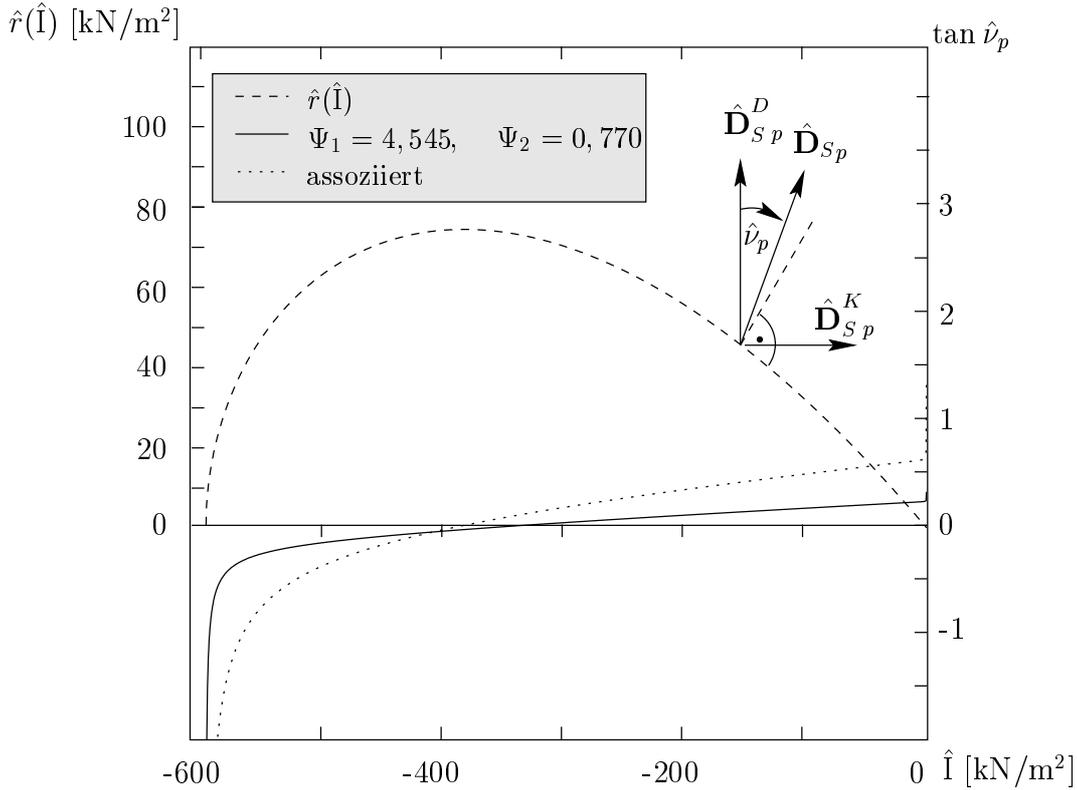
$$\tan \hat{\nu}_p = \frac{\hat{\mathbf{D}}_{Sp}^K \cdot \mathbf{I}}{\left\| \hat{\mathbf{D}}_{Sp}^D \right\|}. \quad (4.108)$$

In Abbildung 4.12 ist der Fließradius in der hydrostatischen Ebene zusammen mit den Verläufen des Dilatanzwinkels  $\hat{\nu}_p$  für assoziiertes und nichtassoziertes Fließen aufgetragen. Für die spezielle Wahl der Parameter  $\Psi_1 = \Psi_2 = 1$  geht die Formulierung des plastischen Potentials  $G$  (4.107) in die entsprechende Formulierung der Fließbedingung für  $\hat{\Theta} = 0^\circ$  über. Es liegt dann in bezug auf die hydrostatische Ebene assoziiertes Fließen vor. Die Anpassung der Dilatanzfunktion für *Berliner Sand* über die beiden Parameter  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  wurde von *Ehlers & Müllerschön* [29] durchgeführt.

**Anmerkung:** Da die Auswertung der Fließregel und somit auch des plastischen Potentials nur für Spannungszustände benötigt wird, die der Bedingung  $F = 0$  genügen, kann die Abhängigkeit von der zweiten deviatorischen Invarianten  $\hat{\mathbf{I}}^D$  ersetzt werden. Mit dem konstant gehaltenen *Lodewinkel*  $\hat{\Theta} = 0^\circ$  folgt aus der Definition des Fließradius  $\hat{r}$  (4.87)<sub>1</sub> in Verbindung mit (4.88)

$$\hat{\mathbf{I}}^D = \frac{1}{2} F_h^2(\hat{\mathbf{I}}, \mathbf{q}, \mathbf{r}). \quad (4.109)$$

Für konstante *Lodewinkel* kann somit die Abhängigkeit des plastischen Potentials vom *Kirchhoff*-Spannungstensor  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S$  auf die Abhängigkeit von dessen erster Invarianten  $\hat{\mathbf{I}}$  reduziert werden. Dieses Vorgehen ermöglicht die Darstellung des Dilatanzwinkels über der ersten Invarianten  $\hat{\mathbf{I}}$  und wird im weiteren Verlauf u. a. bei der Darstellung der Diagramme 4.12 bis 4.14 angewandt.



**Abbildung 4.12:** Dilatanzwinkel  $\hat{\nu}_p$  in Abhängigkeit der ersten Invarianten  $\hat{I}$  mit den Materialparametern nach Müllerschön & Ehlers [29]:  $\alpha = 0,001$ ,  $\beta = 0,25$ ,  $\gamma = 0,569$ ,  $m = 1,664$ ,  $\delta = 1,53 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kN}$ ,  $\varepsilon = 2,65 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{kN}$ ,  $\kappa = 1,0 \text{ m}^2/\text{kN}$  und  $\Psi_1 = 4,545$ ,  $\Psi_2 = 0,770$

Unter Verwendung der Dilatanzfunktion  $\tan \hat{\nu}_p$  kann die Fließregel

$$\hat{\mathbf{D}}_{Sp} = \lambda \frac{\partial G(\hat{I}, \hat{\Pi}^D, \mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S} = \lambda \left[ \frac{\partial G(\hat{I}, \hat{\Pi}^D, \mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial \hat{I}} \mathbf{I} + \frac{\partial G(\hat{I}, \hat{\Pi}^D, \mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial \hat{\Pi}^D} \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^{SD} \right] \quad (4.110)$$

umgeformt werden zu

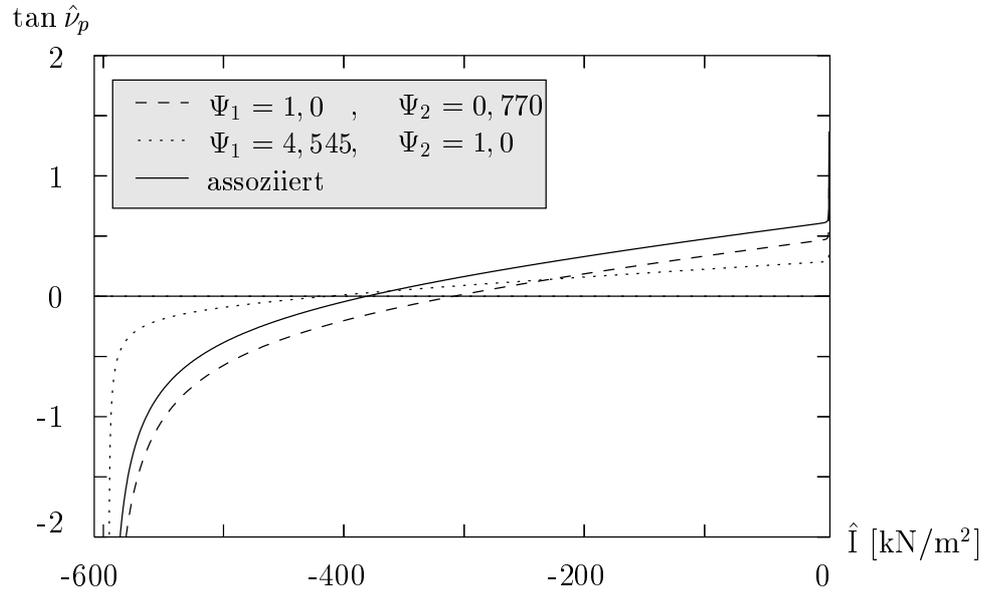
$$\hat{\mathbf{D}}_{Sp} = \lambda \left[ \frac{1}{2 \sqrt{\hat{\Pi}^D}} \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^{SD} + \frac{1}{\sqrt{6}} \tan \hat{\nu}_p \mathbf{I} \right]. \quad (4.111)$$

Die Dilatanzfunktion  $\tan \hat{\nu}_p$  lautet dabei:

$$\tan \hat{\nu}_p = \frac{\sqrt{3}}{\Psi_1 \sqrt{2 \hat{\Pi}^D}} \left[ \alpha \hat{I} + 4 \delta^2 \hat{I}^3 + 2 \sqrt{\Psi_1 \hat{\Pi}^D + \hat{I}^2 \left( \frac{\alpha}{2} + \delta^2 \hat{I}^2 \right) (\Psi_2 \beta + 2 \varepsilon \hat{I})} \right]. \quad (4.112)$$

Bevor die Erfüllung der Anforderungen überprüft wird, soll zunächst der Einfluß der beiden neuen Parameter  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  auf die Dilatanzfunktion  $\tan \hat{\nu}_p$  untersucht werden. In Abbildung 4.13 ist die Dilatanzfunktion für den assoziierten Fall, also mit  $\Psi_1 = \Psi_2 = 1$ ,

und für die Anpassung nach *Ehlers & Müllerschön* [29] über der ersten Invarianten des *Kirchhoff*-Spannungstensors der Zwischenkonfiguration aufgetragen. Bei der Darstellung des nichtassozierten Falls wurde jeweils nur einer der beiden Parameter  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  variiert, während der jeweils andere gleich eins gesetzt, sein Einfluß also ausgeschaltet wurde.



**Abbildung 4.13:** Einfluß der Parameter  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  auf die Dilatanzfunktion

Der Wert von  $\Psi_2$  beeinflusst vorwiegend die Nullstelle der Dilatanzfunktion, entspricht also im wesentlichen einer Parallelverschiebung der Kurve, während  $\Psi_1$  sich auf die Steigung und die Krümmung auswirkt, vgl. Abbildung 4.13. Die Trennung der Effekte der beiden Parameter, d. h. die Tatsache, daß sie den Verlauf der Dilatanzfunktion weitgehend unabhängig voneinander beeinflussen, macht die neue Formulierung (4.107) des plastischen Potentials in weiten Bereichen einer Anpassung gut zugänglich, auch speziell in Hinsicht auf den Einsatz numerischer Verfahren.

Als nächstes folgt die Betrachtung einiger Grenzwerte der Dilatanzfunktion. Beim Übergang in den Kappenbereich nähert sich der Wert des Fließradius  $\hat{r}_o(\hat{I})$  null an. Mit (4.88) und (4.109) eingesetzt in die Dilatanzfunktion (4.112) ergibt sich für den Wert von  $\tan \hat{\nu}_p$  im Durchstoßpunkt der hydrostatischen Achse durch die Fließfläche im Druck- und Zugbereich

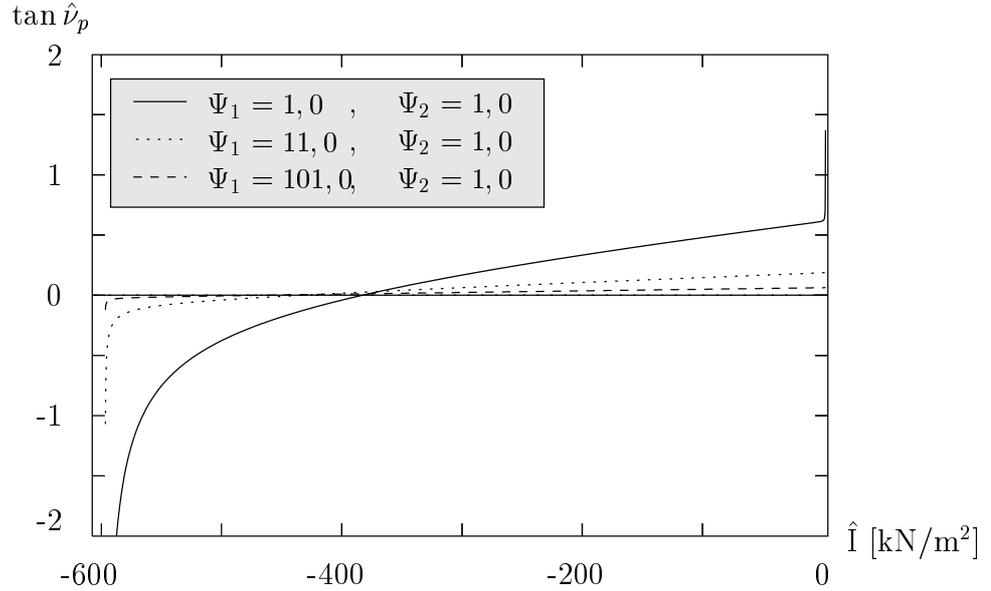
$$\begin{aligned} \tan \hat{\nu}_p &= \infty \longrightarrow \hat{\nu}_p = 90^\circ, \\ \tan \hat{\nu}_p &= -\infty \longrightarrow \hat{\nu}_p = -90^\circ. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Die Kappen bleiben somit auch beim plastischen Potential erhalten. Für den Grenzübergang  $\Psi_1 \rightarrow \infty$  ergibt sich aus (4.112) umgehend

$$\lim_{\Psi_1 \rightarrow \infty} \tan \hat{\nu}_p = 0. \quad (4.114)$$

Der hydrostatische bzw. volumenändernde Anteil des symmetrischen, plastischen Verzerrungsgeschwindigkeitstensors  $\hat{\mathbf{D}}_{Sp} \cdot \mathbf{I}$  nimmt für steigende Werte von  $\Psi_1$  im Vergleich

zum deviatorischen Anteil ab, vgl. (4.108). Der Verlauf der Dilatanzfunktion ist in Abbildung 4.14 für verschiedene Werte von  $\Psi_1$  bei ansonsten gleichen Materialparametern aufgetragen. Die Funktion nähert sich dabei für steigende Werte von  $\Psi_1$  der entsprechenden Formulierung der assoziierten *von-Mises*-Plastizität an. Diese Eigenschaft ist wieder speziell bei der Modellierung hochporöser Metall- und Polymerschäume von Interesse.



**Abbildung 4.14:** Annäherung des Dilatanzfunktion  $\tan \hat{\nu}_p$  an die Dilatanzfunktion der *von Mises* Formulierung für steigende Werte von  $\Psi_1$

Im folgenden sei vorausgesetzt, daß der Kompressionspunkt erreicht sei und die Parameter  $\{\delta, \varepsilon\}$  im Rahmen der strukturellen Verfestigung den Wert null angenommen haben, vgl. Kapitel 4.3.4. Der Porenschluß ist zudem mit gegen  $-\infty$  gehenden hydrostatischen Spannungen verbunden, als Konsequenz aus der Formulierung des elastischen Gesetzes, vgl. *Eipper* [30]. Für das Verhältnis zwischen  $\hat{I}$  und  $\sqrt{\hat{\Pi}^D}$  für Spannungszustände auf der Fließfläche ergibt sich für den Grenzwert unendlicher Drücke mit  $\varepsilon = \delta = 0$

$$\lim_{\hat{I} \rightarrow -\infty} \frac{\hat{I}}{\sqrt{\hat{\Pi}^D}} = -\sqrt{\frac{1}{\beta^2 - \frac{\alpha}{2}}}, \quad (4.115)$$

vgl. 4.100. Dies beschreibt die Steigung des *Drucker & Prager*-Kegels in der hydrostatischen Ebene. Der Grenzwert der Dilatanzfunktion im Bereich des Kompressionspunktes für gegen unendlich gehende Drücke ergibt sich aus (4.112) zu

$$\lim_{\hat{I} \rightarrow -\infty} \tan \hat{\nu}_p \Big|_{\delta=\varepsilon=0} = \lim_{\hat{I} \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3}}{\Psi_1 \sqrt{2}} \left[ \alpha \frac{\hat{I}}{\sqrt{\hat{\Pi}^D}} + 2 \sqrt{\Psi_1 + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\hat{I}}{\sqrt{\hat{\Pi}^D}} \right)^2} \Psi_2 \beta \right] \quad (4.116)$$

und in Verbindung mit (4.115) zu

$$\lim_{\hat{I} \rightarrow -\infty} \tan \hat{\nu}_p \Big|_{\delta=\varepsilon=0} = \frac{\sqrt{3}}{\Psi_1 \sqrt{2 \left( \beta^2 - \frac{\alpha}{2} \right)}} \left( -\alpha + 2 \Psi_2 \beta \sqrt{\Psi_1 \left( \beta^2 - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\alpha}{2}} \right). \quad (4.117)$$

Die Steigung des „Kegels“ des plastischen Potentials nähert sich für den beschriebenen Grenzzustand einem konstanten, endlichen Wert an, der mit Hilfe der Parameter  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  unabhängig von der Fließbedingung angepaßt werden kann. In Verbindung mit der Bedingung (4.100) hängt das Vorzeichen lediglich vom Klammerausdruck in (4.117) ab. Für

$$\Psi_1 \geq \frac{\left( \frac{\alpha}{2 \Psi_2 \beta} \right)^2 - \frac{\alpha}{2}}{\beta^2 - \frac{\alpha}{2}} \quad (4.118)$$

besitzt das plastische Potential wie später benötigt eine negative Steigung.

Nachdem die benötigten Grenzbetrachtungen durchgeführt sind, können die Anforderungen an das plastische Potential verifiziert werden. Die Einhaltung des Kompressionspunktes ist gewährleistet, sofern bei Annäherung an  $n^S = 1$  und den damit verbundenen unendlichen Drücken die Spur des symmetrischen Anteils des plastischen Deformationsgeschwindigkeitstensors  $\hat{\mathbf{D}}_{Sp}$  größer oder gleich null ist, vgl. (4.61). Aus (4.111) ergibt sich

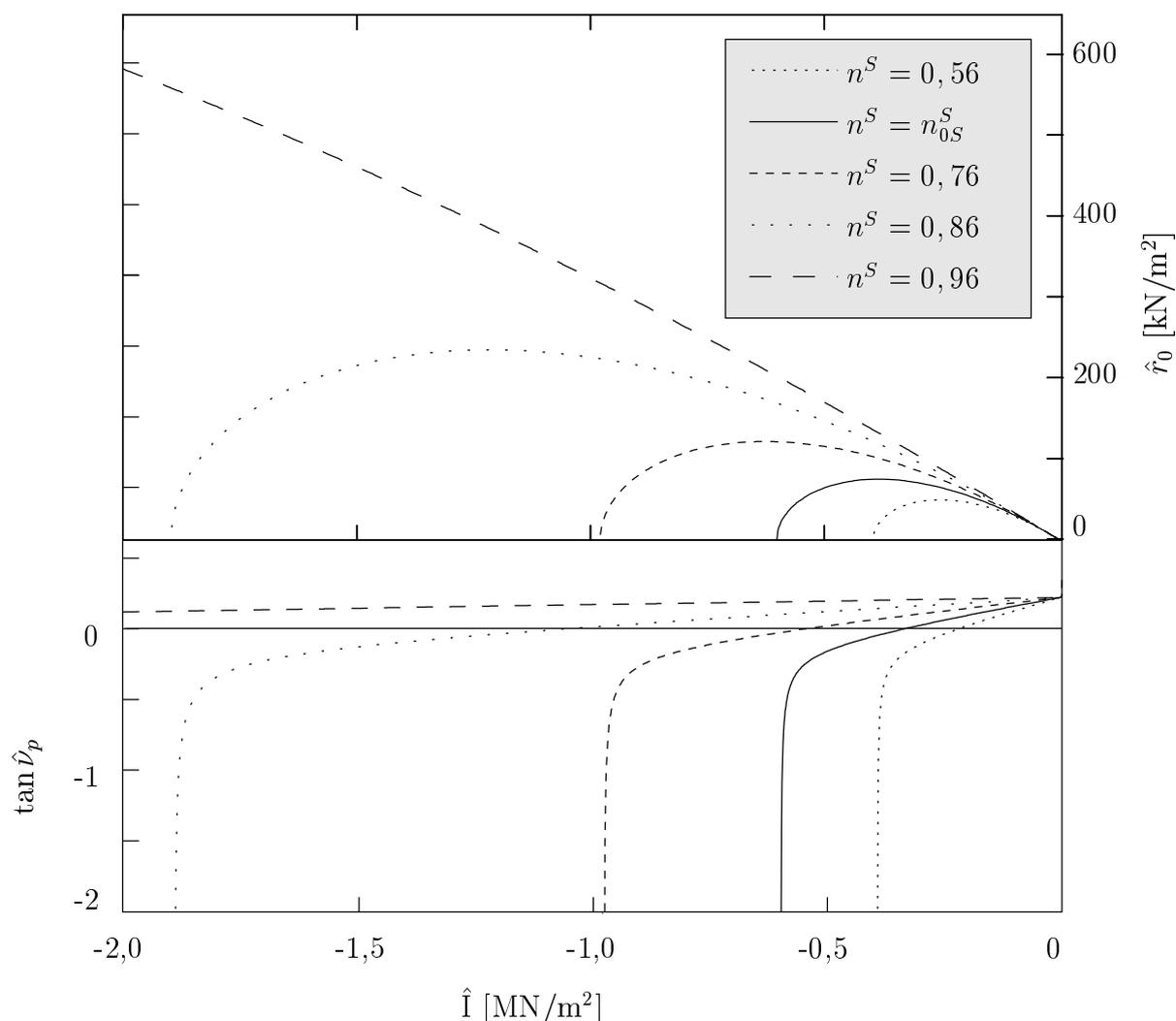
$$\hat{\mathbf{D}}_{Sp} \cdot \mathbf{I} = \lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \tan \hat{\nu}_p. \quad (4.119)$$

Mit (4.117) und unter der Voraussetzung, daß die Bedingung (4.118) durch die Materialparameter  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  erfüllt wird, ist  $\tan \hat{\nu}_p$  positiv, und es folgt direkt die Einhaltung des Kompressionspunktes.

**Anmerkung:** Die Einhaltung der Bedingung (4.118) stellt i. a. keine nennenswerte Einschränkung für die Parameterwahl dar. Für die in Abbildung 4.12 verwendeten Parameter erhält man beispielsweise  $\Psi_1 \geq 0,000065/\Psi_2^2 - 0,0081$  bzw. mit  $\Psi_2 = 0,770$  folgt  $\Psi_1 \geq -0,0079$ .

Die Abwärtskompatibilität der Formulierung ist offensichtlich, da das plastische Potential direkt aus der Fließbedingung entwickelt wurde und entsprechend auch deren Eigenschaften enthält. Der Übergang zu rein volumetrischem Fließen, der in Punkt drei für die Kappenbereiche gefordert wurde, ist durch (4.113) sichergestellt. Dabei ist zu beachten, daß der deviatorische Anteil der plastischen Deformation in der Fließregel erst nach Multiplikation mit dem Konsistenzparameter  $\lambda$  verschwindet. Um eine endliche plastische Deformationsgeschwindigkeit zu erhalten, muß, da  $\tan \hat{\nu}_p \rightarrow \infty$ , der Konsistenzparameter gleich null werden, und der erste Anteil in (4.111) verschwindet. Punkt vier wurde durch Diskussion des Einflusses der neuen Parameter gezeigt und Punkt fünf folgt direkt aus der Ableitung des plastischen Potentials aus der Fließbedingung. In Abbildung 4.15 sind die Fließfläche und die Dilatanzfunktion über der ersten Invarianten  $\hat{I}$  aufgetragen. Im Bereich der Kappen der Fließfläche findet rein hydrostatisches Fließen statt. Die Kappen werden durch das plastische Potential bzw. die Fließregel mit abgebildet, wobei aufgrund

der sehr kleinen Kohäsion des Sandes und somit sehr kleinen Kappe im Zugbereich für die gewählten Parameter die positiven Werte der Funktion  $\tan \hat{\nu}_p$  in Abbildung 4.15 nicht erkennbar sind. Die sechste Bedingung kann dadurch erfüllt werden, daß der Parameter  $\Psi_1$  an eine Verfestigungsformulierung gekoppelt wird, wie z. B.  $\tilde{m}$  in (4.105) in Verbindung mit (4.106) und für steigende Werte sich die Fließregel der *von-Mises*-Formulierung annähert, vgl. Abbildung 4.14. Für  $\Psi_1 \rightarrow \infty$  wird schließlich rein deviatorisches Fließen erreicht, da  $\tan \hat{\nu}_p$  nach (4.112) gleich null ist. Die Erfüllung der siebten Bedingung folgt wieder direkt aus der Wahl des Ansatzes für das plastische Potential (4.107), sofern  $\alpha > 0$  gewählt wird (s. o.).



**Abbildung 4.15:** Dilatanzfunktion in Abhängigkeit der strukturellen Verfestigung, vgl. Abbildung 4.9

Die Auswahl der benötigten Eigenschaften und der daraus resultierenden Konsequenzen für die Formulierung des plastischen Potentials soll an zwei Beispielen verdeutlicht werden. Bei Polymer- und Metallschäumen beispielsweise geht die Form der Fließbedin-

gung bei Annäherung an den Kompressionspunkt für große Drücke in die *von-Mises*-Form über. Dies kann entsprechend dem Aufbau der strukturellen Verfestigung in Kapitel 4.3.4 durch zusätzlichen Übergang der Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  zu null abgebildet werden. Der Übergang des plastischen Potentials in die gleiche Form ist automatisch durch die Verwendung der gleichen Verfestigungsformulierung für das plastische Potential sichergestellt. Bei der Beschreibung von locker gelagertem Sand hingegen geht die Fließbedingung in den *Drucker & Prager* Kegel über. Beim plastischen Potential ist der Übergang zur *von-Mises*-Form zu erwarten, da die dilatanten Volumendehnungen durch die loseste Lagerung begrenzt werden. Das plastische Potential muß für diesen Fall unabhängig von der Fließbedingung die Annäherung an die Form der *von-Mises*-Formulierung sicherstellen. Dies kann durch Wahl sehr großer Zahlenwerte für  $\Psi_1$  mittels einer geeigneten Formulierung, vorzugsweise im Rahmen der strukturellen Verfestigung, sichergestellt werden.



# Kapitel 5

## Lokalisierung

Bei porösen Materialien, speziell Reibungsmaterialien, wird in der Natur häufig Lokalisierung der Deformation beobachtet, oftmals in Verbindung mit großen Deformationen, die zum Versagen der Struktur führen können. Unter dem Begriff der Lokalisierung wird in diesem Zusammenhang die Anhäufung der Deformation in einem relativ kleinen, vom restlichen Körper klar abgegrenzten Bereich verstanden. An den Grenzen des Bereichs treten dabei hohe Gradienten der Deformation auf. Derartiges Verhalten kann z. B. beim Böschungs- oder Grundbruch oder aber auch in Materialversuchen wie dem Biaxialversuch beobachtet werden. Die Phänomene beschränken sich jedoch nicht nur auf Reibungsmaterialien, sondern treten auch bei anderen Werkstoffen auf. Ziel des Kapitels ist es, für die in Kapitel 3 behandelten Modellvarianten (kompressibles/inkompressibles Fluid, Mischphase) die Voraussetzung für das Entstehen der Lokalisierung im Rahmen der Theorie Poröser Medien zu untersuchen und ein dem Akustiktensor des einphasigen Problems (vgl. *Hill* [43]) entsprechendes Kriterium bereitzustellen. Dabei wird eine Formulierung ausschließlich in den kinematischen Größen der Festkörperlokalisierung angestrebt.

Auch wenn Lokalisierung der Deformation zum Versagen der gesamten Struktur führen kann, was das Interesse an der Untersuchung begründet, handelt es sich hierbei um ein lokales Kriterium im Gegensatz zu globalen Stabilitätskriterien (vgl. *Bigoni & Hueckel* [5]) wie z. B. dem klassischen *Eulerschen* Knickstab oder dem „Snap back“-Problem (*de Borst* [8]). Die lokale Natur des Kriteriums äußert sich u. a. auch darin, daß lediglich lokale Größen wie z. B. das Materialverhalten oder der aktuelle Spannungszustand in das Kriterium eingehen. Dies hat den Vorteil, daß der Rechenaufwand relativ gering bleibt im Vergleich zu globalen Stabilitätskriterien, bei denen eine Untersuchung der gesamten Struktur nötig ist. Es läßt sich jedoch keine Aussage darüber treffen, ob der der Analyse zugrunde liegende Versagens- bzw. Deformationsmodus auch tatsächlich eintritt. Dies kann i. a. nur anhand eines globalen Kriteriums geklärt werden.

Das Problem der Lokalisierung der Deformation wurde in der Literatur eingehend diskutiert, so z. B. in den Arbeiten von *Hill* [43, 44] und *Rudnicki & Rice* [74]. In seiner Arbeit von 1962 identifiziert *Hill* [43] Lokalisierung mit einer stehenden Beschleunigungswelle. Der Begriff der Welle wird dabei als „...an isolated geometric surface, not necessarily plane, that moves relatively to the material and across which certain field variables

are momentarily discontinuous . . .“ im Sinne *Hadamards* [38] verstanden, und stellt eine singuläre Fläche dar, vgl. Kapitel 2. Während *Hill* [43] keine speziellen Materialeigenschaften untersucht, wenden *Rudnicki & Rice* [74] und *Leppin & Wriggers* [61] ihre Aufmerksamkeit Reibungsmaterialien zu, deren Verhalten vom hydrostatischen Spannungszustand abhängt. In diesem Zusammenhang seien ohne Anspruch auf Vollständigkeit einige weitere Arbeiten zitiert, die sich mit dem Problem der Lokalisierung bei kleinen Deformationen beschäftigen. *Neilsen & Schreyer* [70] untersuchen in ihrer Arbeit von 1993 verschiedene lokale Kriterien, sowohl mit diffusem als auch lokalisierendem Verhalten, und stellen die gewonnenen Ergebnisse anhand des kritischen Verfestigungsmoduls  $h_{cr}$  (vgl. 4.79) gegenüber. Der Wert von  $h_{cr}$  wird für einfache homogene Beispiele bei kleinen Verzerrungen explizit berechnet. Lokalisierende Versagensmodi unterscheiden sich dabei von diffusen durch die besondere, ihnen zugrunde liegende Kinematik. In diesem Zusammenhang sind auch die Arbeiten von *Bigoni & Hueckel* [5], *Runesson et. al.* [76] und *Szabo* [89] einzuordnen. Für poröse Medien ist ein derartiger Zugang kaum geeignet. Speziell im Falle einer von der Festkörperbewegung unabhängigen Fluidbewegung sind kaum homogene Zustände zu erwarten, die eine Voraussetzung für die analytischen Bestimmung des kritischen Verfestigungsmoduls  $h_{cr}$  darstellen. Selbst bei einfachen eindimensionalen Materialversuchen treten bedingt durch die Sickerbewegung des Fluids beispielsweise im Rahmen der Konsolidierung i. a. inhomogene Zustände auf, vgl. Kapitel 7.1. Die Arbeiten von *Chambon* [11] und *Khen et. al.* [48] behandeln das Problem der Lokalisierung im Bereich finiter Deformationen. *Khen et. al.* [48] weist in seiner Arbeit darauf hin, daß selbst bei Vorliegen kleiner Verzerrungen die Lokalisierungsanalyse im Rahmen der finiten Theorie durchgeführt werden sollte, und untermauert diese Aussage durch Beispiele. Speziell der numerischen Behandlung des Problems der Lokalisierung im Rahmen der Finite-Elemente-Methode wurde in den letzten Jahren große Aufmerksamkeit gewidmet wie z. B. in den Arbeiten von *Ortiz et. al.* [71], *Nacar et. al.* [68], *Fish & Belytschko* [32], *Klisinski et. al.* [52], *Larsson et. al.* [58], *Steinmann & Willam* [87, 88], *Loret et. al.* [64], *Larsson et. al.* [57] und *Sluys* [84]. Im Gegensatz zur sogenannten „schwachen“ Lokalisierung, die im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich betrachtet wird, beschäftigen sich *Steinmann* [85], *Armero & Garikipati* [3], *Simo et. al.* [82], *Armero* [1] und *Steinmann et. al.* [86] mit dem Problem der „starken“ Lokalisierung, bei der Diskontinuitäten des Verschiebungsfelds  $\mathbf{u}_S$  selbst zugelassen werden. Die Arbeiten gehen dabei auch auf die numerischen Aspekte der Behandlung der Lokalisierung ein, beispielsweise durch besondere Elementtechnologien im Rahmen der FE-Methode oder durch Einführung einer künstlichen Regularisierung.

Das zunehmende Interesse am Problem der Lokalisierung fluidgefüllter Festkörper spiegelt sich in der steigenden Anzahl von Veröffentlichungen auf diesem Gebiet in den letzten Jahren wider. *Runesson et. al.* [77], *Larsson & Larsson* [56] und *Runesson et. al.* [75] beschränken sich in ihren Arbeiten auf die Betrachtung des stark vereinfachten Problems lokal undrainierter Körper mit kompressiblem Porenfluid. Die Sickergeschwindigkeit des Fluids wird dabei *a priori* vernachlässigt und beide Phasen besitzen die gleiche Bewegungsfunktion. Dies erlaubt eine Reduktion des Modells auf eine Einphasenformulierung, analog dem Vorgehen bei der Herleitung der Mischphase. Während in den ersten beiden Arbeiten kleine Verzerrungen angenommen wurden, betrachten *Runesson et. al.* [75] finite Deformationen und verwenden das Konzept der „regularisierten starken Dis-

kontinuitäten“, vgl. *Larsson et. al.* [59]. *Loret & Prévost* [63] untersuchen den dynamischen Fall bei kleinen Verzerrungen, der von *Schrefler et. al.* [79] übernommen wurde. In *Schrefler et. al.* [78] wird zusätzlich der Fall teilgesättigter poröser Körper und in *Charlier et. al.* [12] der Bereich großer Deformationen betrachtet, beidesmal jedoch ohne explizit auf Lokalisierungskriterien einzugehen. Dafür wird aber eine unabhängige Fluidbewegung zugelassen. Die beiden Arbeiten untersuchen mit Hilfe der FE-Methode numerisch die Effekte der Lokalisierung fluidgefüllter poröser Körper. Schließlich sei auf die Arbeit von *Armero & Callari* [2] hingewiesen, die sich mit dem Fall starker Diskontinuitäten bei porösen Körpern beschäftigt. Die Arbeiten von *Schrefler et. al.* [79], *Runesson et. al.* [75], *Larsson et. al.* [59] und *Larsson & Larsson* [56] setzen sich darüber hinaus mit der numerischen Behandlung der Lokalisierung auseinander, angewandt auf fluidgefüllte, poröse Körper.

Der Aufbau des Kapitels gliedert sich wie folgt: In Abschnitt 5.1 werden zuerst die beiden Formen schwacher Lokalisierung, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden, beschrieben und gegenüber der starken Lokalisierung abgegrenzt. Anschließend werden die für die Untersuchung im Rahmen der Theorie Poröser Medien benötigten Annahmen und Voraussetzung eingeführt. In Abschnitt 5.2 wird das Lokalisierungskriterium in Verbindung mit einer singulären Fläche zweiter Ordnung bezüglich der Bewegungsfunktionen  $\chi_\alpha$  und in Abschnitt 5.3 in Verbindung mit einer singulären Fläche erster Ordnung bezüglich der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  untersucht. Dabei wird jeweils das prinzipielle Vorgehen anhand des einphasigen Beispiels motiviert, bevor die Kriterien im Rahmen der Theorie Poröser Medien behandelt werden.

## 5.1 Voraussetzungen und Annahmen

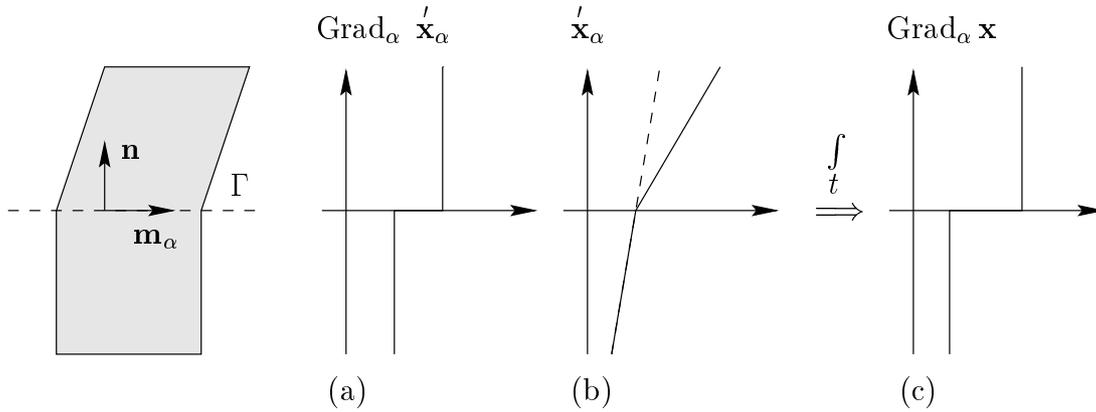
Im folgenden werden zwei verschiedene Formen der schwachen Lokalisierung betrachtet. Im ersten Fall wird das Einsetzen der Lokalisierung mit der möglichen Existenz einer singulären Fläche erster Ordnung bezüglich der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  identifiziert. Der zweite Fall setzt Lokalisierung mit der Existenz einer stehenden Beschleunigungswelle gleich, vgl. *Hill* [43], d. h. einer singulären Fläche zweiter Ordnung bezüglich der Bewegungsfunktionen  $\chi_\alpha$ . Der erste Fall wird üblicherweise bei der Untersuchung des quasi-statischen Problems und der zweite Fall bei der Untersuchung des dynamischen Problems angewandt. Die aus den Kompatibilitätsbedingungen resultierenden Amplitudenvektoren werden im folgenden im ersten Fall mit dem Buchstaben  $\mathbf{m}_\alpha$  und im zweiten Fall mit  $\boldsymbol{\xi}_\alpha$  bezeichnet. Der Normalenvektor  $\bar{\mathbf{n}}_\Gamma$  bzw.  $\mathbf{n}_\Gamma$  wird der Übersichtlichkeit halber im folgenden ohne den Index  $(\dots)_\Gamma$  dargestellt.

Für eine singuläre Fläche erster Ordnung bezüglich der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  erhält man aus den Kompatibilitätsbedingungen aus Tabelle 2.2 mit  $\boldsymbol{\psi} \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_\alpha$  für den Sprung des Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes in der Referenzkonfiguration des Festkörpers

$$\left[ \text{Grad}_\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \right] = \mathbf{m}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{n}}_\alpha = \mathbf{m}_\alpha \otimes \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{n}. \quad (5.1)$$

Auf die alternative Darstellung in der Referenzkonfiguration des Fluids wird an dieser Stelle verzichtet, da sie im weiteren nicht benötigt wird. Sämtliche Darstellungen in der Referenzkonfiguration beziehen sich in diesem Kapitel auf die Referenzkonfiguration der Festkörpermatrix  $\varphi^S$ . Entsprechend kennzeichnet  $\bar{\mathbf{n}}$  das Bild des Normaleneinheitsvektors  $\mathbf{n}$  auf der Referenzkonfiguration des Festkörpers.

Die Kinematik einer singulären Fläche erster Ordnung bezüglich der Geschwindigkeiten ist in Abbildung 5.1 anhand eines einfachen Beispiels veranschaulicht. Hierbei seien die Vektoren  $\mathbf{m}_\alpha$  und  $\bar{\mathbf{n}}_\alpha$  senkrecht zueinander. In den Diagrammen ist der Betrag der jeweiligen Größe in Abhängigkeit des Abstands von der Fläche  $\Gamma$  aufgetragen. Der Betrag der Diskontinuität ist proportional zum Betrag des Amplitudenvektors  $\mathbf{m}_\alpha$ . Obwohl



**Abbildung 5.1:** Singuläre Fläche erster Ordnung bezüglich der Geschwindigkeit

die Bewegungsfunktion  $\chi_\alpha$  und ihr Gradient entsprechend der Definition einer singulären Fläche erster Ordnung bzgl.  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  sprunfrei sind, können im Verlauf der Lokalisierung, d. h. nach Integration über die Zeit, auch Sprünge des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_\alpha$  auftreten, vgl. Abbildung 5.1 (c). Es entsteht dabei eine singuläre Fläche erster Ordnung bezüglich der Bewegungsfunktion  $\chi_\alpha$ . Da im weiteren Verlauf der Lokalisierungsanalyse von der Sprunfreiheit von  $\mathbf{F}_\alpha$  Gebrauch gemacht wird, beschränken sich die Untersuchung und das resultierende Kriterium auf den Beginn der Lokalisierung. Im postkritischen Bereich, d. h. wenn der zugrunde liegende Lokalisierungs- bzw. Deformationsmodus eintritt und  $\mathbf{F}_\alpha$  diskontinuierlich wird, besitzt das Kriterium keine Gültigkeit mehr. Da die für die Beispiele verwendete Numerik einen Sprung des Deformationsgradienten jedoch nicht abbilden kann, vgl. Kapitel 6 und 7, ist die Anwendung des Kriteriums im Bereich der Beispiele immer möglich.

Für eine singuläre Fläche zweiter Ordnung bezüglich der Bewegungsfunktion erhält man mit  $\psi \rightarrow \chi_\alpha$  aus Tabelle 2.3 für den Sprung des zweiten Gradienten der Bewegungsfunktion

$$[[\text{Grad}_\alpha \mathbf{F}_\alpha]] = \boldsymbol{\xi}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{n}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{n}}_\alpha = \boldsymbol{\xi}_\alpha \otimes \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{n} \otimes \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{n}. \quad (5.2)$$

Aus (2.26) folgt mit  $\psi \rightarrow \chi_\alpha$  und der Annahme, die singuläre Fläche sei materiell bezüglich der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$ , daß das Geschwindigkeitsfeld kontinuierlich bleibt:

$$[[\dot{\mathbf{x}}_\alpha]] = \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

Zusammen mit der Sprungfreiheit des Deformationsgradienten (2.22) sind die Voraussetzungen zur Anwendung der Gleichungen (2.29) und (2.31) gegeben. Für die Sprünge des Gradienten des Geschwindigkeitsfelds und der Beschleunigung folgt

$$\begin{aligned} \llbracket \text{Grad}_\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \rrbracket &= -u^\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{n}}_\alpha = -u^\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha \otimes \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{n}, \\ \llbracket \ddot{\mathbf{x}}_\alpha \rrbracket &= (u^\alpha)^2 \boldsymbol{\xi}_\alpha. \end{aligned} \tag{5.4}$$

In Abbildung 5.2 ist die Kinematik einer singulären Fläche zweiter Ordnung bezüglich der Bewegungsfunktion analog Abbildung 5.1 dargestellt. Im Gegensatz zur Beziehung

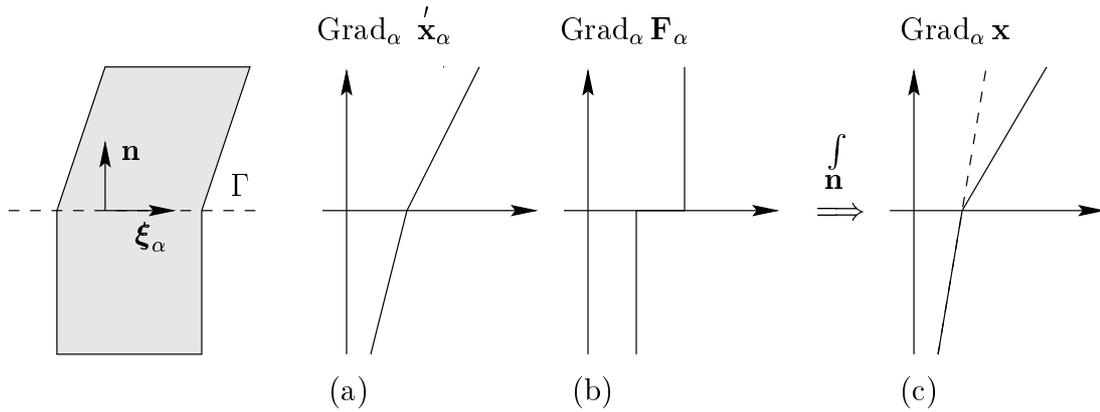


Abbildung 5.2: Singuläre Fläche zweiter Ordnung bezüglich der Bewegungsfunktion

(5.4)<sub>1</sub> ist der Sprung des Geschwindigkeitsgradienten in Abbildung 5.2 (a) gleich null. Dies resultiert aus der vorweggenommenen Annahme einer stehenden Welle mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $u^\alpha = 0$ . Durch Integration entlang der Normalenrichtung über die Fläche erhält man aus Abbildung 5.2 den Verlauf des Deformationsgradienten. Im Gegensatz zur Fläche erster Ordnung bzgl.  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  besitzt der materielle Geschwindigkeitsgradient in diesem Fall ( $u^\alpha = 0$ ) keinen Sprung und der Deformationsgradient bleibt auch während der Lokalisierung stetig. Das Kriterium kann ohne Einschränkungen jederzeit angewendet werden. Ein „Sprung“ des Deformationsgradienten ergibt sich erst bei Betrachtung einer endlich dicken Zone, beispielsweise eine Scherbandes. Das Band wird dann durch zwei getrennte singuläre Flächen eingegrenzt, vgl. Kapitel 7. Der Fall der singulären Fläche zweiter Ordnung bzgl.  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  stellt in diesem Zusammenhang den „schwächeren“ Fall der Lokalisierung dar im Vergleich zur singulären Fläche erster Ordnung bzgl. der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ . In beiden betrachteten Fällen bleiben die Bewegungsfunktion  $\chi_\alpha$  und die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  stetig. Im Gegensatz dazu werden bei der sogenannten „starken“ Form der Lokalisierung auch Sprünge dieser Felder zugelassen.

Als nächstes folgen die Voraussetzungen, die im Rahmen der Theorie Poröser Medien benötigt werden. Die bei der Behandlung der Modelle in Kapitel 3 getroffenen Annahmen behalten auch hier Gültigkeit. Sämtliche Materialeigenschaften wie z. B. der *Darcysche* Durchlässigkeitskoeffizient  $k^F$ , die materiellen Dichten  $\rho^{\alpha R}$  oder der elastoplastische Tangentenmodul  $\overset{4}{\mathbf{C}}_{ep}$  seien hinreichend stetig und homogen. Im postkritischen Bereich, der

nicht Gegenstand der Untersuchung ist, kann es auch hier zu Unstetigkeiten kommen, beispielsweise wenn auf der einen Seite der Fläche  $\Gamma$  elastische Entlastung und auf der anderen Seite elastoplastische Belastung vorliegt. Der Tangentenmodul wäre dann nicht mehr sprunghaft. Die partialen Dichtfunktionen  $\rho^\alpha$  stellen im Gegensatz zu den materiellen Dichten  $\rho^{\alpha R}$  keine Materialeigenschaften in diesem Sinne dar. Die Volumenkraft  $\mathbf{b}$  sei ebenfalls hinreichend stetig. Die auftretenden singulären Flächen dürfen singulär bezüglich aller Konstituierenden sein. Dies bedeutet, daß Lokalisierung aller Konstituierenden gleichzeitig möglich ist und die Kompatibilitätsbedingungen entsprechend angewendet werden können. Im Verlauf des Kapitels wird sich zeigen, daß z. B. Lokalisierung der Deformation der Festkörpermatrix mit der des Fluids einhergeht. Lokalisierung einer einzelnen Phase ist i. a. nicht möglich und somit auch keine „eigenen singulären Flächen“ für jede Konstituierende  $\varphi^\alpha$ , d. h. eine Fläche, bzgl. der nur sie selbst singulär ist. Dieses Problem wird z. T. dadurch umgangen, daß dem Fluid die gleiche Bewegungsfunktion zugeordnet wird wie dem Festkörper, vgl. z. B. *Runesson et. al.* [77], *Runesson et. al.* [75] und *Larsson et. al.* [59]. Bezüglich des Verhaltens des Porenfluids werden motiviert durch seine Natur als *Lagrangescher* Parameter, der die Sättigungsbedingung regiert (*Diebels* [15, 16], *Ehlers* [20]) keinerlei Annahmen getroffen. In der Literatur finden sich diesbezüglich auch andere Ansätze, z. B. in *Larsson & Larsson* [56]. Im Verlauf der Lokalisierungsanalyse zeigt sich, daß das Verhalten des Porenfluids  $p$  im Rahmen der Theorie Poröser Medien durch die Lokalisierung der beiden Konstituierenden  $\varphi^S$  und  $\varphi^F$  eindeutig bestimmt ist. Es dürfen daher keinerlei entsprechende Annahmen getroffen werden. Ferner seien die singulären Flächen materiell bezüglich des Festkörperskeletts, d. h. sie ruhen bezüglich des Festkörperskeletts und besitzen die gleichen Geschwindigkeiten:

$$\dot{\mathbf{x}}_S = \dot{\mathbf{x}}_\Gamma . \quad (5.5)$$

Dieser Voraussetzung liegt die Tatsache zugrunde, daß für die Stabilität des gesamten Problems i. a. das Festkörperskelett ausschlaggebend ist. Speziell im auskonsolidierten Zustand trägt es die gesamte Last. Beobachtungen in der Natur und in Experimenten bestätigen die Annahme, wie z. B. bei Scherbändern.

**Anmerkung:** Im Falle der singulären Fläche zweiter Ordnung bzgl. der Bewegungsfunktionen  $\chi_\alpha$  bedeutet  $\dot{\mathbf{x}}_S = \dot{\mathbf{x}}_\Gamma$ , daß lediglich der Sprung der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_S$  des Festkörperskeletts *a priori* gleich null ist, vgl. (5.3) und (2.26), und somit die Kompatibilitätsbedingungen (2.29) und (2.31) angewandt werden dürfen. Die Sprunghaftigkeit der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_F$  des Fluids und somit auch der Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  folgen erst im Verlauf der Herleitung.

Gleichung (5.5) bedingt, sofern die Sickergeschwindigkeit des Fluids nicht *a priori* zu null gesetzt wird, daß die singuläre Fläche sich relativ zum Fluid mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  bewegt bzw. ausbreitet. In diesem Zusammenhang wird eine weitere Annahme getroffen. Die Relativgeschwindigkeit des Porenfluids durch die singuläre Fläche sei kleiner als dessen Schallgeschwindigkeit. Mit der Schallgeschwindigkeit  $c_F$  eines kompressiblen Fluids (vgl. *Zierep* [101]),

$$c_F^2 \frac{d\rho^{FR}}{\rho^{FR}} = \frac{dp}{p}, \quad (5.6)$$

ergibt sich für das betrachtete Problem unter der Voraussetzung isothermer Zustandsänderung des Porenfluids, die aus der Voraussetzung isothermen Verhaltens in Kapitel 3 folgt,

$$u^{F^2} < c_F^2 = \frac{1}{\frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p}} \Big|_{\Theta=\text{konst.}} . \quad (5.7)$$

Bei den üblichen Anwendungen der Theorie poröser Medien ist die Annahme i. a. gut erfüllt und es kann sogar

$$u^{F^2} \ll c_F^2 \quad (5.8)$$

angesetzt werden.

## 5.2 1. Fall: Singuläre Fläche 2. Ordnung bzgl. $\chi_\alpha$

In Analogie zu *Hill* [43] werden für die Lokalisierungsanalyse des ersten Falls die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Beschleunigungswellen untersucht. Hierbei interessiert speziell, ob eine Ausbreitungsgeschwindigkeit gleich null möglich ist, also eine stehende singuläre Fläche zweiter Ordnung bzgl. der Bewegungsfunktion  $\chi_\alpha$ .

### 5.2.1 Einphasiger Körper

Das Vorgehen wird zuerst anhand des einphasigen Problems demonstriert, vgl. *Hill* [44], *Truesdell & Toupin* [93] oder *Khen et. al.* [48]. Zunächst werden die Massen- und Impulsbilanz in den beiden durch die Fläche  $\Gamma$  abgegrenzten Teilkörpern  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  gebildet. Die Differenz über die Fläche lautet unter Verwendung des Sprungoperators

$$\begin{aligned} \llbracket (\rho^S)'_S + \rho^S \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S \rrbracket &= 0, \\ \llbracket (\rho^S \dot{\mathbf{x}}_S)'_S + \rho^S \dot{\mathbf{x}}_S \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S - \operatorname{div} \mathbf{T}^S \rrbracket &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Die Indizierung der materiellen Zeitableitung  $(\dots)'_S$  ist trotz der Einphasigkeit des Problems notwendig, um die Bewegungen des Körpers  $\mathcal{B}$  und der Fläche  $\Gamma$  zu unterscheiden. Einsetzen der Massenbilanz (5.9)<sub>1</sub> in die Impulsbilanz (5.9)<sub>2</sub> ergibt zusammen mit der Sprungfreiheit der Geschwindigkeiten (5.3) und der materiellen Dichte  $\rho^S \equiv \rho^{SR}$

$$\llbracket \rho^S \ddot{\mathbf{x}}_S \rrbracket = \llbracket \operatorname{div} \mathbf{T}^S \rrbracket . \quad (5.10)$$

Analog dem Vorgehen (3.23) kann die Massenbilanz (5.9)<sub>1</sub> analytisch integriert werden:

$$\rho^S = \rho_{0S}^S \frac{1}{\det \mathbf{F}_S} . \quad (5.11)$$

Ferner läßt sich durch Ausrechnen zeigen, daß

$$\det \mathbf{F}_S \operatorname{div} \mathbf{T}^S = \operatorname{Div}_S \mathbf{P}^S \quad (5.12)$$

gilt. Eingesetzt in die Impulsbilanz (5.10) folgt

$$\rho_{0S}^S \llbracket \ddot{\mathbf{x}}_S \rrbracket = \llbracket \operatorname{Div}_S \mathbf{P}^S \rrbracket . \quad (5.13)$$

Hierbei wurde von der Sprungfreiheit von  $\det \mathbf{F}_S$  Gebrauch gemacht, die aus  $\llbracket \mathbf{F}_S \rrbracket = \mathbf{0}$  folgt. Die Homogenität des Materials bedingt, daß die Spannungsantwort nur von der Deformation abhängt, d. h.  $\mathbf{P}^S(\mathbf{F}_S, \mathbf{X}_S) \rightarrow \mathbf{P}^S(\mathbf{F}_S)$ . Für die Divergenz des ersten *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensors folgt

$$\operatorname{Div}_S \mathbf{P}^S = \left( \frac{\partial \mathbf{P}^S}{\partial \mathbf{F}_S} \operatorname{Grad}_S \mathbf{F}_S \right)^{\mathfrak{3}} \mathbf{I} . \quad (5.14)$$

(...)<sup>3</sup> bedeutet, daß das Ergebnis der Operation einen Tensor dritter Stufe darstellt. Einsetzen in (5.13) führt zusammen mit den Sprüngen (5.4) auf das Eigenwertproblem

$$\mathbf{0} = \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{P}^S}{\partial \mathbf{F}_S} \right)^{\mathfrak{23}} (\bar{\mathbf{n}}_S \otimes \bar{\mathbf{n}}_S) - \rho_{0S}^S (\bar{u}^S)^2 \mathbf{I} \right] \boldsymbol{\xi}_S . \quad (5.15)$$

Damit ein Amplitudenvektor  $\boldsymbol{\xi}_S \neq \mathbf{0}$  existieren kann, muß die Determinante des Ausdrucks in den eckigen Klammern gleich null sein. Für den Fall der stehenden Welle ( $\bar{u}^S = 0$  bzw.  $u^S = 0$ ) lautet die Bedingung

$$\det \bar{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{n}}_S) = 0 \quad (5.16)$$

mit dem sogenannten Akkustiktensor

$$\bar{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{n}}_S) := \left( \frac{\partial \mathbf{P}^S}{\partial \mathbf{F}_S} \right)^{\mathfrak{23}} (\bar{\mathbf{n}}_S \otimes \bar{\mathbf{n}}_S) \quad (5.17)$$

bzw. ausgedrückt mit Hilfe der Materialtangente der aktuellen Konfiguration

$$\mathbf{Q}(\mathbf{n}) = \left( \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}^S + \mathbf{C}^{\mathfrak{423}} \right) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) . \quad (5.18)$$

Aus der Bedingung (5.16) lassen sich die Normalenvektoren  $\mathbf{n}$  möglicher stehender singulärer Flächen und über (5.15) die jeweils zugehörigen Amplitudenvektoren  $\boldsymbol{\xi}_S$  bestimmen. Die Lokalisierungsmodi bzw. deren Kinematik ist durch die Vektorpaare  $\{\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}_S\}$  vollständig bestimmt. Für den Fall, das in der Umgebung des untersuchten Zustands Plastizität auftritt, sind zwei Fälle zu unterscheiden. Während im Falle der elastischen Entlastung der elastische Tangentenmodul  $\mathbf{C}_e^{\mathfrak{4}}$  verwendet wird, wird im Falle der plastischen Belastung der elasoplastische Tangentenmodul  $\mathbf{C}_{ep}^{\mathfrak{4}}$  verwendet. Abschließend werden die lokale Massen- und Impulsbilanz (2.46) auf der singulären Fläche  $\Gamma$  betrachtet, deren Erfüllung sicherzustellen ist:

$$\begin{aligned} \llbracket \rho^S (\dot{\mathbf{x}}_S - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \rrbracket \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \llbracket \rho^S \dot{\mathbf{x}}_S \otimes (\dot{\mathbf{x}}_S - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \mathbf{T}^S \rrbracket \mathbf{n} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Mit der Sprungfreiheit der Geschwindigkeiten (5.3) und der Dichte (5.11) ist die Massenbilanz (5.19)<sub>1</sub> identisch erfüllt. Die Impulsbilanz (5.19.2) reduziert sich auf

$$\llbracket \mathbf{T}^S \rrbracket \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{bzw.} \quad \llbracket \mathbf{P}^S \rrbracket \bar{\mathbf{n}}_S = \mathbf{0}. \quad (5.20)$$

Da aus der Sprungfreiheit der Deformation die Sprungfreiheit der Spannungen folgt und der Deformationsgradient ebenfalls sprunfrei ist, ist auch die Impulsbilanz auf der Fläche identisch erfüllt. Die Beziehung (5.20) wird auch als „Kontinuität des Spannungsvektors“ bezeichnet. Die Erfüllung der Bilanzen (5.19) auf der singulären Fläche kann formal auch dadurch begründet werden, daß die Geschwindigkeiten des Körpers  $\dot{\mathbf{x}}_S$  und der Fläche  $\dot{\mathbf{x}}_\Gamma$  identisch sind. Dadurch werden jedoch *a priori* Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $u^S$  ungleich null ausgeschlossen.

### 5.2.2 Poröser Körper

Bei der Untersuchung im Rahmen der TPM werden zuerst die Anteile der Bilanzgleichungen auf der singulären Fläche (2.46) betrachtet. Die Massenbilanz des inkompressiblen Festkörpers lautet

$$\llbracket n^S (\dot{\mathbf{x}}_S - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (5.21)$$

Aus Gleichung (3.23) folgt entsprechend dem Vorgehen bei der Dichte des einphasigen Problems (5.11) in Verbindung mit der Sprungfreiheit des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_S$ , daß der Volumenanteil  $n^S$  des Festkörpers sprunfrei ist. Zusammen mit der Sprungfreiheit der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{x}}_S$  (5.3) und  $\dot{\mathbf{x}}_\Gamma$  ist die Bilanz (5.21) identisch erfüllt. Die Impulsbilanz des Festkörperskeletts

$$\llbracket \rho^S \dot{\mathbf{x}}_S \otimes (\dot{\mathbf{x}}_S - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \mathbf{T}^S \rrbracket \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

ergibt durch entsprechendes Vorgehen mit der Aufspaltung des Spannungstensors (3.17) und der Sprungfreiheit des deformationsabhängigen Anteils der Spannungen  $\mathbf{T}_E^S = \mathbf{0}$  eingesetzt

$$\llbracket p \rrbracket = 0. \quad (5.23)$$

Dies stellt ein erstes wichtiges Ergebnis dar. Auch bei Existenz einer singulären Fläche bleibt der Porenfluiddruck sprunfrei. Die singuläre Fläche zweiter Ordnung bezüglich der Bewegungsfunktionen stellt somit gleichzeitig eine singuläre Fläche mindestens erster Ordnung bezüglich des Porenfluiddrucks dar. Die entsprechenden Bilanzen für das Porenfluid lauten

$$\begin{aligned} \llbracket \rho^F (\dot{\mathbf{x}}_F - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \rrbracket \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \llbracket \rho^F \dot{\mathbf{x}}_F \otimes (\dot{\mathbf{x}}_F - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \mathbf{T}^F \rrbracket \mathbf{n} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Mit der Sättigungsbedingung (3.7) ergibt sich die Sprunfreiheit des Volumenanteils  $n^F$  des Fluids aus der Sprunfreiheit des Volumenanteils  $n^S$  des Festkörpers (s. o.), d. h.

$[[n^F]] = [[n^S]] = 0$ . Im Falle eines inkompressiblen Fluids mit  $\rho^{FR} = \text{konst.}$  folgt aus (5.24)<sub>1</sub> mit  $[[\dot{\mathbf{x}}_\Gamma]] = \mathbf{0}$  umgehend

$$[[\dot{\mathbf{x}}_F]] \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (5.25)$$

Aus der Impulsbilanz (5.24)<sub>2</sub> folgt mit (5.25)

$$[[\dot{\mathbf{x}}_F]] = \mathbf{0}, \quad [[p]] = 0. \quad (5.26)$$

Die Fluidgeschwindigkeit muß somit ebenfalls sprungfrei sein und infolge dessen auch die Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$ . Die Kompatibilitätsbedingungen (2.29) und (2.31) können daher ebenfalls auf die Fluidbewegung angewandt werden. Im Falle eines kompressiblen Fluids erhält man statt (5.26)<sub>2</sub>

$$[[\rho^{FR}(p)]] = 0. \quad (5.27)$$

Dies ist ebenfalls unter der Voraussetzung hinreichend stetiger Materialeigenschaften und der Sprungfreiheit des Porenfluiddrucks erfüllt. Dies gilt speziell für die beiden hier verwendeten Ansätze der materiellen Dichte  $\rho^{FR}$  des Porenfluids (3.21) und (3.46).

Die Impulsbilanz des Festkörperskeletts im Körper  $\mathcal{B}$  mit der Massenbilanz eingesetzt

$$\rho^S \ddot{\mathbf{x}}_S - \text{div} \left( \mathbf{T}_E^S - n^S p \mathbf{I} \right) - \rho^S \mathbf{b} = -p \text{grad } n^F + \frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{w}_F \quad (5.28)$$

läßt sich mit der Sättigungsbedingung (3.7), (3.23) und (5.12) umformen zu

$$n_{0S}^S \rho^{SR} \ddot{\mathbf{x}}_S - \text{Div} \mathbf{P}_E^S + n_{0S}^S \text{grad } p - n_{0S}^S \rho^{SR} \mathbf{b} = \frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{w}_F. \quad (5.29)$$

Durch Sprungbildung unter Beachtung der gegebenen Sprungfreiheiten, speziell der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{x}}_S$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_F$  und  $\dot{\mathbf{x}}_\Gamma$  und des Terms auf der rechten Seite, folgt

$$n_{0S}^S \rho^{SR} [[\ddot{\mathbf{x}}_S]] - [[\text{Div} \mathbf{P}_E^S]] + n_{0S}^S [[\text{grad } p]] = \mathbf{0}. \quad (5.30)$$

Aus dem Vergleich mit dem einphasigen Problem (5.13) erhält man für das poröse Problem die Form

$$\left[ \left( \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}_E^S + \mathbf{C}^{423T} \right) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - n_{0S}^S \rho^{SR} (u^S)^2 \right] \boldsymbol{\xi}_S - n_{0S}^S [[\text{grad } p]] = \mathbf{0}. \quad (5.31)$$

Es verbleibt die Aufgabe, den Sprung des Gradienten des Porenfluiddrucks zu bestimmen.

Da die vorliegende singuläre Fläche mindestens erster Ordnung bezüglich des Drucks  $p$  ist, müssen auch die entsprechenden Kompatibilitätsbedingungen gelten:

$$\begin{aligned} [[\text{Grad}_S p]] &= \xi_p \bar{\mathbf{n}}_S, \\ [[p'_S]] &= \xi_p u^S. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Dies bedeutet jedoch nicht, daß die Sprünge (5.32) auch wirklich existieren, d. h. daß die Amplitude  $\xi_p$  ungleich null ist. Lediglich ihre Form ist für den Fall, daß sie existieren, festgelegt. Mit (5.31) und (5.32) verbleibt die Aufgabe, die Amplitude  $\xi_p$  zu bestimmen.

Die Impulsbilanz des Fluids mit dessen Massenbilanz in der Formulierung (3.27) eingesetzt führt durch analoges Vorgehen auf

$$\llbracket \text{grad } p \rrbracket + \rho^{FR} \llbracket \ddot{\mathbf{x}}_F \rrbracket = \mathbf{0} \quad (5.33)$$

und mit dem Sprung der Fluidbeschleunigung eingesetzt auf

$$\llbracket \text{grad } p \rrbracket = -\rho^{FR} u^{F2} \boldsymbol{\xi}_F. \quad (5.34)$$

Als nächstes wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $u^F$  bzgl. des Fluids durch das Pendant  $u^S$  bzgl. des Festkörpers und der Amplitudenvektor  $\boldsymbol{\xi}_F$  des Fluids durch den Amplitudenvektor  $\boldsymbol{\xi}_S$  des Festkörpers ausgedrückt. Für  $u^F$  ergibt sich mit den Definitionen der Ausbreitungsgeschwindigkeit (2.1) und der Sicherhgeschwindigkeit (3.4)

$$u^F = (\dot{\mathbf{x}}_\Gamma - \dot{\mathbf{x}}_F) \cdot \mathbf{n} = (\dot{\mathbf{x}}_\Gamma - \dot{\mathbf{x}}_S + \dot{\mathbf{x}}_S - \dot{\mathbf{x}}_F) \cdot \mathbf{n} = u^S - \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}. \quad (5.35)$$

Aus dem Vergleich der Impulsbilanz des Fluids in der Form (5.34) mit der Kompatibilitätsbedingung für den Sprung des Gradienten des Porenfluiddrucks (5.32)<sub>1</sub> kann die Amplitude  $\xi_p$  direkt bestimmt werden:

$$\xi_p = -\rho^{FR} u^{F2} \boldsymbol{\xi}_F \cdot \mathbf{n}. \quad (5.36)$$

Es genügt daher, einen Zusammenhang zwischen den beiden volumetrischen Anteilen der Sprünge  $\boldsymbol{\xi}_F \cdot \mathbf{n}$  und  $\boldsymbol{\xi}_S \cdot \mathbf{n}$  herzustellen. Für den Fall eines kompressiblen Porenfluids erhält man aus der Massenbilanz der Mischung (3.25)

$$\rho^{FR} \text{div } \dot{\mathbf{x}}_S + n^F (\rho^{FR})'_S + n^F \rho^{FR} \text{div } \mathbf{w}_F + n^F \mathbf{w}_F \cdot \text{grad } \rho^{FR} + \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \text{grad } n^F = 0. \quad (5.37)$$

Die Sprünge von beispielsweise  $\text{div } \dot{\mathbf{x}}_S$  und  $\text{grad } n^F$  lassen sich dabei direkt durch den Sprung des Festkörpers  $\{\boldsymbol{\xi}_S, \mathbf{n}\}$  ausdrücken. Der Sprung von  $\text{div } \dot{\mathbf{x}}_S$  ergibt sich zu

$$\llbracket \text{div } \dot{\mathbf{x}}_S \rrbracket = \llbracket \text{grad } \dot{\mathbf{x}}_S \rrbracket \cdot \mathbf{I} = -u^S \boldsymbol{\xi}_S \cdot \mathbf{n} \quad (5.38)$$

und der Sprung von  $\text{grad } n^F$  für  $\text{grad } n_{0S}^S \equiv \mathbf{0}$  zu

$$\begin{aligned} \llbracket \text{grad } n^F \rrbracket &= -\llbracket \text{grad } n^S \rrbracket = -n_{0S}^S \llbracket \text{grad det }^{-1} \mathbf{F}_S \rrbracket \\ &= \frac{n_{0S}^S}{\det \mathbf{F}_S} \llbracket \text{grad } \mathbf{F}_S \rrbracket \mathbf{F}_S^{T-1} = n^S (\boldsymbol{\xi}_S \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Die Sprünge weiterer abgeleiteter Größen sind im Anhang B.2 zusammengefaßt. Durch den Zusammenhang  $\rho^{FR} = \rho^{FR}(p)$  können mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen der materiellen Dichte des Fluids durch die Ableitungen des Porenfluiddrucks ersetzt werden:

$$(\rho^{FR})'_S = \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} p'_S, \quad \text{grad } \rho^{FR} = \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} \text{grad } p. \quad (5.40)$$

Sprungbildung von (5.37) und Einsetzen der Beziehungen (5.38), (5.39), (5.40), (5.32) und (5.36) liefert schließlich das gewünschte Resultat

$$\boldsymbol{\xi}_F \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\xi}_S \cdot \mathbf{n} \frac{n^S}{n^F} \frac{1}{u^{F2} \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} - 1}. \quad (5.41)$$

Im Nenner wurde bewußt die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $u^F$  der Fläche bzgl. des Fluids beibehalten. Man erkennt dadurch, daß es für die Umformungen, die auf (5.41) führen, nötig ist, daß der Nenner ungleich null ist. Dies ist mit der Voraussetzung einer Unterschallströmung (5.7) erfüllt. Für im Verhältnis sehr kleine Sickergeschwindigkeiten (5.8) wird der Nenner zu  $-1$ . Für den Fall des inkompressiblen Porenfluids kann die Massenbilanz der Mischung in der Form (3.59)

$$\operatorname{div} \mathbf{x}_S + \mathbf{w}_F \cdot \operatorname{grad} n^F + n^F \operatorname{div} \mathbf{w}_F = 0 \quad (5.42)$$

verwendet werden. Einsetzen der Sprünge liefert umgehend den Gleichung (5.41) entsprechenden Ausdruck

$$\boldsymbol{\xi}_F \cdot \mathbf{n} = -\boldsymbol{\xi}_S \cdot \mathbf{n} \frac{n^S}{n^F}. \quad (5.43)$$

Das Problem der Schallgeschwindigkeit tritt hier nicht auf, da sämtliche Konstituierenden inkompressibel sind. Einsetzen der Gleichungen (5.32), (5.35), (5.36) und (5.43) oder (5.41), je nachdem ob inkompressibles oder kompressibles Porenfluid, in (5.31) liefert das Eigenwertproblem für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $u^S$  bzgl. der Festkörpermatrix und die Amplitudenvektoren  $\boldsymbol{\xi}_S$  in der gleichen Form wie beim einphasigen Problem (5.15). Für das kompressible Porenfluid erhält man beispielsweise

$$\left[ \left( \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}_E^S + \mathbf{C}^{T \ 23} + n_{0S}^S \rho^{FR} \frac{n^S}{n^F} \frac{(u^S - \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2}{(u^S - \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2 \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} - 1} \right) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - n_{0S}^S \rho^{FR} u^{S2} \right] \boldsymbol{\xi}_S = \mathbf{0}. \quad (5.44)$$

Für den hier interessierenden Fall der stehenden Beschleunigungswelle mit  $u^S = 0$  und  $u^F = \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}$  folgen schließlich die Akkustiktensoren Poröser Medien mit kompressiblem Porenfluid  $\mathbf{Q}_{dc}$  und inkompressiblem Porenfluid  $\mathbf{Q}_{di}$ :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{Q}_{dc} &= \left[ \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}_E^S + \mathbf{C}^{T \ 23} + \frac{n^S}{n^F} \frac{(\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2 n_{0S}^S \rho^{FR}}{(\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2 \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} - 1} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{T \ 23} \right] (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ \mathbf{Q}_{di} &= \left[ \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}_E^S + \mathbf{C}^{T \ 23} - n_{0S}^S \rho^{FR} \frac{n^S}{n^F} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{T \ 23} \right] (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \end{aligned}} \quad (5.45)$$

Die Auswertung erfolgt wie beim einphasigen Problem. Bei Betrachtung geschlossenporigen Materials, in der Literatur auch als „lokal undrainiert“ bezeichnet, vgl. *Runesson et al.* [77] und *Larsson & Larsson* [56], ist  $\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}$  gleich null und die beiden Akkustiktensoren identisch mit der Form des einphasigen Problems (5.18).

**Anmerkung:** Für den Fall einer bzgl. des Festkörperskeletts stehenden Welle wird  $u^F$  zu  $\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}$ . Mit im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit vernachlässigbarer Sickergeschwindigkeiten (5.8) sind die Gleichungen für kompressibles (5.41) und inkompressibles (5.43) Porenfluid identisch und in Folge dessen auch die beiden Akkustiktensoren (5.45).

**Anmerkung:** Aus der Impulsbilanz des Fluids in der Form (5.33) bzw. (5.34) folgt in Verbindung mit den Kompatibilitätsbedingungen (5.32) des Porenfluids umgehend, daß der Amplitudenvektor  $\boldsymbol{\xi}_F$  des Porenfluids parallel zum Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Fläche  $\Gamma$  ist, vgl. (5.36):

$$-\frac{\xi_p}{\rho^{FR} u^{F2}} \mathbf{n} = \boldsymbol{\xi}_F. \quad (5.46)$$

Die Lokalisierung bzgl. des Fluids beschränkt sich somit auf einen rein volumetrischen Sprung. Der Grund liegt darin, daß die Viskosität des Porenfluids ausschließlich über den Impulsaustausch mit dem Festkörperskelett modelliert ist. Speziell bei der Untersuchung von Scherbändern bei Reibungsmaterialien, die sowohl dilatante als auch kontraktante Volumendehnung aufweisen können, spielt die daraus resultierende volumetrische Kopplung eine entscheidende Rolle bezüglich des Verhaltens. Eine ausführliche Diskussion der Zusammenhänge erfolgt im Rahmen der Beispiele in Kapitel 7.4.

### 5.3 2. Fall: Singuläre Fläche 1. Ordnung bzgl. $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$

Der betrachtete homogene Körper sei zum Zeitpunkt  $t = t_0$  homogen deformiert. Sämtliche Bilanzgleichungen seien erfüllt. Ziel der Untersuchung ist es, ob ein (quasistatisches) Deformationsinkrement  $\Delta \mathbf{F}_\alpha$  über eine Fläche  $\Gamma$  diskontinuierlich sein kann d. h. der Sprung des Deformationsinkrements ungleich null. Das Deformationsinkrement wird dabei durch

$$\Delta \mathbf{F}_\alpha = (\mathbf{F}_\alpha)'_S \Delta t \quad (5.47)$$

identifiziert. Im Falle des einphasigen Problems kann anstatt der Zeit auch ein beliebiger anderer Pfadparameter verwendet werden, sofern die Betrachtungen auf das statische Problem beschränkt bleiben. Da die Bilanzen des porösen Problems jedoch explizite Zeitabhängigkeiten in Form von Geschwindigkeiten aufweisen und die Fläche annahm gemäß materiell bezüglich des Festkörpers ist, erweist es sich als vorteilhaft, die mit dessen Bewegung gebildete materielle Zeitableitung zu verwenden.

Da die Bewegungsfunktionen kontinuierlich bleiben, der materielle Geschwindigkeitsgradient  $(\mathbf{F}_\alpha)'_S$  aber gemäß (5.47) sprungbehaftet ist, läßt sich das Problem mit einer singulären Fläche erster Ordnung bezüglich der Geschwindigkeitsfelder  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  identifizieren. Es gelten die entsprechenden Kompatibilitätsbedingungen für die Sprünge, siehe Tabelle 2.2. Als Lokalisierungskriterium wird nun gefordert, daß nicht nur die Bilanzen (2.46) auf der Fläche  $\Gamma$  erfüllt sind, sondern auch deren erste Ableitungen (vgl. *Nacar et. al.* [68], *Khen et. al.* [48], *Neilsen & Schreyer* [70]), d. h. die durch *Taylor*-Reihenentwicklung linearisierte Form, mit Abbruch nach dem linearen Glied.

**Anmerkung:** Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die folgenden Betrachtungen in Verbindung mit einer singulären Fläche erster Ordnung bzgl.  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  nur für den Beginn der Lokalisierung gelten. Sollte ein diskontinuierliches Deformationsinkrement  $\Delta \mathbf{F}_\alpha$  tatsächlich aufgetreten sein, ist der gesamte Deformationsgradient sprungbehaftet und die folgenden Betrachtungen nicht mehr anwendbar, vgl. Kapitel 5.1 und Abbildung 5.1.

### 5.3.1 Einphasiger Körper

Da annahmegemäß sämtlich Bilanzgleichungen erfüllt sind, gilt auch speziell

$$[[\mathbf{P}^S]] \bar{\mathbf{n}}_S = \mathbf{0}. \quad (5.48)$$

Taylorreihenentwicklung und Abbruch nach dem linearen Glied ergibt

$$[[\mathbf{P}_0^S + \Delta \mathbf{P}^S]] \bar{\mathbf{n}}_{S_0} + [[\mathbf{P}_0^S]] (\bar{\mathbf{n}}_{S_0} + \Delta \bar{\mathbf{n}}_S) = \mathbf{0}. \quad (5.49)$$

Der Index  $(\dots)_0$  kennzeichnet den Zeitpunkt  $t = t_0$ . Da der Normalenvektor  $\bar{\mathbf{n}}_S$  materiell bezüglich des Festkörpers ist, bleibt dessen Richtung in der Referenzkonfiguration konstant. Lediglich seine Länge kann sich ändern. Daher gilt  $(\bar{\mathbf{n}}_{S_0} + \Delta \bar{\mathbf{n}}_S) = \alpha \bar{\mathbf{n}}_{S_0}$ , und die linearisierte Form der Impulsbilanz läßt sich durch einsetzen von (5.48) vereinfachen:

$$[[\Delta \mathbf{P}^S]] \bar{\mathbf{n}}_{S_0} = \mathbf{0}. \quad (5.50)$$

Einsetzen des Ansatzes für das Deformationsinkrement  $\Delta \mathbf{F}_S$  (5.47) und des Sprungs von  $(\mathbf{F}_S)'_S$  (5.1) führt schließlich auf das gleiche Kriterium wie bei der stehenden Beschleunigungswelle ((5.15) mit  $u^S = 0$ ):

$$\frac{\partial \mathbf{P}^S}{\partial \mathbf{F}_S} (\mathbf{m}_S \otimes \bar{\mathbf{n}}_S) \bar{\mathbf{n}}_S = \mathbf{0}. \quad (5.51)$$

**Anmerkung:** In der Literatur wird, motiviert durch die physikalische Anschauung, das Kriterium der stehenden Beschleunigungswelle auf das dynamische Problem angewandt, während eine instantan auftretende Diskontinuität der Deformationsgeschwindigkeiten entsprechend im statischen bzw. quasistatischen Fall eingesetzt wird. Formal kann das Kriterium der singulären Fläche zweiter Ordnung bezüglich der Bewegungsfunktion ebenfalls auf das statische bzw. quasistatische Problem und umgekehrt das Kriterium der singulären Fläche erster Ordnung bezüglich der Geschwindigkeiten auf das dynamische Problem angewandt werden. Der erste Fall kann leicht durch Streichen der Beschleunigungsterme in (5.13) bzw. des entsprechenden Anteils in (5.15) verifiziert werden. Da keine Beschleunigungsterme in der Impulsbilanz auf der Fläche enthalten sind, (2.46) bzw. (5.19)<sub>2</sub>, erhält man bei Anwendung der Kriteriums in Verbindung mit der singulären Fläche erster Ordnung bzgl.  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  im dynamischen Fall ebenfalls den Akkustiktensor (5.17). Dies gilt für poröse Medien für den Fall der singulären Fläche zweiter Ordnung bzgl.  $\mathbf{x}_\alpha$  ebenfalls. Der umgekehrte Fall bedarf einiger Einschränkungen, die im folgenden diskutiert werden.

### 5.3.2 Poröser Körper

Entsprechend obigen Ausführungen werden die inkrementellen Größen mit der materiellen Zeitableitung der Festkörpermatrix gebildet:

$$\Delta(\dots) = (\dots)'_S \Delta t \quad (5.52)$$

Da die Fläche  $\Gamma$  annahmegemäß die gleiche Geschwindigkeit (vgl.(5.5)) wie das Festkörperskelett besitzt, kann dessen Impulsbilanz reduziert werden:

$$\llbracket \mathbf{P}_E^S - n_{0S}^S p \mathbf{F}_S^{T-1} \rrbracket \bar{\mathbf{n}}_S = \mathbf{0}. \quad (5.53)$$

Linearisierung zum Zeitpunkt  $t = t_0$  und Einsetzen von (5.53) ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{P}_E^S}{\partial \mathbf{F}_S} \llbracket (\mathbf{F}_S)'_S \rrbracket \bar{\mathbf{n}}_S - n_{0S}^S p \llbracket (\mathbf{F}_S^{T-1})'_S \rrbracket \bar{\mathbf{n}}_S - n_{0S}^S \mathbf{F}_S^{T-1} \llbracket p'_S \rrbracket \bar{\mathbf{n}}_S = \mathbf{0}. \quad (5.54)$$

Der Übersichtlichkeit wegen wird auf die Indizierung mit  $t = t_0$  verzichtet. Aus dem Vergleich mit der Formulierung des einphasigen Problems (5.50) läßt sich die Form

$$\left[ \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}_E^S + \mathbf{C}^{4\ 23} + n_{0S}^S p \left( \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)^{23} \right] (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{m}_S - n_{0S}^S \llbracket p'_S \rrbracket \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (5.55)$$

gewinnen. Während beim Kriterium der singulären Fläche zweiter Ordnung bezüglich  $\boldsymbol{\chi}_\alpha$  der Sprung des Gradienten des Porenfluiddrucks bestimmt werden mußte, verbleibt nun die Aufgabe, den Sprung dessen zeitlicher Änderung zu bestimmen. Hierzu muß wieder zwischen kompressiblem und inkompressiblem Porenfluid unterschieden werden. Die Impulsbilanz für das kompressible Fluid kann unter Verwendung seiner Massenbilanz auf der Fläche umgeformt werden zu

$$n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n} \llbracket \dot{\mathbf{x}}_F \rrbracket + \llbracket n^F p \mathbf{I} \rrbracket \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (5.56)$$

Linearisierung liefert

$$\left( n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n} \right)'_S \llbracket \dot{\mathbf{x}}_F \rrbracket + \left( n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n} \right) \llbracket (\dot{\mathbf{x}}_F)'_S \rrbracket + \llbracket (n^F)'_S \rrbracket p \mathbf{n} + n^F \llbracket p'_S \rrbracket \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (5.57)$$

Die Sprungfreiheit des Porenfluiddrucks selbst folgt wieder aus den entsprechenden Betrachtungen wie bei der Untersuchung des Problems der singulären Fläche zweiter Ordnung bzgl. der Bewegungsfunktionen. Zusammen mit der Sprungfreiheit der Geschwindigkeiten, die direkt aus der Definition der singulären Fläche erster Ordnung bzgl. der Geschwindigkeiten folgt, und den Sprüngen (Anhang B.1) eingesetzt, kann nach der Geschwindigkeit des Porenfluiddrucks aufgelöst werden

$$\llbracket p'_S \rrbracket = \rho^{FR} \mathbf{m}_F \cdot \mathbf{n} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2 - \frac{n^S}{n^F} \mathbf{m}_S \cdot \mathbf{n} p. \quad (5.58)$$

Das gleiche Vorgehen liefert für die Massenbilanz des Fluids (5.24)<sub>1</sub> auf der Fläche

$$\frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} \llbracket p'_S \rrbracket = \rho^{FR} \left( \mathbf{m}_F \cdot \mathbf{n} - \frac{n^S}{n^F} \mathbf{m}_S \cdot \mathbf{n} \right) \quad (5.59)$$

und mit (5.58) schließlich den Sprung von  $p'_S$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{m}_S$  und  $\mathbf{n}$ :

$$\llbracket p'_S \rrbracket = -\frac{n^S}{n^F} \mathbf{m}_S \cdot \mathbf{n} \frac{p - \rho^{FR} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2}{1 - \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2}. \quad (5.60)$$

Im Nenner tritt dabei wieder die *Machzahl* auf. Die Sickergeschwindigkeit durch die Fläche muß daher ungleich der Schallgeschwindigkeit des Porenfluids sein (5.7). Im Falle des inkompressiblen Porenfluids lautet der entsprechende Ausdruck für den Sprung der Geschwindigkeit des Porenfluids:

$$\llbracket p'_S \rrbracket = \frac{n^S}{n^F} \mathbf{m}_S \cdot \mathbf{n} \left( \rho^{FR} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2 - p \right). \quad (5.61)$$

Alternativ kann dieser Ausdruck aus dem Pendant für das kompressible Porenfluid (5.60) gewonnen werden, indem  $\partial \rho^{FR} / \partial p$  zu null gesetzt wird. Der gleiche Ausdruck ergibt sich ebenfalls, wenn die Annahme vergleichsweise sehr kleiner Sickergeschwindigkeiten (5.8) in (5.60) eingesetzt wird.

Durch Einsetzen der beiden Ausdrücke (5.60) bzw. (5.61) in die Impulsbilanz des Festkörperskeletts (5.55) erhält man schließlich die beiden Akkustiktensoren für eine singuläre Fläche erster Ordnung bei Betrachtung eines kompressiblen Porenfluids  $\mathbf{Q}_{qc}$  bzw. eines inkompressiblen Porenfluids  $\mathbf{Q}_{qi}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{qc} &= \left[ \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}_E^S + \mathbf{C}^{4\ 23T} + n_{0S}^S \frac{n^S}{n^F} \frac{p - \rho^{FR} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2}{1 - \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{23T} \right] (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ \mathbf{Q}_{qi} &= \left[ \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}_E^S + \mathbf{C}^{4\ 23T} + n_{0S}^S \frac{n^S}{n^F} \left( p - \rho^{FR} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2 \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{23T} \right] (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (5.62)$$

**Anmerkung:** Da der Sprung von  $\dot{\mathbf{x}}_F$  gleich null ist, folgt aus (5.57) ebenfalls, daß der Amplitudenvektor  $\mathbf{m}_F$  des Fluids normal zur singulären Fläche  $\Gamma$  orientiert ist:

$$\mathbf{m}_F = \frac{\llbracket n^{F'S} \rrbracket p + n^F \llbracket p'_S \rrbracket}{n^F \rho^{FR} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2} \mathbf{n}. \quad (5.63)$$

Die Lokalisierung des Porenfluids stellt somit auch im Falle der singulären Fläche erster Ordnung bzgl.  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  eine reine Volumendeformation dar. In diesem Zusammenhang sei nochmals auf die Diskussion des Einflusses der Modellierung des Porenfluids, speziell der Mischphase, auf die Lokalisierung der Mischung und des Festkörperskeletts im Rahmen der Beispiele in Kapitel 7.4 verwiesen.

Bei der Umformung von (5.57) nach (5.58) wurde die Annahme des quasistatischen Problems benötigt. Für den Sprung der Ableitung der Fluidgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_F$ , gebildet mit der Bewegung des Festkörperskeletts  $\varphi^S$ ,

$$(\dot{\mathbf{x}}_F)'_S = \ddot{\mathbf{x}}_F - \ddot{\mathbf{x}}_S - \text{grad}(\dot{\mathbf{x}}_F) \mathbf{w}_F, \quad (5.64)$$

folgt unter Vernachlässigung der Beschleunigungsterme mit dem Sprung des Geschwindigkeitsgradienten (5.1) des Fluids eingesetzt

$$\left[ \left[ (\dot{\mathbf{x}}_F)'_S \right] \right] = -\mathbf{m}_F (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}) . \quad (5.65)$$

Aus dem Vergleich mit der Kompatibilitätsbedingung (2.26)

$$\left[ \left[ (\dot{\mathbf{x}}_F)'_S \right] \right] = \left[ \left[ \text{grad} (\dot{\mathbf{x}}_F) (\dot{\mathbf{x}}_S - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \right] \right] \quad (5.66)$$

folgt, daß die Fläche sich bzgl. des Fluids mit dessen Geschwindigkeit ausbreitet:

$$\mathbf{w}_F = \dot{\mathbf{x}}_\Gamma - \dot{\mathbf{x}}_S . \quad (5.67)$$

Dies entspricht einem „Auftrennen“ der Fläche in zwei Flächen und erscheint nicht konform mit der Annahme einer einzigen, gemeinsamen singulären Fläche. Das Kriterium ist somit nicht mehr anwendbar, wenn der zugrunde liegende Lokalisierungsmodus einsetzt. Dies entspricht aber lediglich der Feststellung, die bereits zu Beginn des Kapitels getroffen wurde.

Es besteht alternativ die Möglichkeit, die Beschleunigungsterme nicht zu vernachlässigen. Der Sprung der mit der Bewegung des Festkörpers gebildeten Ableitung der Fluidgeschwindigkeit ist dann gleich null, vgl. (5.66):

$$\left[ \left[ (\dot{\mathbf{x}}_F)'_S \right] \right] = \mathbf{0} . \quad (5.68)$$

Aus der linearisierten Form der Massenbilanz des Fluids (5.24)<sub>1</sub> folgt umgehend bei Annahme eines inkompressiblen Fluids, daß der Sprung des Festkörpers keinen volumetrischen Anteil haben darf:

$$\mathbf{m}_S \cdot \mathbf{n} = 0 . \quad (5.69)$$

Dies läßt sich physikalisch dahingehend interpretieren, daß im Falle eines instantan auftretenden, volumenändernden Deformationsinkrements des Festkörpers das inkompressible Fluid eine unendlich große Beschleunigung erfahren würde. Für ein kompressibles Fluid ergibt sich in Verbindung mit der linearisierten Form der Impulsbilanz

$$n^S \mathbf{m}_S \cdot \mathbf{n} \left( \frac{\rho^{FR}}{p \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} - 1} \right) = 0 . \quad (5.70)$$

Um einen volumetrischen Anteil des Sprungs des Festkörpers erhalten zu können, muß

$$\frac{\rho^{FR}}{p} = \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} \quad (5.71)$$

gelten. Dies ist jedoch nur für ideales Gas (3.21) der Fall. Die Beziehungen (5.69) und (5.71) stellen insoweit eine zu starke Einschränkung der möglichen Lokalisierungsmodi dar, als daß Reibungsmaterialien im Falle der Lokalisierung i. a. ausgeprägte Volumendeformationen zeigen, vgl. Kapitel 7 und *Desrues et. al.* [14]. Die entsprechenden Untersuchungen werden daher nicht weiter verfolgt.

### Abschließende Bemerkungen

Es wurde festgestellt, daß der Porenfluiddruck sprungfrei bleibt. Im Falle der Fläche zweiter Ordnung konnten die Sprünge (5.32) bestimmt werden. Da die Amplitude  $\xi_p$  des Sprungs i. a. ungleich null ist (5.36), liegt eine Fläche erster Ordnung bezüglich des Drucks vor. Im Falle der singulären Fläche erster Ordnung bzgl.  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  wurde lediglich der Sprung von  $p'_S$  bestimmt. Es bleibt somit offen, ob es sich um eine Fläche erster Ordnung bezüglich  $p$  oder eine Fläche nullter Ordnung bezüglich  $p'_S$  handelt.

Über die Diskontinuitätseigenschaften des Porenfluiddrucks  $p$  darf jedoch nicht *a priori* verfügt werden. Bezüglich des Porenfluids konnte lediglich der volumetrische Anteil des Sprungs bestimmt werden. Im Falle geschlossener Poren bleibt der Sprung sogar vollkommen unbestimmt (5.36, 5.60, 5.61), was sich jedoch nicht auf die Lokalisierungsanalyse auswirkt.

Der Sprung des Porenfluids besitzt in beiden betrachteten Fällen die Form  $\alpha \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ , vgl. (5.46), (5.63) und somit einen reinen Volumensprung, da die Extraspannungen des Porenfluids *a priori* vernachlässigt wurden. Dies spiegelt sich auch am Einfluß des Porenfluids auf die Lokalisierung der gesamten Mischung wider, vgl. Kapitel 7.4. Es sei in diesem Zusammenhang nochmals darauf hingewiesen, daß die Sprünge des Porenfluiddrucks  $p$  und der beiden Konstituierenden  $\varphi^S$  und  $\varphi^F$  nicht unabhängig voneinander sind. Ein Sprung bzw. Lokalisierung des Festkörpers tritt i. a. immer in Verbindung mit der Lokalisierung des Drucks und des Fluids auf.

Während das Kriterium der singulären Fläche zweiter Ordnung bezüglich der Bewegungsfunktionen  $\chi_\alpha$  sowohl auf das dynamische wie auf das quasistatische Problem angewandt werden kann, ist der Fall der singulären Fläche erster Ordnung bzgl. der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  in der hier betrachteten Form auf das quasistatische Problem beschränkt.

# Kapitel 6

## Numerische Umsetzung

Zur numerischen Lösung von Anfangsrandwertproblemen der in Kapitel 3 beschriebenen Modellvarianten müssen die entsprechenden Gleichungssysteme sowohl bezüglich des Orts als auch der Zeit diskretisiert werden. Für die Ortsdiskretisierung wird die Methode der Finiten Elemente (FEM) verwendet. Die Diskretisierung bezüglich der Zeit erfolgt durch geeignete Zeitintegrationsverfahren.

In Kapitel 6.1 werden zunächst als Voraussetzung für die Anwendung der Methode der Finiten Elemente die Bilanzgleichungen in die schwache Form überführt. In Kapitel 6.2 folgt deren Linearisierung, die in enger Verbindung mit der Linearisierung des diskreten Gleichungssystems steht und für dessen effektive Lösung mit dem *Newton*-Verfahren benötigt wird. Das diskrete Gleichungssystem ergibt sich aus der im Anschluß beschriebenen Orts- und Zeitdiskretisierung. Für die FE-Diskretisierung im quasistatischen Fall werden quadratische Ansätze für die Verschiebungen  $\mathbf{u}_S$  und lineare Ansätze für den Porenfluiddruck  $p$  verwendet. Im dynamischen Fall werden zusätzlich lineare Ansätze für die Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  und quadratische Ansätze für die Festkörpergeschwindigkeit  $\mathbf{v}_S$  benötigt. Die Zeitdiskretisierung wird mittels diagonalimpliziter *Runge-Kutta*-Verfahren durchgeführt, vgl. *Diebels et. al.* [18] und *Ellsiepen* [31]. Im letzten Abschnitt wird die bis dahin ausgesparte Spannungsberechnung für das in Kapitel 4 vorgestellte elastoplastische Materialmodell behandelt. Dabei wird speziell auf dessen konsistente Zeitdiskretisierung und Linearisierung eingegangen.

Bezüglich der Methode der Finiten Elemente werden lediglich die zur Darstellung benötigten Grundlagen kurz behandelt. Eine umfassende Darstellung der FEM findet sich u. a. bei *Bathe* [4], *Zienkiewicz & Taylor* [99, 100], *Schwarz* [80] und speziell bezüglich der Anwendung auf die Theorie Poröser Medien bei *Ellsiepen* [31].

### 6.1 Schwache Form der Bilanzgleichungen

Die schwachen Formen der Bilanzgleichungen folgen durch Multiplikation mit unabhängigen Testfunktionen und anschließender Integration über den Körper  $\mathcal{B}$  und dessen Rand

$\partial \mathcal{B}$ . Zuerst wird das quasistatische, hybride Modell betrachtet. Für die Massenbilanz des Fluids erhält man mit der Testfunktion  $\delta p$  (virtuelles Druckfeld) für das Modell mit kompressiblem Porenfluid

$$\int_{\mathcal{B}} \rho^{FR} \operatorname{div} (\mathbf{u}_S)'_S \delta p \, dv + \int_{\mathcal{B}} n^F (\rho^{FR})'_S \delta p \, dv + \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} (n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F) \delta p \, dv = 0. \quad (6.1)$$

Umformung unter Verwendung des Divergenztheorems und des *Gauß*schen Integralsatzes liefert

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \rho^{FR} \operatorname{div} (\mathbf{u}_S)'_S \delta p \, dv + \int_{\mathcal{B}} n^F (\rho^{FR})'_S \delta p \, dv \\ - \int_{\mathcal{B}} n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \operatorname{grad} \delta p \, dv = - \int_{\partial \mathcal{B}} n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n} \delta p \, da. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Durch Auflösen der Impulsbilanz des Fluids (3.34) kann die Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  aus den Feldgleichungen eliminiert werden. Eingesetzt in die Massenbilanz erhält man mit (5.40)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \rho^{FR} \operatorname{div} (\mathbf{u}_S)'_S \delta p \, dv + \int_{\mathcal{B}} n^F \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} (p)'_S \delta p \, dv \\ + \int_{\mathcal{B}} \frac{k^F}{|\mathbf{b}|} (\operatorname{grad} p - \rho^{FR} \mathbf{b}) \cdot \operatorname{grad} \delta p \, dv = - \int_{\partial \mathcal{B}} \rho^{FR} n^F \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n} \delta p \, da. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die Impulsbilanz der Mischung wird mit der Testfunktion  $\delta \mathbf{u}_S$  gewichtet, die als virtuelles Verschiebungsfeld aufgefaßt werden kann:

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} (\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I}) \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv + \int_{\mathcal{B}} (n^S \rho^{SR} + n^F \rho^{FR}) \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv = 0. \quad (6.4)$$

Anwendung des Divergenztheorems und des *Gauß*schen Integralsatzes liefert mit dem Randspannungsvektor der Mischung  $\mathbf{t} = \mathbf{t}^S + \mathbf{t}^F = (\mathbf{T}_E^S - n^S p \mathbf{I}) \mathbf{n} - (n^F p \mathbf{I}) \mathbf{n}$

$$\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I}) \cdot \operatorname{grad} (\delta \mathbf{u}_S) \, dv - \int_{\mathcal{B}} (n^S \rho^{SR} + n^F \rho^{FR}) \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, da. \quad (6.5)$$

Alternativ kann auch die Impulsbilanz des Festkörpers verwendet werden. Dies führt jedoch zu dem Problem, daß die äußere Last, repräsentiert durch den Randspannungsvektor  $\mathbf{t}$ , der auf beide Konstituierende gemeinsam einwirkt, im Rahmen der Berechnung von Randwertproblemen auf die einzelnen Konstituierenden aufzuteilen wäre.

Mit den Gleichungen (6.3) und (6.5) liegt die fertige Verschiebungs-Druck-Formulierung der beschreibenden Gleichungen des gekoppelten Mehrfeldproblems für den Fall des hybriden, quasistatischen Modells vor. Die zuvor eliminierte Sickergeschwindigkeit kann über

die Beziehung (3.34) in einer Nachlaufrechnung aus dem Gradienten des Porenfluiddrucks bestimmt werden. Für den Fall des inkompressiblen Fluids ergibt sich die entsprechende Verschiebungs-Druck-Formulierung zu

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(\mathbf{u}_S)'_S \delta p \, dv + \int_{\mathcal{B}} \frac{k^F}{\gamma^{FR}} (\operatorname{grad} p - \rho^{FR} \mathbf{b}) \cdot \operatorname{grad} \delta p \, dv &= - \int_{\partial \mathcal{B}} n^F \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n} \delta p \, da, \\ \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I}) \cdot \operatorname{grad}(\delta \mathbf{u}_S) \, dv - \int_{\mathcal{B}} (n^S \rho^{SR} + n^F \rho^{FR}) \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv &= \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, da. \end{aligned} \quad (6.6)$$

**Anmerkung:** Für den Fall, daß nicht der Massenstrom  $q = n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}$  sondern die Sickergeschwindigkeit selbst auf dem Rand vorgegeben werden soll, darf sie nicht mehr aus den Feldgleichungen eliminiert werden. Die Impulsbilanz des Fluids ist dann ebenfalls in die schwache Form zu überführen, vgl. *Eipper* [30]. Es werden dann z. B. im zweidimensionalen Fall statt drei Feldfunktionen  $\{u_{Sx}, u_{Sy}, p\}$  fünf Feldfunktionen  $\{u_{Sx}, u_{Sy}, w_{Fx}, w_{Fy}, p\}$  benötigt.

Im dynamischen Fall kann die Impulsbilanz des Fluids (3.28), die für alle Modellvarianten identisch ist (vgl. Kapitel 2), nicht mehr nach der Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  aufgelöst werden. Sie muß daher ebenfalls in die schwache Form überführt werden. Um die Ordnung des entstehenden Differentialgleichungssystems bezüglich der Zeit zu reduzieren, wird zusätzlich die Festkörpergeschwindigkeiten  $\mathbf{v}_S$  als unabhängige Feldvariable eingeführt (*Diebels* [17]). Das System ist dann um die Verschiebungs-Geschwindigkeitsrelation

$$\mathbf{v}_S = (\mathbf{u}_S)'_S \quad (6.7)$$

zu ergänzen, die in der starken Form beibehalten und im Rahmen der Implementierung erfüllt wird. Die Anzahl der Feldfunktionen steigt dadurch im zweidimensionalen Fall auf sieben an. Die Bilanzgleichungen werden analog dem Vorgehen im quasistatischen Fall in die schwache Form überführt. Das resultierende System ist für den Fall des hybriden Modells (kompressibles Fluid oder Mischphase) in Tabelle 6.1 zusammengefaßt.

Zur Beschreibung des inkompressiblen Modells genügt es, die Massenbilanz der Mischung in Tabelle 6.1 gegen

$$\int_{\mathcal{B}} \rho^{FR} \operatorname{div}(\mathbf{v}_S) \delta p \, dv - \int_{\mathcal{B}} n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \operatorname{grad}(\delta p) \, dv = 0 \quad (6.8)$$

auszutauschen.

## 6.2 Linearisierung

Als Vorbereitung für die Anwendung des *Newton*-Verfahrens zur Lösung der diskreten, i. a. nichtlinearen Gleichungssysteme, die im Rahmen der FE-Implementierung entstehen, werden die schwachen Formen der Bilanzgleichungen linearisiert. Die Darstellung

Massenbilanz Mischung:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \rho^{FR} \operatorname{div}(\mathbf{v}_S) \delta p \, dv + \int_{\mathcal{B}} n^F \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} p'_S \delta p \, dv - \int_{\mathcal{B}} n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \operatorname{grad}(\delta p) \, dv \\ = - \int_{\partial \mathcal{B}} n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n} \delta p \, da \end{aligned}$$

Impulsbilanz Fluid:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \rho^{FR} [\mathbf{b} - (\mathbf{v}_S + \mathbf{w}_F)'_S - \operatorname{grad}(\mathbf{v}_S + \mathbf{w}_F) \cdot \mathbf{w}_F - \frac{n^F \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{w}_F] \delta \mathbf{w}_F \, dv \\ + \int_{\mathcal{B}} p \operatorname{div}(\delta \mathbf{w}_F) \, dv = \int_{\partial \mathcal{B}} p \delta \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n} \, da \end{aligned}$$

Impulsbilanz Mischung:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I}) \cdot \operatorname{grad}(\delta \mathbf{u}_S) \, dv - \int_{\mathcal{B}} (n^S \rho^{SR} + n^F \rho^{FR}) (\mathbf{b} - (\mathbf{v}_S)'_S) \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv \\ + \int_{\mathcal{B}} n^F \rho^{FR} ((\mathbf{w}_F)'_S - \operatorname{grad}(\mathbf{v}_S + \mathbf{w}_F) \mathbf{w}_F) \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, da \end{aligned}$$

**Tabelle 6.1:** Schwache Formulierung der Bilanzgleichungen für den dynamischen Fall: Hybrides Modell

dieses Abschnitts orientiert sich an den Arbeiten von *Wriggers* [97] und speziell bezüglich poröser Medien an *Eipper* [30].

Die Linearisierung wird dabei in konsistenter Weise durchgeführt, d. h. alle Gleichungen werden vollständig bezüglich aller Unbekannten bis zur gleichen Ordnung abgeleitet. Bei schwach gekoppelten Problemen können alternativ sogenannte „staggered“-Algorithmen eingesetzt werden, bei denen abwechselnd ein Teil des Lösungsvektors konstant gehalten und der andere Teil aus den korrespondierenden Gleichungen bestimmt wird. Da die vorliegenden Gleichungen ein stark gekoppeltes Problem darstellen, werden die Bilanzgleichungen mit Hilfe des *Newton*-Verfahrens komplett gelöst und daher bezüglich aller Feldvariablen vollständig linearisiert.

Kern der Linearisierung ist die Richtungsableitung,

$$\begin{aligned} F_{lin}(\mathbf{y}) &= F(\mathbf{y}_0) + \frac{d}{d\varepsilon} F(\mathbf{y} + \varepsilon \Delta \mathbf{y}) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= F(\mathbf{y}_0) + DF(\mathbf{y}) \cdot \Delta \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

auch als *Gateaux*-Differential bezeichnet, mit dem Vektor der Unbekannten  $\mathbf{y}$ . Dabei stelle  $\mathbf{y}_0$  den Zustand dar, bezüglich dem linearisiert wird. Wird beispielsweise bezüglich der Verschiebungen  $\mathbf{u}_S$  linearisiert, stellt  $\mathbf{y}_0$  die aktuelle Konfiguration dar. Die Linearisierung

entspricht dabei der Bildung eines Tangentenfelds an die Momentankonfiguration von  $\varphi^S$ . Mit  $\mathbf{y} = \mathbf{X}_S$ , also durch Linearisierung bezüglich der Referenzkonfiguration, ergeben sich die Gleichungen der infinitesimalen Theorie.

Für die Richtungsableitung des Deformationsgradienten  $\text{Grad}_S(\mathbf{u}_S)$  erhält man aus der Definition (6.9)

$$\begin{aligned} D_u(\mathbf{F}_S) \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \text{Grad}_S(\mathbf{u}_{S0} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}_S) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \text{Grad}_S(\Delta \mathbf{u}_S). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Der Index  $D_u$  des *Frechet*-Differentials kennzeichnet die Größe, bezüglich der der Operator angewendet wird. Da die Richtungsableitung einen linearen Operator darstellt, können die üblichen Rechenregeln der Differentialrechnung angewendet werden. Für das *Gateaux*-Differential der Determinante  $\det \mathbf{F}_S$  des Deformationsgradienten des Festkörpers, das u. a. für die Linearisierung der Volumenanteile benötigt wird, ergibt sich unter Verwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned} D_u(\det \mathbf{F}_S) \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= \left( \frac{\partial \det \mathbf{F}_S}{\partial \mathbf{F}_S} \cdot D_u \mathbf{F}_S \right) \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ &= \det \mathbf{F}_S \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die geometrische Linearisierung der räumlichen Differentialoperatoren folgt direkt aus deren Transportverhalten (vgl. Anhang A1). Für den Gradienten folgt

$$\begin{aligned} D_u \operatorname{grad}(\dots) \cdot \mathbf{u}_S &= D_u(\operatorname{Grad}_S(\dots) \mathbf{F}_S^{-1}) \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ &= -\operatorname{grad}(\dots) \operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_S \end{aligned} \quad (6.12)$$

unter Verwendung der Richtungsableitung des inversen Deformationsgradienten

$$D_u(\mathbf{F}_S^{-1}) \cdot \Delta \mathbf{u}_S = -\mathbf{F}_S^{-1} \operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_S. \quad (6.13)$$

Für das weitere Vorgehen, das am Beispiel des hybriden, quasistatischen Modells durchgeführt wird, werden die schwachen Formen der Bilanzgleichungen zur übersichtlicheren und kompakteren Darstellung im Funktionsvektor  $\mathbf{G} = \{g_1, g_2\}$  zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} g_1 &:= \int_B (\mathbf{T}_E^S - p \mathbf{I}) \cdot \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S \, dv \\ &\quad - \int_B (n^S \rho^{SR} + n^F \rho^{FR}) \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, dv \\ &\quad - \int_{\partial B} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}_S \, da, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}
g_2 &:= \int_{\mathcal{B}} \left( \rho^{FR} \operatorname{div}(\mathbf{u}_S)'_S + n^F \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} p'_S \right) \delta p \, dv \\
&+ \frac{k_F}{|\mathbf{b}|} (\operatorname{grad} p - \rho^{FR} \mathbf{b}) \cdot \operatorname{grad} \delta p \, dv \\
&+ \int_{\partial \mathcal{B}} n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n} \, \delta p \, da .
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Der korrespondierende Vektor der Feldvariablen  $\mathbf{y}$  setzt sich entsprechend aus  $\mathbf{u}_S$  und  $p$  zusammen:  $\mathbf{y} := \{\mathbf{u}_S, p\}$ . Da die Festkörpergeschwindigkeit lediglich im dynamischen Fall als unabhängige Feldvariable eingeführt wird und im quasistatischen Fall über die Zeitdiskretisierung an die Verschiebungsfreiheitsgrade geknüpft ist, wird im quasistatischen Fall  $(\mathbf{u}_S)'_S$  anstatt  $\mathbf{v}_S$  verwendet. Die vollständig linearisierte Form von  $\mathbf{G}$  lautet

$$\mathbf{G}_{lin} = \mathbf{G}_0 + D_y \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{y} + D_{y'_S} \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{y}'_S \tag{6.16}$$

mit

$$\begin{aligned}
D_y \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} D_u g_1 \cdot \Delta \mathbf{u}_S & D_p g_1 \cdot \Delta p \\ D_u g_2 \cdot \Delta \mathbf{u}_S & D_p g_2 \cdot \Delta p \end{pmatrix}, \\
D_{y'_S} \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{y}'_S &= \begin{pmatrix} D_{u'_S} g_1 \cdot \Delta(\mathbf{u}_S)'_S & D_{p'_S} g_1 \cdot \Delta p'_S \\ D_{u'_S} g_2 \cdot \Delta(\mathbf{u}_S)'_S & D_{p'_S} g_2 \cdot \Delta p'_S \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

und  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{y}_0)$ . Die inkrementellen Größen  $\Delta \mathbf{y} = \{\Delta \mathbf{u}_S, \Delta p\}$  stellen im Rahmen des *Newton*-Verfahrens die Inkremente der Lösung pro Iteration dar. Die Linearisierung (6.17) erfolgt bei festgehaltener Zeit  $t = t_0 = \text{konst.}$ .

Die Linearisierung des Extraspannungsterms in (6.14) bezüglich der Verschiebungen  $\mathbf{u}_S$  verläuft analog dem einphasigen Fall und kann der Literatur entnommen werden (*Wriggers* [97], *Eipper* [30]), wobei zu beachten ist, daß auch das infinitesimale Volumenelement  $dv$  der aktuellen Konfiguration einen Beitrag zur Tangente leistet:

$$\begin{aligned}
D_u \left[ \mathbf{T}_E^S \cdot \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S \, dv \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= \\
\left[ \overset{4}{\mathbf{C}} \frac{1}{2 \det \mathbf{F}_S} (\operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_S + \operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S) + \operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_S \mathbf{T}_E^S \right] \cdot \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S \, dv .
\end{aligned} \tag{6.18}$$

**Anmerkung:** Im Rahmen der später folgenden Zeitdiskretisierung ist der Tangentenmodul  $\overset{4}{\mathbf{C}}$  des elastoplastischen Materialgesetzes unter Beachtung des Integrationsalgorithmus durch sein diskretes Pendant zu ersetzen. In diesem Zusammenhang wird der von *Simo & Taylor* [83] geprägte Begriff des „konsistenten“ Tangentenmoduls verwendet. Die Tangente wird dabei unter Beachtung des Integrationsalgorithmus gebildet, der für das lokale elastoplastische Problem eingesetzt wird, vgl. Kapitel 6.5.

Die geometrische Linearisierung des Druckterms in (6.14) liefert unter Verwendung von (6.11) und (6.12)

$$D_u \left[ -p \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S \, dv \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S = p \left[ \operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S - \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S \mathbf{I} \right] \cdot \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S \, dv . \tag{6.19}$$

Zur Linearisierung des Volumenkraftanteils in  $g_1$  aus (6.14) ist es zweckmäßig, den Anteil mit Hilfe von (1.32), (3.23) und (3.7) auf der Referenzkonfiguration des Festkörperskeletts darzustellen:

$$- \int_{\mathcal{B}} (\dots) dv = - \int_{\mathcal{B}_0} \left[ n_{0S}^S \rho^{SR} + (\det \mathbf{F}_S - n_{0S}^S) \rho^{FR} \right] \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_S dV. \quad (6.20)$$

Dabei kennzeichnet  $\mathcal{B}_0$  das Gebiet des Körpers in der Referenzkonfiguration. Man erkennt, daß lediglich ein Term deformationsabhängig ist und erhält für dessen Linearisierung

$$D_u \left[ (n^S \rho^{SR} + n^F \rho^{FR}) \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_S dv \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S = \rho^{FR} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_S \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S dv. \quad (6.21)$$

Unter der Voraussetzung deformationsunabhängiger Oberflächenkräfte  $\mathbf{t}$  liefert das Oberflächenintegral über den Rand  $\partial \mathcal{B}$  des Gebietes in  $g_1$  aus (6.14) keinen Anteil zur Linearisierung.

Die Linearisierung bezüglich des Porenfluiddrucks liefert unter Beachtung der Abhängigkeit der materiellen Dichte des Fluids vom Druck  $\rho^{FR}(p)$  beim hybriden Modell für den Fall kompressibler Porenfluide:

$$\begin{aligned} D_p \left[ -p \mathbf{I} \cdot \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S dv - n^F \rho^{FR}(p) \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_S dv \right] \cdot \Delta p = \\ -\Delta p \mathbf{I} \cdot \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S dv - n^F \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} \Delta p \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_S dv. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Hierbei wurde von

$$D_p [\operatorname{grad} p] \cdot \Delta p = \operatorname{grad} \Delta p \quad (6.23)$$

Gebrauch gemacht. Die geometrische Linearisierung des Differentialoperators ist bereits in (6.19) enthalten. Eine Linearisierung bezüglich  $\mathbf{y}'_S = \{(\mathbf{u}_S)'_S, p'_S\}$  entfällt, da die entsprechenden Größen in  $g_1$  aus (6.14) nicht explizit auftreten.

Die Linearisierung des ersten Summanden in  $g_2$  bezüglich der Verschiebungen  $\mathbf{u}_S$  liefert zwei Anteile, einen aus der geometrischen Linearisierung des Differentialoperators  $\operatorname{div} (\mathbf{u}_S)'_S$  und einen aus der Linearisierung des infinitesimalen Volumenelements  $dv$  der aktuellen Konfiguration mit (6.12) bzw. (6.11):

$$D_u \left[ \rho^{FR} \operatorname{div} (\mathbf{u}_S)'_S \delta p dv \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S = \rho^{FR} \left( \operatorname{div} (\mathbf{u}_S)'_S \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S - \operatorname{grad}^T (\mathbf{u}_S)'_S \cdot \operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_S \right) \delta p dv. \quad (6.24)$$

Der bezüglich der Festkörperverschiebungen  $\mathbf{u}_S$  linearisierte zweite Summand in  $g_2$  liefert lediglich einen Anteil, was in der Darstellung auf der Referenzkonfiguration ersichtlich wird:

$$\begin{aligned} D_u \left[ n^F \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} p'_S \delta p dv \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= D_u \left[ (\det \mathbf{F}_S - n_{0S}^S) \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} p'_S \delta p dV \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S \\ &= \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} p'_S \delta p dv. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Das Ergebnis ist wiederum auf der aktuellen Konfiguration dargestellt. Der dritte Summand in  $g_2$  aus (6.15) liefert schließlich

$$\begin{aligned} D_u \left[ \frac{k^F}{|\mathbf{b}|} (\text{grad } p - \rho^{FR} \mathbf{b}) \cdot \text{grad } \delta p \, dv \right] \cdot \Delta \mathbf{u}_S = & \left[ - ([\text{grad } \Delta \mathbf{u}_S] \text{grad } p) \cdot \text{grad } \delta p \right. \\ & \left. + (\text{grad } p - \rho^{FR} \mathbf{b}) \cdot (\text{grad } \delta p \, \text{div } \Delta \mathbf{u}_S - \text{grad } \Delta \mathbf{u}_S \, \text{grad } \delta p) \right] \frac{k^F}{|\mathbf{b}|} \, dv. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Mir der Voraussetzung eines deformationsunabhängigen Massenstroms  $q = n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}$  über die Oberfläche  $\partial \mathcal{B}$  des Körpers liefert das Oberflächenintegral in (6.15) ebenfalls keinen Beitrag zur Linearisierung.

Die Linearisierung der Massenbilanz des Fluids  $g_2$  aus (6.15) bezüglich des Porenfluiddrucks ergibt mit (6.23)

$$\begin{aligned} D_p g_2 \cdot \Delta p = & \left( \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} \text{div} (\mathbf{u}_S)'_S \Delta p + n^F \frac{\partial^2 \rho^{FR}}{\partial p^2} \Delta p p'_S \right) \delta p \, dv \\ & + \frac{k^F}{|\mathbf{b}|} (\text{grad } \Delta p - \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} \Delta p \delta p \mathbf{b}) \cdot \text{grad } \delta p \, dv. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Da die Massenbilanz im Gegensatz zur Impulsbilanz explizit von den Geschwindigkeiten der Feldvariablen abhängt, werden zusätzlich die Linearisierungen bezüglich  $(\mathbf{u}_S)'_S$  und  $p'_S$  benötigt. Für die Richtungsableitung von  $g_2$  aus (6.15) bezüglich  $(\mathbf{u}_S)'_S$  folgt

$$D_{(\mathbf{u}_S)'_S} g_2 \cdot \Delta (\mathbf{u}_S)'_S = \rho^{FR} \text{div} (\Delta (\mathbf{u}_S)'_S) \delta p \, dv \quad (6.28)$$

und für die Richtungsableitung bezüglich der Geschwindigkeit des Porenfluiddrucks  $p'_S$

$$D_{p'_S} g_2 \cdot \Delta p'_S = n^F \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} \Delta p'_S \delta p \, dv. \quad (6.29)$$

Die fertige, vollständig linearisierte Form von  $\mathbf{G}$  nimmt somit die Gestalt

$$D_y \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{y} = \begin{pmatrix} (6.18) + (6.19) + (6.21) & (6.22) \\ (6.24) + (6.25) + (6.26) & (6.27) \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$

$$D_{y'_S} \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{y}'_S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (6.28) & (6.29) \end{pmatrix}$$

an, wobei die Einträge den jeweiligen Formelnummern entsprechen. Für den Fall des inkompressiblen Modells wird zusätzlich der Eintrag (6.29) zu null, d. h. die explizite Abhängigkeit des Gleichungssystems von der zeitlichen Änderung des Porenfluiddrucks geht verloren.

Beim dynamische Problem lautet der Variablenvektor  $\mathbf{y} = \{\mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S, \mathbf{w}_F, p\}$  und der Funktionsvektor  $\mathbf{G}$  besteht aus der Impulsbilanz der Mischung, der Verschiebungs-Geschwindigkeitsrelation, der Impulsbilanz des Fluids und der Massenbilanz der Mischung, vgl. Tabelle 6.1. Die Linearisierung verläuft analog wie im oben beschriebenen quasistatischen Fall. Auf die Darstellung der einzelnen Terme wird an dieser Stelle verzichtet.

### 6.3 Ortsdiskretisierung

Für die Ortsdiskretisierung mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente wird das Gebiet des Körpers  $\mathcal{B}$  in  $n_e$  Elemente zerlegt:

$$\mathcal{B} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e. \quad (6.31)$$

$\Omega_e$  bezeichnet die Gebiete der einzelnen Elemente. Die Geometrie der Elemente, bzw. der Zusammenhang zwischen lokalen Elementkoordinaten  $(\xi, \eta)$  und globalen Koordinaten  $(x, y)$ , wird für den zweidimensionalen Fall über die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{k_u} N_i(\xi, \eta) x_i^{(e)}, \\ y &= \sum_{i=1}^{k_u} N_i(\xi, \eta) y_i^{(e)} \end{aligned} \quad (6.32)$$

approximiert. Hierbei stellen  $\{x_i^{(e)}, y_i^{(e)}\}$  die globalen Koordinaten der Elementknoten und  $k_u$  die Anzahl der für die Geometrieapproximation verwendeten Knoten dar. Die Anzahl der Ansatzfunktionen  $N_i(\xi, \eta)$ , die in lokalen Koordinaten definiert sind, beträgt ebenfalls  $k_u$ . Bei den im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich verwendeten isoparametrischen Elementen werden für die Verschiebungen die gleichen Ansatzfunktionen wie für die Geometrieapproximation verwendet:

$$\mathbf{u}_S^{(e)} = \sum_{i=1}^{k_u} N_i \mathbf{u}_{S_i}^{(e)}. \quad (6.33)$$

$(\mathbf{u}_S)_i^{(e)}$  bezeichnet die Verschiebungsfreiheitsgrade an den Knoten der Elemente und  $k_u$  die Anzahl der Verschiebungsknoten.  $\mathbf{u}_S^{(e)}$  steht für die Approximation des Verschiebungsfeldes im Gebiet des Elements  $e$  und ist nicht zu verwechseln mit den korrespondierenden diskreten Freiheitsgraden der Knoten  $(\mathbf{u}_S)_i^{(e)}$ , die durch den zusätzlichen Index  $(\dots)_i$  gekennzeichnet werden. Da die Ansatzfunktionen für die Geometrie und die Verschiebungen gleich gewählt werden, ist auch die Anzahl der jeweiligen Knoten  $k_u$  identisch. Der Porenfluiddruck  $p$  wird mit

$$p^{(e)} = \sum_{j=1}^{k_p} M_j p_j^{(e)} \quad (6.34)$$

angesetzt. Dabei können sowohl die Anzahl der Knoten als auch die Ansatzfunktionen unterschiedlich zu denen der Verschiebungen gewählt werden.

Da die Extraspannungen in der schwachen Form der Impulsbilanz der Mischung (6.5) mit den Verzerrungen und somit den Ableitungen der Ansatzfunktionen für die Verschiebungen  $N_i$  verknüpft sind, liegt es nahe, den Porenfluiddruck  $p$ , der in der Impulsbilanz der Mischung im Spannungsausdruck direkt und somit mit der gleichen Ordnung wie die Extraspannungen auftritt, eine Ordnung niedriger anzusetzen, vgl. *Diebels & Ehlers* [17].

Da in der Massenbilanz des Fluids nach Einsetzen seiner Impulsbilanz (6.3) bzw. (6.6) der Gradient des Porenfluiddrucks steht, muß im quasistatischen Fall der Druck mindestens linear und die Verschiebungen somit quadratisch angesetzt werden. In Abbildung 6.1 sind die entsprechenden zweidimensionalen Elemente mit sechs bzw. 8 Knoten abgebildet.

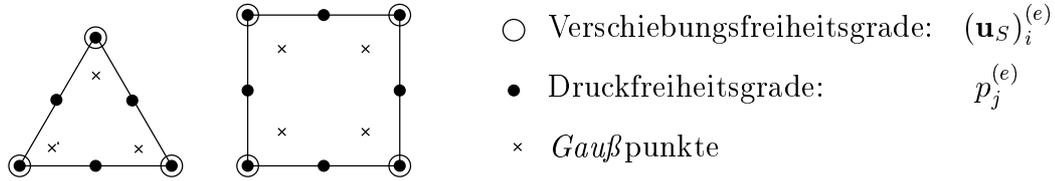


Abbildung 6.1: FE-Ansätze für Dreiecks- und Viereckselemente

Die Ortsabhängigkeit der Feldvariablen  $\mathbf{u}_S$  und  $p$  wird dabei durch die Ansatzfunktionen  $N(\xi, \eta)$  bzw.  $M(\xi, \eta)$  beschrieben, während die Zeitabhängigkeit in den Freiheitsgraden an den Knoten enthalten ist:  $(\mathbf{u}_S)_i^{(e)}(t)$  bzw.  $p_j^{(e)}(t)$ . Die Inkremente der Freiheitsgrade am Knoten während einer *Newton*-Iteration  $\Delta(\mathbf{u}_S)_i^{(e)k}$  bzw.  $\Delta p_j^{(e)k}$  im  $k$ -ten *Newton*-Schritt werden entsprechend den korrespondierenden Feldgrößen angesetzt.

Die Gebietsintegrale der schwachen Form der Bilanzgleichungen können schließlich im Ort diskretisiert und aufgrund der lokalen Eigenschaft der Formfunktionen elementweise in lokalen Koordinaten ausgewertet werden, z. B. für Dreieckselemente:

$$\int_{\mathcal{B}} (\dots) dv = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} (\dots) dv = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\eta=0}^1 \int_{\xi=0}^{1-\eta} (\dots) |J_e| d\xi d\eta \quad (6.35)$$

mit der *Jacobi*-Determinante der Geometrieabbildung des Elements  $e$ :

$$J_e = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}. \quad (6.36)$$

Die numerische Integration über ein Element wird mit Hilfe der *Gauß*-Integration durchgeführt. Die entsprechenden Stützstellen, an denen die Bilanzgleichungen ausgewertet werden müssen, sind in Abbildung 6.1 eingezeichnet. Sollte die Auswertung der Bilanzgleichungen von inneren Variablen, auch als *History*-Variablen bezeichnet, abhängen wie z. B. im Falle der Plastizität, so sind diese an den *Gauß*-Punkten vorzuhalten, im Gegensatz zu den knotenorientierten Freiheitsgraden  $(\mathbf{u}_S)_i^{(e)}$  und  $p_j^{(e)}$ .

Die Testfunktionen  $\delta \mathbf{u}_S$  und  $\delta p$  zur Gewichtung der schwachen Form der Bilanzgleichungen werden beim hier eingesetzten *Galerkin*-Verfahren identisch mit den Ansatzfunktionen der korrespondierenden Freiheitsgrade gewählt:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_S^{(e)} &= \sum_{i=1}^{k_u} N_i \delta (\mathbf{u}_S)_i^{(e)}, \\ \delta p^{(e)} &= \sum_{j=1}^{k_p} M_j \delta p_j^{(e)}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Nach der Ortsdiskretisierung durch die Methode der Finiten Elemente kann das Gleichungssystem  $\mathbf{G}$  (6.14, 6.15) in der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', t) = \mathbf{M}(\mathbf{y}) \mathbf{y}' + \mathbf{k}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{0} \quad (6.38)$$

dargestellt werden mit der verallgemeinerten Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{y})$ , dem Steifigkeitsvektor  $\mathbf{k}(\mathbf{y})$  und dem Vektor der Randlasten  $\mathbf{f}(t)$ , vgl. *Diebels & Ehlers* [17].  $(\dots)'$  kennzeichnet dabei die totale Zeitableitung  $d(\dots)/dt$  und

$$\mathbf{y} = \{\mathbf{u}_{S_1}^{(e)}, \dots, \mathbf{u}_{S_{K_u}}^{(e)}, p_1^{(e)}, \dots, p_{K_p}^{(e)}\} \quad (6.39)$$

den Vektor der Knotenfreiheitsgrade mit der Anzahl  $K_u$  der Verschiebungsknoten des gesamten Problems und der entsprechenden Anzahl  $K_p$  der Druckknoten. Da das Gleichungssystem (6.38) erst bezüglich dem Ort, nicht aber bezüglich der Zeit diskretisiert ist, wird es auch als semidiskret bezeichnet. Die Tangente der semidiskreten Gleichungen (6.38) ergibt sich direkt durch die Diskretisierung der Tangente (6.30) des kontinuierlichen Problems  $\mathbf{G}$  (6.14, 6.15). Hierbei ist jedoch zu beachten, daß der Tangentenmodul  $\overset{4}{\mathbf{C}}$  im Falle der Plastizität durch sein algorithmisch konsistentes Pendant zu ersetzen ist, vgl. Kapitel 6.5.

Für die Diskretisierung des dynamischen Problems werden zusätzlich Ansätze für  $\mathbf{v}_S$  und  $\mathbf{w}_F$  benötigt. Durch die Verschiebungs-Geschwindigkeitsrelation (6.7) liegt es nahe, die Festkörpergeschwindigkeiten  $\mathbf{v}_S$  entsprechend den Verschiebungen  $\mathbf{u}_S$  quadratisch anzusetzen. Die Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  wird aus den gleichen Gründen wie beim Porenfluiddruck  $p$  linear angesetzt.

## 6.4 Zeitdiskretisierung

Die Zeitdiskretisierung des semidiskreten Problems  $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', t)$  (6.38) wird mittels diagonalimpliziter *Runge-Kutta*-Verfahren durchgeführt, vgl. z. B. *Törning & Spellucci* [91], und bezüglich der Anwendung im Bereich der Theorie Poröser Medien *Diebels et. al.* [18] und *Ellsiepen* [31]. Es handelt sich dabei um mehrstufige Einschrittverfahren mit der allgemeine Diskretisierungsvorschrift

$$\bar{\mathbf{F}}_{ni}(\mathbf{Y}_{ni}) \equiv \mathbf{F}\left(\mathbf{Y}_{ni}, \frac{1}{h q_{ii}} \left(\mathbf{Y}_{ni} - \mathbf{y}_n - h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{Y}'_{nj}\right), t_n + c_i h\right) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (6.40)$$

Das Symbol  $(\bar{\dots})$  kennzeichnet das zeitdiskrete und somit vollständig diskretisierte System und  $\mathbf{Y}_{ni}$  bzw.  $\mathbf{Y}'_{ni}$  die Werte bzw. Geschwindigkeiten der Freiheitsgrade auf der  $i$ -ten Stufe des  $n$ -ten Zeitschritts. Die aktuellen Zeitableitungen  $\mathbf{Y}'_{ni}$  können dabei über

$$\mathbf{Y}'_{ni} = \frac{\mathbf{Y}_{ni} - \mathbf{y}_n - h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{Y}'_{nj}}{a_{ii} h} \quad (6.41)$$

aus den Werten des letzten Zeitschritts  $\mathbf{y}_n$  bzw. den Werten auf den Stufen  $\mathbf{Y}_{ni}$  berechnet werden. Im Rahmen des Anfangsrandwertproblems werden Startwerte benötigt:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0). \quad (6.42)$$

Das Gleichungssystem (6.40) für  $\bar{\mathbf{F}}_{ni}$  ist auf jeder der  $s$  Stufen des Integrationsverfahrens in den Unbekannten  $\mathbf{Y}_{ni}$  zu lösen. Die Lösung zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  ergibt sich aus der gewichteten Summe der Zeitableitungen  $\mathbf{Y}'_{ni}$  auf den einzelnen Stufen zu

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{Y}'_{ni}, \quad (6.43)$$

wobei die dabei auftretenden Ableitungen über (6.41) berechnet werden können. Die Koeffizienten  $a_{ij}$ ,  $b_i$  und  $c_i$ , die das Verfahren charakterisieren, werden üblicherweise in einer Tabelle, dem sogenannten *Butcher-Tableau*, angeordnet:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \\ & \hat{b}_1 & \cdots & \hat{b}_s \end{array} \quad (6.44)$$

Für diagonalimplizite Verfahren müssen die Koeffizienten  $a_{ij}$  zwingend eine untere Dreiecksmatrix bilden, vgl. (6.44). Dadurch sind die Gleichungssysteme auf den einzelnen Stufen  $\bar{\mathbf{F}}_{ni}$  voneinander entkoppelt und können einzeln gelöst werden. Für die speziellen Werte  $s = 1$  und  $a_{11} = b_1 = c_1 = 1$  erhält man das implizite *Euler-Verfahren*. Mit  $h := \Delta t$  lautet dann die Berechnungsvorschrift (6.40), (6.41) und (6.43)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{n+1}(\mathbf{y}_{n+1}) &\equiv \mathbf{F}\left(\mathbf{y}_{n+1}, \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n), t_n + \Delta t\right) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}, \\ \mathbf{y}'_{n+1} &= \frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{\Delta t}, \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{y}'_{n+1}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Es genügt für den Fall des impliziten *Euler-Verfahrens* offensichtlich, lediglich die erste Gleichung in den neuen Werten  $\mathbf{y}_{n+1}$  zu lösen. Die beiden folgenden Gleichungen haben hier formalen Charakter.

Die Hauptaufgabe besteht darin, auf jeder der  $s$  Stufen das diskrete Gleichungssystem  $\bar{\mathbf{F}}_{ni}$  für  $i = 1, \dots, s$  zu lösen und anschließend über (6.41) und (6.43) die Lösung  $\mathbf{y}_{n+1}$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  zu bestimmen. Für die Anwendung des *Newton-Verfahrens* wird deren Linearisierung benötigt. Mit

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{ni}^{lk}}{\partial \mathbf{Y}_{ni}^k} = \frac{1}{a_{ii} h} \quad (6.46)$$

kann die Tangente in der Form

$$\begin{aligned} D\bar{\mathbf{F}}_{ni}^k &= \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_{ni}^k}{\partial \mathbf{Y}_{ni}^k} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_{ni}^k}{\partial \mathbf{Y}_{ni}^{lk}} \frac{\partial \mathbf{Y}_{ni}^{lk}}{\partial \mathbf{Y}_{ni}^k} \\ &= \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_{ni}^k}{\partial \mathbf{Y}_{ni}^k} + \frac{1}{h a_{ii}} \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_{ni}^k}{\partial \mathbf{Y}_{ni}^{lk}} \end{aligned} \quad (6.47)$$

dargestellt werden.  $k$  bezeichnet hierbei den *Newton*-Schritt des Gleichungssystem auf der  $i$ -ten Stufe des  $n$ -ten Zeitschritts. Unter Verwendung der Darstellung des semidiskreten Problems (6.38) ergibt sich die Tangente des vollständig diskretisierten Problems zu

$$D\bar{\mathbf{F}}_{ni}^k = \frac{\partial \mathbf{M}_{ni}^k}{\partial \mathbf{Y}_{ni}^k} \mathbf{Y}_{ni}^{lk} + \frac{\partial \mathbf{k}_{ni}^k}{\partial \mathbf{Y}_{ni}^k} + \frac{1}{h a_{ii}} \mathbf{M}_{ni}^k \quad (6.48)$$

mit der verallgemeinerten Massenmatrix  $\mathbf{M}_{ni}^k$  und dem Steifigkeitsvektors  $\mathbf{k}_{ni}^k$  des  $k$ -ten *Newton*-Schritts.  $\mathbf{M}_{ni}^k$  und  $\mathbf{k}_{ni}^k$  ergeben sich dabei aus der Ortsdiskretisierung der Linearisierung des kontinuierlichen Problems aus Kapitel 6.2 entsprechend Kapitel 6.3.

**Anmerkung:** Es besteht die Möglichkeit mit Hilfe sogenannter eingebetteter Verfahren den Fehler der Lösung abzuschätzen und darauf aufbauend eine Steuerung der Zeitschrittweite durchzuführen. Bei eingebetteten Verfahren werden hierfür zwei Lösungen mit Verfahren unterschiedlicher Ordnung berechnet. Für beide Verfahren werden die Lösungen auf den gleichen Stufen ausgewertet und somit keine neuen Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems (6.40) benötigt. Lediglich die Lösungen  $\mathbf{y}_{n+1}$  werden mit unterschiedlichen Gewichten berechnet. Für das Verfahren höherer Ordnung werden die Gewichte  $b_i$  und für das Verfahren niederer Ordnung die Gewichte  $\hat{b}_i$  verwendet, vgl. (6.44). Der Mehraufwand beschränkt sich damit auf wenige Linearkombinationen der Lösungsvektoren  $\mathbf{Y}_{ni}$ . Aus den Lösungen unterschiedlicher Ordnung kann dann der Fehler abgeschätzt werden. Die hier verwendeten Verfahren zur Fehlerschätzung und die darauf aufbauende Zeitschrittweitensteuerung wurden von *Ellsiepen* übernommen und können in *Diebels et. al.* [18], *Diebels & Ehlers* [17] und *Ellsiepen* [31] nachgelesen werden. Ein Verfahren dieser Gruppe ist das *Alex21*-Verfahren. Es handelt sich hierbei um ein Verfahren zweiter Ordnung mit einem eingebetteten Verfahren erster Ordnung.

Eine weitere Modifikation liegt in der Möglichkeit, sogenannte steif genaue Verfahren einzusetzen. Hierbei wird  $b_i = a_{si}$  gesetzt. Sie bieten sich speziell zur Lösung differentialalgebraischer Gleichungssysteme an, da sie die algebraischen Nebenbedingungen zum neuen Zeitpunkt  $t_{n+1}$  erfüllen. Differentialalgebraische Gleichungssysteme liegen hier z. B. im Falle des quasistatischen Problems vor, vgl. (6.30). Da die Massenmatrix dabei singular ist, handelt es sich um ein differentialalgebraisches Gleichungssystem erster Ordnung in der Zeit.

## 6.5 Spannungsberechnung

In diesem Abschnitt wird die Berechnung des Extraspannungstensors  $\mathbf{T}_E^S$  bzw.  $\mathbf{S}_E^S$  des Festkörperskeletts beschrieben, basierend auf dem in Kapitel 3 vorgestellten elastoplasti-

schen Materialmodell. Die Frage, ob rein elastisches oder elastoplastisches Materialverhalten vorliegt, wird anhand des sogenannten „Trialstate“ entschieden, vgl. *Simo* [83]. Dabei werden die plastischen Deformationen konstant gehalten und das gesamte Deformationsinkrement der Stufe als rein elastisch angenommen. Sollte die Fließbedingung erfüllt sein, also  $F \leq 0$ , war die Annahme korrekt und der Schritt rein elastisch. Andernfalls muß das folgende elastoplastische DAE-System gelöst werden.

Das elastoplastische DAE-System wird im folgenden auch als „lokales“ DAE-System bezeichnet, im Gegensatz zum „globalen“ DAE-System (6.40). Während letzteres in den Knotenfreiheitsgraden formuliert ist und das gesamte Randwertproblem umfaßt, kann das lokale DAE-System an jedem *Gauß*-Punkt unabhängig und somit lokal gelöst werden. Die Freiheitsgrade des lokalen Systems, die sogenannten „History“- bzw. inneren Variablen sind im Gegensatz zu den Freiheitsgraden des globalen Systems an den *Gauß*-Punkten definiert.

Neben der eigentlichen Berechnung des Extraspannungstensors  $\mathbf{S}_E^S$ , der für die Auswertung der schwachen Form der Impulsbilanz (6.14) der Mischung benötigt wird, muß die sogenannte „konsistente“ Tangente  $d(\mathbf{S}_E^S)_{ni}^k/d(\mathbf{C}_S)_{ni}^k$  des aktuellen *Newton*-Schritts auf der  $i$ -ten Stufe des  $n$ -ten Zeitschritts bereitgestellt werden, vgl. *Simo & Taylor* [83]. Konsistent bedeutet in diesem Zusammenhang, daß die Linearisierung des lokalen Algorithmus zur Spannungsberechnung unter Beachtung des verwendeten Integrationsverfahrens durchgeführt wird. Die konsistente Linearisierung stellt eine entscheidende Voraussetzung für die quadratische Konvergenz des *Newton*-Verfahrens auf der  $i$ -ten Stufe des globalen Systems (6.40) dar.

Zunächst werden, soweit nötig, die Gleichungen des elastoplastischen Modells auf die gleiche Konfiguration transportiert und ihre Abhängigkeiten ebenfalls in Größen dieser Konfiguration dargestellt. Der Einfachheit halber wird die Darstellung auf der Referenzkonfiguration gewählt.

Da das neue plastische Potential (4.107) lediglich von der ersten und zweiten deviatorischen Invarianten des Extraspannungstensors abhängt, kann die Fließregel (4.71) umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_{Sp} &= \lambda \left[ \frac{\partial G}{\partial \hat{\Pi}^D} \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S + \frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{I}}} \mathbf{I} \right] \\ &= \lambda \left[ d(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\Pi}^D, \hat{\Pi}^D, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^{SD} + h(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\Pi}^D, \hat{\Pi}^D, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \mathbf{I} \right], \end{aligned} \quad (6.49)$$

vgl. (4.110) mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} d(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\Pi}^D, \hat{\Pi}^D, \mathbf{q}, \mathbf{r}) &= \frac{\Psi_1}{2 \sqrt{\Psi_1 \hat{\Pi}^D + \frac{1}{2} \alpha \hat{\mathbf{I}}^2 + \delta^2 \hat{\mathbf{I}}^4}}, \\ h(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\Pi}^D, \hat{\Pi}^D, \mathbf{q}, \mathbf{r}) &= \frac{\alpha \hat{\mathbf{I}} + 4 \delta^2 \hat{\mathbf{I}}^3}{2 \sqrt{\Psi_1 \hat{\Pi}^D + \frac{1}{2} \alpha \hat{\mathbf{I}}^2 + \delta^2 \hat{\mathbf{I}}^4}} + \Psi_2 \beta + 2 \epsilon \hat{\mathbf{I}}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Die Faktoren  $d$  und  $h$  beschreiben dabei die Anteile der deviatorischen bzw. der volumetrischen plastischen Formänderung. Der Übersichtlichkeit halber werden die Abhängigkeiten

der Funktionen  $h$  und  $d$  im folgenden weggelassen. Sie können außer von den Invarianten  $\hat{\mathbf{I}}$ ,  $\hat{\mathbf{I}}^D$  und  $\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}}^D$  über die Abhängigkeit der Parameter im Rahmen der strukturellen Verfestigung auch von den Gesamtdeformationen abhängen. Mit Abbildung 4.3 erhält man aus dem kontravarianten Rückwärtstransport des symmetrischen plastischen Geschwindigkeitsgradienten  $\hat{\mathbf{D}}_{Sp}$  auf die Referenzkonfiguration die materielle Zeitableitung des plastischen *Greenschen* Verzerrungstensors

$$(\mathbf{E}_{Sp})'_S = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{Sp})'_S = \mathbf{F}_{Sp}^T \hat{\mathbf{D}}_{Sp} \mathbf{F}_{Sp} \quad (6.51)$$

und für die Ableitung des plastischen rechten *Cauchy-Green*-Tensors nach Einsetzen der Fließregel (6.49)

$$(\mathbf{C}_{Sp})'_S = 2\lambda [d \mathbf{C}_{Sp} \mathbf{S}_E^S \mathbf{C}_{Sp} + (h - \frac{d}{3} \mathbf{S}_E^S \cdot \mathbf{C}_{Sp}) \mathbf{C}_{Sp}]. \quad (6.52)$$

Alternativ dazu ist auch die kovariante Darstellung der Fließregel möglich:

$$(\mathbf{C}_{Sp}^{-1})'_S = -2\lambda [d \mathbf{S}_E^S + (h - \frac{d}{3} \mathbf{S}_E^S \cdot \mathbf{C}_{Sp}) \mathbf{C}_{Sp}^{-1}]. \quad (6.53)$$

Das elastische Teilgesetz liegt mit (4.50) bereits auf der Referenzkonfiguration vor. Die skalaren Funktionen  $F(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}^D, \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}}^D, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = 0$ ,  $h(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}^D, \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}}^D, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ ,  $d(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}^D, \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}}^D, \mathbf{q}, \mathbf{r})$  und die Evolutionsgleichungen  $\mathbf{q}'_S = \lambda \mathbf{Q}(p^D, p^V, W_p)$  der materiellen Verfestigung müssen nicht transportiert werden. Ihre Argumente müssen jedoch in Größen der Referenzkonfiguration bzw. deren Zeitableitungen dargestellt werden. Die Abhängigkeit von den Parametern  $\mathbf{r}$  kann direkt durch die Abhängigkeit von  $\mathbf{C}_S$  bzw.  $\mathbf{F}_S$  ersetzt werden. Für die Invarianten  $\hat{\mathbf{I}}$ ,  $\hat{\mathbf{I}}^D$  und  $\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}}^D$  des Extraspannungstensors  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S$  der Zwischenkonfiguration, ausgedrückt mit Hilfe von  $\mathbf{S}_E^S$  und  $\mathbf{C}_{Sp}$  und unter Verwendung der Invarianten niedrigerer Ordnung, erhält man

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{I}} &= \mathbf{C}_{Sp} \cdot \mathbf{S}_E^S, \\ \hat{\mathbf{I}}^D &= \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{Sp} \mathbf{S}_E^S) \cdot (\mathbf{S}_E^S \mathbf{C}_{Sp}) - \frac{1}{6} \hat{\mathbf{I}}^2, \\ \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}}^D &= \frac{1}{3} (\mathbf{S}_E^S \mathbf{C}_{Sp} \mathbf{S}_E^S) \cdot (\mathbf{C}_{Sp} \mathbf{S}_E^S \mathbf{C}_{Sp}) - \frac{2}{3} \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{I}}^D - \frac{1}{27} \hat{\mathbf{I}}^3. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Die Argumente der materiellen Verfestigung  $p^D$ ,  $p^V$  (4.66) und  $W_p$  (4.67) lassen sich ebenfalls durch  $\mathbf{S}_E^S$  und  $\mathbf{C}_{Sp}$  ausdrücken, da sie ebenso wie  $\hat{\mathbf{I}}$ ,  $\hat{\mathbf{I}}^D$  und  $\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}}^D$  skalare Invarianten darstellen:

$$\begin{aligned} p^D &= \int \frac{2}{3} \hat{\mathbf{D}}_{Sp}^D \cdot \hat{\mathbf{D}}_{Sp}^D dt = \int \left[ \frac{1}{6} (\mathbf{C}_{Sp}^{-1} (\mathbf{C}_{Sp})'_S) \cdot (\mathbf{C}_{Sp}^{-1} (\mathbf{C}_{Sp})'_S) - \frac{1}{9} (\mathbf{C}_{Sp}^{-1} \cdot (\mathbf{C}_{Sp})'_S)^2 \right] dt, \\ p^V &= \int \frac{1}{3} \hat{\mathbf{D}}_{Sp} \cdot \mathbf{I} dt = \int \frac{1}{6} \mathbf{C}_{Sp}^{-1} \cdot (\mathbf{C}_{Sp})'_S dt, \\ W_p &= \int \hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S \cdot (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Sp})_p^\Delta = \int \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{Sp})'_S \cdot \mathbf{S}_E^S dt. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Mit diesen Vorarbeiten kann das lokale, elastoplastische DAE-System vollständig in Größen der Referenzkonfiguration formuliert werden. Der Variablenvektor des Systems lautet  $\mathbf{y} = \{\lambda, \mathbf{C}_{Sp}, \mathbf{q}\}$  und der Funktionsvektor  $\mathbf{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$  bestehend aus der Fließbedingung  $g_1$ , der Fließregel  $g_2$  und den Entwicklungsgleichungen der materiellen Verfestigung  $g_3$ :

$$\begin{aligned} g_1 &:= F(\mathbf{C}_{Sp}, \mathbf{S}_E^S, \mathbf{q}, \mathbf{C}_S), \\ g_2 &:= (\mathbf{C}_{Sp})'_S - 2\lambda \left[ d \mathbf{C}_{Sp} \mathbf{S}_E^S \mathbf{C}_{Sp} + \left( h - \frac{d}{3} \mathbf{S}_E^S \cdot \mathbf{C}_{Sp} \right) \mathbf{C}_{Sp} \right], \\ g_3 &:= \mathbf{q}'_S - \lambda \mathbf{Q}(\mathbf{C}_{Sp}, \mathbf{S}_E^S, \mathbf{q}, \mathbf{C}_S). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Die Funktion  $g_1$  stellt dabei die algebraische Nebenbedingung des lokalen DAE-Systems dar. Es werden die gleichen Bezeichnungen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{y}$  wie bei der Formulierung des globalen DAE-Systems verwendet, da beide Systeme konsistent, d. h. mit dem gleichen Verfahren integriert werden. In diesem Zusammenhang sei auf die alternative Darstellung der beiden DAE-Systeme in einem gemeinsamen System hingewiesen, s. *Ellsiepen* [31]. Das elastische Teilgesetz (4.50) wurde nicht explizit in den Funktionsvektor  $\mathbf{G}$  aufgenommen, um die Anzahl der Gleichungen des lokalen Systems zu reduzieren. Es wird implizit bei der Berechnung der Invarianten  $\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}^D, \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}}^D$  in Abhängigkeit der Gesamtdeformation  $\mathbf{C}_S$  und der plastischen Deformation  $\mathbf{C}_{Sp}$  eingesetzt. Bei der Darstellung der Abhängigkeiten in (6.56) sind zusätzlich die Beziehungen (6.54) und (6.55) zu beachten. Die Abhängigkeit des Gleichungssystems (6.56) von der Gesamtdeformation  $\mathbf{C}_S$  ist erst bei der Berechnung der konsistenten Tangente von Bedeutung. Während der Lösung des Systems sind die Gesamtdeformationen konstant und stellen in diesem Sinne keinen Freiheitsgrad sondern einen Parameter des Systems dar. Die Abhängigkeit des Systems von der strukturellen Verfestigung ist in der Abhängigkeit der Funktionen  $h$ ,  $d$  und  $F$  von den Gesamtdeformationen  $\mathbf{C}_S$  enthalten. Daraus wird ersichtlich, dass die strukturelle Verfestigung nur einen geringen Mehraufwand für die Berechnung darstellt.

Eine Ortsdiskretisierung des lokalen DAE-Systems wird nicht benötigt. Für die Zeitdiskretisierung werden die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &:= \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{Y}'_{nj}, \\ \Delta T &:= h a_{ii} \end{aligned} \quad (6.57)$$

eingeführt. Die Stufenableitungen (6.41) lauten mit Hilfe der Abkürzungen (6.57) im  $k$ -ten *Newton*-Schritt der Lösung des globalen DAE-Systems

$$\mathbf{Y}'_{ni} = \frac{1}{\Delta T} (\mathbf{Y}_{ni}^k - \bar{\mathbf{y}}^k). \quad (6.58)$$

Für die Diskretisierungsvorschrift (6.40) des lokalen Systems erhält man mit den Abkürzungen (6.57)

$$\mathbf{G}^k(\mathbf{Y}_{ni}^k) \equiv \mathbf{G}\left(\mathbf{Y}_{ni}^k, \frac{1}{\Delta T} (\mathbf{Y}_{ni}^k - \bar{\mathbf{y}}^k), t_n + c_i h\right) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (6.59)$$

Dabei wird die Analogie zwischen der Lösung des Problems auf der Stufe und eines Zeitschritts des impliziten *Euler*-Verfahrens deutlich. Die Lösung des i. a. nichtlinearen Gleichungssystems (6.59) erfolgt ebenfalls mit Hilfe des *Newton*-Verfahrens. Der Index  $k$  kennzeichnet den *Newton*-Schritt des globalen Systems und ist nicht zu verwechseln mit der *Newton*-Iteration des lokalen Systems. Das lokale System ist viel mehr für jede Iteration des globalen *Newton*-Lösers komplett auszuwerten und bedarf daher der Indizierung  $k$  des globalen DAE-Systems. Die Tangente des lokalen DAE-Systems, die für dessen effektive Lösung mit dem *Newton*-Verfahren benötigt wird, kann in der gleichen Weise wie beim globalen System aufgebaut werden. Auf eine ausführliche Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet. Die Aufdatierung der History-Variablen erfolgt entsprechend der Vorschrift (6.43):

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + b_i \sum_{i=1}^s \mathbf{Y}'_{ni}. \quad (6.60)$$

**Anmerkung:** Mit Hilfe der Zeitdiskretisierung kann der Trialstate des Extraspannungstensors  $(\mathbf{S}_E^S)_{tr}$ , der für die Entscheidung, ob rein elastisches oder elastoplastisches Materialverhalten vorliegt, benötigt wird, mit dem elastischen Gesetz  $\mathcal{S}$  angegeben werden:

$$[(\mathbf{S}_E^S)_{ni}^k]_{tr} = \mathcal{S}[(\mathbf{C}_{Sp})_{n(i-1)}, (\mathbf{C}_S)_{ni}^k]. \quad (6.61)$$

Die Lösung des lokalen Gleichungssystems (6.59) entspricht dem „Nachziehen“ der Zwischenkonfiguration bei festgehaltener aktueller Konfiguration (vgl. Abbildung 6.2). Die Gesamtdeformationen  $(\mathbf{C}_S)_{ni}^k$  sind konstant und stellen im Gegensatz zum Lösungsvektor  $\mathbf{y} = \{\lambda_{ni}^k, \mathbf{C}_{Sp_{ni}}^k, \mathbf{q}_{ni}^k\}$ , in dem u. a. auch die neuen plastischen Deformationen  $(\mathbf{C}_{Sp})_{ni}^k$  enthalten sind, einen Parameter des Systems dar.

An dieser Stelle wird der Vorteil der Formulierung des Gleichungssystems in Größen der Referenzkonfiguration sichtbar. Sämtliche Abhängigkeiten von der plastischen Deformation treten explizit auf. Bei einer Formulierung in Größen der Zwischenkonfiguration sind beispielsweise die Extraspannungen  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_E^S$  über die Konfiguration von den plastischen Deformationen abhängig, was auch in der Formulierung der Invarianten (6.54) sichtbar ist.

Da die Gesamtdeformation während der Lösung des lokalen DAE-Systems (6.59) konstant bleibt, hat die strukturelle Verfestigung keinen Einfluß auf den Vorgang der Lösung des Systems (6.59) mit Hilfe des *Newton*-Verfahrens, wohl aber auf die Werte des Lösungsvektors  $\mathbf{Y}_{ni}^k$ . Da auch keine zusätzlichen inneren Variablen und Entwicklungsgleichungen zu deren Bestimmung benötigt werden, ist die Implementierung der strukturellen Verfestigung mit sehr geringem Aufwand verbunden. Es genügt, die Funktionen  $h(n^S)$  (4.101) und  $h_d(n^S)$  (4.106) auszuwerten und die neuen Werte der Parameter  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $\tilde{\delta}$ ,  $\tilde{\alpha}$  und  $\tilde{m}$  zu Beginn der Iteration zu bestimmen, die während des gesamten Lösungsvorgangs konstant bleiben.

Es verbleibt die Aufgabe, den konsistenten Tangentenmodul  $d\mathbf{S}_E^S/d\mathbf{C}_S|_{ni}^k$ , der für die Linearisierung des globalen DAE-Systems benötigt wird, zu bestimmen. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe der impliziten Differentiation, siehe *Bronstein & Semendjajew* [46] und speziell bezüglich der Anwendung bei der Berechnung elastoplastischer Materialmodelle

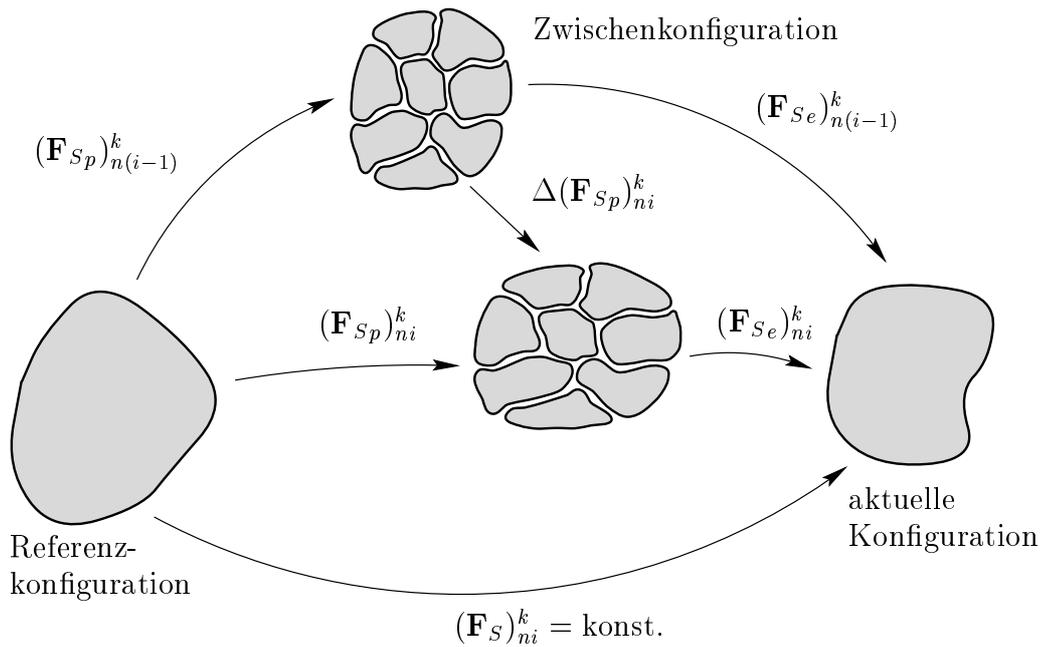


Abbildung 6.2: Lösung des lokalen DAE-Systems: Berechnung von  $\Delta(\mathbf{F}_{Sp})_{ni}^k$

Hartmann [39]. Hierbei wird die Abhängigkeit der Lösung  $\mathbf{Y}_{ni}^k$  des Gleichungssystems (6.59) von dessen Parametern  $(\mathbf{C}_S)_{ni}^k$  bestimmt. Da das Gleichungssystem (6.59) lediglich von den Werten der Lösung auf der neuen Stufe abhängt, kann vereinfacht  $\mathbf{G}(\mathbf{Y}_{ni}^k)$  geschrieben werden. Für die totale Ableitung von  $\mathbf{G}(\mathbf{Y}_{ni}^k)$  nach den Gesamtverzerrungen  $(\mathbf{C}_S)_{ni}^k$  folgt unter Beachtung der Abhängigkeit der Lösung  $\mathbf{Y}_{ni}^k$  von  $\mathbf{G}$  von den Parametern  $(\mathbf{C}_S)_{ni}^k$  und der Abhängigkeit des Systems  $\mathbf{G}$  selbst von  $(\mathbf{C}_S)_{ni}^k$ , also mit  $\mathbf{G}(\mathbf{Y}_{ni}^k) = \mathbf{G}(\mathbf{Y}_{ni}^k(\mathbf{C}_S)_{ni}^k, (\mathbf{C}_S)_{ni}^k)$ , mit der Kettenregel

$$\frac{d\mathbf{G}(\mathbf{Y}_{ni}^k)}{d(\mathbf{C}_S)_{ni}^k} = \frac{\partial\mathbf{G}(\mathbf{Y}_{ni}^k)}{\partial\mathbf{Y}_{ni}^k} \frac{d\mathbf{Y}_{ni}^k}{d(\mathbf{C}_S)_{ni}^k} + \frac{\partial\mathbf{G}(\mathbf{Y}_{ni}^k)}{\partial(\mathbf{C}_S)_{ni}^k}. \quad (6.62)$$

Da  $\mathbf{G}(\mathbf{Y}_{ni}^k)$  im ausiterierten, gelösten Zustand gleich null ist, gilt dies auch für dessen Ableitung. Durch Auflösen folgt somit

$$\frac{d\mathbf{Y}_{ni}^k}{d(\mathbf{C}_S)_{ni}^k} = - \left( \frac{\partial\mathbf{G}(\mathbf{Y}_{ni}^k)}{\partial\mathbf{Y}_{ni}^k} \right)^{-1} \frac{\partial\mathbf{G}(\mathbf{Y}_{ni}^k)}{\partial(\mathbf{C}_S)_{ni}^k}. \quad (6.63)$$

Daß das elastische Gesetz nicht explizit in den Funktionsvektor  $\mathbf{G}$  aufgenommen wurde hat zwar den Vorteil, daß das zu lösende lokale System kleiner ist, jedoch auch den Nachteil, daß die gesuchte Ableitung  $d\mathbf{S}_E^S/d\mathbf{C}_S|_{ni}^k$  nicht im Vektor  $d\mathbf{Y}_{ni}^k/d(\mathbf{C}_S)_{ni}^k$  in (6.63) enthalten ist. Es wird daher noch ein weiterer Schritt benötigt:

$$\frac{d(\mathbf{S}_E^S)_{ni}^k}{d(\mathbf{C}_S)_{ni}^k} = \frac{\partial(\mathbf{S}_E^S)_{ni}^k}{\partial(\mathbf{C}_S)_{ni}^k} + \frac{\partial(\mathbf{S}_E^S)_{ni}^k}{\partial(\mathbf{C}_{Sp})_{ni}^k} \frac{d(\mathbf{C}_{Sp})_{ni}^k}{d(\mathbf{C}_S)_{ni}^k}. \quad (6.64)$$

Die Ableitung  $d(\mathbf{C}_{Sp})_{ni}^k/d(\mathbf{C}_S)_{ni}^k$  ist im Vektor  $d\mathbf{Y}_{ni}^k/d(\mathbf{C}_S)_{ni}^k$  in (6.63) enthalten. Nach der Lösung des lokalen DAE-Systems (6.59) mit Hilfe des *Newton*-Verfahrens kann über (6.63)

und (6.64) die konsistente Tangente ausschließlich aus partiellen Ableitungen bestimmt werden.

## 6.6 Auswertung der Akkustiktensoren

Bei der Auswertung der Akkustiktensoren wird im Falle kompressibler Fluide von kleinen Sickergeschwindigkeiten (5.7) im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit des Fluids ausgegangen:

$$(\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2 \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} \approx 0. \quad (6.65)$$

Die Akkustiktensoren können für den Fall (5.62) einer singulären Fläche erster Ordnung bezüglich der Geschwindigkeiten und für den Fall (5.45) einer singulären Fläche zweiter Ordnung bezüglich der Bewegungsfunktionen in der allgemeinen Form

$$\left[ \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}_E^S + \mathbf{C}^{T^4} + \alpha (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{T^3} \right] (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (6.66)$$

zusammengefaßt werden. Der Faktor  $\alpha$  ist unter Beachtung der Voraussetzung (6.65) unabhängig davon, ob das Fluid kompressibel oder inkompressibel ist. Für den Fall der Fläche erster Ordnung bzgl. der Geschwindigkeiten ergibt sich

$$\alpha = n_{0S}^S \frac{n^S}{n^F} \left( p - \rho^{FR} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2 \right) \quad (6.67)$$

und für den Fall der Fläche zweiter Ordnung bezüglich der Bewegungsfunktionen

$$\alpha = -n_{0S}^S \frac{n^S}{n^F} \rho^{FR} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n})^2. \quad (6.68)$$

Im Falle des ebenen Verzerrungszustandes kann der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  in Abhängigkeit des Winkels  $\phi$  angegeben werden. Es folgt

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_i \quad (6.69)$$

bzw. nach Skalierung mit  $1/\cos \phi$

$$\tilde{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan \phi \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_i. \quad (6.70)$$

Die Skalierung und somit der Verlust der Normierung des Normalenvektors hat keinen Einfluß auf die Auswertung der Akkustiktensoren. Zum einen ist die Normierung für die Herleitung der Lokalisierungsanalyse ohne Bedeutung, vgl. Kapitel 2.1, zum anderen kann durch Multiplikation der Bestimmungsgleichung  $\det(\mathbf{Q}) = 0$  mit  $(1/\cos \phi)^6$  die

entsprechende Form in  $\tilde{\mathbf{n}}$  gewonnen werden. Einsetzen des Normalenvektors (6.70) in die Bestimmungsgleichung

$$\det \left[ \left( \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}_E^S + \mathbf{C}^{4\ 23T} + \alpha (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{23T} \right) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \right] = 0 \quad (6.71)$$

liefert ein Polynom 6-ten Grades in  $\tan \phi$ . Da sämtliche zur Auswertung der Akkustiktensoren benötigten Werte, der *Kirchhoff*-Extraspannungstensor, der elastoplastische Tangentenmodul, die Volumenanteile und die Sickergeschwindigkeit, an den *Gauß*-Punkten vorliegen, wird die Bestimmungsgleichung ebenfalls am *Gauß*-Punkt ausgewertet. Die Nullstellen werden sukzessive durch Anwendung des *Newton*-Verfahrens und anschließende Polynomdivision bestimmt. Die letzten drei Nullstellen werden, sofern es sich um reelle Nullstellen handelt, mit Hilfe der *Cardanischen* Formeln ausgewertet. Aus den Nullstellen des Polynoms liegen über (6.70) die Normalenvektoren  $\tilde{\mathbf{n}}$  und nach Normierung  $\mathbf{n}$  vor. Die zugehörigen Amplitudenvektoren  $\boldsymbol{\xi}_S$  bzw.  $\mathbf{m}_S$ , die zur vollständigen Bestimmung des Lokalisierungsmodus benötigt werden, können im Anschluß daran aus dem linearen Gleichungssystem

$$\mathbf{Q}(\mathbf{n}) \mathbf{m}_S = \mathbf{0} \quad (6.72)$$

bestimmt werden.

# Kapitel 7

## Beispiele

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Materialmodelle wurden entsprechend Kapitel 6 in das FE-System *PANDAS* [27] implementiert. Die modulare Struktur von *PANDAS* ermöglicht dabei die Verwendung verschiedener impliziter Zeitintegrationsverfahren und einer zugehörigen Zeitschrittweitensteuerung (*Ellsiepen*, [31]), vgl. Kapitle 6.4. Darüber hinaus stehen verschiedenste Elementansätze zur Verfügung, speziell 6-knotige Dreieckselemente, 8-Knotige Viereckselemente und 20-knotige Quaderelemente, die im folgenden Verwendung finden. Bei den zweidimensionalen Rechnungen wurde ausschließlich der ebene Verzerrungszustand betrachtet.

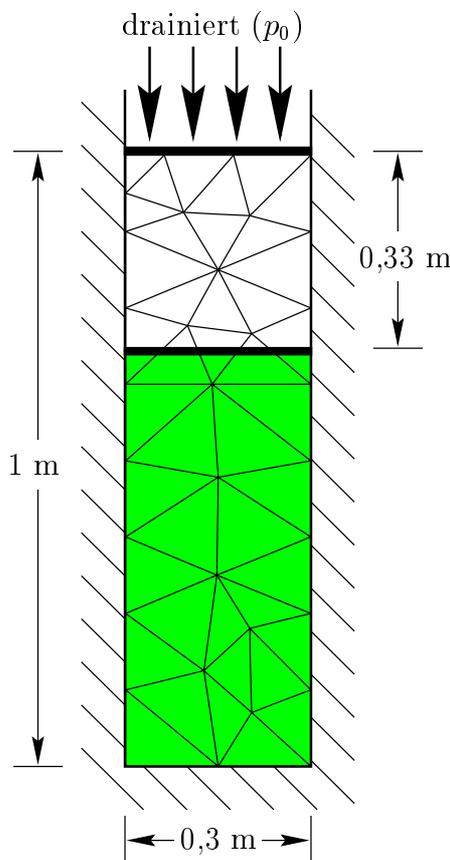
Das erste Beispiel dient der Verifizierung der Materialmodellierung. Hierbei wird speziell auf den Kompressionspunkt im Rahmen der elastoplastischen Formulierung eingegangen und der Einfluß der strukturellen Verfestigung und der Mischphase diskutiert. Die Untersuchungen werden anhand des Konsolidationsproblems durchgeführt, das in Kapitel 7.1 beschrieben wird. Es folgen in Kapitel 7.2 die Validierung der Kompressionspunkte des elastoplastischen Materialmodells und darauf aufbauend der Mischung unter Verwendung der Mischphase. In Kapitel 7.3 wird die Leistungsfähigkeit des Materialmodells anhand eines Vergleichs mit Materialversuchen von Polyethylenschäumen unterschiedlicher Porosität demonstriert.

In Kapitel 7.4 werden grundlegende Effekte der Lokalisierung poröser Medien bestehend aus Festkörper und Porenfluid mit Hilfe des auch in der Literatur häufig anzutreffenden Biaxialversuchs diskutiert. Besondere Beachtung gilt dabei dem Einfluß des Porenfluids. Dabei haben sowohl dessen Kompressibilität als auch die Permeabilität  $k^F$  einen großen Einfluß auf das Lokalisierungsverhalten. Anhand dieses Beispiels wird zusätzlich die Auswertung des Akkustiktensors für poröse Medien durchgeführt.

### 7.1 Konsolidationsproblem

Beim Konsolidationsproblem (s. Abbildung 7.1) wird das Stauchen einer Wanne betrachtet. An den seitlichen Wänden sind die Horizontalverschiebung und am Boden die Vertikalverschiebung behindert. Die Oberfläche ist drainiert, d. h. der Druck ist gleich dem

Umgebungsdruck  $p_0 = 108845 \text{ N/m}^2$ , und das Porenfluid kann aussickern. Die restlichen Ränder sind undrainiert. Die Belastung der Oberfläche wird innerhalb  $1/1000$  Sekunde auf den Maximalwert von  $10 \text{ MN/m}^2$  gesteigert und dann konstant gehalten. Die Materialparameter sind in der Tabelle in Abbildung 7.1 zusammengefaßt. Auf eventuell abweichende Parameter wird im Text explizit hingewiesen. Das gleiche Randwertproblem liegt ebenfalls den Kapiteln 7.2 und 7.3 zugrunde. Die Probe besteht zu 67 % aus einem rein elastischen Festkörperskelett und zu 33 % aus Porenfluid. Der Wert von  $\rho^{LR}$  beschreibt im Rahmen der Mischphase die materielle Dichte des inkompressiblen Anteils des Porenfluids.



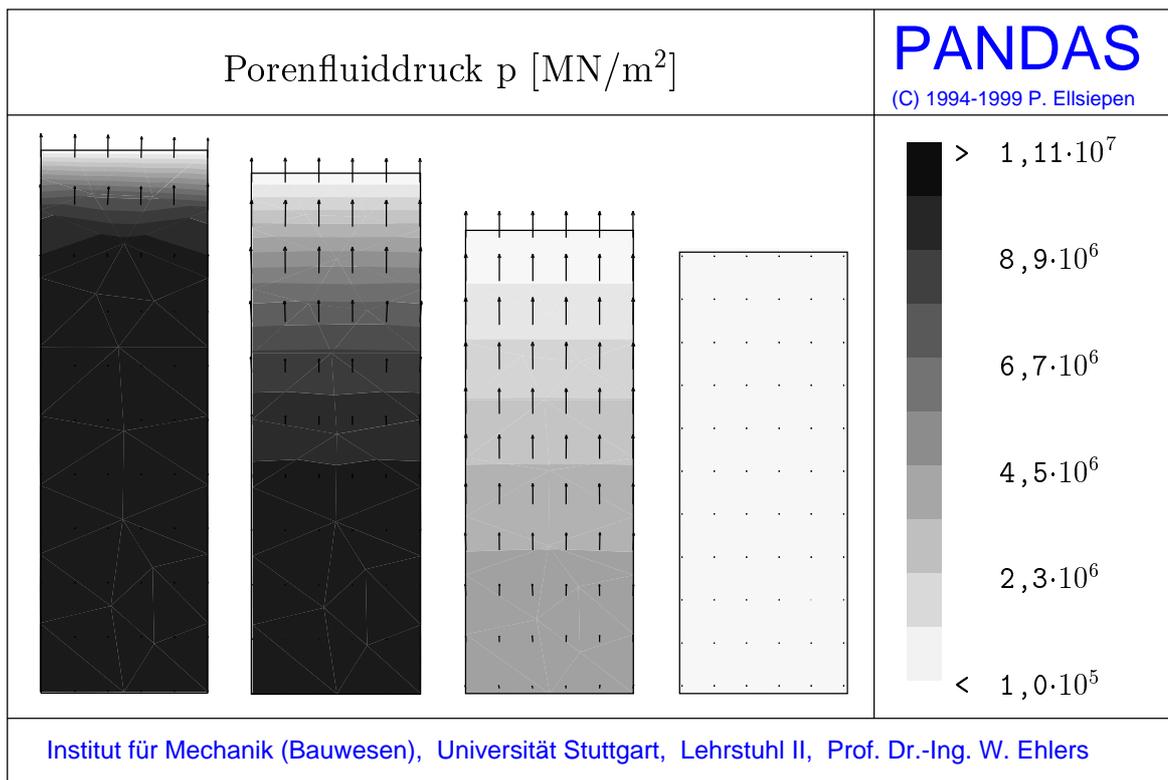
Materialparameter				
$\rho^{LR}$	1000	$\rho^{SR}$	2600	kg/m <sup>3</sup>
$n^F$	0,33	$k^F$	$1,00 \cdot 10^{-6}$	m/s
$\mu$	10,00	$\lambda$	12,00	MN/m <sup>2</sup>
Plastisches Potential		Fließfläche		
$\psi_1$	4,545	$\alpha$	0,01	
$\psi_2$	0,770	$\beta$	0,25	
		$\gamma$	1,664	
		$\delta$	$1,53 \cdot 10^{-7}$	m <sup>2</sup> /kN
		$\varepsilon$	$2,65 \cdot 10^{-7}$	m <sup>2</sup> /kN
		$\kappa$	1,0	N/m <sup>2</sup>
		$m$	0,5690	

(Ehlers & Müllerschön, [29])

**Abbildung 7.1:** Stauchen einer Wanne: Randwertproblem und Materialparameter

Aufgrund der Fluidviskosität ist der Prozeß auch unter Vernachlässigung dynamischer Effekte im Rahmen der quasistatischen Formulierung zeitabhängig. Nach der Lastaufbringung ergibt sich direkt unter der Oberfläche ein Druckgradient, und das Porenfluid beginnt auszusickern, vgl. Abbildung 7.2. Die Vektoren in der Abbildung stellen die Sicker-

geschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  dar, die bezüglich des jeweiligen Maximalwertes normiert ist. Im Verlauf des Konsolidationsprozesses pflanzt sich der Druckgradient über das gesamte Randwertproblem fort. Nach 1000 Sekunden ist der Konsolidationsprozeß weitgehendst abgeschlossen. Der Porenfluiddruck entspricht im gesamten Körper dem Umgebungsdruck  $p_0$ . Es kann somit kein Porenfluid mehr aussickern. In diesem Zustand trägt allein das Festkörperskelett die Belastung und es ergibt sich der Deformationszustand, den ein leeres Festkörperskelett instantan liefert.



**Abbildung 7.2:** Stauchen einer Wanne: Porenfluiddruck  $p$  und Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F$  (normiert) zu den Zeitpunkten  $t = 1$  s,  $t = 10$  s,  $t = 100$  s und  $t = 1000$  s

Das Verhalten des Anfangsrandwertproblems hängt dabei stark von der Modellierung des Porenfluids ab.

Während bei einem inkompressiblen Porenfluid eine Deformation des Körpers lediglich durch Ausströmen möglich ist, kann im Falle eines kompressiblen Fluids zusätzlich eine Deformation aufgrund dessen Kompressibilität eintreten.

In Abbildung 7.3 ist die Absenkung der Oberfläche in Abhängigkeit der Zeit für  $0 \dots 100$  Sekunden dargestellt. Es wurden dabei ideales Gas ( $M_{LG} = 0$ , vgl. 3.44), Mischphase mit 25 % Volumenanteil inkompressiblen Porenfluids im Ausgangszustand ( $M_{LG} = 257,8$ ), 50 % Volumenanteil ( $M_{LG} = 773,4$ ) und vollständig inkompressibles Porenfluid ( $M_{LG} = \infty$ ) modelliert. Der Einfluß der Kompressibilität des Porenfluids auf die Last-Setzungs-Kurve ist in Abbildung 7.3 deutlich zu erkennen.

Je höher der Anteil kompressiblen Porenfluids ist, desto größer ist die Kompressibilität der Mischphase und entsprechend höher die Anfangssetzung. Es folgt die Konsolidationsphase. Hierbei kommt es durch Ausströmen des Porenfluids zu einer weiteren Absenkung der Oberfläche. Die Last-Setzungs-Kurven nähern sich dabei im auskonsolidierten Zustand einem gemeinsamen Grenzwert an. Da im auskonsolidierten Zustand der Porenfluiddruck im gesamten Körper gleich dem Umgebungsdruck  $p_0$  ist, trägt allein das Festköperskelett die gesamte Last. Es ergibt sich somit ein vom Fluid unabhängiger Grenzwert, der allein aus dem elastischen Gesetz folgt. Dies ist in Abbildung 7.4 gut zu erkennen, in der der Zeitbereich von 0 bis 1000 Sekunden dargestellt ist. Für die elastoplastische Formulierung gilt dies jedoch nicht mehr.

In Abbildung 7.5 und 7.6 sind die Verschiebungsverläufe für den Fall einer linearen Laststeigerung mit  $100 \text{ kN}/(\text{m}^2\text{s})$  aufgetragen. Der Volumenanteil des Festkörpers in der Referenzkonfiguration beträgt  $n_{0S}^S = 0,25$  und der Durchlässigkeitskoeffizient  $k^F = 10^{-6} \text{ m/s}$ . Die Verläufe nähern sich für unterschiedliche Porenfluide wieder dem gleichen Grenzwert an, der aus dem elastischen Gesetz resultiert.

In Abbildung 7.5 ist gut zu erkennen, wie der Deformationsprozeß bei Verwendung der Mischphase zuerst durch die Kompressibilität des Fluids dominiert wird. Die Kurven entsprechen in diesem Bereich weitgehendst dem Verlauf mit idealem Gas. Bei weiterer Laststeigerung und einhergehender Kompression des Porenfluids nimmt die Bedeutung der Konsolidation zu und die Kurven zeigen das gleiche Verhalten auf, wie im Falle vollständig inkompressiblen Fluids ( $M_{LG} = \infty$ ). Der Punkt des Umschaltens hängt dabei von der Zusammensetzung der Mischphase ab. Je höher der Anteil inkompressiblen Fluids ist, desto früher wird die Last-Setzungs-Kurve durch den Konsolidationsmechanismus dominiert.

Aus den Beispielen ist der Einfluß der Modellierung des Porenfluids und der Bedeutung der Mischphase offensichtlich. Speziell das Deformationsverhalten bei kleiner Permeabilität bzw. hoher Belastungsgeschwindigkeit hängt stark von der Kompressibilität des Porenfluids ab. Dies ist bei der Verwendung poröser Materialien zur Dämpfung und Energieabsorption (Crash) von besonderem Interesse. Weiter wurde gezeigt, daß die Mischphase die Fälle des ideal kompressiblen und des inkompressiblen Porenfluids enthält.

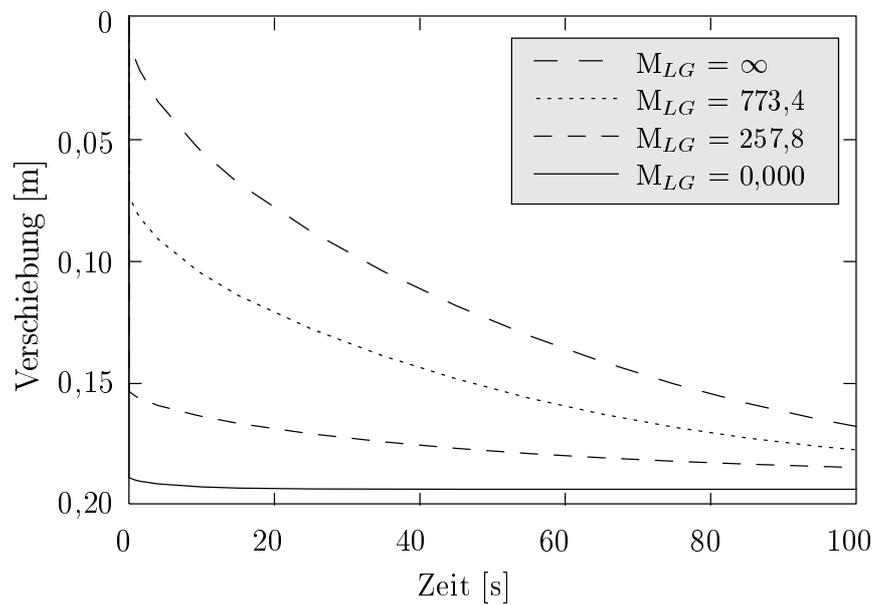


Abbildung 7.3: Konsolidationsproblem: Einfluß der Modellierung des Porenfluids bei sprunghafter Laststeigerung für  $t = 0 \dots 100$  Sekunden

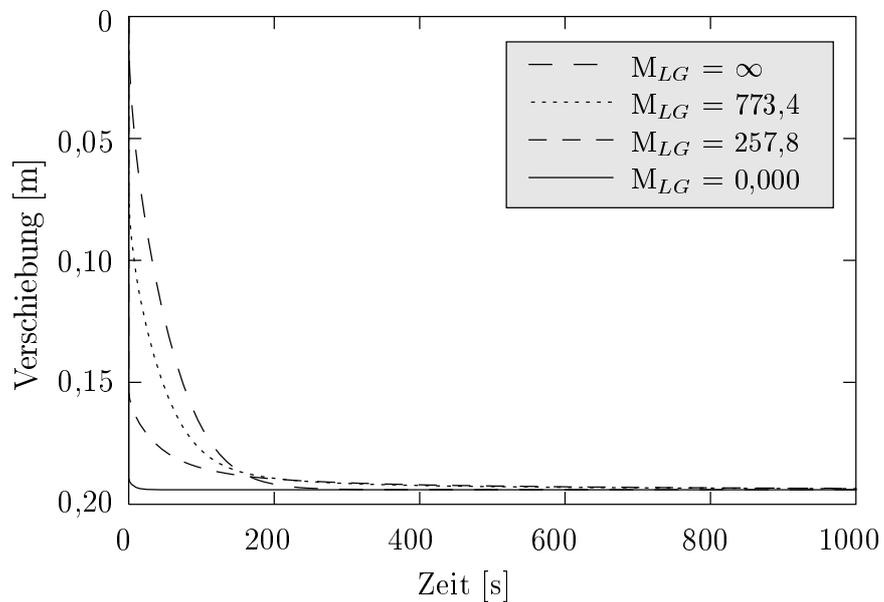
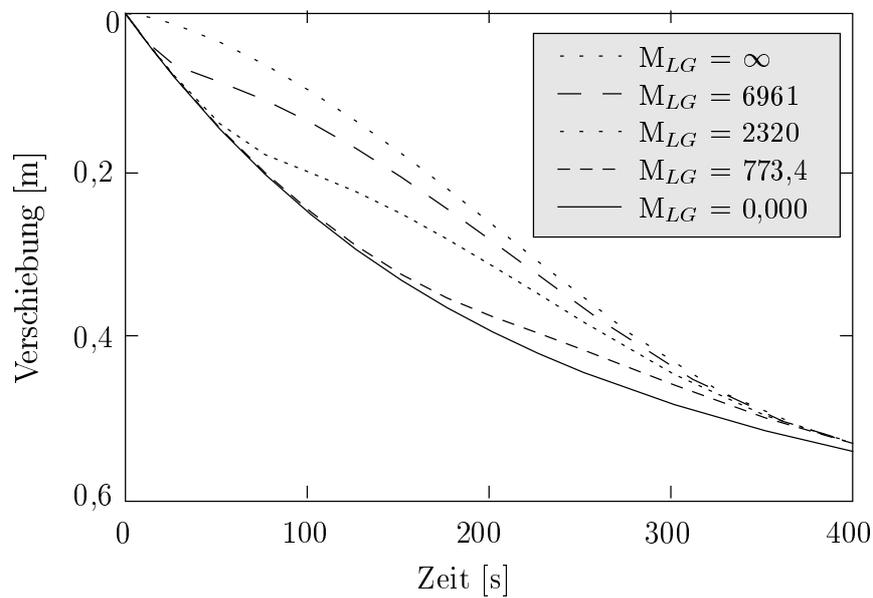
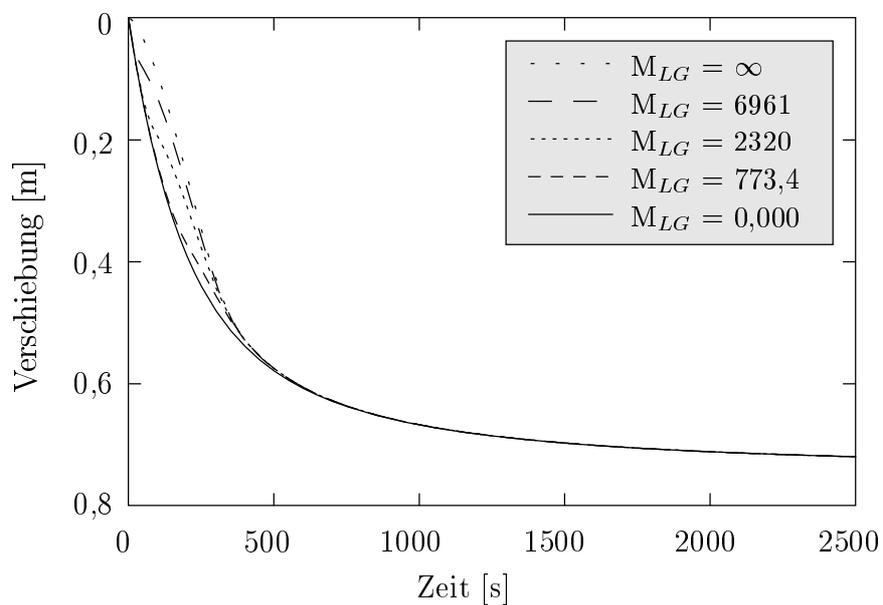


Abbildung 7.4: Konsolidationsproblem: Einfluß der Modellierung des Porenfluids bei sprunghafter Laststeigerung für  $t = 0 \dots 1000$  Sekunden



**Abbildung 7.5:** Konsolidationsproblem: Einfluß der Modellierung des Porenfluids bei linearer Laststeigerung für  $t = 0 \dots 400$  Sekunden



**Abbildung 7.6:** Konsolidationsproblem: Einfluß der Modellierung des Porenfluids bei linearer Laststeigerung für  $t = 0 \dots 2500$  Sekunden

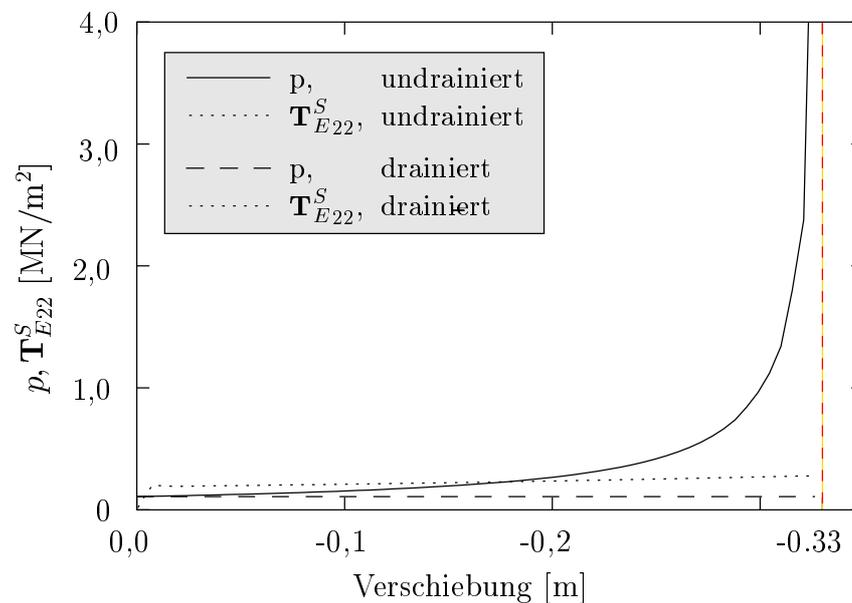
## 7.2 Kompressionspunkt

Zuerst wird der Kompressionspunkt der elastoplastischen Formulierung anhand des drainierten Problems verifiziert und darauf aufbauend der Kompressionspunkt der gesamten Mischung unter Verwendung der Mischphase anhand des undrainierten Problems.

Zur (weitgehenden) Erreichung des Kompressionspunktes wird der Körper immer weiter komprimiert. Eine vollständiges Erreichen ist dabei nicht möglich, da der Kompressionspunkt mit gegen  $\infty$  gehenden hydrostatischen Spannungen verbunden ist. Bei dem gewählten Volumenanteil des Festkörpers von  $n_{0S}^S = 0,66$  und der Höhe der Wanne von  $h = 1$  m beträgt die maximale Verschiebung der Oberfläche

$$u_{max} = (1 - n_{0S}^S) h = 0,33 \text{ m}. \quad (7.1)$$

Eine weitere Deformation ist aufgrund der materiellen Inkompressibilität des Festkörperskeletts nicht möglich. Der Volumenanteil beträgt im Kompressionspunkt  $n^S = 1$ .



**Abbildung 7.7:** Drainiertes und undrainiertes Problem ohne Verfestigung

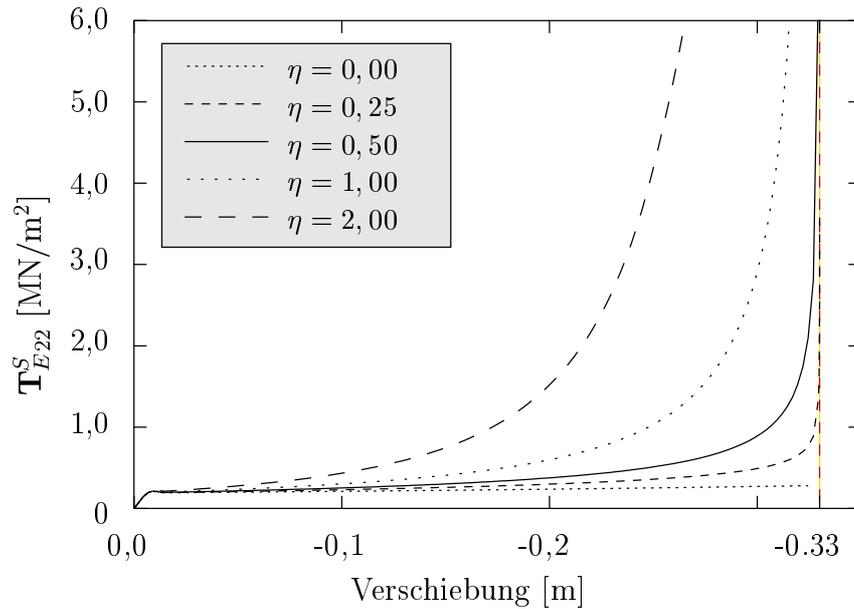
In Abbildung 7.7 sind die Vertikalspannungen  $\mathbf{T}_{E22}^S$  und der Porenfluiddruck  $p$  über der Absenkung der Oberfläche für den Fall des drainierten und des undrainierten Problems aufgetragen. Es wurde beidesmal ideales Gas als Porenfluid verwendet. Um Effekte, die auf dem Konsolidationsprozeß beruhen, weitgehend auszuschalten, ist der *Darcysche* Durchlässigkeitsparameter  $k^F$  auf  $1,0$  m/s gesetzt. Das Randwertproblem kann somit zu jedem Zeitpunkt als vollständig auskonsolidiert betrachtet werden. Das Festkörperskelett ist idealplastisch modelliert, d. h. ohne jegliche Form der Verfestigung, weder materieller noch struktureller Art. Im undrainierten Fall wird das eingeschlossene Porenfluid vollständig komprimiert, und der Druck steigt gemäß dem idealen Gasgesetz (3.21) gegen  $\infty$  an. Die Festkörperextraspansungen bleiben aufgrund der idealen Plastizität konstant. Die äußere Last wird somit vorwiegend vom Porenfluid getragen, und der Kompressionspunkt für das gesamte Randwertproblem wird eingehalten. Für den Fall der drainierten Wanne bzw. des

quasi leeren Festkörperskeletts ist der Porenfluiddruck im gesamten Problem gleich dem Umgebungsdruck  $p = p_0$ . Die äußere Last wird somit ausschließlich vom Festkörperskelett getragen. Da eine Steigerung der Extraspannungen bedingt durch die ideale Plastizität ausgeschlossen ist, eine weitere Kompression jedoch entsprechend dem elastischen Gesetz (4.49) nur mit einer Erhöhung der Spannungen einhergehen kann, ergibt sich, daß weder eine weitere Kompression noch eine weitere Laststeigerung stattfinden können. Dies steht jedoch in klarem Widerspruch zu Beobachtungen in Experimenten, die einen deutlichen Anstieg der Spannungen im Bereich des Kompressionspunktes zeigen. Dies gilt sowohl für rein elastisches wie auch für elastoplastisches Materialverhalten, vgl. *Gibson & Ashby* [34]. Bei Verwendung eines elastischen Gesetzes ohne Kompressionspunkt können im Rahmen einer elastoplastischen Formulierung sogar negative Volumina auftreten, bedingt durch anhaltende kontraktante Deformation.

Es ergibt sich die Notwendigkeit, den Kompressionspunkt auch bei elastoplastischem Materialverhalten zu modellieren. Dies wird mit Hilfe der strukturellen Verfestigung bewerkstelligt. In Abbildung 7.8 sind die entsprechenden Last-Verschiebungs-Verläufe für verschiedene Werte des Parameters  $\eta$  der strukturellen Verfestigung aufgetragen. Die Kurven entsprechen den typischen Verläufen poröser, elastoplastischer Schäume, wie z. B. von Metall- oder Polymerschäumen, vgl. *Gibson & Ashby* [34], *Weber* [95]. Nach einem relativ kleinen elastischen Bereich schließt sich das sogenannte „plastische Plateau“ mit großen Volumendehnungen bei kleinen Spannungsänderungen an. Ihm folgt der Bereich der Verdichtung. Die Verdichtung bzw. Annäherung an den Kompressionspunkt ist mit einem großen Anstieg der hydrostatischen Spannungen verbunden. Das Materialverhalten wird hier wieder elastisch, jedoch mit einer deutlich steileren Tangente als im ersten Bereich. Der Kompressionspunkt und somit auch die ihm zugrunde liegende Forderung nach Einhaltung der Massenbilanz sind sichergestellt, was in Abbildung 7.8 deutlich zu erkennen ist. Das Ansprechverhalten der strukturellen Verfestigung kann dabei durch den Parameters  $\eta$  in weiten Bereichen variiert werden, vgl. Abbildung 7.8. Für  $\eta = 0$  ist die Abwärtskompatibilität zur idealen Plastizität sichergestellt.

Mit Hilfe der strukturellen Verfestigung ist es somit auf natürlichem Wege möglich, poröse Medien bei großer, elastoplastischer Volumendeformation und offenen Poren zu beschreiben. Aufgrund der Abwärtskompatibilität des Modells ist es für den Fall, daß die Fluidphase nur einen geringen Einfluß hat, sogar möglich, Anfangsrandwertprobleme allein durch das Festkörperskelett zu beschreiben. Dies spart neben der Modellierung des Fluids auch die entsprechenden Freiheitsgrade im Rahmen der FE-Implementierung und ermöglicht den Einsatz des Materialgesetzes in vielen kommerziellen FE-Programmen.

Zur Verifizierung der Forderung nach Kombinierbarkeit mit materieller Verfestigung in Kapitel 4.3.5 wurde die strukturelle Verfestigung mit der von *Ehlers & Müllerschön* in [29] vorgestellten Formulierung kombiniert. Es handelt sich dabei um eine Verfestigungsformulierung in Abhängigkeit der plastischen Arbeit  $W_p$  (4.67), die einen Sättigungswert besitzt. Die Beschreibung des Modells und die Materialparameter können [29] entnommen werden. Das Modell wurde von *Ehlers & Müllerschön* für den Bereich kleiner Deformationen angepaßt. Die Last-Verschiebungs-Verläufe sind in Abbildung 7.9 dargestellt. Die materielle Verfestigung allein versagt bei der Annäherung an den Kompressionspunkt ebenso wie die ideale Plastizität. Dies liegt nicht an der Anpassung für kleine Deformationen im Rahmen der linearen Theorie. Der Hauptgrund liegt in der Formulierung



**Abbildung 7.8:** Sicherung des Kompressionspunktes durch die strukturelle Verfestigung

inherenten Sättigung der Verfestigung. In Kombination mit der strukturellen Verfestigung kann der Kompressionspunkt wieder sichergestellt werden, und es ergibt sich ein stetiger Verlauf der Last-Verschiebungs-Kurve, vgl. Abbildung 7.9. Die beiden Formen der Verfestigung, materielle und strukturelle, sind problemlos kombinierbar und ergänzen sich bei der Beschreibung realer Materialien.

Als letztes wird schließlich der Kompressionspunkt der gesamten Mischung, bestehend aus einem elastoplastischen Festkörperskelett und der Mischphase, verifiziert. Hierzu wird der obere Rand wieder undrainiert modelliert, um Konsolidation und somit Ausströmen des Porenfluids zu vermeiden. Die Gesamtdeformation resultiert somit ausschließlich aus der Kompression des Porenfluids. Es wurden hierfür verschiedene Zusammensetzungen der Mischphase verwendet, mit den Parametern

Volumenanteil $n_{0F}^{LR}$ in %	$M_{LG}$
1,0	7,812
10,0	85,93
50,0	773,4
90,0	6961

Dabei beschreibt der Volumenanteil, wieviel Prozent der Volumens der Mischphase im Ausgangszustand ( $p = p_0$ ) aus inkompressiblem Fluid bestehen. Die Konstante  $M_{LG}$  folgt gemäß (3.44). In Abhängigkeit des Massenanteils stellen sich unterschiedliche Kompressionspunkte des Randwertproblems ein, die sich aus den Volumenanteilen der materiell inkompressiblen Phasen des Festkörpers  $\varphi^S$  und des Fluids  $\varphi^L$  ergeben, vgl. Abbildung 7.10. Je höher der Anteil inkompressiblen Fluids an der Mischphase ist, desto geringer ist die maximal mögliche Volumendeformation. Es wird dabei der jeweilige Kompressionspunkt erreicht.

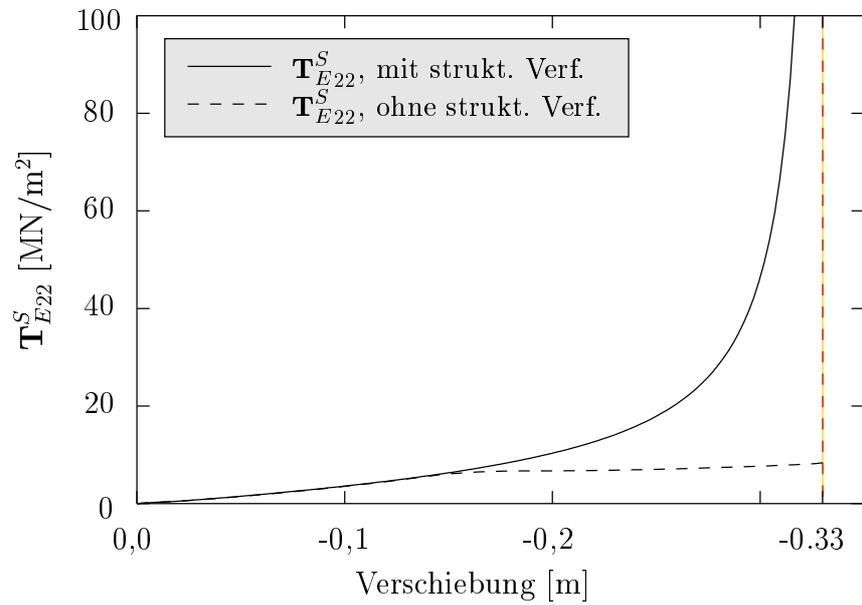


Abbildung 7.9: Kompression mit materieller und zusätzlich struktureller Verfestigung

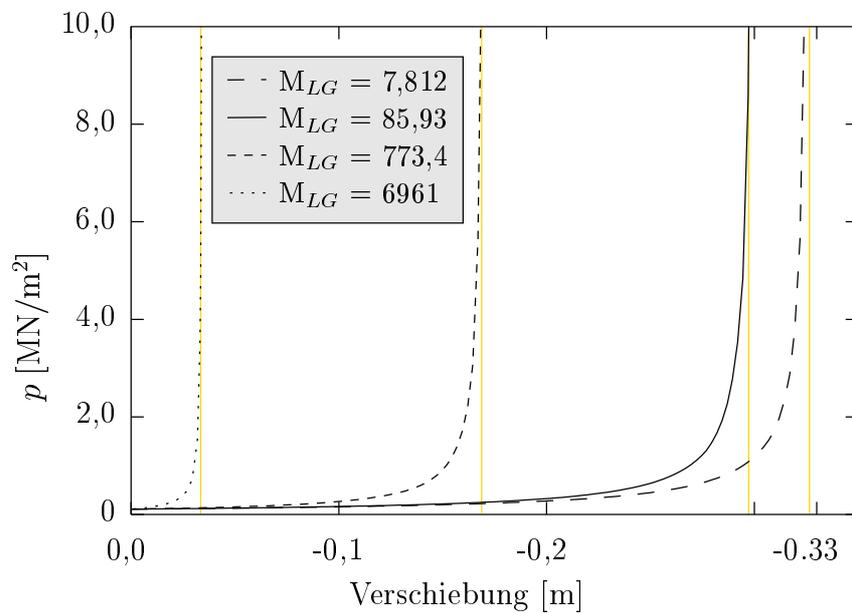


Abbildung 7.10: Kompressionspunkt der Mischphase

### 7.3 Anpassung des Modells an einen Polymerschaum

Zur Demonstration der Anpassungsfähigkeit des Materialmodells wurden Polyethylenschäume mit unterschiedlichen Dichten und somit Volumenanteilen  $n^S$  des Festkörpers verwendet. Das Randwertproblem ist in Abbildung 7.11 dargestellt.

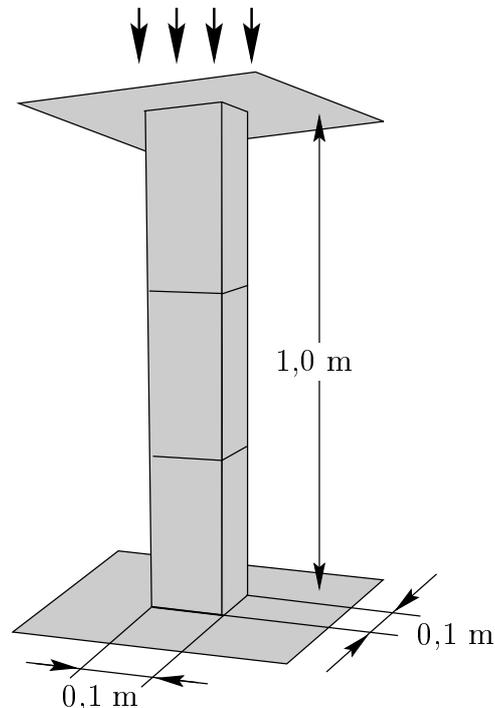


Abbildung 7.11: Einaxialer Kompressionsversuch

Für die Vernetzung wurden 20-knotige Quaderelemente verwendet. Da bei offenporigen, luft- bzw. gasgefüllten Schäumen das Fluid keinen nennenswerten Einfluß hat, wurde der *Darcysche* Durchlässigkeitsparameter  $k^F$  auf 1,0 m/s gesetzt. In Verbindung mit der schlanken Form des Randwertproblems und den damit verbundenen kurzen Drainagewegen ist der Einfluß des Fluids weitgehendst ausgeschaltet. Die Form der Probe selbst hat unter Vernachlässigung der Konsolidation keinen Einfluß auf das Ergebnis. Das Festkörperskelett ist elastoplastisch ohne materielle und mit struktureller Verfestigung modelliert.

In Abbildung 7.13 sind die experimentell bestimmten Verläufe nach *Gibson & Ashby* [34] S. 180 aufgetragen und in Abbildung 7.14 die Verläufe der Simulationsrechnungen. Die Materialparameter sind in Abbildung 7.12 zusammengefaßt. Sie wurden dabei für jeden Polyethylenschaum einzeln angepaßt.

Während die Kurven (a) - (d) nahezu deckungsgleich angepaßt werden konnten und die Parameter entsprechend dem Volumenanteil  $n_{0S}^S$  in der Referenzkonfiguration monotone Reihen bilden (vgl. Abbildung 7.12), war eine ähnlich gute Anpassung für die Kurve (e) nicht möglich. Die bei hochporösen Schäumen dominanten strukturell bedingten Effekte, die die Verläufe der Kurven (a) - (d) regieren, werden durch die strukturelle Verfestigung sehr

gut abgebildet. Bei dem Schaum (e) hingegen liegt ein deutlich höherer Volumenanteil  $n_{0S}^S$  der Festkörpermatrix vor. Dadurch nimmt der Einfluß materielle Effekte wie z. B. materielle Verfestigung und speziell Schädigung an Bedeutung zu. Diese wurden jedoch nicht mit modelliert.

Darüber hinaus besteht in dem verwendeten elastischen Gesetz von *Eipper* [30] keine Möglichkeit, das Ansprechverhalten im Bereich des Kompressionpunktes zu steuern, wie dies beispielsweise bei der strukturellen Verfestigung über den Parameter  $\eta$  möglich ist.

**Anmerkung:** Der Knick in Abbildung 7.14 beim Übergang des elastischen Bereichs in das plastische Plateau ist Folge der nicht modellierten materiellen Verfestigung.

Die Besonderheiten poröser Schäume bei großen Deformationen, speziell im Kompressionsbereich, werden sehr gut durch die strukturelle Verfestigung abgebildet. Hierin liegt auch ein besonderes Interesse der Modellierung und darauf aufbauenden Simulation, da das Kompressionsverhalten derartige Materialien häufig zur Energieabsorption genutzt wird, z. B. bei Crashtests.

		a	b	c	d	e
$n_{0S}^S$	%	0,05	0,90	7,50	11,0	20,0
$\mu$	MN/m <sup>2</sup>	0,40	0,58	1,80	2,00	23,70
$\lambda$	MN/m <sup>2</sup>	0,40	0,58	1,80	2,00	23,70
$\delta$	m <sup>2</sup> /N	$7,75 \cdot 10^{-6}$	$4,50 \cdot 10^{-6}$	$1,90 \cdot 10^{-6}$	$1,80 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$
$\varepsilon$	m <sup>2</sup> /N	$5,05 \cdot 10^{-5}$	$2,70 \cdot 10^{-5}$	$1,05 \cdot 10^{-5}$	$9,50 \cdot 10^{-6}$	$1,75 \cdot 10^{-6}$
$\kappa$	N/m <sup>2</sup>	$1,25 \cdot 10^5$	$1,75 \cdot 10^5$	$3,00 \cdot 10^5$	$4,20 \cdot 10^5$	$1,75 \cdot 10^7$

**Abbildung 7.12:** Materialparameter für Polyethylenschäume

**Anmerkung:** Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, daß der Kompressionspunkt sowohl im elastischen wie auch im plastischen Teilstoffgesetz berücksichtigt werden muß. Die Berücksichtigung in nur einem der beiden Teilstoffgesetze oder gar in keinem führt speziell bei großen Volumendeformationen zu unsinnigen und falschen Ergebnissen.

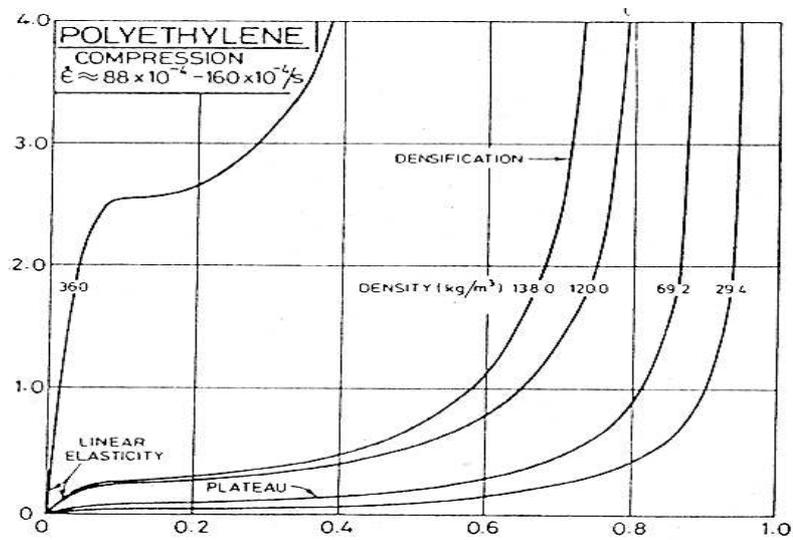


Abbildung 7.13: Kompressionsversuch von Ployethylenschäumen unterschiedlicher Porosität: Versuche nach Gibson & Ashby [34] S. 180

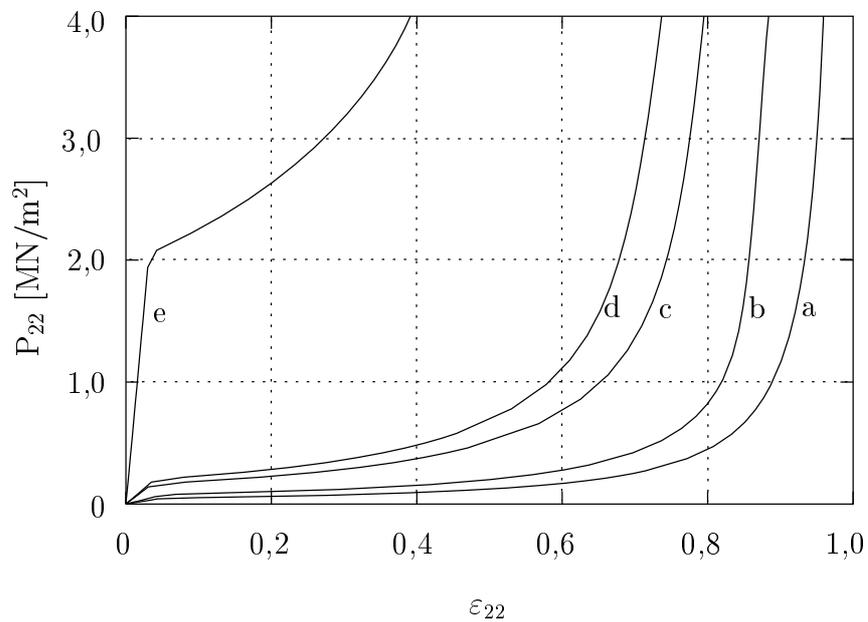


Abbildung 7.14: Kompressionsversuch von Ployethylenschäumen unterschiedlicher Porosität: FE-Simulation mit struktureller Verfestigung

## 7.4 Biaxialversuch

Die Lokalisierung und speziell der Einfluß des Porenfluids und seiner Kopplung mit dem Festkörperskelett werden anhand des auch in der Literatur häufig diskutierten Biaxialversuchs durchgeführt, vgl. *Simo & Meschke* [81], *Schrefler et. al.* [78], *Schrefler et. al.* [79], *Loret & Prévost* [63] und *Gawin et. al.* [33].

## 7.5 Anfangsrandwertproblem

Das Anfangsrandwertproblem ist in Abbildung 7.15 dargestellt. Es besteht aus 200 quadratischen 8-Knotenelementen. Die seitlichen Ränder sind drainiert, während der Boden und die Fläche unter der Last undrainiert sind. Zunächst werden sämtliche freien Oberflächen mit einer linear ansteigenden Flächenlast beaufschlagt, deren Maximalwert nach  $10^{10}$  Sekunden  $100 \text{ kN/m}^2$  beträgt. Aufgrund der langsamen Steigerung der Last kann die Probe zu diesem Zeitpunkt als vollständig auskonsolidiert betrachtet werden. Anschließend wird die Last konstant gehalten und die Oberfläche mit  $v_0 = 0,0018 \text{ mm/s}$  verschiebungsgesteuert abgesenkt.

Die Materialparameter entsprechen wieder denen des kohäsionslosen Sandes nach *Ehlers & Müllerschön* [29]. Das Fluid ist inkompressibel. Auf etwaige Abweichungen der Materialparameter wird im Text bzw. in den Abbildungen explizit hingewiesen.

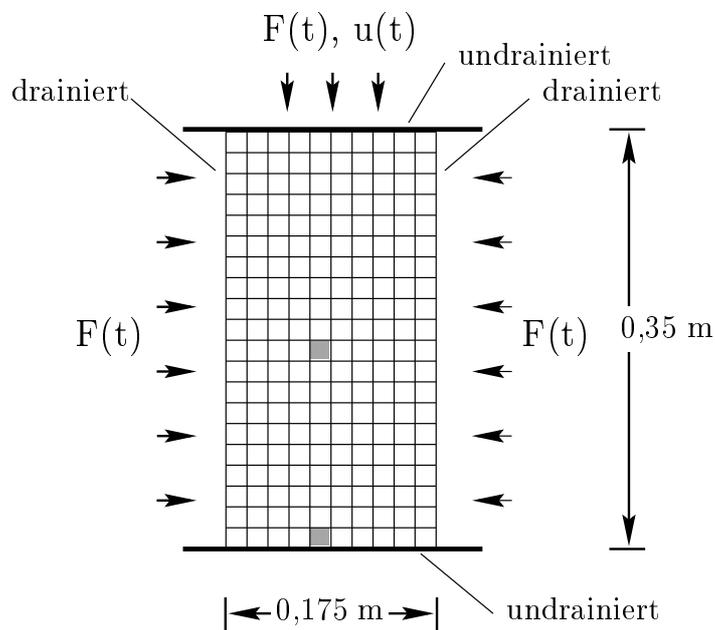
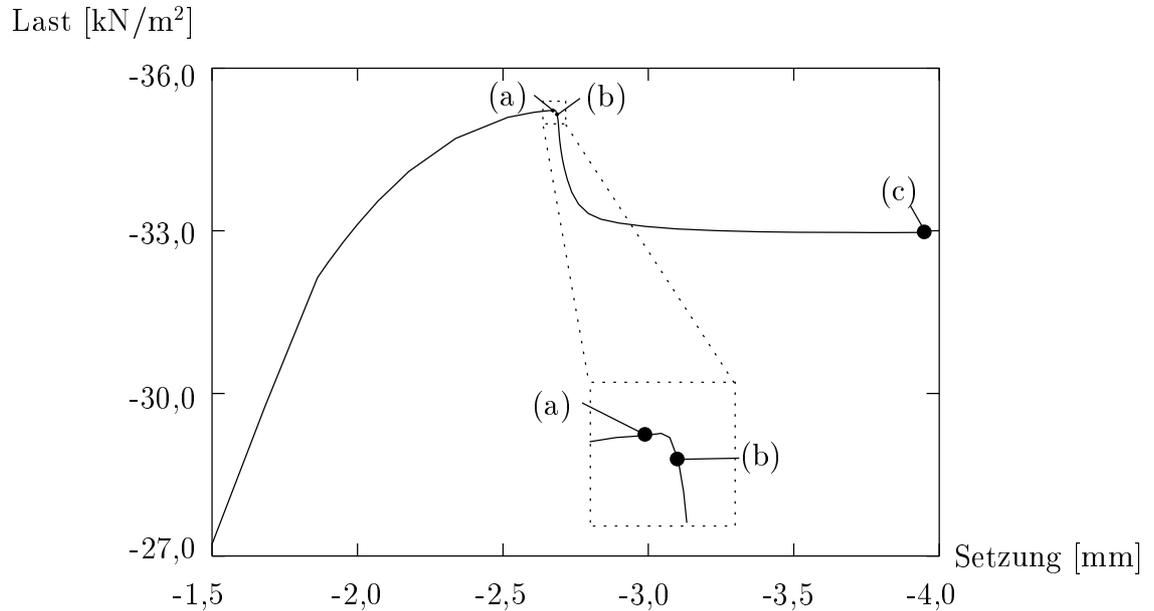


Abbildung 7.15: Randwertproblem des Biaxialversuchs

In Abbildung 7.16 ist eine für den Biaxialversuch typische Last-Setzungs-Kurve dargestellt. Für die Berechnung der Last wurden sowohl die Vertikalspannung als auch der

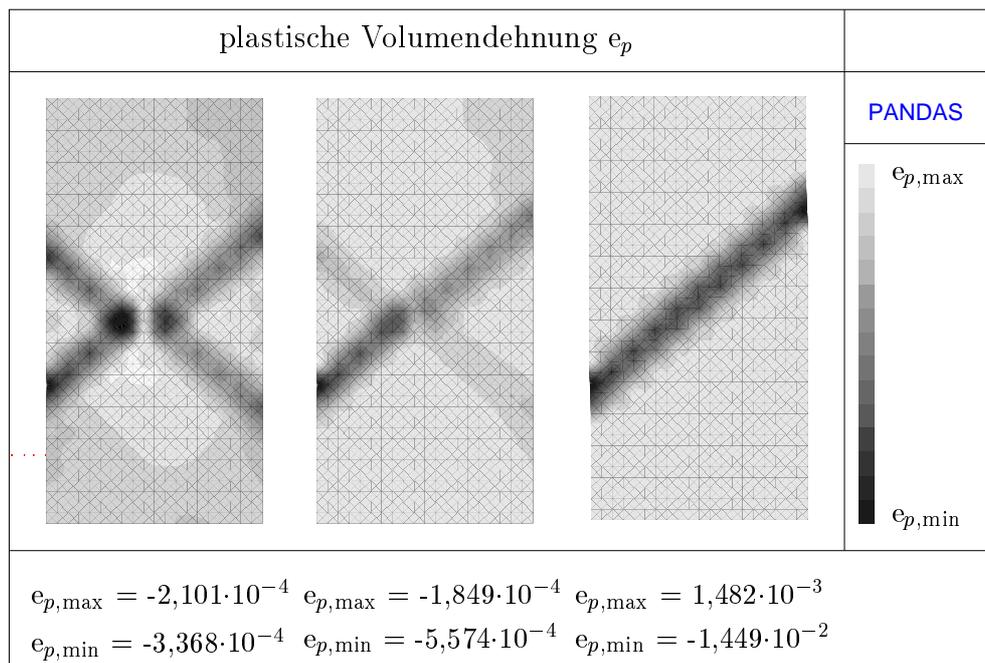
Porenfluiddruck über den oberen Rand integriert und addiert, da die Last von der gesamten Mischung getragen wird. Hierbei wurde das grau unterlegte Element im mittleren Bereich des Netzes geschwächt, indem die Werte der *Laméschen* Konstanten um 15 % verringert wurden, siehe Abbildung 7.15.



**Abbildung 7.16:** Last-Setzungs-Kurve des Biaxialversuchs

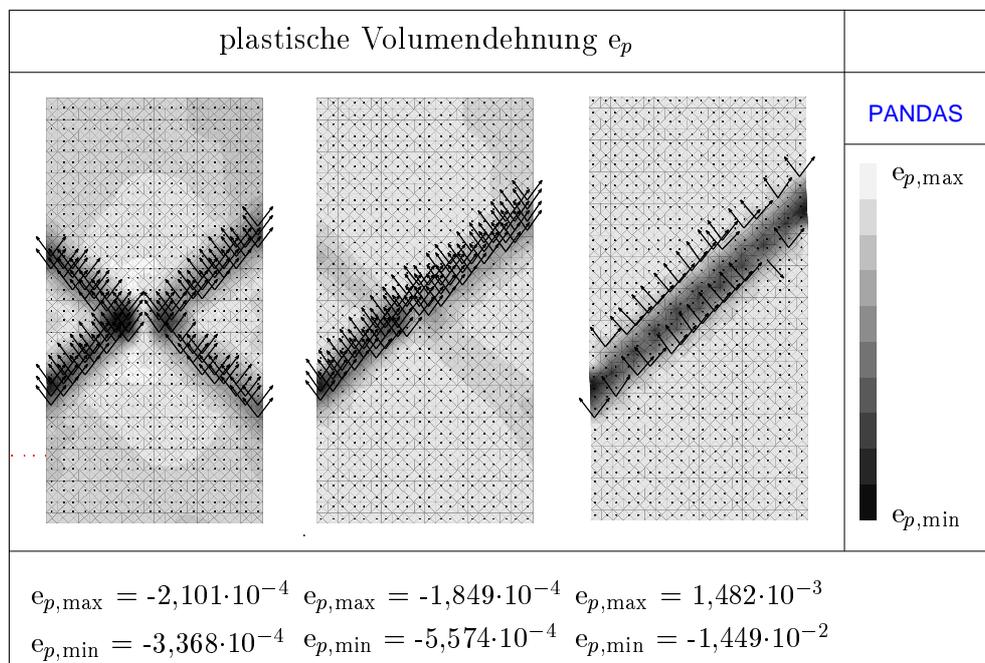
Nachdem die Probe plastisch geworden ist, steigt die Last immer geringer, bis sie schließlich ihren Maximalwert erreicht hat. Die Probe wird in diesem Bereich instabil, und die Kurve zeigt einen deutlichen Abfall der Last auf. Es setzt Lokalisierung in Form eines Scherbandes ein. In Abbildung 7.17 ist die plastische Volumendehnung  $e_p$  und in Abbildung 7.18 zusätzlich das Ergebnis der Lokalisierungsanalyse aufgetragen, wobei die jeweiligen Maximal- und Minimalwerte unter den einzelnen Bildern stehen. Es wurde hierzu aus den in Kapitel 5 genannten Gründen das Kriterium einer singulären Fläche zweiter Ordnung bezüglich der Bewegungsfunktionen (5.45) verwendet. Die Vektoren in Abbildung 7.18 stellen die Einheitsnormalenvektoren  $\mathbf{n}_\Gamma$  an mögliche singuläre Flächen dar. Dabei entspricht die linke Abbildung dem Zustand in Punkt (a), die mittlere dem Zustand in Punkt (b) und die rechte dem Zustand in Punkt (c) der Last-Setzungs-Kurve in Abbildung 7.16.

In Abbildung 7.17 ist die plastische Volumendehnung dargestellt und das typische „Kreuz“ zu erkennen, mit dem die Lokalisierung beim Biaxialversuch beginnt. Nach überschreiten des Maximums der Last-Verschiebungskurve, dem Bifurkationspunkt, „schläft“ eines der beiden sich kreuzenden Bänder ein und Lokalisierung findet nur noch im anderen Band statt. Dies wird auch durch die Lokalisierungsanalyse in Abbildung 7.18 bestätigt. Beide Bänder können allein aus geometrischen Überlegungen nicht aktiv bleiben. Nach dem Abfall der Last schließt sich ein Bereich mit nahezu konstanter Last bei fortschreitender Deformation im Scherband an. Das Lokalisierungskriterium zeigt nur noch an den Rändern des Bandes mögliche singuläre Flächen an. Dies steht in Übereinstimmung



**Abbildung 7.17:** Plastische Volumendehnung für die Zustände (a), (b), und (c)

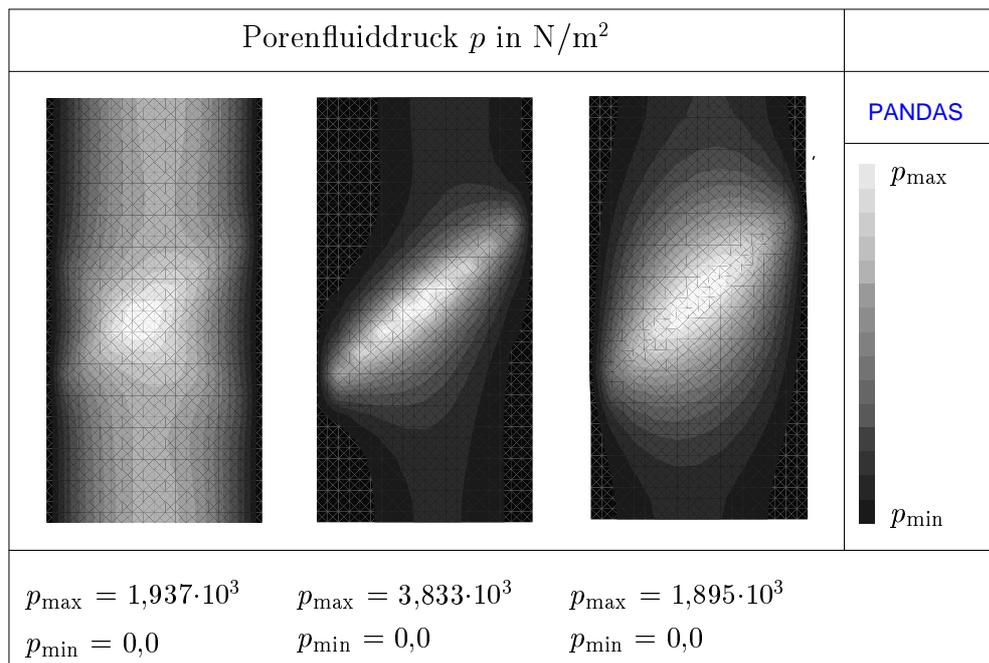
mit Kapitel 5, in dem Scherbänder für den betrachteten Fall (singulär zweiter Ordnung bzgl. den Bewegungsfunktionen) Bänder endlicher Dicke darstellen, die durch singuläre



**Abbildung 7.18:** Plastische Volumendehnung und Lokalisierungsanalyse für (a), (b), (c)

Flächen eingegrenzt werden, vgl. Abbildung 5.2. Die Dicke des Bandes beträgt dabei circa ein Element, was bereits einen Hinweis auf die Netzabhängigkeit des Problems darstellt. Zur Überwindung des Bifurkationspunktes wurde das Element in der Nähe der Mitte geschwächt.

In Abbildung 7.19 ist der Porenfluiddruck dargestellt. Da das Scherband, bedingt durch das gewählte plastische Materialmodell, kontraktante Volumendehnungen aufweist (vgl. Abbildung 7.17), erhöht sich schlagartig der Druck in dessen Bereich, vgl. Abbildung 7.19 (b). Im weiteren Verlauf gleicht sich der Druck durch Konsolidation wieder aus und dessen Gradient nimmt ab, vgl. Abbildung 7.19 (c).



**Abbildung 7.19:** Porenfluiddruck für die Zustände (a), (b), und (c)

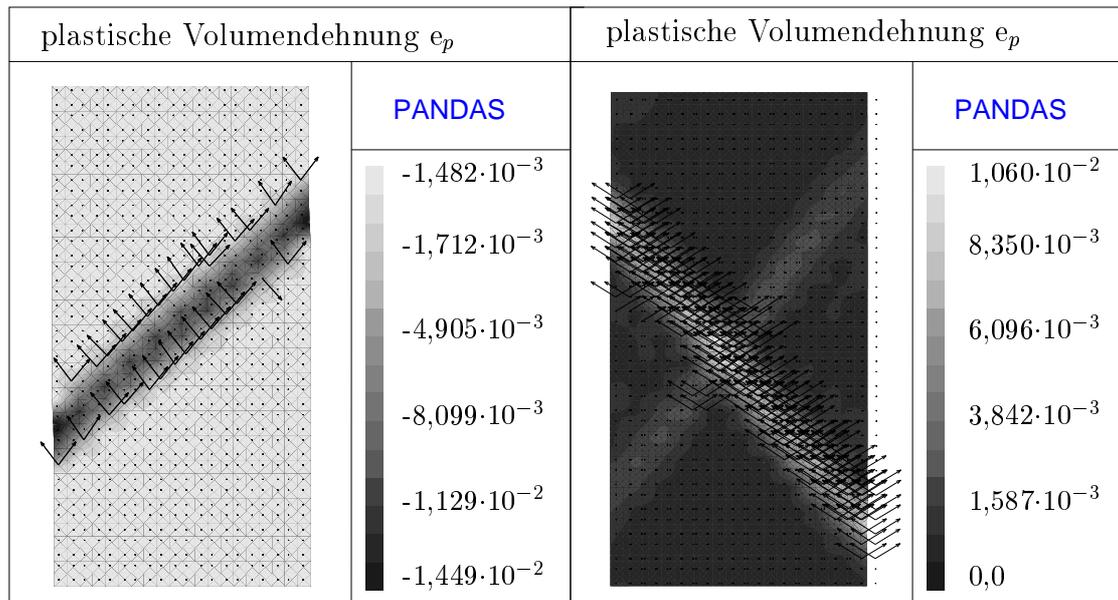
**Anmerkung:** In dem Zustand, in dem die Instabilität beginnt sich zu entwickeln, ist eine möglichst exakte Zeitintegration nötig, vgl. *Simo & Meschke* [81] und *Ellsiepen* [31]. Für die Rechnungen in diesem Kapitel wurde daher das implizite *Alex21*-Verfahren, kombiniert mit einer Zeitschrittweitensteuerung von *Ellsiepen* [31], die speziell für poröse Medien entwickelt wurde, eingesetzt.

## 7.6 Einfluß des Porenfluids

Zur genaueren Untersuchung des Einflusses des Porenfluids und speziell der volumetrischen Kopplung zwischen Fluid und Festkörper die sich bereits in Kapitel 5 gezeigt hat, werden im folgenden zwei unterschiedliche Materialien betrachtet. Beim ersten handelt es sich um den bisher beschriebenen kohäsionslosen Sand, der i. a. kontraktante Scherbänder

liefert. Beim zweiten Material sind die Parameter  $\varepsilon$  und  $\delta$  zu null gesetzt. Dies entspricht dem Grenzzustand der strukturellen Verfestigung und garantiert somit dilatante plastische Volumendehnungen, d. h.  $\hat{\mathbf{D}}_{Sp} \cdot \mathbf{I} \geq 0$ . Die Fließfläche hat im hydrostatischen Bereich die Form eines Kegels, ähnlich dem *Drucker & Prager*-Kriterium, mit einer abgerundeten Kappe im Zugbereich. Um den Bifurkationspunkt im betrachteten Bereich zu vermeiden, wurde das untere grau unterlegte Element in Abbildung 7.15 geschwächt.

Während das erste Material bedingt durch die Kappe im Druckbereich kontraktante plastische Volumendehnungen zeigt, vgl. Abbildung 7.20 (links), treten in Abbildung 7.20 (rechts) für den zweiten Fall die erwarteten dilatanten Volumendehnungen auf.



**Abbildung 7.20:** Vergleich der plastischen Volumendehnung und der Lokalisierungsanalyse. Links: Kohäsionsloser Sand nach *Ehlers & Müllerschön*, [29]. Rechts: Grenzzustand der strukturellen Verfestigung ( $\delta = \varepsilon = 0$ ).

Als Folge der Volumendehnung stellt sich ein unterschiedlicher Verlauf des Porenfluiddrucks ein, vgl. Abbildung 7.21. Beim linken Bild zeigt sich, bedingt durch kontraktante Dehnungen in Verbindung mit inkompressiblem Porenfluid und der Tatsache, daß das Fluid nicht instantan ausströmen kann, ein Überdruck. Im rechten Bild stellt sich entsprechend ein Unterdruck im Scherband ein. Da beim Modell mit inkompressiblem Porenfluid die Variable  $p$  lediglich einen Differenzdruck, nicht aber den absoluten Druck, darstellt, kann es dabei zu extremen Unterdrücken kommen, die weit außerhalb des realistischen Bereichs liegen, vgl. *Gawin et. al* [33].

In Abbildung 7.20 ist das Ergebnis der Lokalisierungsanalyse für die beiden unterschiedlichen Materialien zusammengefaßt. Die Vektoren entsprechen dabei wieder den Normaleneinheitsvektoren  $\mathbf{n}_F$  an mögliche singuläre Flächen. Der Zustand im rechten Bild entspricht dabei dem Zustand (a) in Abbildung 7.16. Es stellen sich auch hier im weiteren Verlauf singuläre Flächen an den Rändern des Bandes ein, vgl. Abbildung 7.20. In Abbildung