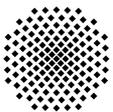
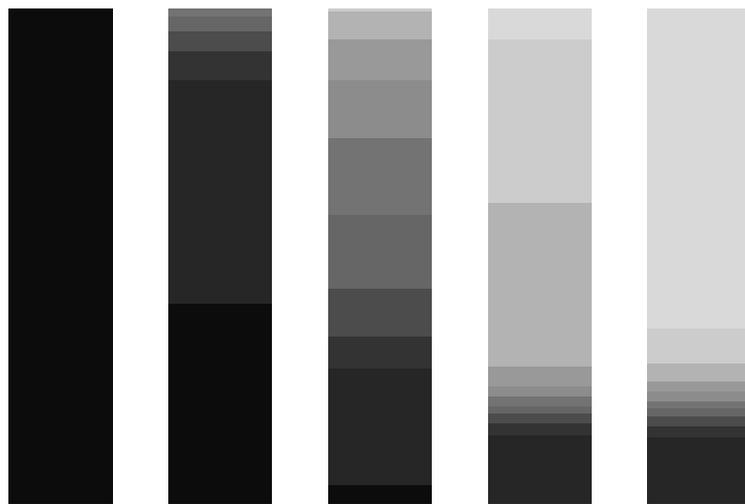


Ein Mehrphasen-Stoffmodell für Böden mit
Übergang auf Interface-Gesetze



Universität Stuttgart

Institut für Mechanik
Lehrstuhl II

ISBN 3-937399-10-0 (D 93 Stuttgart)

Ein Mehrphasen-Stoffmodell für Böden mit Übergang auf Interface-Gesetze

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. Klaus-Peter Blome

aus

Essen

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Rolf Katzenbach

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Oktober 2003

Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart
Lehrstuhl II, Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

Bericht Nr. II-10 aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II,
Universität Stuttgart

Herausgeber:

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

© K.-P. Blome
Institut für Mechanik (Bauwesen)
Lehrstuhl II
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7
70569 Stuttgart

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege zu vervielfältigen.

ISBN 3-937399-10-0 (D 93 Stuttgart)

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen der Bearbeitung eines Teilprojekts der DFG-Forschergruppe „Baugrund-Tragwerk-Interaktion“ während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers für die Anregung zu dieser Arbeit, seine Unterstützung und Förderung sowie für die Übernahme des Hauptgutachtens.

Herrn Professor Dr.-Ing. Rolf Katzenbach danke ich für die bereitwillige Übernahme des zweiten Gutachtens und seine Unterstützung als Leiter des Zentralprojekts und Sprecher der Forschergruppe.

Schließlich gilt mein Dank allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Instituts für Mechanik (Bauwesen) sowie den Mitgliedern der Forschergruppe für die freundschaftliche Zusammenarbeit und hilfreiche Unterstützung. Namentlich genannt seien meine Zimmerkollegen Dr.-Ing. Alexander Droste, Dr.-Ing. Heiner Müllerschön und Dipl.-Ing. Oliver Klar.

An dieser Stelle bedanke ich mich sehr bei meinen Eltern, die mir mit Rat und Tat zur Seite standen und mir meine Ausbildung ermöglichten.

Hamburg, 2. Februar 2004

Klaus-Peter Blome

Abstract

In this thesis a soil model based on the *Theory of Porous Media* for the realistic description of mechanical and fluid-mechanical soil properties is presented. Starting from a general definition of a multi-phase material, the material soil is described by a bi- and tri-phasic model.

The bi-phasic model consists of an elasto-plastic solid (soil skeleton) and a viscous, materially incompressible pore fluid (pore water) respectively a viscous, materially compressible pore gas (pore air). In extension of this bi-phasic model a tri-phasic model is developed: this new model takes into account on the one hand air inclusions in the pore water and thus contains a materially compressible fluid phase, and on the other hand two separate pore fluids (water and air). Employing the new model, either water saturated or dry or partially saturated soil can be described.

For the description of elasto-plasticity of the solid skeleton of soils, use is made of a physically non-linear elasticity law and a plasticity model that consists of a single surface yield criterion with an isotropic work-hardening law and a plasticity potential for the set-up of an appropriate flow rule.

An interface formulation for multi-phase materials is developed for the description of strong discontinuities, i. e. the description of a jump in the displacement field. Such jump emerges along shear loaded foundation bodies or within the soil in case of failure modes, e. g. ground failure, in the shape of a shear band. For the prediction of shear bands, weak discontinuities are determined by a localisation analysis. Then, for a special interface element, constitutive relations that lead to a projection of the mechanical and fluid-mechanical laws of the continuous multi-phase body into the plane of the discontinuity are set up.

The necessary equations for the numerical simulation are coherently presented: on the one hand materially independent equations concerning kinematics and balance equations, on the other hand equations of the constitutive theory. From these, a system of equations which is formulated in the primary variables of the problem is set up. For the solution of the multi-field problem coupled in the volume fractions, the equations are consistently linearised in their weak forms. A space discretisation of the the linearised weak forms within the scope of the Finite Element Method and subsequent time discretisation by an implicit time integration scheme lead to a solution of the system of equations at hand.

Finally, the numerical simulation of diverse, partly construction-related initial boundary-value problems by use of the multi-phase model presented in this thesis shows the close-to-reality description of the material behaviour of soils.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Baugrund-Modellierung auf der Basis der *Theorie Poröser Medien* zur realitätsnahen Beschreibung mechanischer und fluidmechanischer Bodeneigenschaften vorgestellt. Ausgehend von einer allgemeinen Definition mehrphasiger Materialien wird das Material Boden durch ein Zwei- und ein Dreiphasen-Stoffmodell beschrieben.

Das Zweiphasenmodell besteht aus einem elastisch-plastischen Festkörper (Bodenskelett) und einer viskosen, materiell inkompressiblen Porenflüssigkeit (Porenwasser) bzw. einem viskosen, materiell kompressiblen Porengas (Porenluft). In Erweiterung dieses Zweiphasenmodells wird ein Dreiphasenmodell entwickelt, das zum einen Luftporen im Porenwasser berücksichtigt und damit eine materiell kompressible Fluidphase enthält und das zum anderen zwei separate Porenfluide (Wasser und Luft) behandelt. Mit diesem neuen Modell läßt sich neben gesättigtem und leerem Boden auch teilgesättigter Baugrund beschreiben.

Zur Beschreibung der Elastoplastizität des Festkörperskeletts von Böden wird ein physikalisch nichtlineares Elastizitätsgesetz und ein Plastizitätsmodell verwendet, das aus einem Einflächennießkriterium mit einer isotropen Arbeitsverfestigung und einem plastischen Potential zur Bildung einer geeigneten Fließregel besteht.

Eine Interface-Formulierung für Mehrphasenmaterialien wird zur Abbildung starker Diskontinuitäten, d. h. einem Sprung im Verschiebungsfeld, entwickelt. Dieser Sprung ergibt sich entlang von schubbelasteten Fundamentkörpern oder bei Versagenszuständen des Bodens, z. B. bei einem Grundbruch, in Form von einem Scherband. Zur Vorhersage von Scherbändern werden schwache Diskontinuitäten im Rahmen einer Lokalisierungsanalyse betrachtet. Für ein spezielles Interface-Element werden Konstitutivgesetze angegeben, die zu einer Projektion der mechanischen und fluidmechanischen Stoffgesetze des kontinuierlichen Mehrphasenkörpers in die Ebene der Diskontinuität führen.

Es werden die für die numerische Simulation erforderlichen Gleichungen – einerseits stoffunabhängige Gleichungen bezüglich der Kinematik und der Bilanzen, andererseits Gleichungen der Konstitutivtheorie – kohärent dargestellt. Hieraus wird ein Gleichungssystem gebildet, das in den Primärvariablen des Problems formuliert ist. Zur Lösung des in den Volumenanteilen gekoppelten Mehrfeldproblems werden die Gleichungen in ihren schwachen Formen konsistent linearisiert. Eine Ortsdiskretisierung der linearisierten schwachen Formen im Rahmen der Methode der finiten Elemente und anschließende Zeitdiskretisierung mit einem impliziten Zeitintegrationsverfahren führen zu einer Lösung des vorliegenden Gleichungssystems.

Schließlich zeigt die numerische Simulation verschiedener, teils baupraktischer Anfangs-Randwertprobleme mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Mehrphasen-Stoffmodell die wirklichkeitsnahe Beschreibung des Materialverhaltens von Böden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Übersicht	1
1.1	Zielsetzung und Vorgehensweise	1
1.2	Stand der Forschung und eigene Vorarbeiten	2
1.3	Gliederung	3
2	Mehrphasenmodelle auf Grundlage der Theorie Poröser Medien	5
2.1	Kinematik von Mehrphasenmaterialien	5
2.1.1	Konzept der Volumenanteile	7
2.1.2	Sättigungsbedingung	7
2.1.3	Definition von Massendichtefunktionen	7
2.1.4	Geometrisch finite Beschreibung	7
2.1.5	Geometrisch lineare Beschreibung	8
2.1.6	Singularitäten kinematischer Größen	9
2.2	Mechanische und thermodynamische Bilanzgleichungen	11
2.3	Beschreibung poröser Medien mit Anwendung auf 2- und 3-Phasenmaterialien	14
2.3.1	Festkörper-Fluid-Problem	14
2.3.2	Sättigungsbedingung	15
2.3.3	Einführung von Sättigungsfunktionen	15
2.3.4	Partielle Bilanzgleichungen	16
2.3.5	Bilanzgleichungen der Mischung	17
2.3.6	Bestimmung der Volumenanteile und der Sättigung	19
3	Fluidmechanische Kopplung bei Mehrphasenmaterialien	21
3.1	Konzept der Extraanteile	21
3.1.1	Konstitutivgleichungen für Mehrphasenmaterialien	21
3.1.2	Konstitutivgleichungen für Zwei- und Dreiphasenmaterialien	22
3.2	Materielle Kompressibilität der Porenfluide	23
3.2.1	Materielle Kompressibilität des Porenwassers und der Porenluft	24

3.2.2	Materielle Kompressibilität einer Mischphase	24
3.3	Filtergesetz nach Darcy	29
3.3.1	Permeabilität des Festkörperskeletts für verschiedene Porenfluide . .	29
3.3.2	Relative Permeabilität	30
3.4	Kapillarität	32
3.4.1	Phänomenologische Beschreibung	32
3.4.2	Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung	34
3.4.3	Diskussion möglicher Funktionen	34
3.4.4	Bestimmung des minimal erreichbaren Fluiddrucks	35
4	Elastoviskoplastizität des Festkörperskeletts	39
4.1	Elastisches Materialverhalten	39
4.2	Viskoplastisches Materialverhalten	40
4.2.1	Einflächenfließkriterium und isotrope Arbeitsverfestigung	41
4.2.2	Plastisches Potential und nichtassozierte Fließregel	41
4.3	Modellanpassung für Berliner Sand	44
4.3.1	Bestimmung der Materialparameter des Elastizitätsmodells	44
4.3.2	Bestimmung der Materialparameter des Plastizitätsmodells	46
5	Interface-Formulierung für Mehrphasenmaterialien	49
5.1	Schwache und starke Diskontinuitäten	50
5.2	Lokalisierungsanalyse für Zweiphasenmaterialien	51
5.3	Konstitutivgesetze für das Interface	53
5.3.1	Bestimmung der Festkörperspannungen	54
5.3.2	Bestimmung des Fluidflusses	54
6	Numerische Umsetzung	55
6.1	Schwache Formulierung der Bilanzgleichungen	55
6.2	Modellkompatibilität	57
6.3	Modellvarianten des Dreiphasenmodells	59
6.4	Lösung mit der Finite-Elemente-Methode	59
6.4.1	Linearisierung der schwachen Formulierung	59

6.4.2	Ortsdiskretisierung und Zeitintegration	65
7	Parameteridentifikation für Kapillardruck-Sättigungs-Beziehungen	67
7.1	Vorüberlegungen	67
7.2	Versuchsaufbau	68
7.3	Versuchsergebnisse	70
7.4	Parameteridentifikation	71
7.5	Numerische Simulation des Unterdruckversuchs	72
7.6	Darstellung und Diskussion der Ergebnisse	72
8	Experimentelle Ermittlung von Interface-Gesetzen	77
8.1	Versuchsaufbau	77
8.2	Numerische Simulation eines Rahmenscherversuchs	78
8.2.1	Kontinuierliche Formulierung	78
8.2.2	Diskontinuierliche Formulierung	80
8.3	Bestimmung von Interface-Parametern	82
9	Numerische Beispielrechnungen	85
9.1	Rechnungen zur Verifikation des entwickelten Stoffmodells	85
9.1.1	Sandsäulenversuche	85
9.1.2	Triaxialversuch	94
9.1.3	Degebo-Versuch	97
9.1.4	Abgleitende Ecke	99
9.2	Rechnungen im Rahmen baupraktischer Anwendung	102
9.2.1	Einzelpfahl	102
9.2.2	Nachrechnung von Modellversuchen	103
9.2.3	Durchströmung eines Deichs	105
10	Zusammenfassung und Ausblick	109
	Literaturverzeichnis	111

1

Einleitung und Übersicht

Wer hohe Türme bauen will, muß lange beim Fundament verweilen.
(Anton Bruckner, 1824–1896)

Die genaue Kenntnis der Baugrundverhältnisse und die Umsetzung der Materialeigenschaften des Baugrunds in geeignete Stoffmodelle zur computergestützten Baugrundsimulation sind die Grundlage für sicheres und wirtschaftliches Bauen. In dieser Arbeit wird hierzu ein Beitrag durch die Bereitstellung eines konsistenten Mehrphasen-Stoffmodells zur Beschreibung von Böden geleistet.

1.1 Zielsetzung und Vorgehensweise

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, das Mehrphasenmaterial Boden in seiner Komplexität möglichst realitätsnah zu beschreiben. Dabei sollen die folgenden bodenphysikalischen Phänomene erfaßt werden:

- Das Bodenmaterial zeigt unter Belastung ein sehr komplexes Verhalten. Es verhält sich nichtlinear elastisch, zeigt verfestigend-plastisches Verhalten, weist einen Kompressionspunkt bei maximaler hydrostatischer Belastung auf und führt bei deviatorischer Belastung zu dilatanten Volumendehnungen.
- Der Baugrund wird durch Tragwerke belastet, deren Gewichtskraft über Gründungskörper in den Baugrund eingeleitet wird. Zwischen dem Boden und dem Gründungskörper findet eine Wechselwirkung statt (Baugrund-Gründungskörper-Interaktion), bei der im Regelfall Druck- und Schubkräfte übertragen werden. Infolge der Übertragung von Schubkräften kann es zu einer Relativverschiebung zwischen Gründungskörper und Boden kommen.
- Durch das Einwirken äußerer Kräfte auf das Festkörperskelett wird eine mechanische Deformation des Porenraums induziert. Daraus resultiert eine Strömung der im Porenraum vorhandenen Fluide (Festkörper-Fluid-Interaktion), wie es beispielsweise beim klassischen Konsolidationsproblem der Fall ist.
- Durch Kapillarkräfte im ungesättigten Bereich des Baugrunds erhält nichtbindiger Boden kohäsive Eigenschaften, die je nach Lage des ungesättigten Bereichs nur lokal auftreten.

Zur phänomenologischen Beschreibung des Bodens wird auf der Grundlage der Theorie Poröser Medien, einer Kontinuumstheorie für Mehrphasenmaterialien, ein thermodynamisch konsistentes Stoffmodell für den aus Feststoff (Bodenskelett) und den Porenfluiden

Wasser und Luft bestehenden Baugrund entwickelt (Abb. 1.1). Mit diesem Modell läßt sich im Sinne einer Modellkompatibilität neben gesättigtem und leerem Boden auch teilgesättigter Baugrund beschreiben.

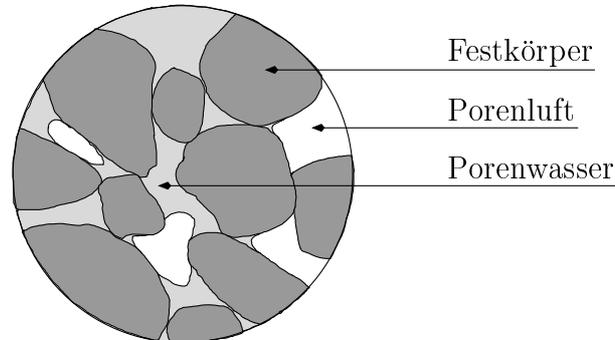


Abb. 1.1: Dreiphasenmaterial Boden

Der Festkörperanteil des Bodens wird als elastisch-plastisch-verfestigendes Material beschrieben, während den Porenfluiden viskoses Materialverhalten zugewiesen wird. Zur Abbildung von Relativverschiebungen zwischen Gründungskörper und Boden oder auch zwischen zwei Bodenkörpern wird ein spezielles Interface-Gesetz formuliert.

Zur Lösung von drei- und zweidimensionalen Anfangs-Randwertproblemen wird eine Finite-Elemente-Formulierung unter Verwendung der entwickelten Stoffgesetze numerisch umgesetzt. Dabei wird die Modellkompatibilität in den Algorithmen berücksichtigt, so daß die Berechnung stark gekoppelter, dreiphasiger Festkörper-Fluid-Probleme wie auch zwei- bzw. einphasiger Probleme mit demselben Werkzeug möglich ist.

Für die verwendeten mechanischen und fluidmechanischen Stoffgesetze müssen Parameter identifiziert werden. Hierzu werden experimentelle Daten des Instituts für Geotechnik der TU Darmstadt aus Triaxial-, Rahmenscher- und Unterdruckversuchen ausgewertet. Die gefundenen Parameter werden in numerischen Rechnungen verifiziert.

1.2 Stand der Forschung und eigene Vorarbeiten

Die Baugrund-Modellierung, die zur verlässlichen Vorhersage des Verhaltens von Böden unter mechanischen und fluidmechanischen Randbedingungen dient, war ein wichtiger Bestandteil der Forschungsaktivitäten der DFG-Forschergruppe „Baugrund-Tragwerk-Interaktion“.

Im Rahmen der Aktivitäten der Forschergruppe sind, bezogen auf die Baugrund-Modellierung und deren numerische Behandlung, eine Reihe von Publikationen erschienen: Ehlers et al. [43, 45, 49], Ehlers und Blome [31–42], Ehlers und Droste [46], Ehlers und Müllerschön [50–54], Ehlers und Volk [55], Müllerschön [87] und Stumpf [100].

Insbesondere wurden von Müllerschön zur Beschreibung von *Berliner Sand* ein Stoffgesetz zur Abbildung nichtlinearer Elastizität und, basierend auf einem Plastizitätsmodell von Ehlers [26, 27], Evolutionsgleichungen für eine isotrope Verfestigung entwickelt und die

zugehörigen Parameter identifiziert. Diese Stoffgesetze werden in dieser Arbeit verwendet.

1.3 Gliederung

Nach einer Einleitung und Übersicht über den in dieser Arbeit behandelten Themenkomplex in Kapitel 1 werden in Kapitel 2 allgemeine Mehrphasenmodelle auf Grundlage der Theorie Poröser Medien zur Beschreibung von Böden konstruiert. Hierzu werden die Kinematik und die kontinuumsmechanischen Bilanzgleichungen von Mehrphasenmaterialien angegeben und diese speziell auf die Beschreibung von Zwei- und Dreiphasenmaterialien mit porösem Festkörperskelett und fluiden Porenhaltsstoffen angewendet.

In Kapitel 3 wird die fluidmechanische Kopplung bei Mehrphasenmaterialien zur Beschreibung gesättigter und teilgesättigter Böden vorgestellt. Dabei wird die Wirkung von materiell inkompressiblen und materiell kompressiblen fluiden Phasen, nämlich Wasser und Luft, auf das Festkörperskelett eines porösen Mediums über das Konzept der effektiven Spannungen erfaßt, während ein durch Deformation des Festkörperskeletts veränderter Porenraum zu einem deformationsabhängigen Permeabilitätskoeffizienten führt. Der Permeabilitätskoeffizient hängt außerdem vom Sättigungsgrad der betrachteten fluiden Phase im Porenraum ab und wird für das *Darcysche* Filtergesetz bestimmt. Kapillare Effekte werden phänomenologisch durch die Einführung einer Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung beschrieben, über die der Sättigungsgrad eines benetzenden flüssigen und eines nichtbenetzenden gasförmigen Fluids im Porenraum bestimmt wird.

Die Elastoviskoplastizität des Festkörperskeletts von Böden wird in Kapitel 4 behandelt. Speziell für nichtbindigen Boden wird ein physikalisch nichtlineares Elastizitätsgesetz und ein Plastizitätsmodell, das aus einem Einflächenfließkriterium mit einer isotropen Arbeitsverfestigung und einem plastischen Potential zur Bildung einer geeigneten Fließregel besteht, vorgestellt. Für *Berliner* Sand werden die Ergebnisse einer Modellanpassung angegeben.

In Kapitel 5 wird eine Interface-Formulierung für Mehrphasenmaterialien zur Abbildung starker Diskontinuitäten, d.h. einem Sprung im Verschiebungsfeld, entwickelt. Dieser Sprung ergibt sich entlang von schubbelasteten Fundamentkörpern oder bei Versagenszuständen des Bodens, z. B. bei einem Grundbruch, in Form von einem Scherband. Zur Vorhersage von Scherbändern werden schwache Diskontinuitäten im Rahmen einer Lokalisierungsanalyse, die auf Zweiphasenmaterialien beschränkt bleibt, betrachtet. Für ein spezielles Interface-Element werden Konstitutivgesetze angegeben, die zu einer Projektion der mechanischen und fluidmechanischen Stoffgesetze des kontinuierlichen Mehrphasenkörpers in die Ebene der Diskontinuität führen.

Kapitel 6 behandelt die numerische Umsetzung des entwickelten Modells mit der Finite-Elemente-Methode. Die hierzu erforderlichen schwachen Formen der Bilanzgleichungen werden mit physikalisch sinnvollen Randtermen formuliert. Es wird auf die Kompatibilität des Dreiphasenmodells zu Zwei- und Einphasenmodellen und auf Varianten des Dreiphasenmodells eingegangen, die numerisch ohne Mehraufwand umgesetzt werden können. Grundlage der numerischen Behandlung ist die konsistente Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen des Dreiphasenmodells, die hier durchgeführt wird. Das

Kapitel wird mit der Vorstellung einer geeigneten Orts- und Zeitdiskretisierung des zu behandelnden Gleichungssystems abgeschlossen.

In Kapitel 7 wird die Parameteridentifikation für Kapillardruck-Sättigungs-Beziehungen von *Darmstädter* Versuchssand behandelt. Hierzu wird auf die experimentelle Ermittlung von Kapillardruck-Sättigungs-Beziehungen mittels eines Unterdruckversuchs eingegangen. Die Parameteridentifikation selbst ist die Lösung eines unrestringierten Optimierungsproblems mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (*Least-Squares*-Methode). Eine numerische Simulation der Laborversuche unter Verwendung der ermittelten Parameter schließt das Kapitel ab.

Die Ergebnisse von Rahmenscherversuchen werden in Kapitel 8 zur experimentellen Ermittlung von Interface-Gesetzen verwendet. In den Versuchen wird eine erzwungene Scherfläche erzeugt, die in einer numerischen Simulation sowohl kontinuierlich als auch diskontinuierlich diskretisiert wird. Der Vergleich der Laborversuche mit den numerischen Ergebnissen von einfachen Scherversuchen führt auf die Bestimmung von speziellen Interface-Parametern im Rahmen einer kontinuierlichen Beschreibung.

Schließlich werden in Kapitel 9 numerische Beispielrechnungen präsentiert, die zum einen der Verifikation des entwickelten Stoffmodells, zum anderen der Dokumentation der Anwendbarkeit des neuen Stoffmodells für baupraktische Aufgabenstellungen dienen.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf weitere Anwendungsmöglichkeiten des vorgestellten Mehrphasen-Stoffmodells ab.

2

Mehrphasenmodelle auf Grundlage der Theorie Poröser Medien

In diesem Kapitel werden allgemeine Mehrphasenmodelle unter Berücksichtigung von Singularitäten konstruiert, die speziell auf die Beschreibung von Zwei- und Dreiphasenmaterialien mit porösem Festkörperskelett und fluiden Porenhaltstoffen angewendet werden. Es werden die grundlegenden Gleichungen der Kinematik und der mechanischen und thermodynamischen Bilanzen behandelt, die sowohl für Ein- als auch Mehrphasenmaterialien Gültigkeit haben. Dabei wird die Interaktion zwischen den beteiligten Phasen durch Produktionsterme erfaßt.

Als geeignetes Werkzeug wird die Theorie Poröser Medien (TPM) verwendet, vgl. z. B. de Boer [8], de Boer und Ehlers [9, 10], de Boer et al. [11], Bowen [13–15], Ehlers [24, 26, 28–30] und Ehlers und Bluhm (Eds.) [44]. Im Rahmen dieser Theorie werden die mechanischen Eigenschaften des Materials über ein repräsentatives Elementarvolumen (REV) gemittelt wiedergegeben, vgl. z. B. Hornung (Ed.) [68]. Nach der Homogenisierung des REV gemäß der klassischen Mischungstheorie wird die Veränderung der volumetrischen Zusammensetzung des Kontinuums durch Strukturvariablen, die *Volumenanteile* der einzelnen Phasen, erfaßt.

2.1 Kinematik von Mehrphasenmaterialien

Die homogene Mischung eines aus n Phasen bestehenden Materials wird mit φ , eine einzelne Konstituierende mit φ^α bezeichnet. Für die Zusammensetzung einer n -phasigen Mischung gilt also

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^n \varphi^\alpha \quad \text{mit} \quad n > 0. \quad (2.1)$$

Jede Konstituierende φ^α besitzt ihre eigene *Lagrangesche* Bewegungsfunktion

$$\chi_\alpha = \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t) \quad (2.2)$$

in Abhängigkeit eines betrachteten materiellen Punktes \mathbf{X}_α der Konstituierenden und der Zeit t .

Die Mischungstheorie fordert, daß ein durch seinen Ortsvektor bestimmter Raumpunkt \mathbf{x} durch materielle Punkte aller in der Mischung vorhandenen Konstituierenden besetzt ist. Das heißt, es werden überlagerte, superponierte Konstituierende φ^α beschrieben:

$$\mathbf{x} = \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t). \quad (2.3)$$

Die kinematischen Beziehungen sind in Abb. 2.1 beispielhaft für ein Zweiphasenmodell dargestellt. Zum Zeitpunkt t_0 befindet sich die Mischung in der Referenzkonfiguration, zum Zeitpunkt t in der Momentankonfiguration.

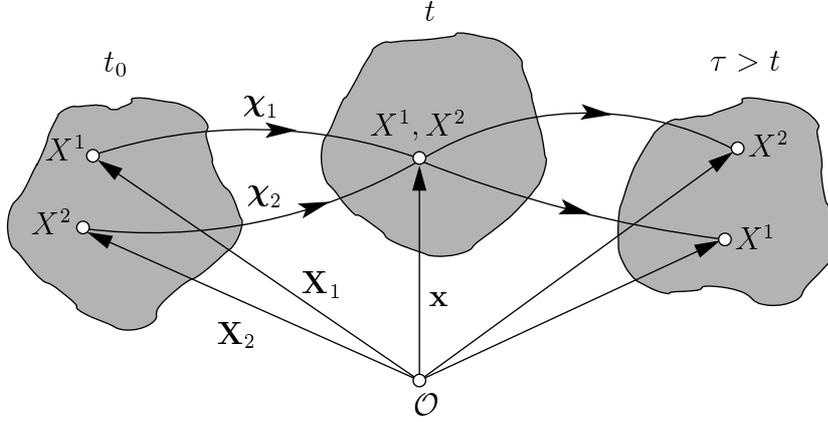


Abb. 2.1: Kinematik eines Zweiphasenmodells ($n = 2$)

Jede Phase φ^α besitzt ihr eigenes Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\partial \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial t} \quad \text{und} \quad \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\partial^2 \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

und ihren eigenen, partiellen Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_\alpha = \frac{\partial \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial \mathbf{X}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}_\alpha} = \text{Grad}_\alpha \mathbf{x}. \quad (2.5)$$

Die Funktion $\text{Grad}_\alpha(\cdot)$ bezeichnet die partielle Ableitung von (\cdot) nach dem Ortsvektor \mathbf{X}_α der Konstituierenden φ^α in der Referenzkonfiguration.

Unter der Voraussetzung, daß die *Jacobi*-Determinante

$$J_\alpha = \det \mathbf{F}_\alpha \quad (2.6)$$

ungleich null ist, kann die *Lagrangesche* Bewegungsfunktion χ_α invertiert werden,

$$\mathbf{X}_\alpha = \chi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad J_\alpha \neq 0, \quad (2.7)$$

um damit die angegebenen kinematischen Größen in einer *Eulerschen* Beschreibung zu formulieren.

Die materielle Zeitableitung unter der Berücksichtigung der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ einer Phase φ^α wird für eine skalare Größe ψ bzw. für eine vektorielle Größe $\boldsymbol{\psi}$ auf die folgende Weise gebildet:

$$(\psi^\alpha)'_\alpha = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t} + \text{grad } \psi^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha, \quad (\boldsymbol{\psi}^\alpha)'_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^\alpha}{\partial t} + (\text{grad } \boldsymbol{\psi}^\alpha) \dot{\mathbf{x}}_\alpha. \quad (2.8)$$

Hierin bezeichnet $\text{grad}(\cdot)$ die Ableitung nach dem Ortsvektor \mathbf{x} der Momentankonfiguration.

2.1.1 Konzept der Volumenanteile

Der *Volumenanteil* wird als eine dimensionslose Strukturvariable eingeführt, die das Verhältnis des Volumens einer einzelnen Konstituierenden innerhalb der Mischung zum Gesamtvolumen der betrachteten Mischung angibt:

$$n^\alpha = \frac{dv^\alpha}{dv} \quad \text{mit} \quad n^\alpha \in [0, 1] \quad \text{und} \quad dv = \sum_{\alpha=1}^n dv^\alpha. \quad (2.9)$$

Die Summe aller Partialvolumenelemente dv^α ergibt dabei das Gesamtvolumenelement dv der Mischung.

2.1.2 Sättigungsbedingung

Die Einhaltung einer *Sättigungsbedingung* wird gefordert, um materiefreie Räume im betrachteten Volumen auszuschließen:

$$\sum_{\alpha=1}^n n^\alpha = 1. \quad (2.10)$$

2.1.3 Definition von Massendichtefunktionen

Die Massendichtefunktionen *realistische Dichte* und *Partialdichte* beschreiben das Verhältnis der Masse einer einzelnen Konstituierenden bezogen auf das Volumen dieser Konstituierenden bzw. auf das Volumen der Gesamtmischung:

$$\text{realistische Dichte: } \rho^{\alpha R} = \frac{dm^\alpha}{dv^\alpha}, \quad \text{Partialdichte: } \rho^\alpha = \frac{dm^\alpha}{dv}. \quad (2.11)$$

Die Dichtefunktionen sind über die Volumenanteile linear gekoppelt:

$$\rho^\alpha = n^\alpha \rho^{\alpha R}. \quad (2.12)$$

2.1.4 Geometrisch finite Beschreibung

Die Position einer Konstituierenden φ^α in der Momentankonfiguration relativ zu ihrer Lage in der Referenzkonfiguration wird durch den Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{x} - \mathbf{X}_\alpha \quad (2.13)$$

angegeben.

In Abhängigkeit dieses Verschiebungsvektors lautet der Deformationsgradient (2.5)

$$\mathbf{F}_\alpha = \text{Grad}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{I}. \quad (2.14)$$

Zur Beschreibung von Deformationen wird der symmetrische und positiv definite partielle rechte *Cauchy-Green-Deformationstensor*

$$\mathbf{C}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{F}_\alpha \quad (2.15)$$

eingeführt, über den der partielle *Greensche* Verzerrungstensor definiert ist:

$$\mathbf{E}_\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{I}). \quad (2.16)$$

Damit ergibt sich für den partiellen *Greenschen* Verzerrungstensor in Abhängigkeit vom Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{E}_\alpha = \frac{1}{2} (\text{Grad}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \text{Grad}_\alpha^T \mathbf{u}_\alpha + \text{Grad}_\alpha^T \mathbf{u}_\alpha \text{Grad}_\alpha \mathbf{u}_\alpha). \quad (2.17)$$

Als partielles Spannungsmaß wird der partielle *Cauchysche* Spannungstensor \mathbf{T}^α eingeführt, der durch das *Theorem von Cauchy* definiert ist:

$$\mathbf{t}^\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}^\alpha \mathbf{n} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}^\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}^\alpha \otimes \mathbf{n}. \quad (2.18)$$

Hierin ist \mathbf{t}^α ein partieller Oberflächenspannungsvektor und \mathbf{n} der zugehörige, nach außen orientierte Oberflächennormaleneinheitsvektor in der Momentankonfiguration.

2.1.5 Geometrisch lineare Beschreibung

Unter der Voraussetzung kleiner Verzerrungen wird die linearisierte Form der kinematischen Größen verwendet, die durch eine *Taylor-Reihenentwicklung* und Abbruch nach dem linearen Glied erhalten wird, siehe Eipper [56] und Wriggers [108]. Die Reihenentwicklung geschieht i. d. R. bezogen auf den undeformierten Ausgangszustand der Referenzkonfiguration und führt zu den folgenden ausgewählten Ergebnissen:

$$\begin{aligned} \text{lin}(\mathbf{F}_\alpha) &= \mathbf{I} + \text{Grad}_\alpha \mathbf{u}_\alpha, \\ \text{lin}(J_\alpha) &= 1 + \text{Div}_\alpha \mathbf{u}_\alpha, \\ \text{lin}(\mathbf{E}_\alpha) &= \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \frac{1}{2} (\text{Grad}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \text{Grad}_\alpha^T \mathbf{u}_\alpha). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Der linearisierte partielle *Greensche* Verzerrungstensor $(2.19)_3$ entspricht also dem symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten.

In der geometrisch linearen Theorie ist eine Unterscheidung zwischen Referenz- und Momentankonfiguration nicht mehr erforderlich, so daß z. B. nur noch Differentiale und Differentialoperatoren bezogen auf die Momentankonfiguration verwendet werden. Erst in der geometrisch linearen Theorie ist es möglich, den *Greenschen* Verzerrungstensor und den *Cauchyschen* Spannungstensor ohne Transportmechanismen als konjugierte Größen zu betrachten:

$$\text{lin}(\mathbf{T}^\alpha) = \boldsymbol{\sigma}^\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha, \dots). \quad (2.20)$$

Allerdings kommen im Rahmen der Theorie Poröser Medien noch weitere Variablen zur Beschreibung des partiellen Spannungstensors einer Phase φ^α hinzu, da sie mit den anderen Phasen der Mischung interagiert (vgl. Abschnitt 3.1).

2.1.6 Singularitäten kinematischer Größen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden kinematischen Beziehungen singularer Flächen in porösen Medien eingeführt.

Eine singuläre Fläche Γ in einem porösen Medium ist gekennzeichnet durch die Existenz eines Sprungs einer physikalischen Größe ψ^α einer Phase φ^α oder eines Sprungs einer Ableitung dieser Größe über diese Fläche, während die sprungbehaftete Größe stetig im Körper $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-$ der Mischung ist.

In Abb. 2.2 ist die Kinematik einer singularen Fläche in einem porösen Körper dargestellt. \mathbf{n}_Γ ist der Normaleneinheitsvektor auf der singularen Fläche (Index Γ) in der Momentan-konfiguration, und u_α ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Fläche relativ zu einer Phase φ^α in Richtung der Flächennormale bewegt:

$$u_\alpha = (\dot{\mathbf{x}}_\Gamma - \dot{\mathbf{x}}_\alpha) \cdot \mathbf{n}_\Gamma. \quad (2.21)$$

Die Größen $(\bar{\cdot})$ in Abb. 2.2 sind Größen der Referenzkonfiguration.

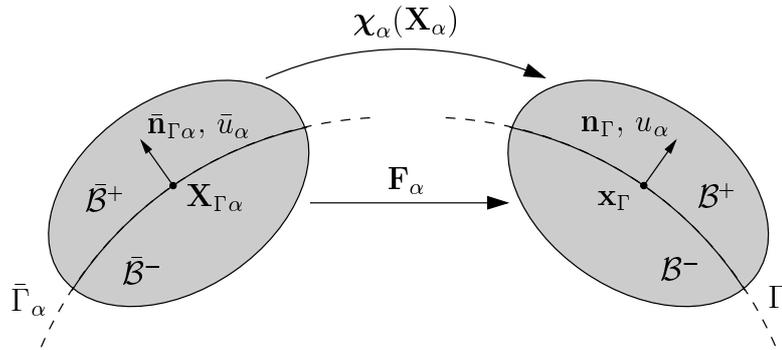


Abb. 2.2: Kinematik einer singularen Fläche in einem porösen Körper

Von den Teilkörpern \mathcal{B}^+ und \mathcal{B}^- ausgehend lassen sich die Grenzwerte

$$(\psi^\alpha)^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi^\alpha(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}_\Gamma), \quad (\psi^\alpha)^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi^\alpha(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{n}_\Gamma) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.22)$$

an die Fläche Γ bilden, so daß der Sprung von ψ^α über die Fläche definiert ist als die Differenz dieser Grenzwerte:

$$\llbracket \psi^\alpha(\mathbf{x}, t) \rrbracket := (\psi^\alpha)^+ - (\psi^\alpha)^- \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.23)$$

Eine singuläre Fläche n -ter Ordnung ist dann dadurch definiert, daß die Sprünge aller Ortsableitungen von ψ^α der Ordnungen 0 bis $n - 1$ verschwinden:

$$\llbracket \text{Grad}_\alpha^k \psi^\alpha \rrbracket = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad k = 0, \dots, n - 1. \quad (2.24)$$

Lemma von Hadamard

Die singuläre Fläche wird durch Parameterlinien $(\theta_\Gamma)^i$ ($i = 1, 2$) beschrieben, an die die Tangentenvektoren $\partial \mathbf{X}_{\Gamma\alpha} / \partial (\theta_\Gamma)^i$ gebildet werden, vgl. Abb. 2.3.

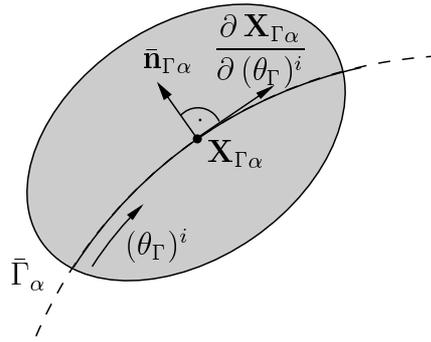


Abb. 2.3: Parameterlinie entlang einer singulären Fläche

Das Lemma von *Hadamard* [63] sagt aus, daß die tangentielle Ableitung des Sprungs einer physikalischen Größe ψ^α gleich dem Sprung der tangentialen Ableitung dieser Größe ist:

$$\frac{\partial}{\partial (\theta_\Gamma)^i} \llbracket \psi^\alpha \rrbracket = \left[\left[\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \mathbf{X}_{\Gamma\alpha}} \right] \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_{\Gamma\alpha}}{\partial (\theta_\Gamma)^i}. \quad (2.25)$$

Da die Fläche $\bar{\Gamma}_\alpha$ als stetig angesehen wird, ist (2.25) für jede Parameterlinie $(\theta_\Gamma)^i$ auf $\bar{\Gamma}_\alpha$ gültig und daher auch für die Tangentenvektoren an Γ in der Momentankonfiguration.

Theorem von *Maxwell*

Für eine singuläre Fläche erster Ordnung bezogen auf ψ^α verschwindet nach (2.24) der Sprung $\llbracket \psi^\alpha \rrbracket$ und damit auch die tangentielle Ableitung des Sprunges auf der Fläche. Mit (2.25) folgt

$$0 = \left[\left[\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \mathbf{X}_{\Gamma\alpha}} \right] \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_{\Gamma\alpha}}{\partial (\theta_\Gamma)^i}. \quad (2.26)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß der Sprung des Gradienten von ψ^α senkrecht zu Γ gerichtet sein muß und daher ein Vielfaches des Normalenvektors $\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}$ ist. Dieser Zusammenhang wird als Theorem von *Maxwell* [84] bezeichnet und lautet für eine skalare Größe ψ^α bzw. eine vektorielle Größe $\boldsymbol{\psi}^\alpha$

$$\begin{aligned} \left[\left[\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \mathbf{X}_{\Gamma\alpha}} \right] \right] &= \beta_\alpha \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} & \text{mit} & \quad \beta_\alpha = \left[\left[\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \mathbf{X}_{\Gamma\alpha}} \right] \right] \cdot \frac{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}}{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}}, \\ \left[\left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^\alpha}{\partial \mathbf{X}_{\Gamma\alpha}} \right] \right] &= \boldsymbol{\beta}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} & \text{mit} & \quad \boldsymbol{\beta}_\alpha = \left[\left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^\alpha}{\partial \mathbf{X}_{\Gamma\alpha}} \right] \right] \frac{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}}{\bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\Gamma\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Kompatibilitätsbedingung für die Zeitableitung

Die materielle Zeitableitung einer Größe ψ^α bzw. $\boldsymbol{\psi}^\alpha$ läßt sich durch die materielle Zeitableitung nach der Bewegung der singulären Fläche und der Differenzgeschwindigkeit der Phase φ^α und der Fläche Γ ausdrücken:

$$\begin{aligned} (\psi^\alpha)'_\alpha &= (\psi^\alpha)'_\Gamma + \text{grad } \psi^\alpha \cdot (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma), \\ (\boldsymbol{\psi}^\alpha)'_\alpha &= (\boldsymbol{\psi}^\alpha)'_\Gamma + \text{grad } \boldsymbol{\psi}^\alpha (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Unter der Voraussetzung einer singulären Fläche erster Ordnung bezogen auf ψ^α oder $\boldsymbol{\psi}^\alpha$ folgt, daß die Sprünge $\llbracket \psi^\alpha \rrbracket$ und $\llbracket \boldsymbol{\psi}^\alpha \rrbracket$ und damit auch die materiellen Zeitableitungen $\llbracket (\psi^\alpha)'_\Gamma \rrbracket$ und $\llbracket (\boldsymbol{\psi}^\alpha)'_\Gamma \rrbracket$ nach der Bewegung der singulären Fläche verschwinden. Auf der singulären Fläche ergibt (2.28) dann

$$\begin{aligned}\llbracket (\psi^\alpha)'_\alpha \rrbracket &= \llbracket (\mathbf{F}_\alpha^{T-1} \text{Grad}_\alpha \psi^\alpha) \cdot (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \rrbracket, \\ \llbracket (\boldsymbol{\psi}^\alpha)'_\alpha \rrbracket &= \llbracket (\mathbf{F}_\alpha^{T-1} \text{Grad}_\alpha \boldsymbol{\psi}^\alpha) (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \rrbracket.\end{aligned}\tag{2.29}$$

2.2 Mechanische und thermodynamische Bilanzgleichungen von Mehrphasenmaterialien

Im folgenden werden die Bilanzgleichungen der TPM, basierend auf den metaphysischen Prinzipien von Truesdell [103], zusammengestellt. Diebels [22] liefert eine deutsche Übersetzung der Prinzipie:

1. *Alle Eigenschaften der Mischung müssen mathematische Konsequenzen der Eigenschaften der Konstituierenden sein.*
2. *Um die Bewegung einer Konstituierenden zu beschreiben, kann man diese gedanklich vom Rest der Mischung trennen, vorausgesetzt, man beachtet die Einwirkung der anderen Konstituierenden.*
3. *Die Bewegung der Mischung wird von denselben Gleichungen beherrscht wie die Bewegung eines Einphasenmaterials.*

Nach diesen Prinzipien werden für jede Konstituierende φ^α unter Berücksichtigung von Interaktions- bzw. Produktionsgrößen die Bilanzgleichungen analog zu denen der klassischen Kontinuumsmechanik eines Einphasenmaterials, vgl. z. B. Ehlers [26, 28–30] und Haupt [65, 66], getrennt aufgestellt. Die Interaktionsgrößen beschreiben dabei die physikalischen Austauschprozesse zwischen den Konstituierenden des porösen Körpers. Die Summe der Partialbilanzen aller Konstituierenden φ^α ergibt die entsprechende Bilanzgleichung der Mischung φ , welche der Bilanzgleichung eines Einphasenkontinuums entsprechen muß. Hieraus ergeben sich Zwangsbedingungen für die Interaktionsgrößen.

Im Fall eines einphasigen Materials behalten alle Bilanzgleichungen ihre Gültigkeit, es treten allerdings keine Produktionsgrößen auf.

Im folgenden werden die mechanischen Bilanzen in Form von Partialbilanzen für jede Konstituierende φ^α formuliert. Ausführliche Betrachtungen der Bilanzgleichungen der TPM finden sich u. a. in de Boer [7, 8], de Boer und Ehlers [9], Bowen [14, 15], Diebels und Ehlers [23], Ehlers [24, 28], Ellsiepen [58] und Mahnkopf [83].

Für eine einzelne Phase φ^α ergibt sich die allgemeine Form der globalen Bilanzgleichung einer skalarwertigen mechanischen Größe ψ^α bzw. einer vektorwertigen mechanischen Größe

ψ^α unter Beachtung von diskontinuierlichen Feldgrößen zu

$$\begin{aligned} \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha dv &= \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\phi}^\alpha \cdot \mathbf{n} da + \int_{\mathcal{B}} \sigma^\alpha dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\psi}^\alpha dv - \int_{\Gamma} \llbracket \boldsymbol{\phi}^\alpha \rrbracket \cdot \mathbf{n}_\Gamma da, \\ \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\psi}^\alpha dv &= \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\Phi}^\alpha \mathbf{n} da + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}^\alpha dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha dv - \int_{\Gamma} \llbracket \boldsymbol{\Phi}^\alpha \rrbracket \mathbf{n}_\Gamma da. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Die globalen Formen können mit Hilfe eines modifizierten *Reynoldsschen* Transporttheorems, siehe Mahnkopf [83], und des *Gaußschen* Integralsatzes unter der Voraussetzung von hinreichender Stetigkeit und stetiger Differenzierbarkeit der zu bilanzierenden Größen in die folgenden Formen überführt werden:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \left((\psi^\alpha)'_\alpha + \psi^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}^\alpha - \sigma^\alpha - \hat{\psi}^\alpha \right) dv &= \int_{\Gamma} \llbracket \psi^\alpha (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \boldsymbol{\phi}^\alpha \rrbracket \cdot \mathbf{n}_\Gamma da, \\ \int_{\mathcal{B}} \left((\boldsymbol{\psi}^\alpha)'_\alpha + \boldsymbol{\psi}^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi}^\alpha - \boldsymbol{\sigma}^\alpha - \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha \right) dv &= \int_{\Gamma} \llbracket \boldsymbol{\psi}^\alpha \otimes (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \boldsymbol{\Phi}^\alpha \rrbracket \mathbf{n}_\Gamma da. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Da das Volumenintegral nur kontinuierliche Größen enthält und die Gleichungen für bliebigige Teilvolumina gelten, ergeben sich die auf den materiellen Punkt X^α bezogenen lokalen Formen der kontinuierlichen Bilanzgleichungen:

$$\begin{aligned} (\psi^\alpha)'_\alpha + \psi^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}^\alpha + \sigma^\alpha + \hat{\psi}^\alpha, \\ (\boldsymbol{\psi}^\alpha)'_\alpha + \boldsymbol{\psi}^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi}^\alpha + \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha. \end{aligned} \quad (2.32)$$

In den materiellen Punkten auf der Diskontinuitätsfläche Γ ergeben sich dann analog die folgenden zusätzlichen Aussagen:

$$\begin{aligned} \llbracket \psi^\alpha (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \boldsymbol{\phi}^\alpha \rrbracket \cdot \mathbf{n}_\Gamma &= 0, \\ \llbracket \boldsymbol{\psi}^\alpha \otimes (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \boldsymbol{\Phi}^\alpha \rrbracket \mathbf{n}_\Gamma &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

In den Gleichungen (2.30) bis (2.33) sind ψ^α und $\boldsymbol{\psi}^\alpha$ die zu bilanzierenden volumenspezifischen skalaren bzw. vektoriellen physikalischen Größen eines Körpers \mathcal{B} , $\boldsymbol{\phi}^\alpha$ und $\boldsymbol{\Phi}^\alpha$ sind die Ausflüsse über den Rand \mathcal{S} bzw. den inneren Rand Γ des Körpers infolge äußerer Nahwirkung, σ^α und $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ sind die Zufuhren infolge äußerer Fernwirkung und $\hat{\psi}^\alpha$ und $\hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha$ sind die Produktionsterme der physikalischen Größen aufgrund der Interaktion mit den anderen Konstituierenden. Die materielle Zeitableitung $d_\alpha/dt(\cdot) = (\cdot)'_\alpha$ wird mit der Geschwindigkeit der Phase φ^α gebildet, vgl. (2.8). \mathbf{n} ist der nach außen orientierte Oberflächennormaleneinheitsvektor auf \mathcal{S} , und \mathbf{n}_Γ ist der nach außen orientierte Oberflächennormaleneinheitsvektor auf Γ .

	ψ^α, Ψ^α	ϕ^α, Φ^α	$\sigma^\alpha, \Sigma^\alpha$	$\hat{\psi}^\alpha, \hat{\Psi}^\alpha$
Masse	ρ^α	$\mathbf{0}$	0	$\hat{\rho}^\alpha$
Impuls	$\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha$	\mathbf{T}^α	$\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$	$\hat{\mathbf{s}}^\alpha$
Drehimpuls	$\mathbf{x} \times (\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha)$	$\mathbf{x} \times \mathbf{T}^\alpha$	$\mathbf{x} \times (\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha)$	$\hat{\mathbf{h}}^\alpha$
Energie	$\rho^\alpha (\varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha)$	$(\mathbf{T}^\alpha)^T \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{q}^\alpha$	$\rho^\alpha (\mathbf{b}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + r^\alpha)$	\hat{e}^α
Entropie	$\rho^\alpha \eta^\alpha$	$-\phi_\eta^\alpha$	σ_η^α	$\hat{\eta}^\alpha$

Tab. 2.1: Partielle Bilanzrelationen für die Konstituierenden φ^α

Die speziellen mechanischen und thermodynamischen Bilanzgleichungen für jede einzelne Konstituierende φ^α werden mit den Angaben aus Tab. 2.1 gebildet:

Die Produktionsterme aus Tab. 2.1, Spalte 5 werden als *total* bezeichnet und lassen sich in einen *direkten* Anteil und einen Anteil, der durch die Produktion einer niedrigeren Bilanz verursacht wird, zerlegen (Ehlers [28]):

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{s}}^\alpha &= \hat{\rho}^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha, \\
\hat{\mathbf{h}}^\alpha &= \mathbf{x} \times (\hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha) + \hat{\mathbf{m}}^\alpha, \\
\hat{e}^\alpha &= \hat{e}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \hat{\rho}^\alpha (\varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha), \\
\hat{\eta}^\alpha &= \hat{\zeta}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \eta^\alpha.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Zum Beispiel läßt sich für die totale Impulsproduktion $(2.34)_1$ die direkte Impulsproduktion $\hat{\mathbf{p}}^\alpha$ als volumenbezogene, lokale Interaktionskraft zwischen der Phase φ^α und den übrigen Phasen interpretieren, während der erste Summand den Anteil der Impulsproduktion darstellt, der infolge der Massendichteproduktion $\hat{\rho}^\alpha$ entsteht.

Aus den Forderungen des ersten und dritten Prinzips der *Truesdellschen* Prinzipie ergibt sich, daß die Bilanzrelationen der gesamten Mischung durch Summation aus den Bilanzen der einzelnen Konstituierenden hervorgehen. Daraus ergeben sich Zwangsbedingungen in Form von Summenrelationen, die für die totalen Produktionsgrößen wie folgt lauten:

$$\sum_{\alpha=1}^n \hat{\rho}^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^n \hat{\mathbf{s}}^\alpha = \mathbf{0}, \quad \sum_{\alpha=1}^n \hat{\mathbf{h}}^\alpha = \mathbf{0}, \quad \sum_{\alpha=1}^n \hat{e}^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^n \hat{\eta}^\alpha \geq 0. \tag{2.35}$$

Das heißt, daß sich alle Wechselwirkungen zwischen den Phasen – mit Ausnahme der Entropieproduktionen – innerhalb der Mischung aufheben.

2.3 Beschreibung poröser Medien mit Anwendung auf Zwei- und Dreiphasenmaterialien

Bei den im folgenden behandelten Mehrphasenmodellen wird grundsätzlich von einem porösen Festkörperskelett φ^S mit dem Index $\alpha = S$ für *Solid* und einer oder mehrerer Fluidphasen φ^β ausgegangen, die sich im Porenraum des Festkörpers befinden. Hier gilt also für die Zusammensetzung einer n -phasigen Mischung

$$\varphi = \varphi^S + \sum_{\beta=1}^{n-1} \varphi^\beta \quad \text{mit} \quad n > 1. \quad (2.36)$$

In einem *Zweiphasenmaterial* ($n = 2$) befindet sich eine Fluidphase φ^F , die mit dem Index $\beta = F$ für *Fluid* gekennzeichnet wird, im Porenraum des Festkörpers:

$$\varphi = \varphi^S + \varphi^F. \quad (2.37)$$

Bei einem *Dreiphasenmaterial* ($n = 3$) treten zwei Fluidphasen auf, die gleiche oder unterschiedliche Aggregatzustände aufweisen können. Hier wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Fall betrachtet, in dem diese Fluide unterschiedliche Aggregatzustände aufweisen. Das heißt, die eine Fluidphase ist flüssig und wird mit φ^L (Index $\beta = L$ für *Liquid*) bezeichnet, während die andere Fluidphase gasförmig ist und mit φ^G (Index $\beta = G$ für *Gas*) bezeichnet wird. Es gilt also

$$\varphi^F = \varphi^L + \varphi^G. \quad (2.38)$$

Da die Phasen der genannten Modelle in beliebigen Massen- bzw. Volumenverhältnissen in der Gesamtmischung vorliegen können, lassen sich die Modelle durch „Weglassen“ einzelner Fluidphasen von drei auf zwei Phasen oder auf das Einphasenmodell des Festkörpers reduzieren.

2.3.1 Festkörper-Fluid-Problem

Zur Beschreibung des vorliegenden, in den Bewegungen gekoppelten Festkörper-Fluid-Problems wird die Festkörperbewegung in der *Lagrangeschen* Form mit Hilfe des Verschiebungsvektors \mathbf{u}_S , vgl. (2.13), dargestellt:

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{x} - \mathbf{X}_S. \quad (2.39)$$

Für die Porenfluide wird mit der Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_β eine modifizierte *Eulersche* Beschreibung gewählt. Die Sickergeschwindigkeit wird aus der Differenz der Fluidgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_\beta$ und der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_S$ des Festkörpers gebildet:

$$\mathbf{w}_\beta = \dot{\mathbf{x}}_\beta - \dot{\mathbf{x}}_S. \quad (2.40)$$

Die Sickergeschwindigkeit beschreibt damit die Bewegung eines Porenfluids relativ zum sich deformierenden Festkörperskelett.

Die Größen \mathbf{u}_S und \mathbf{w}_β sind die *Primärvariablen* der hier aufgestellten Mehrphasenmodelle.

Mit Hilfe der Sickergeschwindigkeit läßt sich die materielle Zeitableitung einer skalaren physikalischen Größe ψ^α bzw. vektoriellen physikalischen Größe $\boldsymbol{\psi}^\alpha$ bezogen auf die Bewegung einer Fluidphase φ^β ausdrücken durch die materielle Zeitableitung nach der Festkörperbewegung:

$$\begin{aligned} (\psi^\alpha)'_\beta &= (\psi^\alpha)'_S + \text{grad } \psi^\alpha \cdot \mathbf{w}_\beta, \\ (\boldsymbol{\psi}^\alpha)'_\beta &= (\boldsymbol{\psi}^\alpha)'_S + \text{grad } (\boldsymbol{\psi}^\alpha) \mathbf{w}_\beta. \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.3.2 Sättigungsbedingung

Die Sättigungsbedingung für einen fluidgefüllten, porösen Festkörper lautet

$$n^S + \sum_{\beta=1}^{n-1} n^\beta = 1. \quad (2.42)$$

Hierin ergibt die Summe der Porenfluide den Volumenanteil des Porenraums, die Porosität n^F . Angewendet auf ein Zwei- bzw. Dreiphasenmodell ergibt diese Aussage

$$n^S + n^F = 1 \quad \text{und} \quad n^S + n^L + n^G = 1. \quad (2.43)$$

2.3.3 Einführung von Sättigungsfunktionen

Die Porenfluide φ^β liegen im Porenraum in bestimmten Volumenverhältnissen zueinander vor. Zur Beschreibung dieser Verhältnisse werden die *Sättigungsfunktionen* s^β eingeführt, die als Quotient der Volumenanteile n^β und dem Volumenanteil n^F der Gesamtfluidphase definiert sind:

$$s^\beta = \frac{n^\beta}{n^F} \quad \text{mit} \quad s^\beta \in [0, 1] \quad \text{und} \quad \sum_{\beta=1}^{n-1} s^\beta = 1. \quad (2.44)$$

Der Begriff eines *teilgesättigten* porösen Mediums ist über die Sättigung definiert: Ist der Sättigungsgrad einer Fluidphase $0 < s^\beta < 1$, so liegt Teilsättigung bezüglich dieser Phase vor. Der verbleibende Porenraum ist dann mit einer anderen Fluidphase gefüllt, so daß die Sättigungsbedingung (2.42) erfüllt ist.

Die Sättigungsfunktionen des Dreiphasenmodells lauten

$$s^L = \frac{n^L}{n^F}, \quad s^G = \frac{n^G}{n^F} \quad \text{mit} \quad s^L + s^G = 1. \quad (2.45)$$

In Abb. 2.4 ist schematisch die volumetrische Zusammensetzung eines Zwei- und eines Dreiphasenmodells dargestellt.

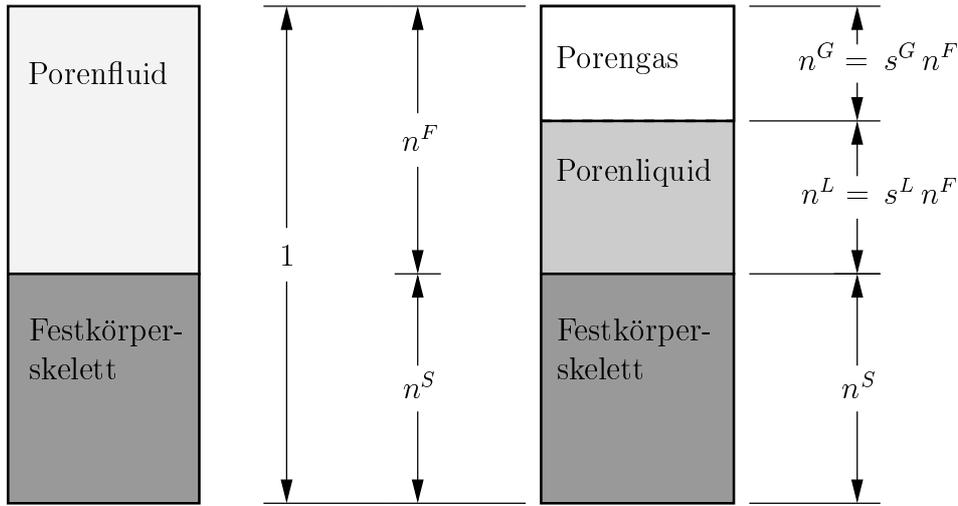


Abb. 2.4: Volumetrische Zusammensetzung eines Zwei- und eines Dreiphasenmodells

Auf die Definition einer modifizierten Sättigungsfunktion, die die auftretenden Residual- und Maximalsättigungen einer Konstituierenden im porösen Medium berücksichtigt, wird hier zunächst verzichtet. In Kapitel 7 werden die Residual- und Maximalsättigungen der Fluidphasen eines Dreiphasenmodells als Konstanten eingeführt, um die Sättigungsgrade dieser Phasen in einem Experiment zu bestimmen.

2.3.4 Partielle Bilanzgleichungen

Im folgenden werden die partiellen Bilanzgleichungen für Masse bzw. Volumen und Impuls einer beliebigen Phase φ^α aufgestellt. Dabei wird ein Massen- bzw. Volumenaustausch mit anderen Phasen ausgeschlossen. Unter dieser Voraussetzung lautet die Massenbilanz für eine Phase φ^α , vgl. (2.32)₁ und Tab. 2.1, Zeile 2,

$$(\rho^\alpha)'_\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\rho}^\alpha = 0. \quad (2.46)$$

Die Reduktion von (2.46) zu einer Volumenbilanz ist im Fall einer materiell inkompressiblen Konstituierenden, d. h. $\rho^{\alpha R} = \text{konst.}$, möglich:

$$(n^\alpha)'_\alpha + n^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = 0. \quad (2.47)$$

Im folgenden wird ein materiell inkompressibler, poröser Festkörper φ^S vorausgesetzt, für den die partielle Volumenbilanz

$$(n^S)'_S + n^S \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S = 0 \quad (2.48)$$

gilt. Diese lokale Volumenbilanz verbindet im Fall der geometrisch linearen Theorie die materielle Zeitableitung $(n^S)'_S$ des Festkörpervolumenanteils, den Festkörpervolumenanteil selbst und die zeitliche Änderung der Volumendehnung¹

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S = (\boldsymbol{\varepsilon}_S)'_S \cdot \mathbf{I} = (\varepsilon_V)'_S \quad (2.49)$$

¹Volumendehnung e_V des Festkörperskeletts für den Fall finiter Deformationen:
 $e_V = (dv - dV^S)/dV^S = J_S - 1$. Zur Linearisierung siehe (2.19)₂.

miteinander.

Die Impulsbilanz von φ^α ist unter Beachtung von (2.46) durch

$$\rho^\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \operatorname{div} \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha \quad (2.50)$$

gegeben, siehe (2.32)₂ und Tab. 2.1, Zeile 3. Im quasi-statischen Fall wird der Beschleunigungsterm vernachlässigt ($\ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \mathbf{0}$), d. h. Belastungen werden langsam aufgebracht, Porenfluidströmungen sind schleichend.

Auf einer singulären Fläche gelten mit (2.33) für die Massen- bzw. Volumenbilanz und die Impulsbilanz die folgenden zusätzlichen Aussagen

$$\llbracket \rho^\alpha (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \rrbracket \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0, \quad \llbracket n^\alpha (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) \rrbracket \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0 \quad (2.51)$$

und

$$\llbracket \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \otimes (\dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}}_\Gamma) - \mathbf{T}^\alpha \rrbracket \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{0}. \quad (2.52)$$

Im Fall einer materiell an eine Phase φ^α gebundenen singulären Fläche Γ gilt

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = \dot{\mathbf{x}}_\Gamma, \quad (2.53)$$

und die Massen- bzw. Volumenbilanz wird immer erfüllt. Die Impulsbilanz lautet unter dieser Voraussetzung

$$\llbracket \mathbf{T}^\alpha \rrbracket \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

und wird als *Kontinuität des Spannungstensors* bezeichnet.

2.3.5 Bilanzgleichungen der Mischung

Die Bilanzgleichungen der Mischung ergeben sich, indem die partiellen Bilanzgleichungen der einzelnen Phasen addiert werden. Dies führt gemäß den *Truesdellschen* Prinzipien zu einer Wiedergabe der Mischungseigenschaften, da sich diese Eigenschaften aus den Eigenschaften der einzelnen Konstituierenden ergeben müssen, solange die inneren Wechselwirkungen zwischen den Phasen berücksichtigt werden, vgl. Truesdell [103], S. 221.

Allerdings fällt die Bilanz (2.48) des Festkörpers aus der Summe der partiellen Massen- bzw. Volumenbilanzen wieder heraus, da die rechte Seite gleich null ist. Daher wird die partielle Bilanz von φ^F bzw. φ^L oder φ^G als unabhängige Gleichung betrachtet, die über die materielle Zeitableitung nach der Festkörperbewegung (2.41)₁ und die Sättigungsbedingung (2.43) mit den übrigen Phasen in Verbindung gebracht wird.

Werden in einem Zweiphasenmodell ein materiell inkompressibler, poröser Festkörper φ^S und ein materiell kompressibles Fluid φ^F vorausgesetzt, dann ergibt sich durch Anwendung des Divergenztheorems und unter Beachtung von (2.48) die partielle Massenbilanz der Fluidphase φ^F zu

$$n^F (\rho^{FR})'_S + \rho^{FR} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S + \operatorname{div} (n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F) = 0. \quad (2.55)$$

Unter der Voraussetzung einer materiell inkompressiblen Fluidphase ($\rho^{FR} = \text{konst.}$), geht diese Bilanz in eine Volumenbilanz über, die auch als *Inkompressibilitätsbedingung* beider Phasen bezeichnet wird:

$$\text{div}(\dot{\mathbf{x}}_S + n^F \mathbf{w}_F) = 0. \quad (2.56)$$

Die partielle Massenbilanz einer materiell kompressiblen Fluidphase φ^G eines Dreiphasenmodells ausgedrückt bezogen auf die Festkörperbewegung von φ^S ergibt analog

$$n^G (\rho^{GR})'_S + \rho^{GR} (n^G)'_S + n^G \rho^{GR} \text{div} \dot{\mathbf{x}}_S + \text{div}(n^G \rho^{GR} \mathbf{w}_G) = 0, \quad (2.57)$$

während die partielle Volumenbilanz einer materiell inkompressiblen Fluidphase φ^L

$$(n^L)'_S + n^L \text{div} \dot{\mathbf{x}}_S + \text{div}(n^L \mathbf{w}_L) = 0 \quad (2.58)$$

ergibt. Zu beachten ist, daß die partiellen Bilanzen (2.57) und (2.58) der Fluidphasen des Dreiphasenmodells in die partiellen Bilanzen (2.55) und (2.56) des Zweiphasenmodells übergehen, wenn Liquid- bzw. Gasphase entfallen ($n^L = 0$ bzw. $n^G = 0$).

Die Impulsbilanz der Mischung entspricht der Summe der partiellen Impulsbilanzen (2.50) aller Konstituierenden φ^α . Dabei bildet die Summe der partiellen Spannungstensoren \mathbf{T}^α den Spannungstensor \mathbf{T} und die Summe der Partialdichten ρ^α die Mischungsdichte ρ :

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{T}^\alpha \quad \text{und} \quad \rho = \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha. \quad (2.59)$$

Die Interaktionskräfte $\hat{\mathbf{p}}^\alpha$ müssen sich unter der getroffenen Voraussetzung $\hat{\rho}^\alpha \equiv 0$ innerhalb der Mischung aufheben, vgl. (2.34)₁ und (2.35)₂:

$$\sum_{\alpha=1}^n \hat{\mathbf{p}}^\alpha = \mathbf{0}. \quad (2.60)$$

Die Beschleunigungen der Fluidphasen lassen sich mit (2.41)₂ in Abhängigkeit der Festkörpergeschwindigkeit, der Sickergeschwindigkeit und den materiellen Zeitableitungen dieser Größen nach der Festkörperbewegung darstellen:

$$\ddot{\mathbf{x}}_\beta = (\dot{\mathbf{x}}_S + \mathbf{w}_\beta)'_S + \text{grad}(\dot{\mathbf{x}}_S + \mathbf{w}_\beta) \mathbf{w}_\beta. \quad (2.61)$$

Wird für alle Konstituierenden die gleiche äußere Beschleunigung $\mathbf{b}^\alpha \equiv \mathbf{b}$, die i. d. R. die Erdbeschleunigung ist, vorausgesetzt, so ergibt sich für die Impulsbilanz eines Zweiphasenmodells, formuliert in bezug auf die Festkörperbewegung,

$$\rho^S \ddot{\mathbf{x}}_S + \rho^F [(\dot{\mathbf{x}}_S + \mathbf{w}_F)'_S + \text{grad}(\dot{\mathbf{x}}_S + \mathbf{w}_F) \mathbf{w}_F] = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.62)$$

Analog ergibt sich für ein Dreiphasenmodell

$$\begin{aligned} \rho^S \ddot{\mathbf{x}}_S + \rho^L [(\dot{\mathbf{x}}_S + \mathbf{w}_L)'_S + \text{grad}(\dot{\mathbf{x}}_S + \mathbf{w}_L) \mathbf{w}_L] + \\ + \rho^G [(\dot{\mathbf{x}}_S + \mathbf{w}_G)'_S + \text{grad}(\dot{\mathbf{x}}_S + \mathbf{w}_G) \mathbf{w}_G] = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dabei gilt für die Interaktionskräfte

$$\hat{\mathbf{p}}^S = -\hat{\mathbf{p}}^F \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{p}}^S = -\hat{\mathbf{p}}^L - \hat{\mathbf{p}}^G. \quad (2.64)$$

Unter quasi-statischen Bedingungen ($\dot{\mathbf{x}}_\alpha = \mathbf{0}$) verschwinden die linken Seiten von (2.62) und (2.63), und die Impulsbilanz der Mischung vereinfacht sich zu

$$\mathbf{0} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.65)$$

2.3.6 Bestimmung der Volumenanteile und der Sättigung

Der Volumenanteil n^S des Festkörperskeletts wird in Abhängigkeit vom Anfangsvolumenanteil n_{0S}^S des Festkörpers in der Referenzkonfiguration und der Inverse der *Jacobi-Determinante* aus der Integration der Volumenbilanz (2.48) des Festkörpers erhalten:

$$n^S = n_{0S}^S J_S^{-1} = \frac{n_{0S}^S}{1 + e_V}. \quad (2.66)$$

Bei Anwendung der geometrisch linearen Theorie ergibt sich n^S unter Verwendung von (2.19)₂ in Abhängigkeit von n_{0S}^S und der Divergenz der Festkörperverschiebung bzw. der linearisierten Volumendehnung des Festkörperskeletts:

$$n^S = n_{0S}^S (1 - \operatorname{div} \mathbf{u}_S) = n_{0S}^S (1 - \varepsilon_V). \quad (2.67)$$

Für die Implementierung des Dreiphasenmodells ist zu beachten, daß sich die Volumenanteile n^L und n^G und die Sättigungsfunktion s^G des Porengases in Abhängigkeit des Volumenanteils n^S des Festkörpers und der Sättigungsfunktion s^L des Porenliquids angeben lassen, vgl. (2.43) und (2.45):

$$n^L = (1 - n^S) s^L, \quad n^G = (1 - n^S)(1 - s^L), \quad s^G = 1 - s^L. \quad (2.68)$$

Die Sättigungsfunktion s^L des Liquids wird durch ein geeignetes Konstitutivgesetz bestimmt. Die Diskussion geeigneter Gesetze ist Gegenstand von Abschnitt 3.4.

3

Fluidmechanische Kopplung bei Mehrphasenmaterialien

Zur Beschreibung gesättigter und teilgesättigter Böden wird in diesem Kapitel die fluidmechanische Kopplung bei Mehrphasenmaterialien behandelt.

Die Kopplung umfaßt zum einen die Wirkung des effektiven Porendrucks von fluiden Phasen auf das Festkörperskelett eines porösen Mediums, zum anderen die Abhängigkeit der Permeabilität des Mediums von der Deformation des Porenraums aufgrund äußerer Belastung. Für teilgesättigte Medien kommen noch kapillare Effekte hinzu, die phänomenologisch durch eine Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung beschrieben werden. Aus dieser Beziehung werden die Sättigungen der beteiligten fluiden Phasen im Porenraum bestimmt.

Zur vollständigen Beschreibung der in Abschnitt 2.3 aufgestellten Modelle in Abhängigkeit der Primärvariablen Festkörperverschiebung \mathbf{u}_S und Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_β sind konstitutive Annahmen für die *Impulsproduktion*, den *partiellen Spannungstensor*, die *Mas-sendichte*- und die *Sättigungsfunktion* für jede einzelne Phase erforderlich. Das Problem, die Modellbildung zu vervollständigen und damit abzuschließen, wird „Closure Problem“ genannt und im folgenden durch die Bereitstellung der genannten Konstitutivgleichungen gelöst.

3.1 Konzept der Extraanteile

Die Auswertung der Entropiebilanz ((2.32)₁ und Tab. 2.1, Zeile 6) liefert, daß sich die Konstitutivgleichungen für die partiellen Spannungstensoren und die Impulsproduktionen aus zwei Termen zusammensetzen: Der erste Term wird durch den effektiven Porenfluiddruck $p^{\beta R}$ der Fluidphase φ^β beherrscht, während der zweite Term aus einem *Extraanteil* (Index E) besteht.

3.1.1 Konstitutivgleichungen für Mehrphasenmaterialien

Für die Impulsproduktion eines Fluids φ^β ergibt sich nach Ehlers [24, 26]

$$\hat{\mathbf{p}}^\beta = p^{\beta R} \text{grad } n^\beta + \hat{\mathbf{p}}_E^\beta \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{p}}_E^\beta = -\frac{(n^\beta)^2 \gamma^{\beta R}}{k_r^\beta} \mathbf{w}_\beta. \quad (3.1)$$

Der Extraanteil der Impulsproduktion ist eine lineare Funktion der Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_β des betrachteten Porenfluids. Im Vorfaktor treten der Volumenanteil der Fluidphase n^β , die effektive Fluidwichte $\gamma^{\beta R} = \rho^{\beta R} \|\mathbf{b}\|$ und ein Permeabilitätskoeffizient k_r^β auf.

Der Spannungszustand eines Porenfluids wird bestimmt durch

$$\mathbf{T}^\beta = -n^\beta p^{\beta R} \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^\beta \approx -n^\beta p^{\beta R} \mathbf{I}. \quad (3.2)$$

Hier wird der Extraanteil \mathbf{T}_E^β des partiellen Spannungstensors für das Fluid, der auch als *Fluidreibungsspannung* bezeichnet wird, vernachlässigt. Eine Dimensionsanalyse in Ehlers et al. [49] zeigt die Vernachlässigbarkeit dieser Spannung bei der Behandlung von bodenmechanischen Problemen im Rahmen einer makroskopischen Theorie.

Der Spannungszustand des Festkörperskeletts wird angegeben durch

$$\mathbf{T}^S = -n^S p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S. \quad (3.3)$$

Dabei ist p der Gesamtfluiddruck auf das Festkörperskelett. Dieser Druck wird mit Hilfe des Partialdruckgesetzes von *Dalton* bestimmt:

$$p = \sum_{\beta} (s^\beta p^{\beta R}). \quad (3.4)$$

Der Extraanteil \mathbf{T}_E^S des Festkörpers wird als *effektive* Spannung aufgefaßt (de Boer und Ehlers [10]). Hier geht die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Festkörpers ein, die einer noch zu bestimmenden Gesetzmäßigkeit folgen soll.

Die Summe der partiellen Spannungstensenoren führt im quasi-statischen Fall zum *totalen* Spannungstensor. Dies entspricht dem bekannten *Prinzip der effektiven Spannungen* (vgl. Bishop [6] und Skempton [96]):

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha} \mathbf{T}^\alpha = -p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S. \quad (3.5)$$

3.1.2 Konstitutivgleichungen für Zwei- und Dreiphasenmaterialien

Im folgenden werden die Konstitutivgleichungen für ein Zwei- und ein Dreiphasenmodell zusammengestellt.

In einem Zweiphasenmodell liegt nur eine unabhängige Fluidphase φ^F vor, deren Bewegungsfunktion vom effektiven Porenfluiddruck

$$p^{FR} =: p \quad (3.6)$$

bestimmt wird. Damit folgt nach (3.1) für die Interaktionskraft zwischen Festkörperskelett und Fluidphase:

$$\hat{\mathbf{p}}^F = p \operatorname{grad} n^F + \hat{\mathbf{p}}_E^F \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{p}}_E^F = -\frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k_r^F} \mathbf{w}_F. \quad (3.7)$$

Die Partialspannungstensenoren des Zweiphasenmodells sind (3.3) für das Festkörperskelett und

$$\mathbf{T}^F = -n^F p \mathbf{I} \quad (3.8)$$

mit (3.2) für das Porenfluid. Mit diesen Aussagen läßt sich der totale Spannungstensor (3.5) bilden.

Im Fall zweier Fluidphasen φ^L und φ^G mit unterschiedlichen Bewegungsfunktionen sind unterschiedliche effektive Porenfluiddrücke p^{LR} und p^{GR} für diese Phasen zu berücksichtigen (vgl. Bishop [6], Schrefler et al. [94] und Bolzon et al. [12]). Die Interaktionskräfte zwischen Festkörperskelett und der jeweiligen Fluidphase werden auch hier nach (3.1) gebildet:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}^L &= p^{LR} \operatorname{grad} n^L + \hat{\mathbf{p}}_E^L & \text{mit} & \quad \hat{\mathbf{p}}_E^L = -\frac{(n^L)^2 \gamma^{LR}}{k_r^L} \mathbf{w}_L, \\ \hat{\mathbf{p}}^G &= p^{GR} \operatorname{grad} n^G + \hat{\mathbf{p}}_E^G & \text{mit} & \quad \hat{\mathbf{p}}_E^G = -\frac{(n^G)^2 \gamma^{GR}}{k_r^G} \mathbf{w}_G. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Interaktionskräfte zwischen den Porenfluiden werden dabei durch die sättigungsabhängigen Permeabilitätskoeffizienten k_r^L und k_r^G erfaßt, vgl. Abschnitt 3.3.2.

Die partiellen Spannungstensoren der Fluide lauten

$$\mathbf{T}^L = -n^L p^{LR} \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}^G = -n^G p^{GR} \mathbf{I}, \quad (3.10)$$

während sich der partielle Spannungstensor \mathbf{T}^S des Festkörperanteils nach (3.3) bildet. Der auf das Festkörperskelett wirkende Gesamtdruck lautet, vgl. (3.4),

$$p = s^L p^{LR} + s^G p^{GR}. \quad (3.11)$$

Auch hier ergibt sich der totale Spannungstensor \mathbf{T} wie in (3.5).

3.2 Materielle Kompressibilität der Porenfluide

Die materiellen (realistischen) Dichten $\rho^{\beta R}$ der im Mehrphasenmodell betrachteten Fluidphasen hängen vom effektiven hydrostatischen Porenfluiddruck $p^{\beta R}$ ab, der sich aus einem Umgebungs- bzw. Anfangsdruck p_0 und dem Porenfluidüberdruck $\Delta p^{\beta R}$ zusammensetzt:

$$p^{\beta R} = p_0 + \Delta p^{\beta R} \quad \text{mit} \quad p^{\beta R} \geq 0. \quad (3.12)$$

Damit ist $p^{\beta R}$ als *absoluter* Druck definiert, der den Fall des Vakuums ($p^{\beta R} = 0$), d. h. das Nichtvorhandensein der Phase, mit einschließt.

Für den Fall einer einzigen Fluidphase φ^F und für den Fall, daß zwischen den Phasen φ^L und φ^G keine Druckdifferenz besteht, gilt

$$p := p_0 + \Delta p, \quad (3.13)$$

wobei p den absoluten effektiven Porenfluiddruck bezeichnet.

3.2.1 Materielle Kompressibilität des Porenwassers und der Porenluft

Das Porenwasser des hier vorgestellten Modells wird unter der Voraussetzung isothermer Bedingungen (Temperatur $\Theta = \text{konst.}$ für alle Phasen) als materiell inkompressibel angenommen, d. h. die realistische Dichte ρ^{LR} ist konstant:

$$\rho^{LR} = \text{konst.} \quad \forall p^{LR}. \quad (3.14)$$

Der effektive Liquiddruck p^{LR} kann unter der Voraussetzung der materiellen Inkompressibilität dieser Phase in das Dissipationsprinzip als ein *Lagrangescher* Multiplikator eingeführt werden und ergibt sich dann aus den beschreibenden Randbedingungen eines betrachteten Problems (Ehlers [25, 26]).

Die materielle Dichte ρ^{GR} der Porenluft wird näherungsweise aus dem idealen Gasgesetz (Gesetz von *Boyle-Mariotte*)

$$\rho^{GR}(\Delta p^{GR}) = \frac{p_0 + \Delta p^{GR}}{\bar{R}^G \Theta} \quad \text{mit} \quad \Theta = \text{konst.} \quad (3.15)$$

in Abhängigkeit des Porengasüberdrucks Δp^{GR} bestimmt. In dieser Zustandsgleichung bezeichnet \bar{R}^G die spezifische Gaskonstante und Θ die absolute *Kelvinsche* Temperatur der Phase φ^G . Da nur isotherme Prozesse betrachtet werden, geht der Gradient $1/(\bar{R}\Theta)$ des idealen Gasgesetzes als Konstante in die nachfolgenden Überlegungen ein.

In Tab. 3.1 sind die beschreibenden Parameter für Porenwasser und Porenluft für festgelegte Anfangsbedingungen zusammengestellt.

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Dichte des Porenwassers	ρ^{LR}	1 000	kg/m ³
Dichte der Porenluft	ρ_0^{GR}	1,25	kg/m ³
Umgebungsdruck	p_0	$1 \cdot 10^5$	N/m ²
Spezifische Gaskonstante für Luft	\bar{R}^G	287	J/(kg K)
Temperatur der Mischung	Θ	278 (5 °C)	K

Tab. 3.1: Parameter der Fluidphasen unter gewählten Anfangsbedingungen

3.2.2 Materielle Kompressibilität einer Mischphase

Ein einzelnes Porenfluid φ^F wird als Mischphase bestehend aus materiell inkompressiblem Wasser mit dispergierten, komprimierbaren Luftblasen modelliert, wobei eine Entmischung der Konstituierenden ausgeschlossen wird. Aus der materiellen Inkompressibilität des Wassers folgt, daß bei vollständiger Kompression des Luftanteils keine weitere Volumendehnung der Mischphase mehr möglich ist, d. h. die Mischphase erreicht im Kompressionspunkt die maximale Dichte ρ_{max}^{FR} .

Im folgenden wird prinzipiell ein Dreiphasenmodell behandelt, dessen Fluidphasen φ^L und φ^G in der Mischphase φ^F vorliegen. Die materielle Dichtefunktion ρ^{FR} der Mischphase in Abhängigkeit vom absoluten Porendruck $p = p^{FR}$ wird im Rahmen der TPM angegeben. Die partielle Dichte $\rho^F = n^F \rho^{FR}$ der Mischphase ergibt sich aus der Summe der mit den entsprechenden Volumenanteilen gewichteten materiellen Dichten der in der Mischphase enthaltenen Fluide zu

$$n^F \rho^{FR} = n^L \rho^{LR} + n^G \rho^{GR}. \quad (3.16)$$

Die materielle Dichte ρ^{LR} der Flüssigkeit ist hierbei aufgrund der Annahme materieller Inkompressibilität konstant, während die materielle Dichte ρ^{GR} des materiell kompressiblen Fluids aus dem idealen Gasgesetz (3.15) bestimmt wird.

Eine Entmischung der Phase φ^F wird ausgeschlossen, d. h. die Konstituierenden φ^L und φ^G folgen derselben Bewegungsfunktion und besitzen demnach dieselbe Geschwindigkeit:

$$\dot{\mathbf{x}}_L = \dot{\mathbf{x}}_G =: \dot{\mathbf{x}}_F. \quad (3.17)$$

Unter der Voraussetzung, daß Massenaustauschprozesse zwischen den an der Mischphase beteiligten Fluiden ausgeschlossen sind, läßt sich der gesuchte Zusammenhang zwischen der materiellen Dichte ρ^{FR} der Mischphase und dem Porendruck p angeben (Ehlers et al. [49], Ehlers und Blome [34]):

$$\rho^{FR}(p) = \rho^{LR} \frac{1 + C_{0S}^F}{\rho^{LR}/\rho^{GR} + C_{0S}^F}. \quad (3.18)$$

Darin ist C_{0S}^F eine Integrationskonstante, die direkt aus den Volumenanteilen und materiellen Dichten der beiden Fluide, z. B. zum Zeitpunkt $t = t_0$ bei konstantem Umgebungsdruck p_0 , bestimmt werden kann:

$$C_{0S}^F = \left. \frac{n^L \rho^{LR}}{n^G \rho^{GR}} \right|_{t=t_0} = \frac{n_{0S}^L \rho^{LR}}{n_{0S}^G \rho_0}. \quad (3.19)$$

C_{0S}^F ist daher kein neuer Materialparameter, der aus Versuchen bestimmt werden muß, sondern vielmehr ein Strukturparameter, der die Zusammensetzung der Mischphase und somit ihre Eigenschaften bestimmt.

Gegenüber einem rein konstitutiven Ansatz für die Dichtefunktion einer Mischphase mit Kompressionspunkt, hat die Herleitung über die TPM den Vorteil, daß keine zusätzlichen Materialparameter bestimmt werden müssen. Als Konsequenz aus dieser Herleitung genügt der vorliegende Ansatz automatisch den Grenzzuständen eines materiell kompressiblen Fluids ($n^L = 0 \rightsquigarrow C_{0S}^F = 0$) bzw. eines materiell inkompressiblen Fluids ($n^G = 0 \rightsquigarrow C_{0S}^F \rightarrow \infty$) und den Grenzzuständen des Drucks für $p \rightarrow 0$ bzw. $p \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{C_{0S}^F \rightarrow 0} \rho^{FR} &= \rho^{GR} & \text{bzw.} & \quad \lim_{C_{0S}^F \rightarrow \infty} \rho^{FR} = \rho^{LR}, \\
\lim_{p \rightarrow 0} \rho^{FR} &= 0 & \text{bzw.} & \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \rho^{FR} = \rho_{\max}^{FR} := \frac{1 + C_{0S}^F}{C_{0S}^F} \rho^{LR}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Hierin ist ρ_{\max}^{FR} die maximale Dichte der Mischphase, die sich für unendlichen Druck aus (3.18) bestimmt, da der Quotient ρ^{LR}/ρ^{GR} für $p \rightarrow \infty$ verschwindet. Im Grenzfall einer materiell inkompressiblen Mischphase ($n^G = 0$) degeneriert der effektive Porendruck p zu einem *Lagrange*-Multiplikator, vgl. Abschnitt 3.2.1.

In Abb. 3.1 ist die Beziehung zwischen Porendruck p und effektiver Dichte ρ^{FR} der Mischphase für die hier eingeführte Druck-Dichte-Funktion dargestellt. Es wurden drei Fluide mit unterschiedlichen Mischungsverhältnissen (vgl. Tab. 3.2) untersucht. Tab. 3.1 gibt die verwendeten physikalischen Konstanten für die Druck-Dichte-Funktion (3.18) an. Die Funktion bildet das Verhalten der Mischphase einschließlich des Kompressionspunktes bei ρ_{\max}^{FR} in geeigneter Weise ab.

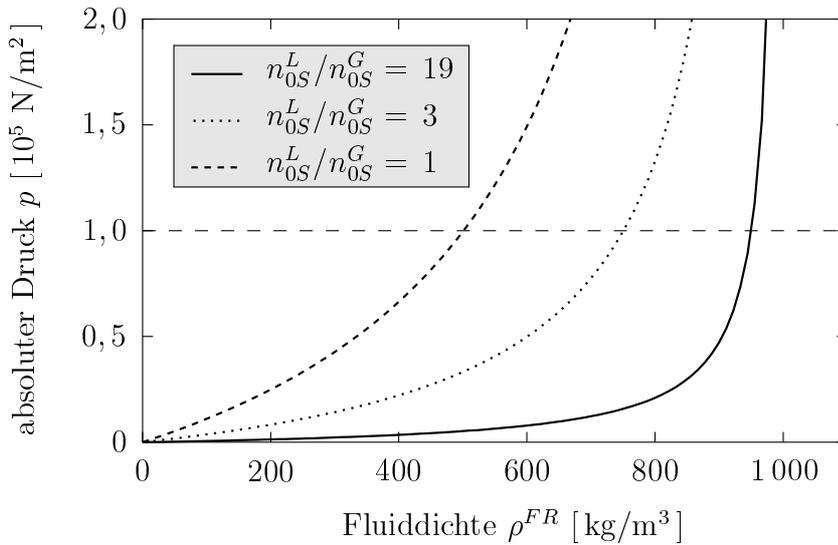


Abb. 3.1: Druck-Dichte-Funktionen für verschiedene Porenfluide

n_{0S}^L/n_{0S}^G [-]	n_{0S}^L [-]	n_{0S}^G [-]	C_{0S}^F [-]	ρ_0^{FR} [kg/m ³]	ρ_{\max}^{FR} [kg/m ³]
19	0,95	0,05	15 200	950,06	1 000,07
3	0,75	0,25	2 400	750,31	1 000,42
1	0,50	0,50	800	500,63	1 001,25

Tab. 3.2: Spezifikation unterschiedlicher Porenfluide

Das hier vorgestellte Modell erlaubt eine frei wählbare Zusammensetzung der Mischphase im Ausgangszustand bei einem ebenfalls frei wählbarem Umgebungsdruck p_0 . Änderungen des Porendrucks bewirken eine Änderung des Verhältnisses der Volumenanteile der

Phasen φ^L und φ^G in der Mischphase, d. h. die Sättigungsfunktionen sind vom Porendruck abhängig. Diese Druck-Sättigungs-Beziehungen in der Mischphase lassen sich explizit angeben:

$$s^L(p) = \frac{C_{0S}^F \rho^{GR}}{C_{0S}^F \rho^{GR} + \rho^{LR}} \quad \text{und} \quad s^G(p) = \frac{\rho^{LR}}{C_{0S}^F \rho^{GR} + \rho^{LR}}. \quad (3.21)$$

Darin ist $\rho^{GR} = \rho^{GR}(p)$. Die Summe der Sättigungsfunktionen ergibt für einen beliebigen Porendruck p definitionsgemäß eins (vgl. (2.45), Abb. 3.2).

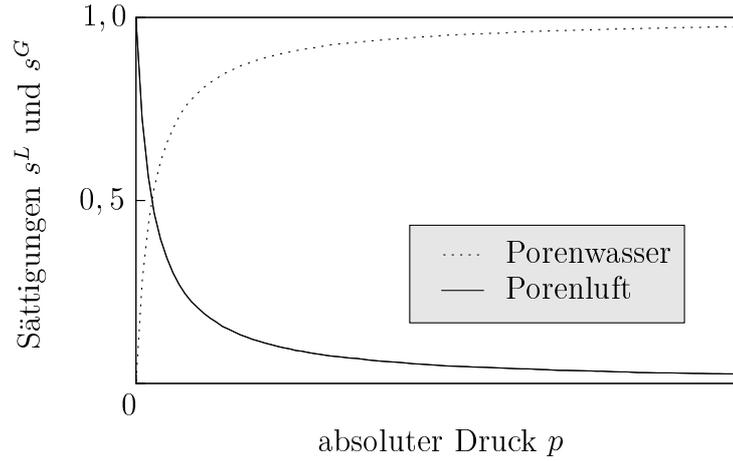


Abb. 3.2: Druck-Sättigungs-Beziehung in der Mischphase

Die materielle Kompressibilität κ^β eines Fluids φ^β wird durch das Maß der Volumenänderung dv^β oder der Änderungen der effektiven Fluidichte $d\rho^{\beta R}$ bei Änderung des absoluten Porendrucks p bestimmt:

$$\kappa^\beta = -\frac{1}{v^\beta} \frac{dv^\beta}{dp} = \frac{1}{\rho^{\beta R}} \frac{d\rho^{\beta R}}{dp}. \quad (3.22)$$

Für die Druck-Dichte-Funktion des Porenfluids führt dies zur materiellen Kompressibilitäts-Druck-Relation der Mischphase φ^F ,

$$\kappa^F(p) = \frac{1}{(C_{0S}^F \rho^{GR} / \rho^{LR} + 1) p}, \quad (3.23)$$

wobei die Konstante C_{0S}^F wiederum die Zusammensetzung des Fluids im Ausgangszustand bestimmt.

In den Grenzwerten für C_{0S}^F wird die materielle Kompressibilität eines idealen Gases oder eines materiell inkompressiblen Fluids beschrieben:

$$\lim_{C_{0S}^F \rightarrow 0} \kappa^F = \kappa^G = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \lim_{C_{0S}^F \rightarrow \infty} \kappa^F = \kappa^L = 0. \quad (3.24)$$

Wird das Verhältnis der Partialdichten der Phasen φ^L und φ^G durch C^F in Abhängigkeit der Sättigung s^L des Liquids formuliert,

$$C^F = C^F(s^L) = \frac{n^L \rho^{LR}}{n^G \rho^{GR}} = \frac{s^L \rho^{LR}}{(1 - s^L) \rho^{GR}}, \quad (3.25)$$

läßt sich damit die Sättigungs-Kompressibilitäts-Relation

$$s^L(\kappa^F) = 1 - \kappa^F p \tag{3.26}$$

der Mischphase bei konstantem Druck p angeben. Dies ermöglicht den Vergleich des vorgestellten Modells mit einem Modell von Fredlund und Rahardjo [60].

Die Abbildungen 3.3 und 3.4 zeigen die Sättigungs-Kompressibilitäts-Relation der beiden Modelle für Vielfache des atmosphärischen Luftdrucks p_0 , wobei sich eine sehr gute Übereinstimmung feststellen läßt.

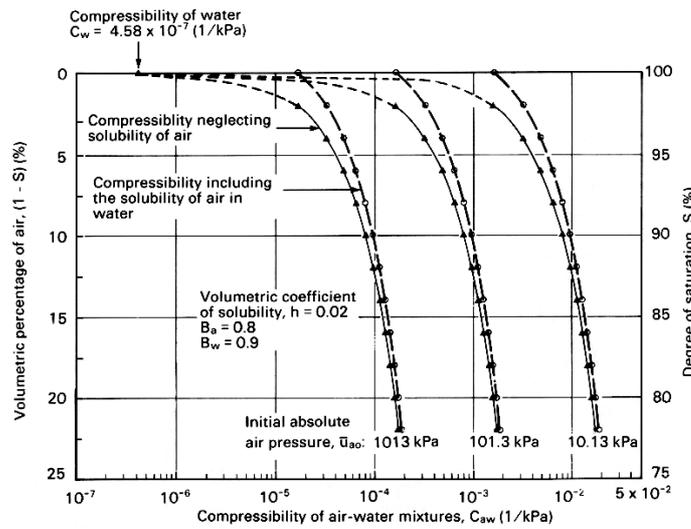


Abb. 3.3: Sättigungs-Kompressibilitäts-Relation (Fredlund und Rahardjo [60])

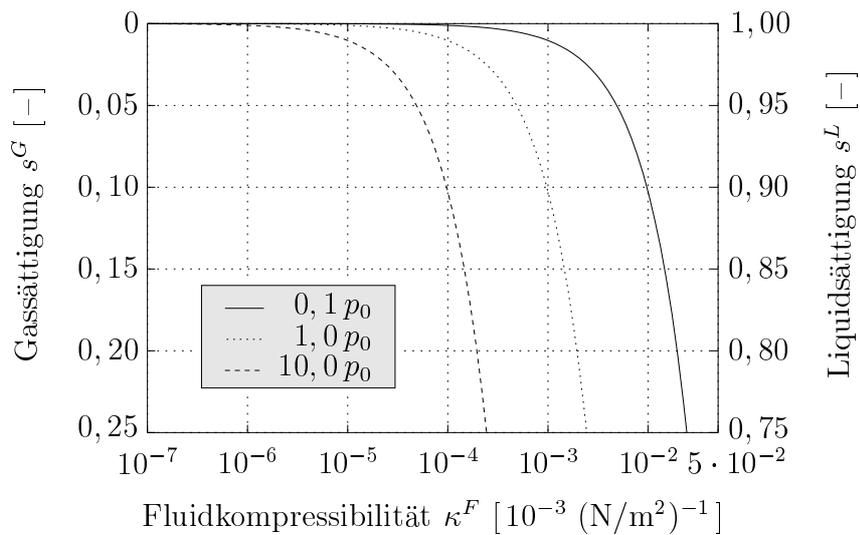


Abb. 3.4: Sättigungs-Kompressibilitäts-Relation für die Mischphase

3.3 Filtergesetz nach Darcy

Zur Beschreibung der Strömung eines beliebigen Porenfluids φ^β im porösen Festkörperskelett wird das *Darcysche* Filtergesetz [21] verwendet:

$$n^\beta \mathbf{w}_\beta = k_0^\beta \mathbf{i} \quad \text{mit} \quad \mathbf{i} = -\frac{1}{\gamma^{\beta R}} (\text{grad } p^{\beta R} - \rho^{\beta R} \mathbf{b}) . \quad (3.27)$$

Dieses Gesetz ergibt sich durch Einsetzen der Konstitutivgleichung für die Impulsproduktion $\hat{\mathbf{p}}^\beta$ in die Impulsbilanz der Phase φ^β . Hierbei ist $n^\beta \mathbf{w}_\beta$ die Filtergeschwindigkeit eines Fluids durch ein poröses Medium und der Ausdruck $\mathbf{i} = -1/\gamma^{\beta R} (\text{grad } p^{\beta R} - \rho^{\beta R} \mathbf{b})$ der dimensionslose hydraulische Gradient, von dem das Gesetz linear abhängt.

k_0^β (Dimension L/T) ist der *Darcysche* Permeabilitätskoeffizient, der ursprünglich nur für wassergesättigte Böden eingeführt wurde, d. h. die Fluidphase besteht ausschließlich aus Wasser ($\varphi^F = \varphi^L$, $s^L = 1$). Außerdem wurden von *Darcy* die Einflüsse einer Deformation oder Schichtung des Bodens auf die Permeabilität nicht berücksichtigt. Daher ist es erforderlich, das *Darcy*-Gesetz sowohl für andere Fluide als auch für ungesättigte Bedingungen und für Bodendeformationen zu adaptieren (Richwien et al. [91]). Dies wird hier über eine Anpassung des Permeabilitätskoeffizienten k_0^β erreicht.

3.3.1 Permeabilität des Festkörperskeletts für verschiedene Porenfluide

Der Permeabilitätskoeffizient läßt sich in Abhängigkeit des intrinsischen bzw. geometrischen Permeabilitätsparameters K_{0S}^S (Dimension L^2) des Festkörperskeletts, der Scherviskosität $\mu^{\beta R}$ (Dimension $F T/L^2$) und der Wichte $\gamma^{\beta R}$ (Dimension F/L^3) des Porenfluids darstellen (Bear [3], Terzaghi und Jelinek [102]):

$$k_0^\beta = \frac{\gamma^{\beta R}}{\mu^{\beta R}} K_{0S}^S \quad \Leftrightarrow \quad K_{0S}^S = \frac{\mu^{\beta R}}{\gamma^{\beta R}} k_0^\beta . \quad (3.28)$$

Im Sinne einer makroskopischen Betrachtungsweise folgt aus (3.28), daß der Permeabilitätskoeffizient sowohl Informationen über die Geometrie des Porenraums als auch über die Viskosität des Porenfluids beinhaltet, die in Abhängigkeit von Festkörperskelett und Porenfluid getrennt voneinander beschrieben werden können.

Der Permeabilitätskoeffizient k_0^β für ein vollständig mit der Fluidphase φ^β gesättigtes poröses Material wird i. d. R. aus einem Durchlässigkeitsversuch (DIN 18 130, Teil 1) bestimmt und kann Tabellenwerken (z. B. Smolczyk (Hrsg.) [97]) entnommen werden. Liegt ein bestimmter Permeabilitätskoeffizient vor, so läßt sich über den Zusammenhang (3.28)₂ die intrinsische Permeabilität des Festkörperskeletts berechnen. Wiederum mit Hilfe von (3.28)₁ lassen sich dann Permeabilitätskoeffizienten für beliebige Fluide bestimmen. Voraussetzung hierfür ist die Kenntnis von Wichte und Scherviskosität dieser Fluide.

Beispielhaft wurde für die Fluide Wasser, Luft und Öl aufgrund bekannter effektiver Fluidwichten γ^{FR} und Scherviskositäten μ^{FR} makroskopische Permeabilitätskonstanten k_0^F bestimmt (Tab. 3.3). Dabei wurde eine intrinsische Permeabilität $K_{0S}^S = 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$

vorausgesetzt. Die Werte aus Tab. 3.3, Zeilen 2 und 3, gelten für Normalbedingungen (20 °C) und können z. B. Beitz und Küttner (Hrsg.) [4] entnommen werden.

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Effektive Fluidwichten	$\gamma^{FR, Wasser}$	10 000	N/m ³
	$\gamma^{FR, Luft}$	12	N/m ³
	$\gamma^{FR, Öl}$	9 000	N/m ³
Scherviskositäten	$\mu^{F, Wasser}$	$1\,000 \cdot 10^{-6}$	N s/m ²
	$\mu^{F, Luft}$	$18 \cdot 10^{-6}$	N s/m ²
	$\mu^{F, Öl}$	$10\,000 \cdot 10^{-6}$	N s/m ²
Permeabilitätskonstanten	$k_0^{F, Wasser}$	$20,0 \cdot 10^{-5}$	m/s
	$k_0^{F, Luft}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	m/s
	$k_0^{F, Öl}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	m/s

Tab. 3.3: Kenngrößen für verschiedene Fluide ($K_{0S}^S = 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$)

3.3.2 Relative Permeabilität

In Durchlässigkeitsversuchen wird beobachtet, daß die Strömungsgeschwindigkeit eines Fluids in einem porösen Medium bei konstantem Druckgradienten von der Porengeometrie, d. h. der aktuellen Festkörperdeformation, und dem Sättigungsgrad des Fluids abhängt. Um die *Mobilität* einer Fluidphase φ^β im Porenraum der aktuellen Konfiguration makroskopisch zu beschreiben, wird der Permeabilitätskoeffizient mit einem Faktor κ_r^β , der *relativen Permeabilität*, gewichtet (Bear [3]):

$$k_r^\beta = \kappa_r^\beta k^\beta \quad \text{mit} \quad \kappa_r^\beta \in [0, 1]. \quad (3.29)$$

Hierin ist k^β der Permeabilitätskoeffizient für den Festkörper in der aktuellen Konfiguration bei vollständiger Fluidsättigung. Der Koeffizient wurde von Eipper [56] durch

$$k^\beta = \left(\frac{1 - n^S}{1 - n_{0S}^S} \right)^\pi k_0^\beta \quad (3.30)$$

beschrieben, wobei die Deformationsabhängigkeit des Permeabilitätskoeffizienten durch den positiven Parameter π gesteuert wird. Für $\pi = 0$ löst sich diese Abhängigkeit auf und das betrachtete Material behält den *Darcy*-Koeffizienten k_0^β der Referenzkonfiguration bei. Zusätzlich kann eine durch die Festkörperdeformation induzierte anisotrope Permeabilität berücksichtigt werden (s. Eipper [56]).

Zur Berücksichtigung der Sättigung mit der jeweiligen Fluidphase werden für die relativen Permeabilitäten κ_r^L und κ_r^G einer Liquid- und einer Gasphase die folgenden Ausdrücke

verwendet:

$$\begin{aligned}\kappa_r^L(s^L, n^S) &= (s^L)^\epsilon \left[1 - \left(1 - (s^L)^{1/h} \right)^h \right]^2, \\ \kappa_r^G(s^G, n^S) &= (s^G)^\gamma \left[1 - \left(1 - s^G \right)^{1/h} \right]^{2h}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Die Beschreibung der relativen Permeabilität in Abhängigkeit von der Sättigung mit der jeweiligen Fluidphase in Form von (3.31) wurde von van Genuchten [61] vorgeschlagen. Die verwendeten Parameter ϵ und γ werden zu $\epsilon = 1/2$ und $\gamma = 1/3$ gewählt (van Genuchten [61], Helmig [67]). In Abb. 3.5 ist der Zusammenhang zwischen relativer Permeabilität und Sättigung beider Fluidphasen für $h = 0,81$ (vgl. Tab. 7.3, Zeile 4, Spalte 3) in einem Festkörperskelett mit unveränderlichem Porenraum illustriert.

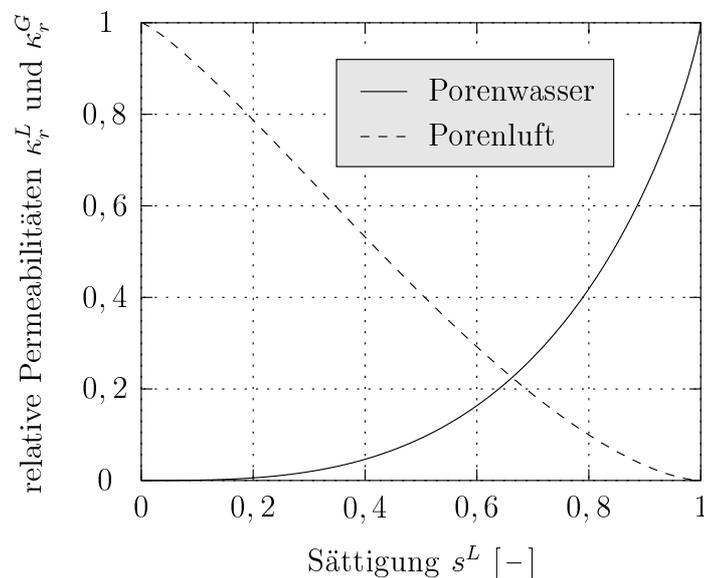


Abb. 3.5: Relative Permeabilitäts-Sättigungs-Beziehungen im starren Festkörperskelett

Die Formulierung der Abhängigkeit der Permeabilität von der Fluidsättigung s^β wird durch Experimente von Childs und Collis-Georg [20] gestützt (Abb. 3.6). Der Durchlässigkeitskoeffizient k_r^L wurde hier experimentell für zwei verschiedene Sandböden bei unterschiedlichem Wassergehalt bestimmt. Ergebnis ist eine Abnahme der Permeabilität bei reduziertem Wassergehalt. Für den Fall der Vollsättigung weisen die Böden Durchlässigkeitskoeffizienten von 0,8 und 1,5 m/s auf. Mit abnehmender Wassersättigung verringert sich die Durchlässigkeit, bis sie bei Verschwinden der Wasserphase null ist. Dieses Phänomen konnte durch den Wichtungsfaktor κ_r^L aus (3.31)₁ mit $h = 0,81$ in geeigneter Weise abgebildet werden (vgl. Abb. 3.7).

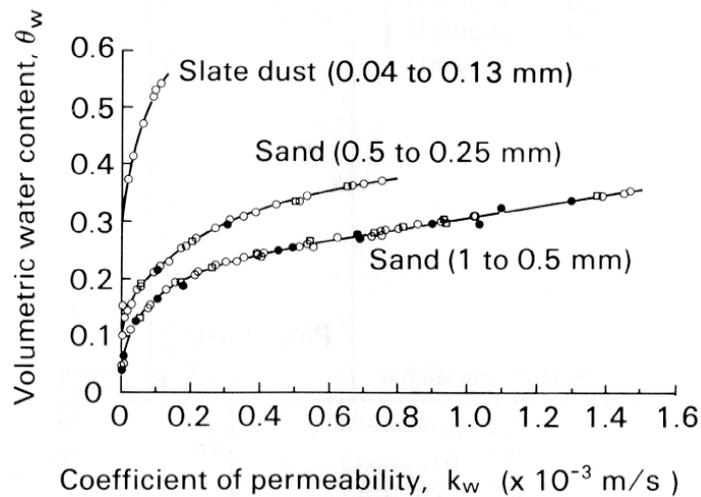


Abb. 3.6: Experimentelle Ermittlung der Durchlässigkeit (Childs und Collis-George [20])

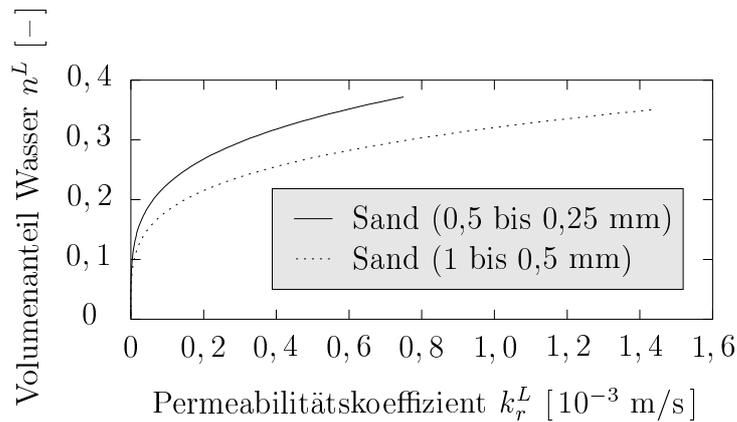


Abb. 3.7: Relative Permeabilitäts-Sättigungs-Beziehung: angepaßter *Darcy*-Koeffizient

3.4 Kapillarität

In diesem Abschnitt wird die Liquidsättigung s^L und damit auch die Gassättigung s^G im Porenraum eines teilgesättigten, porösen Mediums bestimmt. Hierzu wird der Effekt der Kapillarität, d. h. die Wechselwirkung der Fluide mit dem Festkörperskelett, modelliert (vgl. Ricken [92]). In Kapitel 7 findet sich eine Auswertung experimenteller Ergebnisse zur Kapillarität, so daß mit dieser Arbeit eine realitätsnahe Beschreibung der teilgesättigten Zone von Sandböden vorliegt.

3.4.1 Phänomenologische Beschreibung

Als Kapillarität wird das Aufsteigen einer Flüssigkeit in engen Spalten oder Röhren infolge ihrer Oberflächenspannung verstanden. Ursache hierfür ist das Kräftegleichgewicht

zwischen Adhäsion und Kohäsion der beteiligten Phasen. Die Adhäsion wird von den Molekülen der Festkörperphase ausgeübt, sie bewirkt eine Anziehungskraft auf die Moleküle der fluiden Phase. Die Fluidmoleküle werden von der im Fluid wirkenden Kohäsionskraft zurückgehalten. Ist die Kohäsion größer als die Adhäsion, liegen keine Kapillaritätseffekte vor und das Fluid wird als nichtbenetzend bezeichnet. Wenn die Adhäsion stärker ist als die Kohäsion, wird das Fluid von der Festkörperphase angezogen und haftet an ihr. In diesem Fall hat das Fluid eine benetzende Eigenschaft. Als *Kapillardruck* wird die Druckdifferenz an der Grenzfläche zwischen einem benetzenden Fluid und einem nichtbenetzenden Fluid verstanden. Bei dem hier betrachteten Dreiphasenmodell ist die Gasphase das nichtbenetzende und die Liquidphase das benetzende Fluid.

Wird eine Kapillarröhre in eine Flüssigkeit getaucht, so stellt sich der Flüssigkeitsstand in der Röhre so ein, daß sich Kapillardruck und Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule im Gleichgewicht befinden. Steigt der Kapillardruck an, wird die benetzende Phase immer stärker von der nichtbenetzenden Phase verdrängt. Daraus ergibt sich ein charakteristischer Zusammenhang zwischen Kapillardruck und Sättigung. Dieser Zusammenhang wird auch durch die Phaseneigenschaften (Oberflächenspannung, benetzbare Oberfläche, Masendichte) und die innere Geometrie des porösen Mediums (Poren-, Korngrößenverteilung) bestimmt.

Die Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung weist einen hysteretischen Verlauf auf (Abb. 3.8). Dies ist in der Hauptursache auf eine unregelmäßige Porengeometrie zurückzuführen (Busch et al. [18], Childs [19], Jaynes [69], Montenegro-Ferrigno [86]).

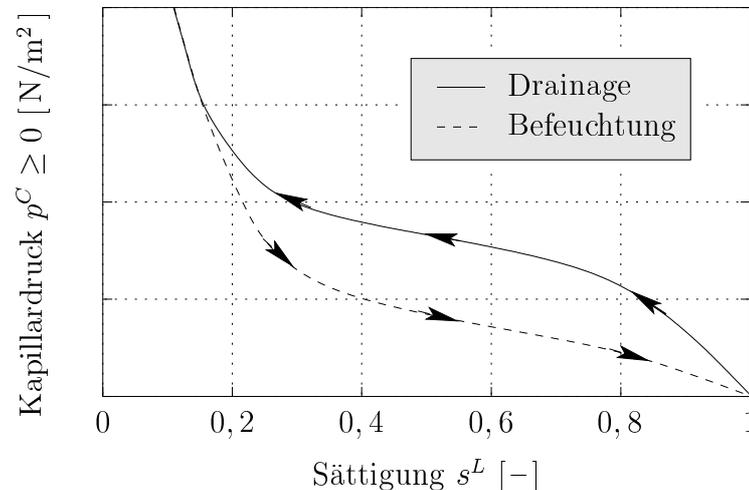


Abb. 3.8: Hysterese der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung (schematisch)

Die unregelmäßige Porengeometrie führt zum „Ink-bottle“-Effekt (Miller und Miller [85]), der mit Hilfe des *Jamin*-Rohres beschrieben wird. Beim *Jamin*-Rohr handelt es sich um ein Kapillarrohr mit unterschiedlichen Durchmessern (Abb. 3.9).

Bei steigendem Flüssigkeitsstand im Rohr verzögern die breiten Abschnitte im Rohr ein Ansteigen der Flüssigkeit. Es kann beobachtet werden, wie die Flüssigkeit an einer schmalen Stelle „verweilt“ und dann „ruckartig“ den breiten Bereich füllt. Beim Entleeren des Rohres verweilt die Flüssigkeit ebenfalls im schmalen Bereich, um dann ruckartig den

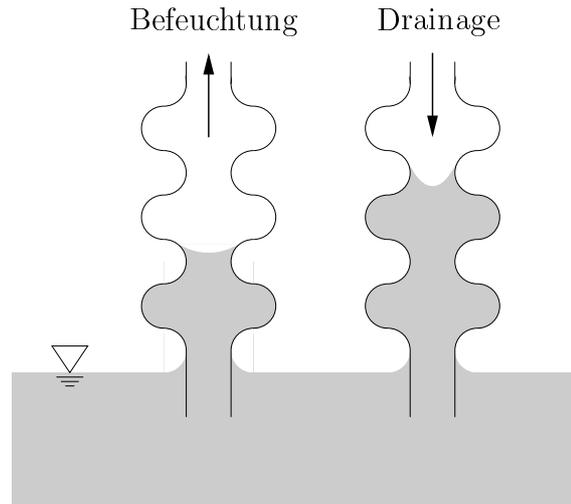


Abb. 3.9: Kapillare Steighöhen eines benetzenden Fluids im *Jamin*-Rohr (Taylor [101])

breiten Bereich zu leeren. Die kapillare Steighöhe bei der Drainage des Rohres ist daher größer als bei der Befeuchtung. Das Verhältnis der Steighöhen von Drainage- und Befeuchtungskapillarität hängt von den Größenverhältnissen der Durchmesser im *Jamin*-Rohr ab. Im porösen Medium verhält sich die Kapillarität ähnlich. Ausschlaggebend sind hier die Größenverhältnisse zwischen maximalen Porendurchmessern und Porenengstellen.

3.4.2 Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung

Im folgenden bleiben die mikroskopischen Mechanismen zwischen den Phasen unberücksichtigt, statt dessen wird eine makroskopische Betrachtungsweise zur phänomenologischen Beschreibung der physikalischen Effekte teilgesättigter, poröser Festkörper herangezogen: Die Sättigungsfunktion s^L des Porenliquids wird konstitutiv in Abhängigkeit vom Differenzdruck p^C der effektiven Fluiddrücke p^{LR} und p^{GR} , der als Kapillardruck oder Saugspannung bezeichnet wird, bestimmt (siehe z. B. Brooks und Corey [16], van Genuchten [61], Parker und Lenhard [88]):

$$s^L = s^L(p^C) \quad \text{mit} \quad p^C := p^{GR} - p^{LR} \geq 0. \quad (3.32)$$

Dieser Zusammenhang wird als Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung (p^C - s^L -Beziehung, kurz: p - s -Beziehung) eingeführt.

Im folgenden werden verschiedene, nichthysteretische Funktionen zur Abbildung der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung diskutiert.

3.4.3 Diskussion möglicher Funktionen

Um die in Versuchen gefundenen Zusammenhänge von Sättigung und Kapillardruck in ein Stoffmodell zu implementieren, müssen diese Meßwerte durch eine stetige Funktion approximiert werden. Eine Übersicht der in der Literatur vorgeschlagenen Funktionen gibt

Vogler [104], Seite 37. In Tab. 3.4 sind die im in dieser Arbeit entwickelten Stoffmodell implementierten Funktionen aufgeführt: eine einparametrische Exponentialfunktion und eine zwei- bzw. dreiparametrische Funktion, die von van Genuchten [61] verwendet wurde. Alle verwendeten Parameter müssen größer null sein.

	Funktion	Parameter
Exponentialfunktion	$s^L = e^{-k(p^C)^2}$	$k [(\text{N/m}^2)^{-2}]$
van Genuchten [61]	$s^L = [1 + (\alpha p^C)^n]^{-(1-1/n)}$	$\alpha [(\text{N/m}^2)^{-1}], n [-]$
	$s^L = [1 + (\alpha p^C)^n]^{-h}$	$\alpha [(\text{N/m}^2)^{-1}], n [-], h [-]$

Tab. 3.4: Funktionen zur Beschreibung der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung

Die Anzahl der Parameter in der Funktion nach van Genuchten kann durch die Annahme

$$h = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{mit} \quad 0 < h < 1 \quad (3.33)$$

von drei (α, n, h) auf zwei (α, n) Parameter reduziert werden.

Die Funktionen aus Tab. 3.4 stellen den gewünschten, nichtlinearen Zusammenhang zwischen Kapillardruck p^C und Sättigung s^L her. Der Definitions- bzw. Wertebereich der Funktionen liegt bei

$$p^C \in [0, \infty) \quad \text{und} \quad s^L \in (0, 1], \quad (3.34)$$

d. h. die Funktionen haben die Eigenschaft

$$s^L(p^C = 0) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{p^C \rightarrow \infty} s^L(p^C) = 0 \quad (3.35)$$

und erfüllen damit in den Grenzwerten unabhängig von den gewählten Parametern die geforderten Randbedingungen. Dies führt auf eine simple, unrestringierte Parameterbestimmung, vgl. Kapitel 7.

Da die Funktionen in den genannten Intervallen stetig sind, lassen sie sich invertieren. Dies ist für die numerische Umsetzung des Mehrphasenmodells (Abschnitt 6.2) von Bedeutung:

$$\begin{aligned} s^L = e^{-k(p^C)^2} &\Leftrightarrow p^C = \sqrt{-(\ln s^L)/k}, \\ s^L = [1 + (\alpha p^C)^n]^{-(1-1/n)} &\Leftrightarrow p^C = \frac{1}{\alpha} [(s^L)^{-1/(1-1/n)} - 1]^{1/n}, \\ s^L = [1 + (\alpha p^C)^n]^{-h} &\Leftrightarrow p^C = \frac{1}{\alpha} [(s^L)^{-1/h} - 1]^{1/n}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.4.4 Bestimmung des minimal erreichbaren Fluiddrucks

Der minimal erreichbare, negative Fluiddruck, der auf das Festkörperskelett eines porösen Materials einwirkt und dort eine sogenannte Scheinkohäsion verursacht, wird im folgenden für das Dreiphasenmodell bestimmt.

Es wird vereinfachend von der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung aus Tab. 3.4, Zeile 2 ausgegangen (Ehlers und Blome [38]). Für diese Funktion wird ein Parameter k gewählt, der ein poröses Material beschreibt, das eine kapillare Steighöhe von ca. zehn Metern aufweist, vgl. Abb. 3.10.

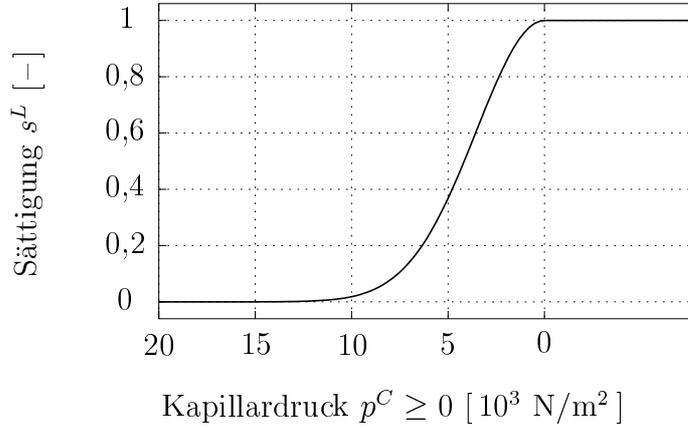


Abb. 3.10: p^C - s^L -Beziehung aus Tab. 3.4, Zeile 2 für $k = 4 \cdot 10^{-8} (\text{N/m}^2)^{-2}$

Der maximale Einfluß des Kapillardrucks auf den porösen Festkörper wird für ein Minimum des Gesamtfluidrucks $p = s^L p^{LR} + s^G p^{GR}$, vgl. (3.11), erhalten.

Umschreiben von p unter Verwendung von (3.32) und (2.45) führt auf

$$p = -s^L p^C + p^{GR}. \quad (3.37)$$

Für die gewählte Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung wird das Minimum von p erreicht für

$$p^C = |(2k)^{-1/2}|, \quad s^L = e^{-1/2} \quad \text{und} \quad p^{GR} \leq 0. \quad (3.38)$$

Der Zusammenhang zwischen Fluid-, Kapillar- und Gasdruck wird in Abb. 3.11 für den gewählten Parameter k gezeigt. Das Minimum von p wird erreicht für $p^C = 3536 \text{ N/m}^2$ und $s^L = 0,61$. Jeder vorhandene, negative Gasdruck wird sich in Abhängigkeit von der Gaspermeabilität des gegebenen Materials mit der Zeit abbauen, so daß der minimale, konstante Fluiddruck für $p^{GR} \rightarrow 0$ mit $p = -2157 \text{ N/m}^2$ erreicht wird.

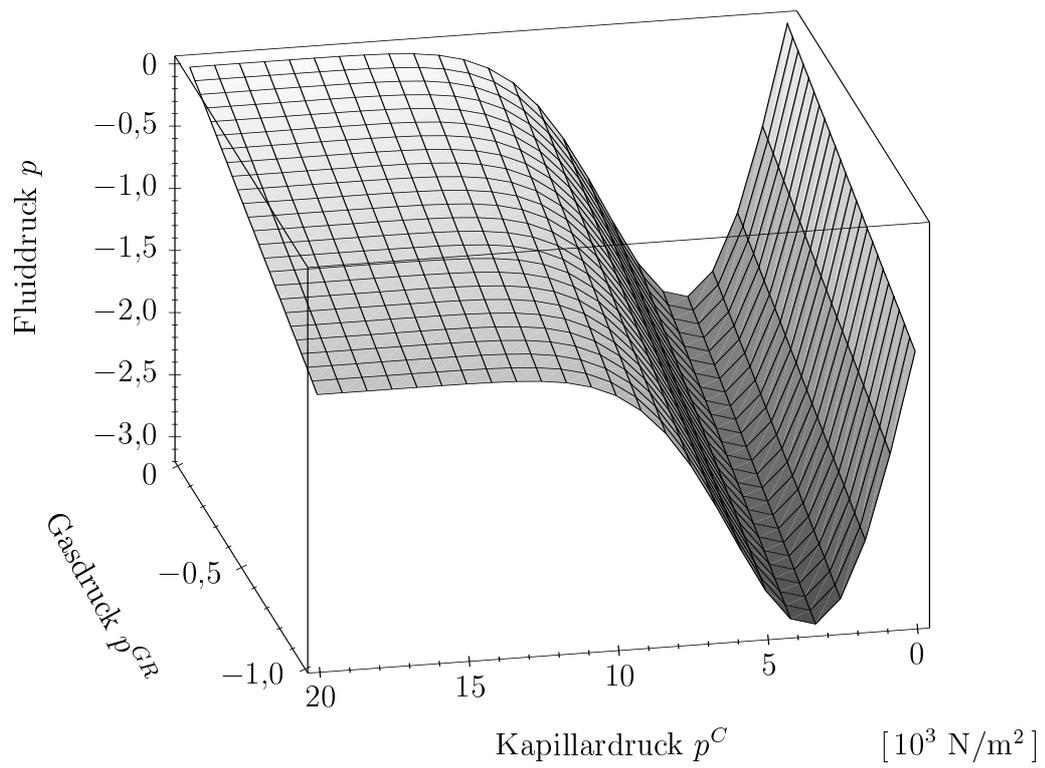


Abb. 3.11: Fluiddruck p in Abhängigkeit von Kapillardruck p^C und Gasdruck p^{GR}

4

Elastoviskoplastizität des Festkörperskeletts

Elastoviskoplastisches Materialverhalten wird bei porösen Materialien als Eigenschaft des Festkörperskeletts verstanden. Daher werden konstitutive Beziehungen zur Beschreibung von Elastoviskoplastizität in Abhängigkeit von den effektiven Spannungen des Festkörperskeletts angegeben. Die konstitutiven Beziehungen setzen sich aus einem Elastizitätsgesetz, einer Fließbedingung, einem plastischen Potential sowie einer Fließregel zusammen.

Die im folgenden dargestellten Beziehungen zielen auf die Beschreibung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens des Festkörperskeletts von bindigen und nichtbindigen Böden ab. Böden haben die Eigenschaft, keine oder nur sehr geringe Zugspannungen aufnehmen zu können, sie besitzen dilatantes Verhalten bei Scherbeanspruchung und haben die Charakteristik der Materialverfestigung mit zunehmender Belastung (Arslan [2], Biarez und Hicher [5], Groen [62], Schanz [93], Wood [107]). Diese Eigenschaften werden durch die verwendeten Materialgesetze erfaßt.

Das gewählte Modell wird auf *Berliner* Sand angewendet, für den die Ergebnisse einer Modellanpassung angegeben werden (Müllerschön [87]).

4.1 Elastisches Materialverhalten

Die Beschreibung des elastischen Materialverhaltens eines Festkörperskeletts erfolgt im einfachsten Fall unter Voraussetzung kleiner Deformationen mit dem *Hookeschen* Gesetz:

$$\boldsymbol{\sigma}_E^S = 2\mu^S \boldsymbol{\varepsilon}_{Se}^D + k^S (\boldsymbol{\varepsilon}_{Se} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} \quad \text{mit} \quad k^S = \lambda^S + \frac{2}{3}\mu^S. \quad (4.1)$$

Hierin sind μ^S und λ^S die *Laméschen* Konstanten, k^S ist der Kompressionsmodul. Der Deviator $\boldsymbol{\varepsilon}_{Se}^D = \boldsymbol{\varepsilon}_{Se} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\varepsilon}_{Se} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}$ kennzeichnet den isochoren (spurfreien) Anteil der elastischen Festkörperverzerrung.

Bei der Beschreibung des elastischen Verhaltens von Böden sind die folgenden, wesentlichen Punkte zu berücksichtigen:

- Ein Elastizitätsgesetz muß kontinuumsmechanisch konsistent sein, d. h. es muß ein zugehöriges Potential W existieren, für das gilt

$$\boldsymbol{\sigma}_E^S = \partial W / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_{Se}.$$

- Das elastische Verhalten ist abhängig vom Spannungs- bzw. Deformationszustand des Bodens. Dies wird erfaßt durch Materialparameter, die vom elastischen Verzerrungszustand abhängen und durch die plastischen Volumendehnungen ε_{vp} parametrisiert sind.

- Die Belastungsvorgeschichte soll durch Wahl der plastischen Zwischenkonfiguration als Referenzkonfiguration für das Elastizitätsgesetz erfaßt werden.
- Die maximal mögliche Volumenkontraktanz $\varepsilon_{v \min}$ soll im Elastizitätsgesetz berücksichtigt werden.

Um die genannten Anforderungen zu erfüllen, wird das Elastizitätsgesetz materiell nicht-linear formuliert, d. h. die Größen μ^S und k^S sind keine Konstanten, sondern Materialfunktionen in Abhängigkeit der elastischen Volumendehnung $\varepsilon_{ve} = \boldsymbol{\varepsilon}_{Se} \cdot \mathbf{I}$ (Ehlers und Müllerschön [50, 54]). Zusätzlich findet eine Parametrisierung durch die plastische Volumendehnung $\varepsilon_{vp} = \boldsymbol{\varepsilon}_{Sp} \cdot \mathbf{I}$ sowie die maximal mögliche Volumenkontraktanz $\varepsilon_{v \min}$ statt:

$$\mu^S(\varepsilon_{vp}) = \mu_0^S \varepsilon_{vp} \quad (4.2)$$

und

$$\begin{aligned} k^S(\varepsilon_{ve}; \varepsilon_{vp}, \varepsilon_{v \min}) &= \\ &= k_1^S + k_2^S \ln [1 + \varepsilon_{ve} (\varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} - \varepsilon_{v \min} + (\varepsilon_{vp} - \varepsilon_{v \min})^{-1})] \varepsilon_{ve}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Hierin ist die elastische Volumendehnung ε_{ve} variabel, während die plastische Volumendehnung ε_{vp} und die maximale Volumenkontraktanz $\varepsilon_{v \min}$ Parameter zur Bestimmung von $\boldsymbol{\sigma}_E^S$ sind. ε_{vp} wird für eine momentane Auswertung des Elastizitätsgesetzes als konstant angenommen, d. h. das Elastizitätsgesetz wird durch ε_{vp} parametrisiert. $\varepsilon_{v \min}$ ist eine materialbezogene Konstante.

Das Stoffgesetz besteht aus einem materiell linearen Teil

$$2 \mu_0^S \varepsilon_{vp} \boldsymbol{\varepsilon}_{Se}^D + k_1^S \varepsilon_{ve} \mathbf{I}, \quad (4.4)$$

der dem *Hookeschen* Gesetz ähnelt, und aus dem Teil

$$k_2^S \ln [1 + \varepsilon_{ve} (\varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} - \varepsilon_{v \min} + (\varepsilon_{vp} - \varepsilon_{v \min})^{-1})] (\varepsilon_{ve})^2 \mathbf{I}, \quad (4.5)$$

der die materielle Nichtlinearität des Materials bezüglich der Volumendehnung erfaßt.

Es treten die Materialkonstanten μ_0^S , k_1^S und k_2^S auf, die an das Stoffverhalten des betrachteten Bodens anzupassen sind. Ein Parametersatz für *Berliner* Sand, identifiziert anhand von experimentellen Daten aus Triaxialversuchen, wird in Abschnitt 4.3 angegeben.

4.2 Viskoplastisches Materialverhalten

Zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens von Böden werden die folgenden Elemente der Plastizitätstheorie verwendet: ein Einflächenfließkriterium, isotrope Arbeitsverfestigung, ein zusätzliches plastisches Potential und eine nichtassozierte Fließregel (Ehlers [26], Ehlers [27], Ehlers und Müllerschön [54], Müllerschön [87]).

Viskosität ist in dem vorgeschlagenen Materialmodell nur insofern von Bedeutung, als daß durch die Einführung von Viskosität eine Regularisierung bezüglich der numerischen Lösung erreicht wird.

4.2.1 Einflächenfließkriterium und isotrope Arbeitsverfestigung

Das Einflächenfließkriterium, $F = 0$, wird durch die erste Invariante I und die zweite und dritte deviatorische Invariante \mathbb{II}^D und \mathbb{III}^D von $\boldsymbol{\sigma}_E^S$ zusammen mit einem Satz von sieben Materialparametern beschrieben:

$$F(\boldsymbol{\sigma}_E^S) = \sqrt{\mathbb{II}_D (1 + \gamma \mathbb{III}_D / (\mathbb{II}_D)^{3/2})^m + \frac{1}{2} \alpha I^2 + \delta^2 I^4 + \beta I + \epsilon I^2 - \kappa}. \quad (4.6)$$

Die Parameter $\{\alpha, \beta, \delta, \epsilon, \kappa\}$ beziehen sich auf die Form der Fließkurve in der hydrostatischen Ebene des Hauptspannungsraums, während die Parameter $\{\gamma, m\}$ sich auf die Deviatorebene beziehen. Zur Umsetzung der isotropen Arbeitsverfestigung lassen sich die Parameter in Abhängigkeit der plastischen Arbeit entwickeln:

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \kappa, m\} = f(W_p). \quad (4.7)$$

Eine Formulierung der Fließbedingung in *Reuß*-schen Variablen, d. h. erste Invariante I und Winkel Θ bezüglich der hydrostatischen Achse, ermöglicht ihre multiplikative Zerlegung:

$$F(I, \Theta) = \sqrt{2} [(\epsilon^2 - \delta^2) I^4 + 2\beta\epsilon I^3 + (\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha - 2\epsilon\kappa) I^2 - 2\beta\kappa I + \kappa^2]^{1/2} \times \left[1 + \frac{2}{\sqrt{27}} \gamma \sin(3\Theta) \right]^{-m/2}. \quad (4.8)$$

Der erste Multiplikator beschreibt die Fließfläche in der hydrostatischen Ebene des Hauptspannungsraums, während der zweite Multiplikator Form und Größe der Fließfläche in der deviatorischen Ebene beschreibt.

Die Fließbedingung ist in Abb. 4.1 als Fließfläche im Hauptspannungsraum geometrisch dargestellt. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind die Hauptwerte der effektiven Festkörperspannungen $\boldsymbol{\sigma}_E^S$ (Zugspannungen positiv).

4.2.2 Plastisches Potential und nichtassozierte Fließregel

Aus experimentellen Ergebnissen ist bekannt, daß der für nichtporöse metallische Stoffe übliche Ansatz einer assoziierten Fließregel für die plastische Dehnungsrate bei Reibungsmaterialien wie z. B. Böden nicht angewendet werden kann, da ein solcher Ansatz insbesondere in bezug auf die Berechnung plastischer Volumendehnung (Dilatanz und Kontraktanz) zu falschen Ergebnissen führt. Daher ist es im Rahmen der nichtassozierten Plastizität erforderlich, zusätzlich zur Fließbedingung ein plastisches Potential zur Korrektur der Dilatanz einzuführen (siehe Mahnkopf [83] und Müllerschön [87]):

$$G(\boldsymbol{\sigma}_E^S) = \sqrt{\psi_1 \mathbb{II}_D + \frac{1}{2} \alpha I^2 + \delta^2 I^4 + \psi_2 I + \epsilon I^2}, \quad (4.9)$$

Das Potential G wird aus der Fließbedingung F durch Nullsetzen der Parameter γ und κ und durch Einführung der Parameter ψ_1 und ψ_2 gebildet. Der Unterschied zwischen der Fließbedingung und dem plastischen Potential besteht darin, daß das Potential bei Darstellung in der Deviatorebene des Hauptspannungsraums über eine Kreisform verfügt,

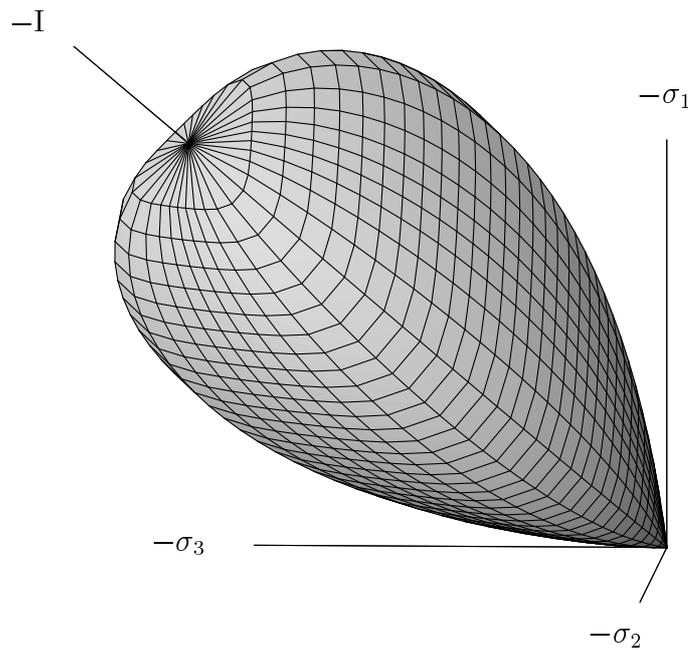
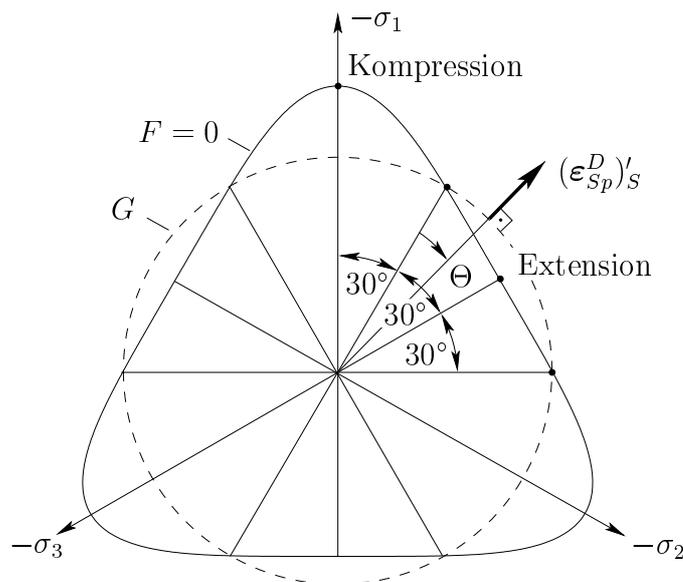


Abb. 4.1: Fließfläche im Hauptspannungsraum (Ehlers [26, 27])

Abb. 4.2: Schnitt durch die Fließfläche in der Deviatorebene ($I = \text{konst.}$)

während die Fließbedingung durch eine Dreiecksform mit abgerundeten Ecken gekennzeichnet ist (vgl. Abb. 4.2).

Die nichtassoziierte Fließregel ergibt sich aus der Differentiation des plastischen Potentials G nach den effektiven Spannungen und dem plastischen Multiplikator Λ , durch den Viskositätseffekte (Perzyna [89]) erfaßt werden:

$$(\varepsilon_{Sp})'_S = \Lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_E^S} \quad \text{mit} \quad \Lambda = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{F}{\sigma_0} \right\rangle^r. \quad (4.10)$$

Hierin sind η die Relaxationszeit, σ_0 die Ausgangsspannung und r ein Exponent. Das *Föppl*-Symbol bzw. die *Macaulay*-Klammer ist definiert durch $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$, so daß im Bereich der Elastizität mit $F < 0$ kein plastisches Fließen stattfindet.

(4.10) beschreibt die Evolution der plastischen Verzerrungen (plastische Dehnungsrate). Dabei wird die Abweichung von der assoziierten Fließrichtung in der hydrostatischen Ebene von den Parametern ψ_1 und ψ_2 gesteuert. Für $\psi_1 = 1$ und $\psi_2 = 0$ ist die Fließrichtung in der hydrostatischen Ebene assoziiert. In der Deviatorebene wird die Fließrichtung immer koaxial angenommen, d. h. sie hat die gleiche Richtung wie der herrschende deviatorische Spannungsvektor (Abb. 4.2).

Der Winkel zwischen der Fließrichtung und der Senkrechten auf die hydrostatische Achse wird durch

$$\tan \nu_p = \frac{\|(\boldsymbol{\varepsilon}_{Sp}^K)'_S\|}{\|(\boldsymbol{\varepsilon}_{Sp}^D)'_S\|} \quad \text{mit} \quad \nu_p \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (4.11)$$

beschrieben.

Darin sind ν_p der Dilatanzwinkel (Richtung des plastischen Fließens) sowie $(\boldsymbol{\varepsilon}_{Sp}^D)'_S$ und $(\boldsymbol{\varepsilon}_{Sp}^K)'_S$ Deviator und Kugeltensor von $(\boldsymbol{\varepsilon}_{Sp})'_S$. In Abb. 4.3 ist ν_p für den assoziierten über die gesamte Fließkurve angegeben. Im Fall hydrostatischen Drucks oder Zugs steht die Fließrichtung senkrecht auf den Polen der Fließfläche. Daraus folgt, daß sich der Wertebereich des Dilatanzwinkels im genannten Intervall befindet. Für negative Winkel ν_p sind die Volumendehnungen eines belasteten Körpers negativ (kontraktant), für positive Winkel positiv (dilatant). Beim Nulldurchgang des Dilatanzwinkels verschwindet der Kugelanteil der Fließrichtung, d. h. der Körper verformt sich volumenkonstant.

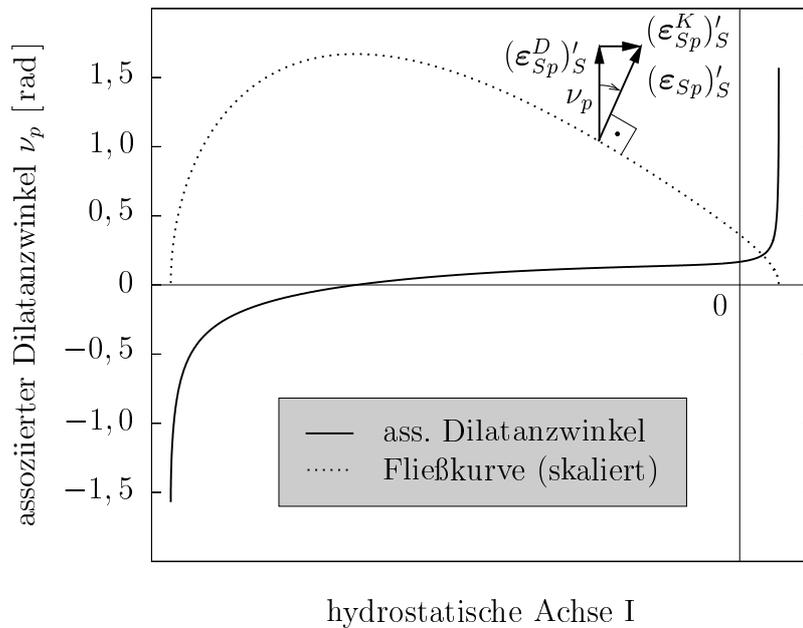


Abb. 4.3: Schnitt durch die Fließfläche in der hydrostatischen Ebene ($\Theta = 0$)

4.3 Modellanpassung für *Berliner* Sand

Für das vorliegende Materialmodell wurde eine Parameteridentifikation für *Berliner* Sand durchgeführt. Sinn dieser Modellkalibrierung ist die Simulation großmaßstäblicher Versuche der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik (*Degebo*) zur Modellverifikation. Dabei handelt es sich um Belastungsversuche an Fundamenten, die auf *Berliner* Sand gegründet sind, vgl. z. B. Elmiger und Muhs [59].

Der zur Parameteridentifikation verwendete Sand wurde am *Potsdamer* Platz ca. 16 m unter der Geländeoberfläche entnommen. Um eine Übereinstimmung mit der Kornverteilung des Versuchssands der *Degebo* zu erreichen, wurde der entnommene Sand entsprechend ausgesiebt. Er weist eine enggestufte Korngrößenverteilung (SE) und eine dichte Lagerung auf.

In Zusammenarbeit mit dem Institut für Geotechnik der TU Darmstadt wurden an diesem Sand triaxiale Elementversuche durchgeführt. Die Identifikation der für die vorgestellten Stoffgesetze erforderlichen Materialparameter wurde anhand des Datenbestands aus dem Versuchsprogramm im Rahmen einer Dissertation vorgenommen (Müllerschön [87]). Ergebnis ist ein Parametersatz für *Berliner* Sand, der in Tab. 4.1 angegeben ist.

4.3.1 Bestimmung der Materialparameter des Elastizitätsmodells

Die Materialkenngrößen μ^S und k^S wurden für das in Abschnitt 4.1 formulierte Stoffgesetz für *Berliner* Sand bestimmt. Ihre Ermittlung wurde über Dehnungsinkremente an Ent- bzw. Wiederbelastungsschleifen triaxialer Kompressionsversuche durchgeführt. Da die Verformungen in diesen Bereichen annähernd reversibel sind, wurde rein elastisches Materialverhalten vorausgesetzt.

Die Funktion μ^S wird in Abhängigkeit der plastischen Volumendehnung ε_{vp} angegeben, die durch die Belastungsgeschichte bis zu der betrachteten Entlastungsschleife entstanden ist. Die plastische Vordeformation ε_{vp} wird für den elastischen Ent- und Wiederbelastungsprozeß als konstant angenommen, d. h. μ^S wird mit ε_{vp} parametrisiert. Für einen rotationssymmetrischen Hauptspannungszustand (Triaxialversuch) ergibt sich μ^S zu

$$\mu^S(\varepsilon_{vp}) = \frac{1}{2} \frac{\Delta(\sigma_1 - \sigma_3)}{\Delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}. \quad (4.12)$$

Dabei wurde ein linearer Zusammenhang der Form

$$\mu^S(\varepsilon_{vp}) = \mu_0^S \varepsilon_{vp} \quad (4.13)$$

vorausgesetzt. Da die Steifigkeit im Rahmen der Elastizität mit zunehmender Verdichtung größer wird, sind triaxiale Kompressionsversuche bei unterschiedlichen Konsolidationsspannungen erforderlich.

Zur Bestimmung von k^S muß ein hydrostatischer Kompressionsversuch mit Entlastungsschleifen durchgeführt werden. Hier tritt an jeder Stelle einer Entlastung eine Änderung des elastischen Materialverhaltens des Sands infolge plastischer Deformation auf. Dieser

Elastizität			
Parameter	Symbol	Wert	Einheit
	μ_0^S	$-1,07 \cdot 10^8$	kN/m ²
	k_1^S	$3,86 \cdot 10^4$	kN/m ²
	k_2^S	$6,11 \cdot 10^6$	kN/m ²
	$\varepsilon_{v \min}$	-0,019	-
Plastizität			
Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Fließbedingung und Verfestigung	α	0,01	-
	β	0,26	-
	γ	1,5	-
	δ^*	0	m ² /kN
	C_δ	2,0	m ² /kN
	δ_0	$3,5 \cdot 10^{-4}$	m ² /kN
	ε^*	$1,5 \cdot 10^{-5}$	m ² /kN
	C_ε	0,25	m ² /kN
	ε_0	$1,0 \cdot 10^{-4}$	m ² /kN
	κ	1,0	kN/m ²
Plastisches Potential	ψ_1	1,8182	-
	ψ_2	0,1924	-
Bodenmechanische Kenngrößen			
Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Effektive Dichten	ρ^{SR} (ρ_S)	2 653	kg/m ³
	ρ^{FR} (ρ_w)	1 000	kg/m ³
Volumenanteile	n_{0S}^S ($1-n$)	0,644	-
	n_{0S}^F (n)	0,356	-
Effektive Fluidwichte	γ^{FR} (γ_w)	10	kN/m ³
Permeabilitätskonstante	k_0^F	$2,0 \cdot 10^{-4}$	m/s

Tab. 4.1: Zusammenfassung der Materialparameter für *Berliner Sand*
(die in Klammern stehenden Symbole entsprechen der geotechnischen Notation)

Effekt wird von der Materialfunktion k^S erfaßt, die den Verlauf der mittleren Spannung σ_m in den Ent- bzw. Wiederbelastungsschleifen über der Volumendehnung ε_{ve} beschreibt. k^S basiert auf einer Logarithmus-Funktion, die die hydrostatische Kompression an die minimale Volumendehnung $\varepsilon_{v \min}$ annähert. Damit ergibt sich σ_m aus dem Elastizitätsgesetz für den hydrostatischen Spannungszustand in Abhängigkeit von k^S :

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}_E^S \cdot \mathbf{I} = k^S(\varepsilon_{ve}; \varepsilon_{vp}, \varepsilon_{v \min}) \varepsilon_{ve} \quad (4.14)$$

mit k^S nach (4.3). Dabei ist ε_{vp} als Parameter zu verstehen, der für die momentane Auswertung des Elastizitätsgesetzes als konstant angenommen wird. Die Konstanten k_1^S und k_2^S dienen zur Anpassung des Funktionsverlaufs von σ_m an die experimentellen Daten. k_1^S entspricht der Anfangssteigung von σ_m für $\varepsilon_{ve} = 0$.

4.3.2 Bestimmung der Materialparameter des Plastizitätsmodells

Parameteridentifikation in der Deviatorebene

„Wahre“ Triaxialversuche (drei unabhängige Spannungsrichtungen) zeigen, daß die Form der Fließfläche im Bruchzustand für Sand in der Deviatorebene einem Dreieck mit abgerundeten Ecken (vgl. Abb. 4.2) entspricht (Lade und Kim [76]). Dabei entwickelt sich diese Form mit zunehmender deviatorischer Belastung aus einer Kreisform zu Beginn des plastischen Fließens.

Die Formulierung der Fließbedingung (vgl. Abschnitt 4.2.1) erlaubt eine Modellierung dieser Eigenschaften bei geeigneter Wahl von γ und m . Die Parameter wurden aus dem Verhältnis der Bruchfließradien der Fließfläche im Kompressions- und Extensionsversuch sowie einer Konvexitätsbedingung ermittelt.

Parameteridentifikation in der hydrostatischen Ebene

Zur Ermittlung der Fließkurven in der hydrostatischen Ebene wurde die Entwicklung der volumenspezifischen plastischen Arbeit

$$W_p = \int_{t_0}^t \boldsymbol{\sigma}_E^S \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_{Sp})'_S d\tau \quad (4.15)$$

für Spannungspfade triaxialer Kompressionsversuche bei unterschiedlichen Konsolidationsspannungen untersucht. Mit der Annahme, daß Punkte gleicher plastischer Arbeit auf einer Fließfläche liegen, kann für ein beliebiges Niveau der plastischen Arbeit ein Parametersatz $\Psi = \{\alpha, \beta, \delta, \epsilon, \kappa\}$ bestimmt werden. Die Entwicklung der Parameter und somit der Verfestigung wird durch eine Evolutionsgleichung beschrieben:

$$\dot{\Psi} = C_i (\Psi^* - \Psi) \dot{W}_p. \quad (4.16)$$

Dabei gelten die Randbedingungen

$$\Psi(W_p = 0) = \Psi_0 > \Psi^* \quad \text{und} \quad \Psi(W_p \rightarrow \infty) = \Psi_\infty = \Psi^*. \quad (4.17)$$

Die mit einem Stern gekennzeichneten Parameter sind Sättigungswerte für die größtmögliche Fließfläche, C_i ($i = \alpha, \dots, \kappa$) sind die die Verfestigung beschreibenden Konstanten.

Für kohäsionsloses Material, wie den vorliegenden *Berliner* Sand, gilt $\alpha = \kappa = 0$ (Diskussion in Ehlers [26, 27]). Abb. 4.4 zeigt Fließkurven für verschiedene Stufen der plastischen Arbeit, die durch eine Anpassung an die experimentellen Ergebnisse aus den Triaxialversuchen an *Berliner* Sand gewonnen wurden. Die gepunkteten Linien zeigen Spannungspfade

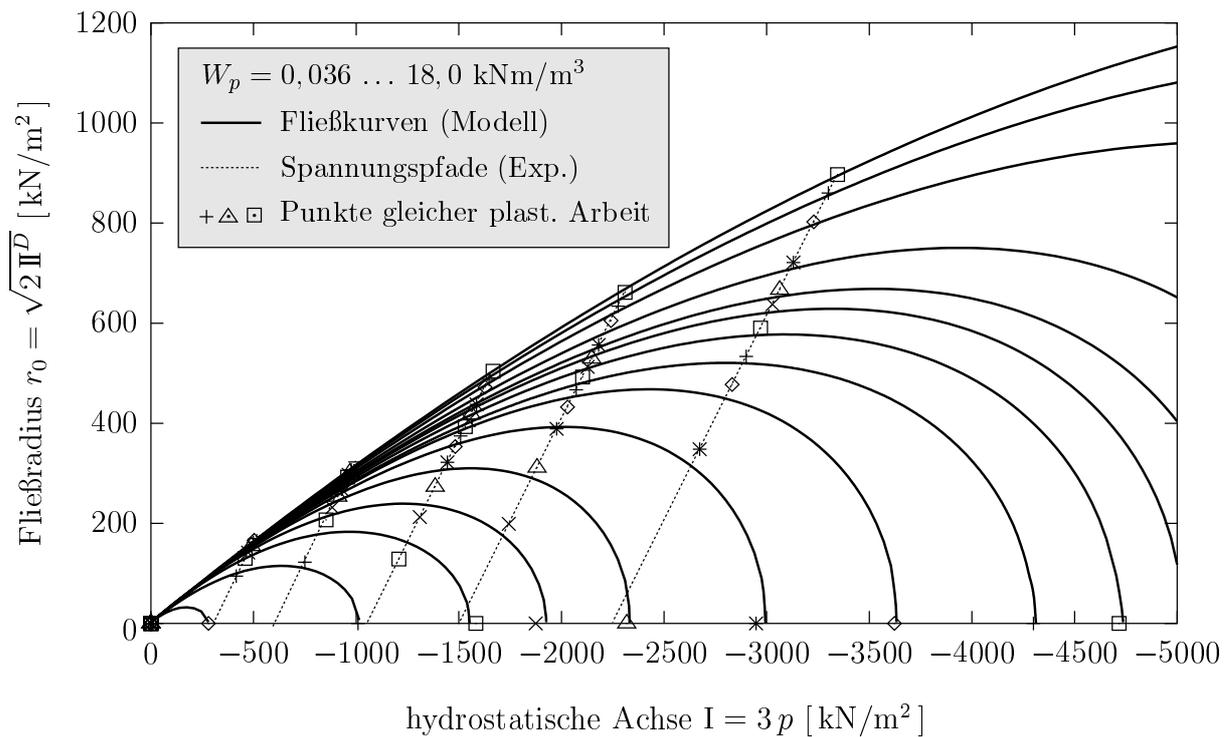


Abb. 4.4: Fließkurven gleicher plastischer Arbeit (Müllerschön [87])

triaxialer Kompressionsversuche. Auf der Abszisse ist die erste Invariante des Spannungstensors σ_E^S aufgetragen, auf der Ordinate der Fließradius r_0 .

Ein Zusammenhang mit den in der Bodenmechanik für Triaxialversuche üblichen p - q -Diagrammen ist wie folgt gegeben:

$$p = \frac{1}{3} I, \quad q = \sqrt{\frac{3}{2}} r_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{27}} \gamma\right)^{-m/2}. \quad (4.18)$$

r_0 ist der Fließradius für $\Theta = 0^\circ$ (vgl. Abb. 4.2). Da sich q auf den um 30° verschobenen Kompressionspunkt bezieht, ergibt sich die genannte Abhängigkeit von den Parametern γ und m .

Bestimmung des Dilatanzwinkels

Bei dicht gelagerten Böden wie dem vorliegenden *Berliner Sand* ist der Effekt der positiven bzw. negativen Volumendehnung (Dilatanz bzw. Kontraktanz) unter deviatorischer Belastung besonders ausgeprägt. Beeinflusst wird dieses Verhalten vom Dilatanzwinkel.

Die Anpassung des Winkels in der hydrostatischen Ebene erfolgte aufgrund der in der Geotechnik üblicherweise getroffenen Annahme, daß der Dilatanzwinkel ν_p der Hälfte des Winkels φ der inneren Reibung entspricht. Infolgedessen wurden die Parameter ψ_1 und ψ_2 so gewählt, daß die Annahme

$$\nu_p \approx \varphi/2 = 20^\circ \quad (4.19)$$

über einen möglichst großen Bereich der Fließfläche erfüllt ist.

5

Interface-Formulierung für Mehrphasenmaterialien

In diesem Kapitel wird eine Interface-Formulierung für Mehrphasenmaterialien zur Abbildung starker Diskontinuitäten, d. h. einem Sprung im Verschiebungsfeld, entwickelt. Dieser Sprung ergibt sich entlang von schubbelasteten Fundamentkörpern oder bei Versagenszuständen des Bodens, z. B. bei einem Grundbruch, in Form von einem Scherband. Da das Materialverhalten in dieser Zone durch eine Relativverschiebung zwischen Gründungs- und Bodenkörper oder zwei Bodenkörpern bestimmt ist, ist eine spezielle Interface-Formulierung erforderlich.

Ein Mantelreibungspfahl (Abb. 5.1) beispielsweise überträgt die Bauwerkslasten im wesentlichen über die Kontaktzone am Pfahlmantel in den Baugrund. Es bildet sich eine Zone mit großen Schubspannungen aus, deren Spannungs-Dehnungs-Verhalten nicht mehr vom kontinuierlich formulierten Materialgesetz des Bodens abgebildet werden kann: Es findet eine Relativverschiebung zwischen zuvor benachbarten materiellen Punkten von Pfahl und Boden statt.

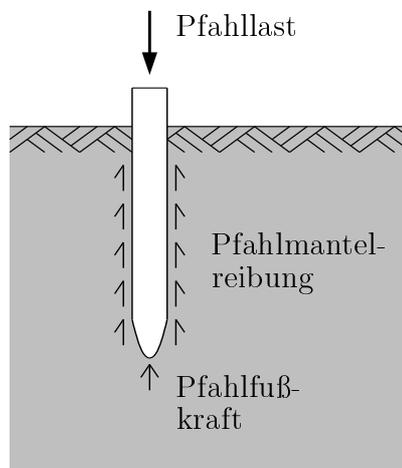


Abb. 5.1: Tragmechanismen eines Einzelpfahls

Die Abbildung des Materialverhaltens im Übergangsbereich vom Gründungskörper zum Boden lässt sich mit unterschiedlichen Techniken realisieren:

- klassische Kontaktformulierung

Die klassische Kontaktformulierung lässt eine Separation der betrachteten Körper zu. Zusätzlich wird ein Reibgesetz für den Kontaktfall formuliert, das unabhängig von den Materialgesetzen der Körper in Kontakt ist. Diese Methode wird z. B. von Wriggers und Haraldsson [109] auf die vorliegende Problemstellung angewendet.

- diskontinuierliche Formulierung

Bei der diskontinuierlichen Formulierung (Slip-Elemente) wird die Versagensfläche als bekannt vorausgesetzt. Im numerischen Modell werden in dieser Fläche Elemente mit einer speziellen Kinematik verwendet. Das Materialverhalten des Interface wird konstitutiv beschrieben, dabei wird das Materialgesetz des Bodens auf die Kontaktfläche projiziert.

- kontinuierliche Formulierung

Bei der kontinuierlichen Formulierung wird das für den Baugrund entwickelte Stoffmodell auch in der Kontaktzone angewendet, allerdings wird es hierzu mit speziellen Materialparametern versehen. Das Interface wird so im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik, d. h. volumetrisch, erfaßt.

In dieser Arbeit wird alternativ zur klassischen Kontaktformulierung sowohl die kontinuierliche als auch die diskontinuierliche Formulierung zur makroskopischen Beschreibung des Interface behandelt. Ein Vorteil dieser Wahl ist, daß das für das Festkörperskelett des Bodens entwickelte Elastoplastizitätsgesetz zur Abbildung des Materialverhaltens in der Kontaktzone verwendet werden kann. Dabei wird die Parameterbestimmung für das Interface in der kontinuierlichen Formulierung anhand von Rahmenscherversuchen zwischen Beton und Bodenmaterial durchgeführt, vgl. Kapitel 8, während im Rahmen der diskontinuierlichen Formulierung keine neue Anpassung der Parameter erforderlich ist.

Zunächst werden in Abschnitt 5.1 die Begriffe der schwachen und starken Diskontinuitäten in Mehrphasenmaterialien eingeführt. Schwache Diskontinuitäten zeigen einen entstehenden Versagenszustand an und lassen sich im Rahmen einer kontinuierlichen Formulierung durch eine Lokalisierungsanalyse bestimmen (Abschnitt 5.2), die hier auf Zweiphasenmaterialien beschränkt bleibt. Der Versagenszustand selbst wird im Rahmen einer diskontinuierlichen Formulierung abgebildet. Hierfür sind Konstitutivgesetze erforderlich, die das Materialverhalten des Interface beschreiben. Geeignete Gesetze werden in Abschnitt 5.3 vorgestellt.

5.1 Schwache und starke Diskontinuitäten

Unter einer *schwachen Diskontinuität* wird der Sprung der Ortsableitung einer kinematischen Größe verstanden. Bezogen auf die kinematische Größe bildet sich im betrachteten Körper eine singuläre Fläche n -ter Ordnung, vgl. (2.24), mit $n > 0$ aus. Beispiele für schwache Diskontinuitäten erster Ordnung einer Phase φ^α sind

$$\text{ex. } \llbracket \text{Grad}_\alpha \mathbf{x} \rrbracket, \quad \llbracket \text{Grad}_\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \rrbracket. \quad (5.1)$$

Hier existieren die Sprünge der ersten Ableitungen kinematischer Größen dieser Phase, während die Sprünge der Größen selbst verschwinden.

Schwache Diskontinuitäten werden als *vorkritisch* bezeichnet, da sich ein Versagensmodus noch nicht ausgebildet hat. Die Lokalisierungsanalyse in Abschnitt 5.2 setzt die Sprungfreiheit des Deformationsgradienten $(5.1)_1$ voraus.

Als *starke Diskontinuität* wird der Sprung der kinematischen Größe selbst verstanden. Starke Diskontinuitäten sind z. B.

$$\text{ex. } \llbracket \boldsymbol{\chi}_\alpha \rrbracket, \quad \llbracket \dot{\boldsymbol{\chi}}_\alpha \rrbracket. \quad (5.2)$$

Diese Art der Diskontinuität wird als *post-kritisch* bezeichnet, da sich ein Versagensmechanismus bereits eingestellt hat. In Abb. 5.2 ist ein vertikaler Schnitt durch den Untergrund bei einem Grundbruch dargestellt: Untergrund und Bruchscholle sind durch den Sprung im Verschiebungsfeld des Bodenmaterials deutlich voneinander getrennt. Das in Abschnitt 5.3 vorgestellte Interface ist in der Lage diesen Sprung abzubilden.

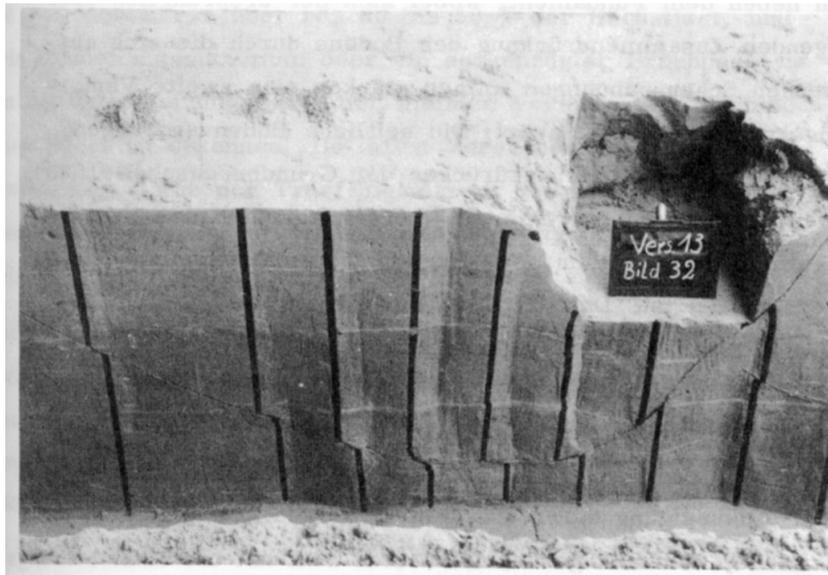


Abb. 5.2: Großmaßstäblicher Belastungsversuch der *Degebo* in Berlin (Weiß [105])

5.2 Lokalisierungsanalyse für Zweiphasenmaterialien

Es wird eine Lokalisierungsanalyse bezüglich des Gradienten der Geschwindigkeiten der Festkörper- und der Fluidphase eines Zweiphasenmaterials durchgeführt. Hierzu werden die partiellen Bilanzgleichungen der Phasen bezogen auf eine singuläre Fläche mit dem Ziel ausgewertet, Ort und Größe auftretender Diskontinuitäten zu bestimmen. Diese Art der Analyse ist für quasi-statische Problemstellungen geeignet. Wenn eine singuläre Fläche erster Ordnung bezüglich des Geschwindigkeitsfelds $\dot{\boldsymbol{\chi}}_\alpha$ einer Phase nachgewiesen werden kann, so wird davon ausgegangen, daß dies einen nachfolgenden Versagensmechanismus vorhersagt, sofern die aufgebrachten Belastungen weiter gesteigert werden.

Im Rahmen der Lokalisierungsanalyse werden die folgenden Annahmen und Einschränkungen getroffen:

- Das Zweiphasenmedium muß homogen sein und darf nur unter quasi-statischen Bedingungen belastet werden.

- Die singuläre Fläche ist materiell, d. h. sie ist an das Festkörperskelett gebunden und bewegt sich mit dessen Geschwindigkeit, vgl. (2.53):

$$\dot{\mathbf{x}}_S = \dot{\mathbf{x}}_\Gamma . \quad (5.3)$$

- Bei einem materiell kompressiblen Fluid treten nur kleine Sickergeschwindigkeiten im Verhältnis zu seiner Schallgeschwindigkeit auf.
- Es werden singuläre Flächen erster Ordnung bezogen auf die Geschwindigkeiten von Festkörper und Fluid untersucht.

Auswertung der Impulsbilanz des porösen Festkörpers

Unter der Voraussetzung (5.3) reduziert sich die Impulsbilanz des Festkörpers auf der singulären Fläche, vgl. (2.54) und (3.3), zu

$$\llbracket -n^S p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S \rrbracket \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{0} . \quad (5.4)$$

Auswertung unter Berücksichtigung sprungbehafteter Größen ergibt nach Mahnkopf [83]:

$$\left(\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}_E^S + \overset{4}{\mathbf{C}}^{\overset{23}{T}} + n_{0S}^S p (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{23}{T}} \right) (\mathbf{n}_\Gamma \otimes \mathbf{n}_\Gamma) \boldsymbol{\beta}_S - n_{0S}^S \llbracket (p)'_S \rrbracket \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{0} . \quad (5.5)$$

Hierin ist $\overset{4}{\mathbf{C}}$ die Materialtangente des Festkörperskeletts und $\boldsymbol{\tau}_E^S = \det \mathbf{F}_S \mathbf{T}_E^S$ der *Kirchhoffsche* Festkörperextraspansionstensor. Die Transposition $(\cdot)^{\overset{23}{T}}$ kennzeichnet eine Vertauschung des zweiten Basissystems mit dem dritten Basissystem. Der verwendete Fundamentaltensor $(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{23}{T}}$ ist der Identitätstensor vierter Stufe.

Als sprungbehaftete Größen bleiben in (5.5) der Amplitudenvektor $\boldsymbol{\beta}_S$ und der Sprung $\llbracket (p)'_S \rrbracket$ der zeitlichen Änderung des Porenfluidüberdrucks zu bestimmen.

Auswertung der Massen- und Impulsbilanz eines Porenfluids

Linearisierung der Massenbilanz (2.51)₁ und der Impulsbilanz (2.52) eines Fluids mit (3.2) auf einer singulären Fläche und ineinander Einsetzen der Ergebnisse ergibt den Sprung von $(p)'_S$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\beta}_S$ und \mathbf{n}_Γ :

$$\llbracket (p)'_S \rrbracket = -\frac{n^S}{n^F} \boldsymbol{\beta}_S \cdot \mathbf{n}_\Gamma \frac{p - \rho^{FR} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}_\Gamma)^2}{1 - \frac{\partial \rho^{FR}}{\partial p} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}_\Gamma)^2} . \quad (5.6)$$

Die partielle Ableitung $\partial \rho^{FR} / \partial p$ verschwindet für ein materiell inkompressibles Fluid. Für ein materiell kompressibles Fluid wurde vorausgesetzt, daß die auftretende Sickergeschwindigkeit durch die singuläre Fläche hindurch wesentlich kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit c_F des Fluids:

$$\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}_\Gamma \ll c_F := \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho^{FR}} \right|_\Theta} . \quad (5.7)$$

Damit strebt die Machzahl $M_F = \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}_\Gamma / c_F$ im Nenner von (5.6) gegen null und der Ausdruck für $\llbracket (p)'_S \rrbracket$ ist für materiell kompressible wie inkompressible Fluide identisch. Für eine Gasphase, die dem idealen Gasgesetz folgt, beträgt die Schallgeschwindigkeit

$$c_G = \sqrt{\bar{R}^G \Theta}, \quad (5.8)$$

während sich die Schallgeschwindigkeit für die Mischphase aus Abschnitt ?? in Abhängigkeit des Porenfluidüberdrucks ergibt:

$$c_F(p) = \frac{\rho^{LR} \bar{R}^G \Theta + C_{0S}^F (p_0 + p)}{\rho^{LR} \sqrt{\bar{R}^G \Theta} (1 + C_{0S}^F)}. \quad (5.9)$$

Akustiktensor für ein Zweiphasenmodell

Durch Einsetzen von (5.6) in die Impulsbilanz (5.5) des Festkörperskeletts ergibt sich schließlich der Ausdruck

$$\mathbf{Q} \boldsymbol{\beta}_S = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

mit dem Akustiktensor \mathbf{Q} für eine singuläre Fläche erster Ordnung bezogen auf die Geschwindigkeiten der Konstituierenden:

$$\mathbf{Q} = \left(\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\tau}_E^S + \mathbf{C}^T + \frac{n_{0S}^S}{n^F} (p - n^S \rho^{FR} (\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}_\Gamma)^2) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^T \right) (\mathbf{n}_\Gamma \otimes \mathbf{n}_\Gamma). \quad (5.11)$$

Zu beachten ist, daß der Akustiktensor unter den getroffenen Annahmen unabhängig davon ist, ob ein materiell inkompressibles oder materiell kompressibles Fluid betrachtet wird.

Um Lokalisierungsmodi zu bestimmen, muß das Nulleigenwertproblem (5.10) gelöst werden. Dabei werden nichttriviale Lösungen nur für $\det \mathbf{Q}(\mathbf{n}_\Gamma) = 0$ erhalten. Ergebnis ist ein Vektorpaar $\{\mathbf{n}_\Gamma, \boldsymbol{\beta}_S\}$ mit dem Einheitsnormalenvektor \mathbf{n}_Γ auf die singuläre Fläche und dem Amplitudenvektor

$$\boldsymbol{\beta}_S = \llbracket \text{grad}(\mathbf{u}_S)'_S \rrbracket \mathbf{n}_\Gamma \quad (5.12)$$

der Singularität, vgl. (2.27)₂.

5.3 Konstitutivgesetze für das Interface

Es werden Konstitutivgesetze vorgestellt, die das Materialverhalten im Übergang zwischen zwei porösen Körpern beschreiben. Die Gesetze beruhen auf einer Projektion der mechanischen und fluidmechanischen Stoffgesetze des kontinuierlichen Mehrphasenkörpers in die Ebene der Diskontinuität.

Voraussetzung ist, daß zwischen den Körpern aufgrund äußerer Lasteinwirkung eine starke Diskontinuität, d. h. eine singuläre Fläche nullter Ordnung, bezogen auf die Festkörperverschiebung und den Porenfluidüberdruck besteht:

$$\text{ex. } \llbracket \mathbf{u}_S \rrbracket \quad \text{und} \quad \llbracket p^{\beta R} \rrbracket. \quad (5.13)$$

Zur Bestimmung des Festkörperspannungsvektors \mathbf{t}_Γ und des Fluidflusses \bar{q}_Γ^β über die singuläre Fläche der Diskontinuität hinweg werden Konstitutivgesetze in Abhängigkeit der Sprünge (5.13) angegeben. Die Formulierung folgt einem Vorschlag von Larsson et al. [80] für einphasige Materialien, erweitert von Steinmann et al. [98, 99] auf poröse Medien, in der das konstitutive Materialverhalten des kontinuierlichen Mehrphasenkörpers auf die singuläre Fläche Γ projiziert wird.

5.3.1 Bestimmung der Festkörperspannungen

Der Sprung der Festkörperverschiebung über Γ resultiert in einem Dehnungsfeld $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma$ innerhalb der Diskontinuität, das durch

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma = \frac{1}{\delta} \text{sym} (\llbracket \mathbf{u}_S \rrbracket \otimes \mathbf{n}_\Gamma) \quad (5.14)$$

beschrieben wird. Hierin ist $\text{sym}(\cdot)$ der symmetrische Anteil eines tensoriellen Ausdrucks und δ ein Regularisierungsparameter, der als Breite der Diskontinuität interpretiert werden kann (Larsson, Larsson et al. [78, 79]). Mit (5.14) wird die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Festkörperskeletts aus Kapitel 4 ausgewertet. Der Spannungsvektor der Mischung in der Diskontinuität ergibt sich konstitutiv zu

$$\mathbf{t}^\Gamma = (-\llbracket p \rrbracket \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_E^\Gamma) \mathbf{n}_\Gamma. \quad (5.15)$$

5.3.2 Bestimmung des Fluidflusses

Der Sprung des Porenfluidüberdrucks $\llbracket p^{\beta R} \rrbracket$ erzeugt ein Gradientenfeld

$$\mathbf{h}_\Gamma = \frac{1}{\delta} \llbracket p^{\beta R} \rrbracket \mathbf{n}_\Gamma \quad (5.16)$$

innerhalb der Diskontinuität, das linear und senkrecht zur singulären Fläche angenommen wird. Der vom Gradienten \mathbf{h}_Γ linear abhängige Massenstrom \bar{q}_Γ^β des Fluids folgt dem *Darcyschen* Filtergesetz, vgl. (3.27):

$$\bar{q}_\Gamma^\beta = n^\beta \rho^{\beta R} \mathbf{w}_\beta \cdot \mathbf{n}_\Gamma = -\rho^{\beta R} \frac{k^\beta}{\gamma^{\beta R}} (\mathbf{h}_\Gamma - \rho^{\beta R} \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n}_\Gamma. \quad (5.17)$$

6

Numerische Umsetzung

Die Lösung von Anfangs-Randwertproblemen, die durch das in dieser Arbeit entwickelte Mehrphasen-Stoffmodell beschrieben werden können, erfolgt numerisch mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM).

Hierzu wird der von Diebels und Ehlers [23] formulierte Lösungsalgorithmus für Zweiphasenmodelle materiell inkompressibler Konstituierenden auf die Behandlung von Dreiphasenmaterialien und eines „hybriden“ Zweiphasenmodells aus materiell inkompressiblem Festkörperskelett und materiell kompressiblem Porenfluid erweitert.

Zusätzlich zu der im Zweiphasenmodell für materiell inkompressible Konstituierenden zu bestimmenden Festkörperverschiebung \mathbf{u}_S und Sickergeschwindigkeit \mathbf{w}_F sind bei den erweiterten Modellen die effektive Fluidichte ρ^{FR} bzw. effektive Gasdichte ρ^{GR} und im Fall des Dreiphasenmodells eine weitere Sickergeschwindigkeit und die Sättigung s^L innerhalb des aktuellen Porenraums n^F zu bestimmen.

Die Gleichungen, die hierfür verwendet werden, sind die im Gebiet Ω eines betrachteten Mehrphasenkörpers definierten lokalen Bilanzgleichungen der Konstituierenden (Abschnitte 2.3.4 und 2.3.5). Diese sind im Fall des Dreiphasenmodells die *Volumenbilanz des Festkörperskeletts*, die *Volumen- und Impulsbilanz des Porenliquids*, die *Massen- und Impulsbilanz des Porengases* und die *Impulsbilanz der Mischung*. Die Bilanzen sind in Abhängigkeit der Primärvariablen des Modells formuliert. Das heißt, daß Anfangs-Randwertprobleme in diesen Variablen und den Variablen der Plastizität des Festkörperskeletts gelöst werden. Dabei werden quasi-statische Verhältnisse vorausgesetzt.

Bei der numerischen Behandlung wird die Kompatibilität des Dreiphasenmodells zu Zwei- und Einphasenmodellen voll erhalten. Außerdem werden Varianten des Dreiphasenmodells vorgestellt, die numerisch ohne Mehraufwand umgesetzt werden können.

Wichtiger Bestandteil des Kapitels ist die Durchführung der konsistenten Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen des Dreiphasenmodells, die die Grundlage der numerischen Behandlung ist. Abschließend wird eine geeigneten Orts- und Zeitdiskretisierung des zu behandelnden Gleichungssystems vorgestellt.

6.1 Schwache Formulierung der Bilanzgleichungen

Die zur Anwendung der Finite-Elemente-Methode erforderliche Formulierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen des Dreiphasenmodells und des hybriden Zweiphasenmodells wird im folgenden angegeben.

Dabei können die auftretenden Porendrücke $p^{\beta R}$ bzw. p und ihre Variationen $\delta p^{\beta R}$ und δp entweder als absolute Drücke oder als Druckdifferenzen zu einem konstanten Umge-

bungsdruck p_0 aufgefaßt werden, vgl. Abschnitt 3.2.

Schwache Formen der Bilanzgleichungen des Dreiphasenmodells

Die Überführung der Volumenbilanz (2.58) für das materiell inkompressible Porenliquid φ^L in eine schwache Form geschieht durch Multiplikation mit einer Testfunktion δp^{LR} , korrespondierend zum Freiheitsgrad Druck p^{LR} des Liquids. Integration über das Volumen des betrachteten Mehrphasenkörpers und Anwendung des Divergenztheorems und des *Gaußschen* Integralsatzes ergeben

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta p^{LR} \left[(n^L)'_S + n^L \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S \right] dv \\ & - \int_{\Omega} \operatorname{grad} \delta p^{LR} \cdot n^L \mathbf{w}_L dv = - \int_{\Gamma_v} \delta p^{LR} \underbrace{n^L \mathbf{w}_L \cdot \mathbf{n}}_{\bar{v}^L} da. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Hierin ist \bar{v}^L ein Volumenstrom (Dimension $L^3/(L^2 T)$) des Liquids über den äußeren *Neumann*-Rand Γ_v des betrachteten Gebiets Ω .

Analog geschieht die Überführung der Massenbilanz (2.57) für das materiell kompressible Porengas φ^G in eine schwache Form. Es wird die Testfunktion δp^{GR} verwendet, die den Freiheitsgrad Druck p^{GR} des Gases variiert. \bar{q}^G ist dann ein Massenstrom (Dimension $M/(L^2 T)$) des Gases über den äußeren *Neumann*-Rand Γ_q des betrachteten Gebiets:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta p^{GR} \left[n^G (\rho^{GR})'_S + \rho^{GR} (n^G)'_S + n^G \rho^{GR} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S \right] dv \\ & - \int_{\Omega} \operatorname{grad} \delta p^{GR} \cdot n^G \rho^{GR} \mathbf{w}_G dv = - \int_{\Gamma_q} \delta p^{GR} \underbrace{n^G \rho^{GR} \mathbf{w}_G \cdot \mathbf{n}}_{\bar{q}^G} da. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Eine schwache Form für die Impulsbilanz (2.65) der Mischung lautet

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_S \cdot (n^S \rho^{SR} + n^L \rho^{LR} + n^G \rho^{GR}) \mathbf{b} dv \\ & + \int_{\Omega} \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S \cdot [(-s^L p^{LR} - s^G p^{GR}) \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S] dv \\ & = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_S \cdot \underbrace{[(-s^L p^{LR} - s^G p^{GR}) \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S]}_{\bar{\mathbf{t}}} \mathbf{n} da. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Hierin ist $\delta \mathbf{u}_S$ die korrespondierende Testfunktion zum Freiheitsgrad Festkörperverschiebung \mathbf{u}_S und $\bar{\mathbf{t}}$ ein auf den *Neumann*-Rand Γ_t der Mischung wirkender Spannungsvektor. Werden *Dirichlet*-Randbedingungen, d. h. Verschiebungs- oder Druckvorgaben, auf den Rand Γ gebracht, verschwinden die entsprechenden Testfunktionen und damit auch die Randterme.

Schwache Formen der Bilanzgleichungen des hybriden Zweiphasenmodells

Die schwachen Formen des hybriden Zweiphasenmodells werden für die Massenbilanz (2.55) des materiell kompressiblen Fluids, getestet mit der Funktion δp , und für die Impulsbilanz (2.65) der Mischung, getestet mit der Funktion $\delta \mathbf{u}_S$, gebildet. Die Testfunktionen korrespondieren mit den Freiheitsgraden Porenfluiddruck p und Festkörperverschiebung \mathbf{u}_S .

Für die schwache Form der Massenbilanz des Fluids ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta p \left[n^F (\rho^{FR})'_S + \rho^{FR} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S \right] dv \\ & - \int_{\Omega} \operatorname{grad} \delta p \cdot n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F dv = - \int_{\Gamma_q} \delta p \underbrace{n^F \rho^{FR} \mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}}_{\bar{q}} da. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Die schwache Form der Impulsbilanz der Mischung lautet

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_S \cdot (n^S \rho^{SR} + n^F \rho^{FR}) \mathbf{b} dv \\ & + \int_{\Omega} \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S \cdot (-p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S) dv = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_S \cdot \underbrace{(-p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S) \mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{t}}} da. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Wie bei den schwachen Formen des Dreiphasenmodells ist \bar{q} ein Massenstrom des Porenfluids über den äußeren *Neumann*-Rand Γ_q des Gebiets Ω und $\bar{\mathbf{t}}$ der totale Spannungsvektor auf den Rand Γ_t der Mischung.

6.2 Modellkompatibilität

Im Sinne einer Modell- und Modellabwärtskompatibilität lassen sich mit dem aufgestellten Modell weitere, spezielle Eigenschaften von Mehrphasenmaterialien beschreiben, die zum Teil idealisierenden Charakter haben, siehe Kasten (6.6).

Das Festkörperskelett z. B. kann idealisiert als starr angenommen werden (M1), so daß hier nur die Bewegung der Porenfluide im porösen, kapillaren Festkörper betrachtet wird. Eine Auswertung der Impulsbilanz der Mischung entfällt dann.

Bei der Abwärtskompatibilität des Drei- zu einem Zweiphasenmodell (M2) wird eine der beiden Fluidphasen weggelassen. Das reduzierte Modell ist dann entweder ein Zweiphasenmodell mit materiell inkompressiblen Konstituierenden ($\varphi^F = \varphi^L$) oder ein hybrides Zweiphasenmodell mit materiell kompressibler Fluidphase ($\varphi^F = \varphi^G$). Im letztgenannten Fall ist auch der Einsatz einer fluiden Mischphase (vgl. Abschnitt 3.2.2) möglich.

Das Dreiphasenmodell selbst kann mit ausschließlich materiell kompressiblen (M3) oder materiell inkompressiblen (M4) Fluiden versehen werden. Im ersten Fall ist eine weitere Druck-Dichte-Funktion für das nun materiell kompressible Liquid einzuführen, im zweiten

Modellkompatibilität		
(M 1)	starrer poröser Festkörper	$n^F = \text{konst.}$
(M 2)	Zweiphasenmodell	$\varphi^F = \varphi^L$ bzw. $\varphi^F = \varphi^G$
(M 3)	materiell kompressible Fluidphasen	$\rho^{\beta R} = \rho^{\beta R}(p^{\beta R})$
(M 4)	materiell inkompressible Fluidphasen	$(\rho^{\beta R})'_S = 0$
(M 5)	statische Gasphase	$p^{GR} = 0$
(M 6)	geschlossene Poren	$\mathbf{w}_\beta = \mathbf{0}$
(M 7)	Einphasenmodell	$p_0 = p^{\beta R} = 0, \rho^{\beta R} = 0$

(6.6)

Fall ist die materielle Zeitableitung $(\rho^{\beta R})'_S$ aller effektiven Fluidichten gleich null und die Massenbilanz des nun materiell inkompressiblen Gases vereinfacht sich damit zur Volumenbilanz. Statt eines Massenstroms \bar{q}^G wirkt hier ein Volumenstrom $\bar{v}^G = n^G \mathbf{w}^G \cdot \mathbf{n}$ über den Rand Γ_v eines betrachteten Gebiets.

Eine statische Gasphase (M 5) wird als ideale Permeabilität des Festkörpermaterials für Gas interpretiert, so daß sich ein Porengasüberdruck nicht aufbauen kann. Diese Annahme geht auf *Reynolds* zurück. Da der Freiheitsgrad Porengasdruck hier entfällt, wird die schwache Form (6.2) der Massenbilanz für die Gasphase nicht ausgewertet.

Schließlich kann durch das Mehrphasenmodell ein Material mit geschlossenen Poren (M 6) beschrieben werden. Dies bedeutet, daß das Porenfluid „gefangen“ ist: Die Relativgeschwindigkeit des Fluids zur Geschwindigkeit des sich deformierenden Festkörpers, also die Sickergeschwindigkeit, verschwindet. Im Fall eines Zweiphasenmodells, das ein materiell inkompressibles Fluid im geschlossenen Porenraum enthält, reduziert sich die schwache Form der Volumenbilanz zu

$$\int_{\Omega} \delta p \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_S \, dv = 0, \quad (6.7)$$

d. h. der Körper verformt sich bei Volumenkonstanz, vgl. (2.49).

Durch Weglassen aller Porenhaltsstoffe läßt sich das Mehrphasenmodell in ein Einphasenmodell überführen (M 7). Das Festkörperskelett ist dann leer, wobei der leere poröse Festkörper als gesättigter poröser Körper verstanden wird, dessen Porenhalt eine vernachlässigbare thermomechanische Wirkung hat. Die schwache Form der Impulsbilanz des leeren porösen Festkörpers lautet

$$-\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_S \cdot n^S \rho^{SR} \mathbf{b} \, dv + \int_{\Omega} \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{T}_E^S \, dv = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_S \cdot \bar{\mathbf{t}} \, da. \quad (6.8)$$

Hierin ist $\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{T}_E^S \mathbf{n}$ die Oberflächenbelastung des Körpers. Diese Form ist bekannt als

Standardform des *Prinzips der virtuellen Arbeit*.

6.3 Modellvarianten des Dreiphasenmodells

Beim Dreiphasenmodell ergeben sich durch Ausnutzung der Modellkompatibilitäten (M 1) und (M 5) aus Abschnitt 6.2 verschiedene Modellvarianten, die unterschiedliche Freiheitsgrade aufweisen und für die daher unterschiedliche Kombinationen der schwachen Formen der Bilanzgleichungen verwendet werden (vgl. Tab. 6.1).

Variante	Modelle	Festkörperskelett	Gasphase	Freiheitsgrade
I	–	deformierbar	unabhängig	$\mathbf{u}_S, p^{LR}, p^{GR}$
II	(M 5)	deformierbar	statisch	\mathbf{u}_S, p^{LR}
III	(M 1)	starr	unabhängig	p^{LR}, p^{GR}
IV	(M 1) + (M 5)	starr	statisch	p^{LR}

Tab. 6.1: Modellvarianten und verwendete Freiheitsgrade

Variante I ist das vorgestellte Dreiphasenmodell ohne jede Einschränkung. Variante II setzt eine statische Gasphase voraus, d. h. der Freiheitsgrad des Porengasdrucks entfällt. Bei den Varianten III und IV wird das Festkörperskelett als starr angenommen, so daß nur noch die Bewegungen der Porenfluide betrachtet werden.

Bei der Berechnung der numerischen Beispiele in Kapitel 9 wird von den verschiedenen Modellvarianten Gebrauch gemacht.

6.4 Lösung mit der Finite-Elemente-Methode

Zunächst wird eine konsistente, d. h. alle Gleichungen berücksichtigende, Linearisierung der schwachen Formen der Bilanzgleichungen bezüglich aller auftretenden Freiheitsgrade durchgeführt. Die Vorgehensweise orientiert sich an Eipper [56] und Wriggers [108].

Die linearisierten, kontinuierlichen schwachen Formen werden mit der Methode der finiten Elemente im Ort und durch ein implizites Zeitintegrationsverfahren in der Zeit diskretisiert.

6.4.1 Linearisierung der schwachen Formulierung

Zur Linearisierung werden die schwachen Formen der Bilanzgleichungen des Dreiphasenmodells aus Abschnitt 6.1 mittels der Beziehungen (2.68) so dargestellt, daß einheitlich die Funktionen für den Festkörpervolumenanteil n^S und die Liquidsättigung s^L zur Darstellung der Volumenanteile und Sättigungen verwendet werden. Außerdem wird für die

Filtergeschwindigkeiten $n^\beta \mathbf{w}_\beta$ das *Darcysche* Filtergesetz (3.27) eingesetzt. Schließlich wird noch die Abkürzung $\dot{\mathbf{x}}_S = (\mathbf{u}_S)'_S = \mathbf{v}_S$ eingeführt.

Volumenbilanz des Porenliquids

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta p^{LR} \left[(1 - n^S) (s^L)'_S + s^L \operatorname{div} \mathbf{v}_S \right] dv \\ + \int_{\Omega} \operatorname{grad} \delta p^{LR} \cdot \frac{k^L}{\gamma^{LR}} (\operatorname{grad} p^{LR} - \rho^{LR} \mathbf{b}) dv = - \int_{\Gamma_v} \delta p^{LR} \bar{v}^L da. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Massenbilanz des Porengases

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta p^{GR} \left[(1 - s^L) ((1 - n^S) (\rho^{GR})'_S + \rho^{GR} \operatorname{div} \mathbf{v}_S) - (1 - n^S) (s^L)'_S \rho^{GR} \right] dv \\ + \int_{\Omega} \operatorname{grad} \delta p^{GR} \cdot \rho^{GR} \frac{k^G}{\gamma^{GR}} (\operatorname{grad} p^{GR} - \rho^{GR} \mathbf{b}) dv = - \int_{\Gamma_q} \delta p^{GR} \bar{q}^G da. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Impulsbilanz der Mischung

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_S \cdot \left[n^S \rho^{SR} + (1 - n^S) \rho^{LR} + (1 - n^S) (1 - s^L) \rho^{GR} \right] \mathbf{b} dv \\ + \int_{\Omega} \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S \cdot \left[(-s^L p^{LR} - (1 - s^L) p^{GR}) \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S \right] dv = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_S \cdot \bar{\mathbf{t}} da. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die Linearisierung wird bezogen auf die Referenzkonfiguration durchgeführt, da dann nur die Integranden der schwachen Formen linearisiert werden müssen. Die Volumenintegrale werden durch

$$\int_{\Omega} (\cdot) dv = \int_{\Omega_0} J_S (\cdot) dV_S \quad (6.12)$$

in Integrale der Referenzkonfiguration mit festen, d.h. konstanten, Integrationsgrenzen überführt. Nach der Linearisierung werden die Integrale wieder in die Momentankonfiguration zurücktransportiert, so daß dann die linearisierte Form der schwachen Formen der Momentankonfiguration vorliegt. Bei den Randintegralen wird davon ausgegangen, daß sie deformations- bzw. druckunabhängig sind und somit als konstant angesehen werden können und damit keinen Beitrag zur Linearisierung liefern.

Zur Linearisierung werden Richtungsableitungen (*Gateaux*-Differentialle) nach folgender Vorschrift gebildet:

$$Df(\bar{\mathbf{z}}) \cdot \Delta \mathbf{z} = \frac{d}{d\epsilon} \left[f(\bar{\mathbf{z}} + \epsilon \Delta \mathbf{z}) \right]_{\epsilon=0}. \quad (6.13)$$

In (6.13) wird eine skalarwertige Funktion f in Richtung des vektoriellen Inkrements $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}$ an der Stelle $\bar{\mathbf{z}}$ differenziert. Analog geschieht die Differenzierung vektorwertiger Funktionen.

Mit Hilfe des *Gateaux*-Differentials läßt sich die linearisierte Form der Funktion f angeben:

$$\text{lin}(f)(\mathbf{z}) = f(\bar{\mathbf{z}}) + \text{D}f(\bar{\mathbf{z}}) \cdot \Delta \mathbf{z}. \quad (6.14)$$

Die Linearisierung des Dreiphasenmodells wird bezüglich der Freiheitsgrade \mathbf{u}_S , p^{LR} und p^{GR} und deren materieller Zeitableitungen \mathbf{v}_S , $(p^{LR})'_S$ und $(p^{GR})'_S$ nach der Bewegung des Festkörperskeletts durchgeführt. Die Stelle $\bar{\mathbf{z}}$ an der zum Zeitpunkt t linearisiert wird, wird nicht besonders gekennzeichnet: Alle Größen, außer den Inkrementen $\Delta(\cdot)$, sind in der linearisierten Form konstante Größen ausgewertet zum Zeitpunkt t .

Zunächst werden die Integranden der Volumenintegrale der schwachen Formen (6.10) – (6.11) in Größen der Referenzkonfiguration ausgedrückt. Hierzu wird von (6.12), (2.66) und dem Transport des Gradienten eines Skalars a bzw. Vektors \mathbf{v} ,

$$\text{grad } a = \mathbf{F}_S^{T-1} \text{Grad}_S a \quad \text{und} \quad \text{grad } \mathbf{v} = (\text{Grad}_S \mathbf{v}) \mathbf{F}_S^{-1}, \quad (6.15)$$

Gebrauch gemacht.

In Kasten (6.16) sind die Integranden aus den schwachen Formen der Volumen-, Massen- und Impulsbilanz (Indizes V1, V2, M1, M2, I1, I2) angegeben:

Integranden der schwachen Formen (6.10) – (6.11)	
$g_{V1} := \delta p^{LR} \left[(J_S - n_{0S}^S) (s^L)'_S + J_S s^L \text{Grad}_S \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{F}_S^{T-1} \right]$	
$g_{V2} := J_S \mathbf{F}_S^{T-1} \text{Grad}_S \delta p^{LR} \cdot \frac{k^L}{\rho^{LR} \ \mathbf{b}\ } (\mathbf{F}_S^{T-1} \text{Grad}_S p^{LR} - \rho^{LR} \mathbf{b})$	
$g_{M1} := \delta p^{GR} \left[(1 - s^L) ((J_S - n_{0S}^S) (\rho^{GR})'_S + J_S \rho^{GR} \text{Grad}_S \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{F}_S^{T-1}) - (J_S - n_{0S}^S) (s^L)'_S \rho^{GR} \right]$	(6.16)
$g_{M2} := J_S \mathbf{F}_S^{T-1} \text{Grad}_S \delta p^{GR} \cdot \frac{k^G}{\ \mathbf{b}\ } (\mathbf{F}_S^{T-1} \text{Grad}_S p^{GR} - \rho^{GR} \mathbf{b})$	
$g_{I1} := -\delta \mathbf{u}_S \cdot \left[n_{0S}^S \rho^{SR} + (J_S - n_{0S}^S) s^L \rho^{GR} + (J_S - n_{0S}^S) (1 - s^L) \rho^{GR} \right] \mathbf{b}$	
$g_{I2} := (\text{Grad}_S \delta \mathbf{u}_S) \mathbf{F}^{-1} \cdot \left[(-s^L p^{LR} - (1 - s^L) p^{GR}) J_S \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_E^S \right]$	

Für die zeitliche Ableitung der effektiven Porengasdichte und der Liquidsättigung gilt

$$(\rho^{GR})'_S = \frac{\partial \rho^{GR}}{\partial p^{GR}} (p^{GR})'_S \quad \text{und} \quad (s^L)'_S = \frac{\partial s^L}{\partial p^C} [(p^{GR})'_S - (p^{LR})'_S]. \quad (6.17)$$

In den folgenden Kästen (6.18) – (6.23) ist die Linearisierung der Integranden aus (6.16) angegeben. Diese werden in die entsprechenden Integrale der Referenzkonfiguration eingesetzt und über (6.12) wieder auf die Momentankonfiguration transportiert.

Linearisierung der Volumenbilanz des Porenliquids: Term g_{V1}

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}_S}(g_{V1}) \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= J_S \delta p^{LR} \left[\operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S \left((s^L)'_S + s^L \operatorname{div} \mathbf{v}_S \right) \right. \\
&\quad \left. - s^L \operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}_S \right] \\
D_{p^{LR}}(g_{V1}) \Delta p^{LR} &= -J_S \delta p^{LR} \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta p^{LR} \operatorname{div} \mathbf{v}_S \\
D_{p^{GR}}(g_{V1}) \Delta p^{GR} &= J_S \delta p^{LR} \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta p^{GR} \operatorname{div} \mathbf{v}_S \\
D_{\mathbf{v}_S}(g_{V1}) \cdot \Delta \mathbf{v}_S &= J_S \delta p^{LR} s^L \operatorname{div} \Delta \mathbf{v}_S \\
D_{(p^{LR})'_S}(g_{V1}) \Delta (p^{LR})'_S &= -J_S \delta p^{LR} (1 - n^S) \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta (p^{LR})'_S \\
D_{(p^{GR})'_S}(g_{V1}) \Delta (p^{GR})'_S &= J_S \delta p^{LR} (1 - n^S) \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta (p^{GR})'_S
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Linearisierung der Volumenbilanz des Porenliquids: Term g_{V2}

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}_S}(g_{V2}) \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= J_S \frac{k^L}{\rho^{LR} \|\mathbf{b}\|} \left[\left(1 - \frac{\partial k^L}{\partial n^S} \frac{n^S}{k^L} \right) \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S \operatorname{grad} p^{LR} \right. \\
&\quad \left. - (\operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_S + \operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S) \operatorname{grad} p^{LR} \right] \cdot \operatorname{grad} \delta p^{LR} \\
D_{p^{LR}}(g_{V2}) \Delta p^{LR} &= J_S \operatorname{grad} \delta p^{LR} \cdot \frac{1}{\rho^{LR} \|\mathbf{b}\|} \left[- \frac{\partial k^L}{\partial s^L} \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta p^{LR} \right. \\
&\quad \left. (\operatorname{grad} p^{LR} - \rho^{LR} \mathbf{b}) + k^L (\operatorname{grad} \Delta p^{LR}) \right] \\
D_{p^{GR}}(g_{V2}) \Delta p^{GR} &= J_S \operatorname{grad} \delta p^{LR} \cdot \frac{1}{\rho^{LR} \|\mathbf{b}\|} \left[\frac{\partial k^L}{\partial s^L} \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta p^{GR} \right. \\
&\quad \left. (\operatorname{grad} p^{LR} - \rho^{LR} \mathbf{b}) \right] \\
D_{\mathbf{v}_S}(g_{V2}) \cdot \Delta \mathbf{v}_S &= 0 \\
D_{(p^{LR})'_S}(g_{V2}) \Delta (p^{LR})'_S &= 0 \\
D_{(p^{GR})'_S}(g_{V2}) \Delta (p^{GR})'_S &= 0
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Linearisierung der Massenbilanz des Porengases: Term g_{M1}

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}_S}(g_{M1}) \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= J_S \delta p^{GR} \left[\operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S (1 - s^L) ((\rho^{GR})'_S + \rho^{GR} \operatorname{div} \mathbf{v}_S) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S (s^L)'_S \rho^{GR} - (1 - s^L) \rho^{GR} \operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}_S \right] \\
D_{p^{LR}}(g_{M1}) \Delta p^{LR} &= J_S \delta p^{GR} \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta p^{LR} \left[(\rho^{GR})'_S + \rho^{GR} \operatorname{div} \mathbf{v}_S - n^S (\rho^{GR})'_S \right] \\
D_{p^{GR}}(g_{M1}) \Delta p^{GR} &= J_S \delta p^{GR} \left[- \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta p^{GR} ((1 - n^S) (\rho^{GR})'_S + \rho^{GR} \operatorname{div} \mathbf{v}_S) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \rho^{GR}}{\partial p^{GR}} \Delta p^{GR} ((1 - n^S) (s^L)'_S + (s^L - 1) \operatorname{div} \mathbf{v}_S) \right] \\
D_{\mathbf{v}_S}(g_{M1}) \cdot \Delta \mathbf{v}_S &= J_S \delta p^{GR} (1 - s^L) \rho^{GR} \operatorname{div} \Delta \mathbf{v}_S \\
D_{(p^{LR})'_S}(g_{M1}) \Delta (p^{LR})'_S &= J_S \delta p^{GR} (1 - n^S) \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta (p^{LR})'_S \rho^{GR} \\
D_{(p^{GR})'_S}(g_{M1}) \Delta (p^{GR})'_S &= J_S \delta p^{GR} \left[(1 - n^S) (1 - s^L) \frac{\partial \rho^{GR}}{\partial p^{GR}} \Delta (p^{GR})'_S \right. \\
&\quad \left. - (1 - n^S) \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta (p^{GR})'_S \rho^{GR} \right]
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Linearisierung der Massenbilanz des Porengases: Term g_{M2}

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}_S}(g_{M2}) \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= J_S \frac{k^G}{\|\mathbf{b}\|} \left[\left(1 - \frac{\partial k^G}{\partial n^S} \frac{n^S}{k^G} \right) \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S \operatorname{grad} p^{GR} \right. \\
&\quad \left. - (\operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_S + \operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S) \operatorname{grad} p^{GR} \right] \cdot \operatorname{grad} \delta p^{GR} \\
D_{p^{LR}}(g_{M2}) \Delta p^{LR} &= J_S \operatorname{grad} \delta p^{GR} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{b}\|} \left(- \frac{\partial k^G}{\partial s^L} \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta p^{LR} \right) \\
&\quad (\operatorname{grad} p^{GR} - \rho^{GR} \mathbf{b}) \\
D_{p^{GR}}(g_{M2}) \Delta p^{GR} &= J_S \operatorname{grad} \delta p^{GR} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{b}\|} \left[\frac{\partial k^G}{\partial s^L} \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta p^{GR} (\operatorname{grad} p^{GR} - \rho^{GR} \mathbf{b}) \right. \\
&\quad \left. + k^G \left(\operatorname{grad} \Delta p^{GR} - \frac{\partial \rho^{GR}}{\partial p^{GR}} \Delta p^{GR} \mathbf{b} \right) \right] \\
D_{\mathbf{v}_S}(g_{M2}) \cdot \Delta \mathbf{v}_S &= 0 \\
D_{(p^{LR})'_S}(g_{M2}) \Delta (p^{LR})'_S &= 0 \\
D_{(p^{GR})'_S}(g_{M2}) \Delta (p^{GR})'_S &= 0
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Linearisierung der Impulsbilanz der Mischung: Term g_{I1}

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}_S}(g_{I1}) \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= -J_S \delta \mathbf{u}_S \cdot \operatorname{div} \Delta \mathbf{u}_S \left[s^L \rho^{LR} + (1 - s^L) \rho^{GR} \right] \mathbf{b} \\
D_{p^{LR}}(g_{I1}) \Delta p^{LR} &= -J_S \delta \mathbf{u}_S \cdot (1 - n^S) \frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta p^{LR} (-\rho^{LR} + \rho^{GR}) \mathbf{b} \\
D_{p^{GR}}(g_{I1}) \Delta p^{GR} &= -J_S \delta \mathbf{u}_S \cdot (1 - n^S) \left[\frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta p^{GR} (\rho^{LR} - \rho^{GR}) \right. \\
&\quad \left. + (1 - s^L) \frac{\partial \rho^{GR}}{\partial p^{GR}} \Delta p^{GR} \right] \mathbf{b} \\
D_{\mathbf{v}_S}(g_{I1}) \cdot \Delta \mathbf{v}_S &= 0 \\
D_{(p^{LR})'_S}(g_{I1}) \Delta (p^{LR})'_S &= 0 \\
D_{(p^{GR})'_S}(g_{I1}) \Delta (p^{GR})'_S &= 0
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Linearisierung der Impulsbilanz der Mischung: Term g_{I2}

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}_S}(g_{I2}) \cdot \Delta \mathbf{u}_S &= J_S \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S \cdot (\operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S - \operatorname{div} \delta \mathbf{u}_S \mathbf{I}) \\
&\quad \left[-s^L p^{LR} - (1 - s^L) p^{GR} \right] + \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}_S \\
&\quad \cdot \left[\mathbf{C} \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_S + \operatorname{grad}^T \Delta \mathbf{u}_S) + (\operatorname{grad} \Delta \mathbf{u}_S) \boldsymbol{\tau}_E^S \right] \\
D_{p^{LR}}(g_{I2}) \Delta p^{LR} &= J_S \operatorname{div} \delta \mathbf{u}_S \left[\frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta p^{LR} (p^{LR} - p^{GR}) - s^L \Delta p^{LR} \right] \\
D_{p^{GR}}(g_{I2}) \Delta p^{GR} &= J_S \operatorname{div} \delta \mathbf{u}_S \left[\frac{\partial s^L}{\partial p^C} \Delta p^{GR} (-p^{LR} + p^{GR}) - (1 - s^L) \Delta p^{GR} \right] \\
D_{\mathbf{v}_S}(g_{I2}) \cdot \Delta \mathbf{v}_S &= 0 \\
D_{(p^{LR})'_S}(g_{I2}) \Delta (p^{LR})'_S &= 0 \\
D_{(p^{GR})'_S}(g_{I2}) \Delta (p^{GR})'_S &= 0
\end{aligned} \tag{6.23}$$

6.4.2 Ortsdiskretisierung und Zeitintegration

Die unbekannte Filtergeschwindigkeit $n^\beta \mathbf{w}_\beta$ wird in der schwachen Form der Massen- bzw. Volumenbilanz durch das *Darcysche* Filtergesetz (vgl. Abschnitt 3.3) ersetzt. Das Problem ist dadurch in den Primärvariablen \mathbf{u}_S und p (Verschiebungs-Druck-Formulierung) bzw. \mathbf{u}_S , p^{LR} und p^{GR} (Verschiebungs-Liquiddruck-Gasdruck-Formulierung) gestellt und wird mit Hilfe der Methode der finiten Elemente gelöst.

Hierzu werden im Rahmen eines Standard-*Galerkin*-Verfahrens Test- und Feldfunktionen bei der erforderlichen Ortsdiskretisierung durch gleiche Ansatzfunktionen beschrieben. Es werden quadratische Ansatzfunktionen für die Festkörperverschiebung und lineare Ansatzfunktionen für den Porenfluiddruck verwendet, um die numerische Stabilität der Lösung sicherzustellen (Ehlers und Ellsiepen [47], Ellsiepen [58], Lewis und Schrefler [81], Zienkiewicz [110]):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_S^h(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^N Q_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_S^i(t), \\ p^{LRh}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^M R_i(\mathbf{x}) p^{LRi}(t), \\ p^{GRh}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^M R_i(\mathbf{x}) p^{GRi}(t).\end{aligned}\tag{6.24}$$

Hierin sind $(\cdot)^h$ die ortsdiskreten Größen, Q_i eine quadratische und R_i eine lineare Ansatzfunktion am Knoten i und N und M die Anzahl aller auftretenden Knoten bzw. Eckknoten. Die virtuellen Verschiebungs- und Druckfelder $\delta\mathbf{u}_S$, δp^{LR} und δp^{GR} werden auf analoge Weise diskretisiert. Geeignete Elemente, in denen quadratische Verschiebungs- und lineare Druckansätze verwendet werden, sind in Abb. 6.1 dargestellt.

Das Einsetzen der Ansatzfunktionen in die schwachen Formen führt schließlich zu einem semidiskreten System (diskret im Ort, kontinuierlich in der Zeit) für die Knoten-Freiheitsgrade \mathbf{u}_S^i , p^{LRi} und p^{GRi} der FE-Näherungslösung.

Die plastischen Entwicklungsgleichungen aus Abschnitt 4.2 werden in der bestehenden Form an den Integrationspunkten der finiten Elemente erfüllt (Mahnkopf [83], Müllerschön [87]).

Das Resultat der Ortsdiskretisierung ist ein differential-algebraisches Gleichungssystem (DAE, engl. Differential Algebraic Equation) erster Ordnung in der Zeit, bei dem die Massenmatrix \mathbf{M} aufgrund der quasi-statischen Problemstellung singulär ist:

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}) \mathbf{y}' + \mathbf{k}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}(t=0) = \mathbf{y}_0.\tag{6.25}$$

\mathbf{y} ist der Vektor der Unbekannten, also der Freiheitsgrade und der internen Variablen zur Beschreibung der Viskoplastizität, \mathbf{y}' enthält die Zeitableitungen der Unbekannten, \mathbf{k} ist der Steifigkeitsvektor und \mathbf{f} der Vektor der von außen angreifenden Kräfte.

Das Gleichungssystem wird mit einem geeigneten Zeitintegrationsverfahren, z. B. dem impliziten *Euler*-Verfahren, gelöst (vgl. Ehlers et al. [48], Ellsiepen [58], Wieners et al. [106]).

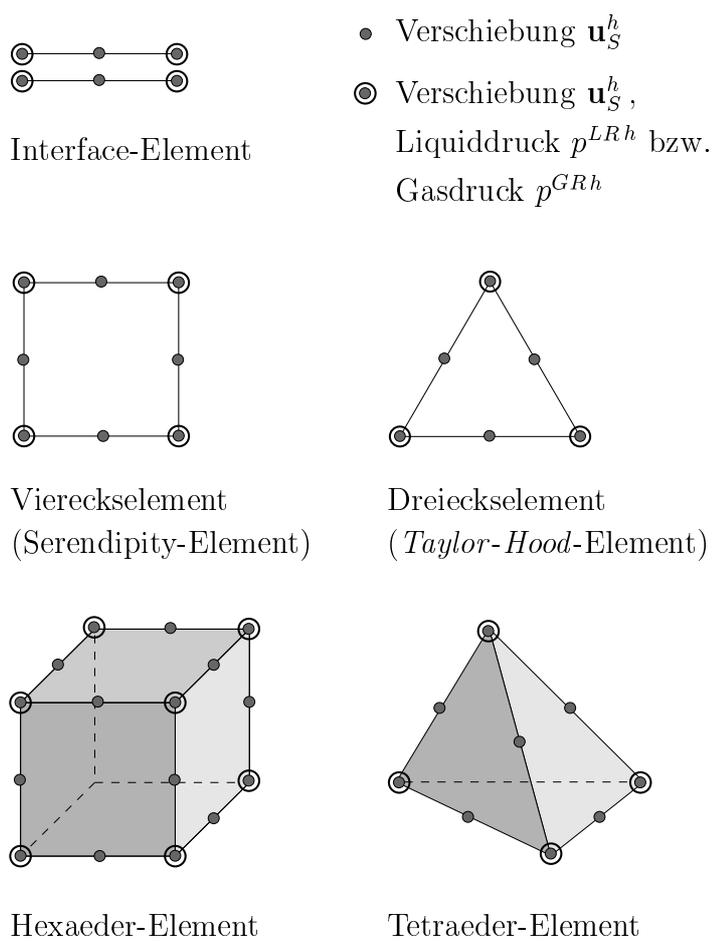


Abb. 6.1: Ansätze in finiten Elementen

Parameteridentifikation für Kapillardruck-Sättigungs-Beziehungen

In diesem Kapitel wird die Parameteridentifikation für Kapillardruck-Sättigungs-Beziehungen von *Darmstädter* Versuchssand behandelt. Im Rahmen einer vom Autor begleiteten Diplomarbeit (Stumpf [100]) wurden am Institut für Geotechnik der TU Darmstadt Drainage- und Befeuchtungsversuche mit Wasser zur Ermittlung der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehungen des Versuchssands durchgeführt. Die Versuchsergebnisse werden hier noch einmal wiedergegeben und zur Identifikation der Parameter der Funktionen aus Tab. 3.4 zur Abbildung der ermittelten Kapillardruck-Sättigungs-Beziehungen verwendet. Eine FE-Simulation der Laborversuche mit dem entwickelten Mehrphasen-Stoffmodell unter Verwendung der ermittelten Parameter schließt die Untersuchungen ab.

Zur Berechnung wurde das Finite-Elemente-Programm PANDAS¹ verwendet, das am Institut für Mechanik (Bauwesen) entwickelt wurde, siehe Ellsiepen (Hrsg.) [57]. Zu dem bereits bestehenden Programm wurden die erforderlichen Erweiterungen zur Behandlung der in dieser Arbeit vorgestellten Anfangs-Randwertprobleme als Module hinzugefügt.

7.1 Vorüberlegungen

Die verschiedenen Verläufe von Kapillardruck-Sättigungs-Beziehungen in Abhängigkeit von Drainage- und Befeuchtungsbedingungen sowie von der Sättigungsgeschichte werden z. B. von Vogler [104] dargestellt. Für die vorliegende Untersuchung sind die primäre Drainagekurve (PDC, engl. Primary Drainage Curve) und die Hauptbefeuchtungskurve (MWC, engl. Main Wetting Curve) von Interesse, da der im Experiment verwendete Boden seine erste Be- bzw. Entwässerung erfährt, vgl. Abb. 7.1.

- Primäre Drainagekurve

Die primäre Drainagekurve hat ihren Startpunkt bei einem Kapillardruck von $p^C = 0$ und einer realen Sättigung $s_{\text{real}}^L = 1$ des Liquids. Der Endpunkt der Kurve liegt bei einem theoretisch unendlich großen Kapillardruck und der residualen Sättigung s_{res}^L des Liquids.

- Hauptbefeuchtungskurve

Die Hauptbefeuchtungskurve hat ihren Startpunkt bei einem theoretisch unendlich großen Kapillardruck und der residualen Sättigung s_{res}^L des Liquids. Ihr Endpunkt befindet sich bei einem Kapillardruck von $p^C = 0$ und der maximalen Sättigung s_{max}^L des Liquids.

¹PANDAS: POrous Media Adaptive Non-Linear FE-Solver Based on Differential Algebraic Systems

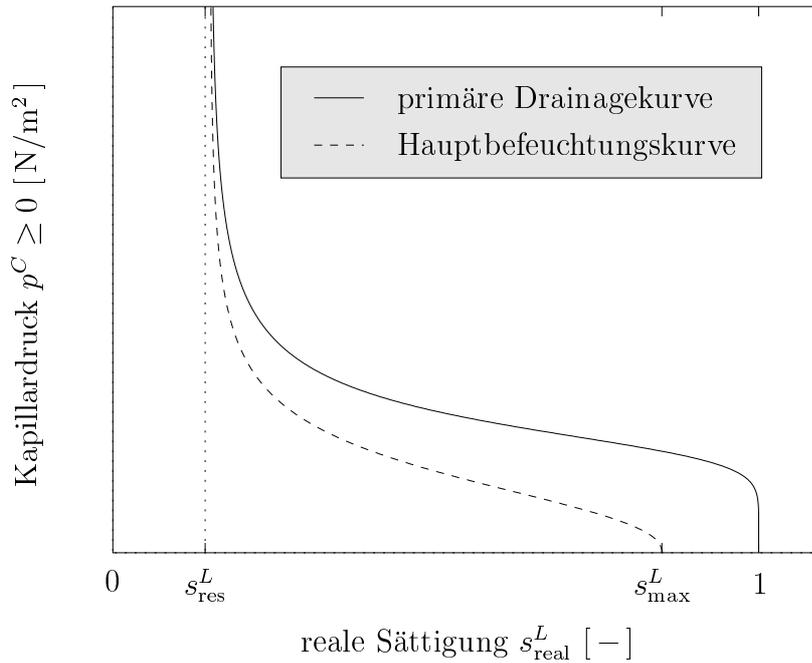


Abb. 7.1: Kapillardruck-Sättigungs-Beziehungen (schematisch)

Um die Sättigung s^L , die in den Funktionen zur Beschreibung der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung (vgl. Tab. 3.4) verwendet wird, an die aus dem Experiment gewonnene reale Sättigung s_{real}^L anzupassen, werden die Sättigungen über den linearen Zusammenhang

$$s^L = \frac{s_{\text{real}}^L - s_{\text{res}}^L}{s_{\text{max}}^L - s_{\text{res}}^L} \quad \Leftrightarrow \quad s_{\text{real}}^L = s^L (s_{\text{max}}^L - s_{\text{res}}^L) + s_{\text{res}}^L \quad (7.1)$$

umgerechnet. Die Maximalsättigung $s_{\text{max}}^L = 1 - s_{\text{res}}^G$ und die Residualsättigung $s_{\text{res}}^L = 1 - s_{\text{max}}^G$ des Liquids müssen experimentell bestimmt bzw. aufgrund experimenteller Daten sinnvoll abgeschätzt werden.

7.2 Versuchsaufbau

In der Literatur werden verschiedene Versuchsanordnungen zur Bestimmung der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung nach der Unterdruckmethode beschrieben (Haines [64], Schubert [95]). Die vorgeschlagenen Versuchsanordnungen beruhen auf dem folgenden Prinzip: Eine annähernd vollständig gesättigte Bodenprobe ($s_{\text{real}}^L \approx 1$) wird in einem Probenbehälter auf eine semipermeable Membran gesetzt und über diese einem Unterdruck ausgesetzt (Abb. 7.2).

Als semipermeable Membran wird eine poröse Keramikplatte verwendet, die aufgrund ihrer feinen Porenstruktur und des dadurch realisierbaren Kapillardrucks immer wassergesättigt und deshalb nur für die Wasserphase durchlässig ist. Über die Membran wird eine Wasserdruckänderung, die durch Anheben bzw. Absenken des Endpunkts eines angeschlossenen Schlauchs erfolgt, in der Probe erzeugt. Im Entwässerungszyklus, d. h. beim

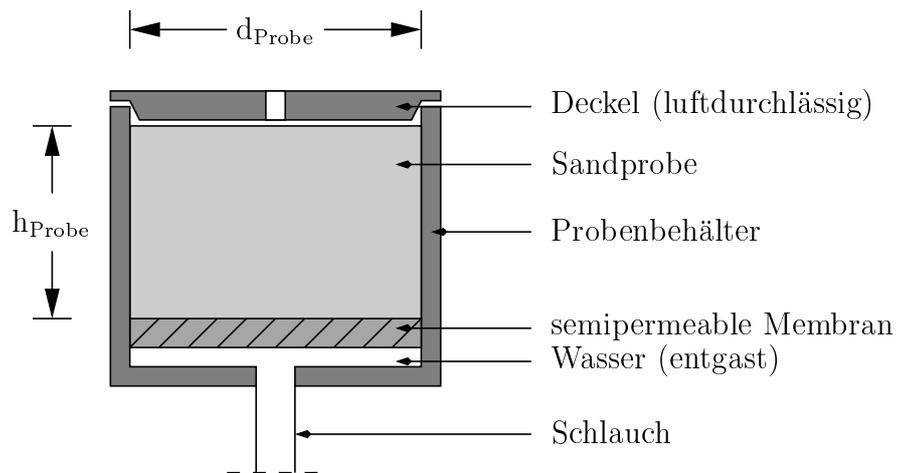


Abb. 7.2: Prinzipskizze des Probenbehälters

Absenken des Schlauchendes, fließt Wasser aus der Probe ab, bei der Bewässerung, also Anheben des Schlauchendes, fließt Wasser aus einem Standrohr in die Probe zurück.

Zunächst wird die Probe stufenweise entwässert, danach wird der Prozeß durch Reduzierung des Unterdrucks umgekehrt. Aus der aus- bzw. eingeströmten Wassermenge wird die zu jeder Druckstufe gehörende mittlere Sättigung in der Probe bestimmt. Auf diese Weise werden sukzessive Be- und Entwässerungskurve erstellt. Durch das stufenweise Einstellen der zugehörigen hydrostatischen Gleichgewichtszustände werden diskrete Wertepaare (Kapillardruck p^C , Sättigung s^L) der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung bestimmt.

Da die semipermeable Membran im Vergleich zur Probe eine sehr viel kleinere Durchlässigkeit aufweist, kann eine zeitabhängige Messung der aus- und einströmenden Wassermenge nicht erfolgen.

Für die Experimente wird ein Sand verwendet, der am Institut für Geotechnik der TU Darmstadt für Versuche vorgehalten wird. In Tab. 7.1 sind die relevanten bodenphysikalischen Kennwerte des Versuchssands und die Probenabmessungen angegeben:

Kenngröße	Symbol	Wert	Einheit
Korndichte	ρ^{SR} (ρ_S)	2,64	g/cm^3
Trockendichte	ρ^S (ρ_d)	1,62	g/cm^3
Porenanteil	n^F (n)	0,386	–
Porenvolumen	v^F	47,8	cm^3
Höhe	h_{Probe}	4,53	cm
Durchmesser	d_{Probe}	5,9	cm
Volumen	V_{Probe}	123,8	cm^3
Gewicht	M_{Probe}	200,4	g

Tab. 7.1: Bodenphysikalische Kennwerte von *Darmstädter* Sand und Probenabmessungen (die in Klammern stehenden Symbole entsprechen der geotechnischen Notation)

7.3 Versuchsergebnisse

Der im Versuch aufgebrauchte Kapillardruck p^C wird im weiteren in der Einheit Meter Wassersäule [mWS] angegeben:

$$1 \text{ mWS} = 981 \text{ N/m}^2. \quad (7.2)$$

Dies entspricht der im Versuchsablauf verwendeten Größe und läßt den unmittelbaren Schluß auf die kapillare Steighöhe im Material zu.

Die Meßwerte aus dem Ent- und (Wieder-)bewässerungszyklus sind in Tab. 7.2 dargestellt. In der jeweils linken Spalte ist der Kapillardruck in Metern Wassersäule, in den rechten Spalten die zugehörigen realen bzw. effektiven Sättigungen angegeben. Die Residualsättigung wird zur Bestimmung der effektiven Sättigungen nach (7.1) zu $s_{\text{res}}^L = 0,1$ angenommen.

Entwässerungszyklus			Bewässerungszyklus		
Kapillardruck p^C [mWS]	Sättigung s_{real}^L [-]	Sättigung s^L [-]	Kapillardruck p^C [mWS]	Sättigung s_{real}^L [-]	Sättigung s^L [-]
0	0,99	1	0	0,93	1
0,05	0,98	0,99	0,03	0,88	0,94
0,10	0,96	0,97	0,08	0,71	0,74
0,15	0,87	0,87	0,11	0,63	0,64
0,20	0,58	0,54	0,12	0,54	0,53
0,25	0,34	0,27	0,14	0,45	0,42
0,30	0,24	0,16	0,19	0,29	0,23
0,40	0,16	0,07	0,26	0,20	0,12
0,50	0,14	0,05	0,31	0,17	0,08
1,0	0,12	0,02	0,49	0,13	0,04
			1,0	0,12	0,03

Tab. 7.2: Experimentelle Daten für den Ent- und Bewässerungszyklus

Im Entwässerungszyklus wird aus drei Einzelversuchen mit gleichem Kapillardruck die mittlere ausgeströmte Wassermenge und daraus die mittlere Sättigung in der Probe bestimmt. Die Meßwerte des Bewässerungszyklus weisen im Vergleich zu denen des Entwässerungszyklus andere zugehörige Kapillardrücke auf, da sich der Wasserspiegel im Standrohr unterschiedlich einstellt. Es wurden alle Meßwerte aus drei Bewässerungsversuchen in den Datensatz aufgenommen.

7.4 Parameteridentifikation

Um die Funktionen an die vorhandenen Meßwerte anzupassen, müssen die entsprechenden Parameter (vgl. Tab. 3.4) identifiziert werden. Die Funktionen erfüllen in den Grenzwerten ihres Definitionsbereichs ($p^C = 0$ und $p^C \rightarrow \infty$) unabhängig von den gewählten Parametern die geforderten Randbedingungen ($s^L = 1$ und $s^L = 0$). Daher ist eine bezüglich der Parameter unrestringierte Identifikation möglich.

Für die Parameteridentifikation wird die *Methode der kleinsten Fehlerquadrate* (engl. Least-Squares Method) verwendet. Da die gewählten Funktionen keinen hysteretischen Verlauf der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung abbilden können, werden zwei unterschiedliche Funktionen für Ent- und Bewässerungszyklus angepaßt.

Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate stellt ein Gütekriterium für die Abweichung der Meßdaten von den Werten einer gewählten Funktion dar. Das heißt, es wird ein Fehlerfunktional bestimmt, das die Abweichung der Meßwerte von den Funktionswerten beinhaltet. Dieses Fehlerfunktional muß minimal werden:

$$R(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{r}(\mathbf{p})\|^2 \rightarrow \min . \quad (7.3)$$

In (7.3) ist \mathbf{p} der Satz der Parameter, \mathbf{r} eine Matrix, die die Differenz der Meßwerte und der von den Parametern abhängigen Funktionswerte enthält, und R ist der zu minimierende Fehler. Zur Minimierung wird ein *Newton*-Verfahren eingesetzt.

Auf Grundlage der gegebenen Daten wurden die Parameter der Funktionen aus Tab. 3.4 identifiziert. Die Resultate sind in Tab. 7.3 angegeben und in Abb. 7.3 für die dreiparametrische van Genuchten-Funktion im Vergleich zu den Meßwerten graphisch dargestellt. Hierzu wurden die angepaßten Funktionen über den Zusammenhang (7.1) auf reale Sättigungen umgerechnet. In Tab. 7.3 ist zusätzlich die Summe $R(\mathbf{p})$ der Fehlerquadrate angegeben, die umso kleiner ist, je mehr Parameter verwendet wurden.

	Exponentialfunktion	van Genuchten [61]	
Parameter Entw.	$k = 15,9008 \text{ (mWS)}^{-2}$	$\alpha = 5,07899 \text{ (mWS)}^{-1}$ $n = 5,34421$ $1 - 1/n = 0,81288$	$\alpha = 5,91205 \text{ (mWS)}^{-1}$ $n = 7,60790$ $h = 0,41578$
Fehler	$R(\mathbf{p}) = 0,03077$	$R(\mathbf{p}) = 0,00179$	$R(\mathbf{p}) = 0,00075$
Parameter Bew.	$k = 40,9812 \text{ (mWS)}^{-2}$	$\alpha = 9,55861 \text{ (mWS)}^{-1}$ $n = 3,17965$ $1 - 1/n = 0,68550$	$\alpha = 6,16042 \text{ (mWS)}^{-1}$ $n = 2,29909$ $h = 1,54682$
Fehler	$R(\mathbf{p}) = 0,00660$	$R(\mathbf{p}) = 0,00405$	$R(\mathbf{p}) = 0,00296$

Tab. 7.3: Ermittelte Parameter für den Ent- und Bewässerungszyklus

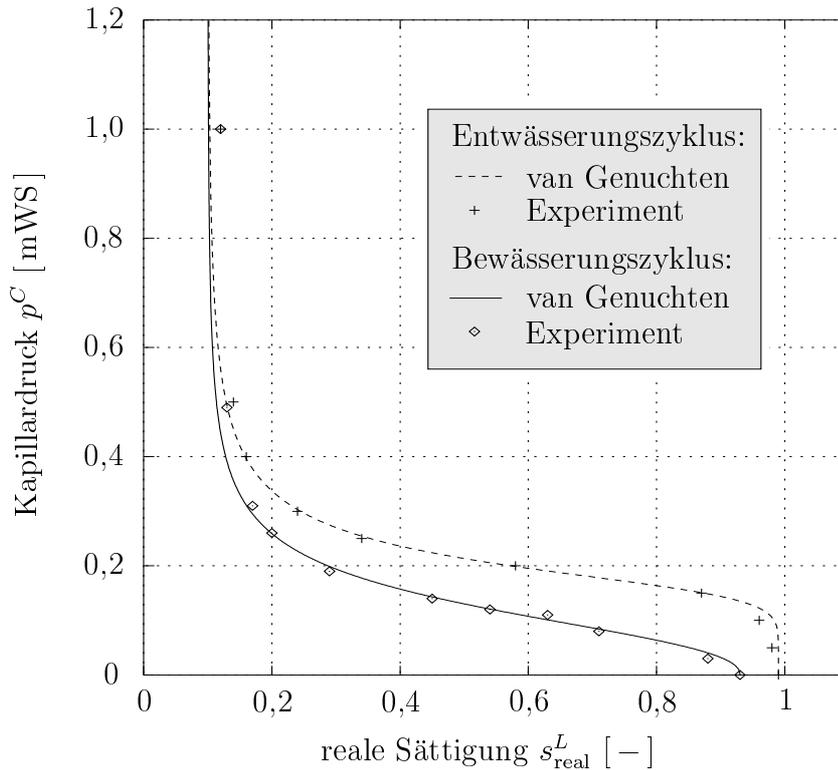


Abb. 7.3: Vergleich der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehungen: Diskrete Punkte aus den Experimenten und Funktionen nach van Genuchten

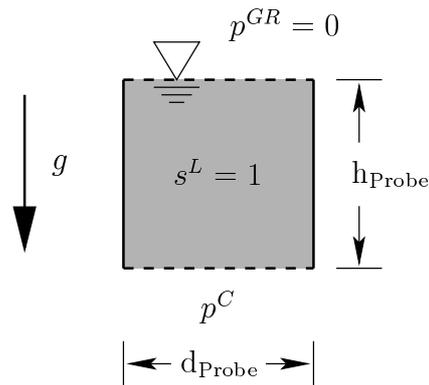
7.5 Numerische Simulation des Unterdruckversuchs

Für eine numerische Simulation des Experiments wird die Gasphase als statisch angenommen (Annahme nach *Reynolds*, vgl. Abschnitt 6.2), da davon ausgegangen werden kann, daß sich aufgrund der kleinen Probenabmessungen kein nennenswerter Gasdruck aufbauen wird. Die Probe ist am oberen Rand offen, d. h., Wasser kann nicht einströmen ($n^L \mathbf{w}_L = \mathbf{0}$). Am unteren Rand wird eine Saugspannung, d. h. negativer Wasserdruck, sprunghaft vorgegeben, vgl. Abb. 7.4. Es wird die dreiparametrische van Genuchten-Funktion mit den Parametern nach Tab. 7.3, Spalte 4, verwendet.

Die Ergebnisse der numerischen Simulation werden im folgenden Abschnitt dargestellt und mit den Ergebnissen des Experiments verglichen.

7.6 Darstellung und Diskussion der Ergebnisse

Die FE-Berechnung liefert als Ergebnis die Filtergeschwindigkeit des strömenden Wassers am unteren Rand der Probe über die Zeit. Integration über die Zeit ergibt die ein- bzw. ausgeströmte Wassermenge pro Laststufe, die zur Berechnung der mittleren Sättigung in der Probe dient. Beide Größen, Filtergeschwindigkeit und mittlere Sättigung, sind in Abb. 7.5 dargestellt: Im oberen Bild die Ergebnisse aus dem Entwässerungszyklus, im unteren Bild die Ergebnisse des sich anschließenden Bewässerungszyklus. Die auftretenden

Abb. 7.4: Randbedingungen des *Darmstädter* Laborversuchs im Anfangszustand $t = 0$

Spitzen in der Filtergeschwindigkeit resultieren aus den sprunghaften Änderungen des Kapillardrucks.

Die aus den Filtergeschwindigkeiten durch Integration über die Zeit bestimmten aus- bzw. eingeströmten Wassermengen sind in Tab. 7.4 zusammen mit den experimentell ermittelten Wassermengen angegeben.

Entwässerungszyklus			Bewässerungszyklus		
Kapillardruck p^C [mWS]	Wassermenge		Kapillardruck p^C [mWS]	Wassermenge	
	V_{Exp} [ml]	V_{FEM} [ml]		V_{Exp} [ml]	V_{FEM} [ml]
0	0	0	0	2,4	1,20
0,05	0,5	0,02	0,03	8,2	8,30
0,10	0,9	0,22	0,08	3,8	6,86
0,15	4,3	5,41	0,11	4,3	2,19
0,20	13,9	14,67	0,12	4,3	3,99
0,25	11,4	10,64	0,14	7,6	7,30
0,30	4,8	5,23	0,19	4,3	5,30
0,40	3,9	3,90	0,26	1,5	2,53
0,50	0,9	1,13	0,31	1,9	1,94
1,0	1,0	0,57	0,49	0,5	0,13
			1,0	0	0
	Σ 41,6	Σ 41,8		Σ 38,8	Σ 39,7

Tab. 7.4: Resultierende aus- und eingeströmte Wassermengen aus Experiment und numerischer Simulation

In Abb. 7.6 sind die Daten aus Tab. 7.4 noch einmal vergleichend aufgetragen.

Schließlich wird die mittlere Sättigung in der Probe über den zugehörigen Kapillardruck

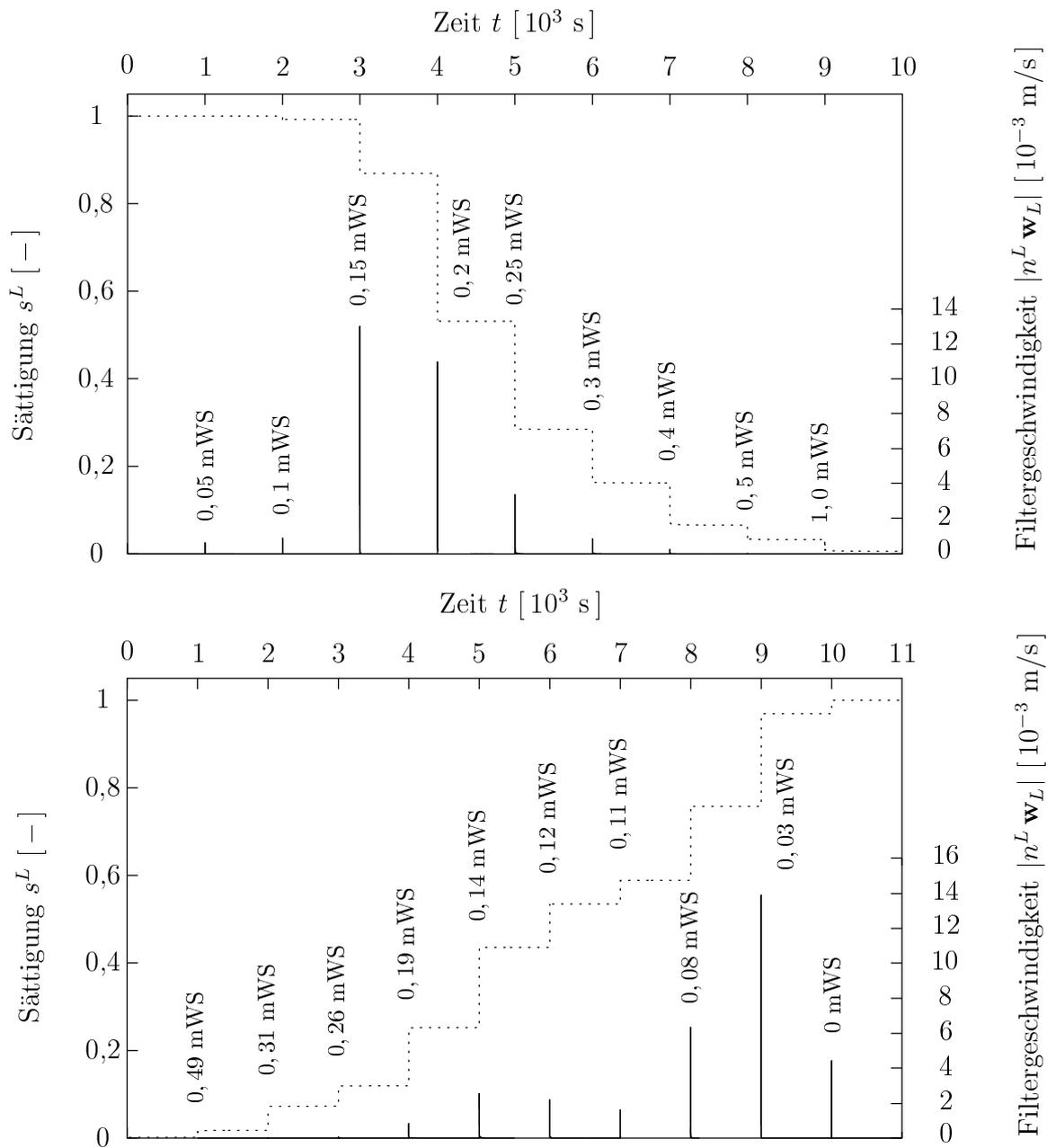


Abb. 7.5: Gemittelte Sättigung s^L in der Probe und Filtergeschwindigkeit $|n^L \mathbf{w}_L|$ am unteren Ende der Probe im Verlauf des Ent- und Bewässerungszyklus

aufgetragen und mit den zugrunde gelegten Funktionen nach van Genuchten verglichen (Abb. 7.7).

Das vorliegende Ergebnis der numerischen Simulation entspricht den gemessenen Daten in hohem Maß. Abweichungen des Modells von den Meßdaten müssen auf den unvermeidbaren Fehler bei der Parameterbestimmung, aber auch auf unzulängliche Modellannahmen, wie z. B. der gewählten relativen Permeabilität, zurückgeführt werden.

Da die verwendete Funktion nach van Genuchten nur in der Lage ist, einen Ast der

p^C - s^L -Beziehung abzubilden, mußte für jeden Ast eine eigene Funktion angepaßt werden. Dies schränkt die Brauchbarkeit der Funktion in bezug auf ihre Verwendung für allgemeine Anfangs-Randwertprobleme stark ein. Erforderlich ist eine Implementierung der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung, die ihr hysteretisches Verhalten im Übergang zwischen Be- und Entwässerung erfaßt. Hierzu ist eine Formulierung notwendig, die die Sättigung als Geschichtsvariable berücksichtigt.

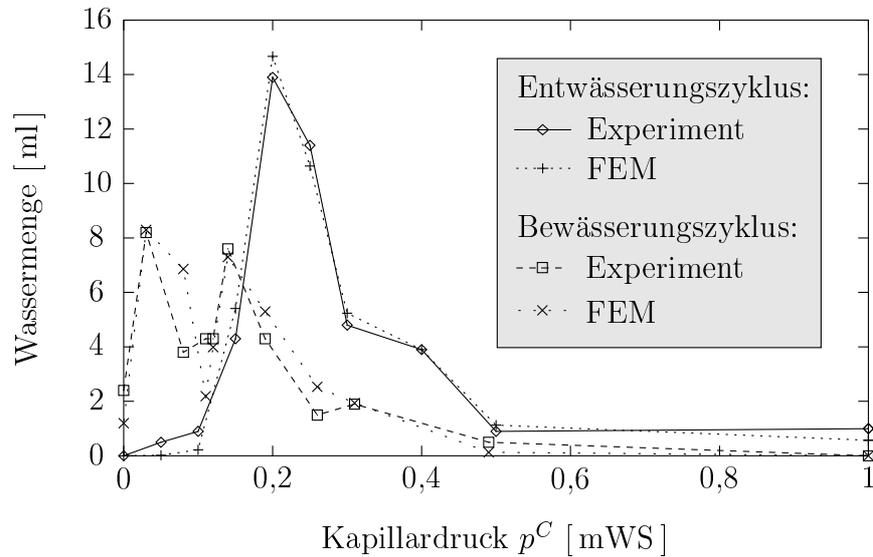


Abb. 7.6: Vergleich der aus- und eingeströmten Wassermengen

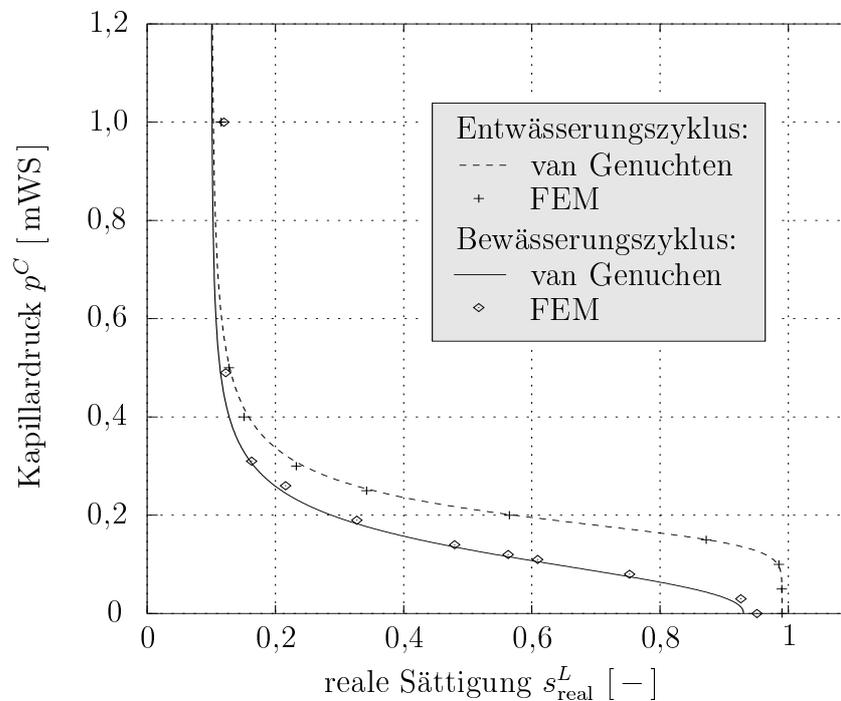


Abb. 7.7: Vergleich der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehungen: Diskrete Punkte aus der Simulation (FEM) und Funktionen nach van Genuchten

8

Experimentelle Ermittlung von Interface-Gesetzen

Zur experimentellen Ermittlung von Interface-Gesetzen werden die Ergebnisse von Rahmenscherversuchen verwendet, die am Institut für Geotechnik der TU Darmstadt an *Berliner* Sand zur Abbildung des Materialverhaltens des Interface zwischen Gründungskörper und Boden durchgeführt wurden. In einem Rahmenschergerät wurden die Kombinationen „rauhes Beton und Sand“, „glatter Beton und Sand“ und das reine Bodenmaterial bei unterschiedlichen Vertikallasten (25, 100, 200 kN/m²) untersucht. Versuchsergebnisse sind Schubspannungs-Verschiebungs-Kurven, die Reul [90] entnommen wurden.

Zunächst wird eine kontinuierlich und eine diskontinuierlich formulierte FE-Simulation des Versuchs am reinen Bodenmaterial zur Verifikation des entwickelten Stoffmodells bzw. des Interface-Gesetzes durchgeführt. Dabei wird von der Abwärtskompatibilität des Stoffmodells Gebrauch gemacht – Modellkompatibilität (M7), vgl. Kasten (6.6) – und nur das trockene Sandmaterial numerisch simuliert.

Anschließend wird durch die numerische Simulation eines einfachen Scherversuchs mit dem kontinuierlich formulierten Stoffmodell unter Verwendung eines speziellen Parametersatzes das Interface „Beton-Sand“ abgebildet und durch Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen aus den Scherversuchen verifiziert. Das Interface-Gesetz aus Abschnitt 5.3 wird hier nicht eingesetzt, da es den Übergang zwischen zwei Materialien nicht abbilden kann.

Die Berechnungen wurden mit dem Finite-Elemente-Programm PANDAS (Dokumentation in Ellsiepen (Hrsg.) [57]), das durch die entsprechenden Routinen erweitert wurde, durchgeführt.

8.1 Versuchsaufbau

Zur Bestimmung der Scherfestigkeit (DIN 18 137, Teil 3) wird ein Rahmenscherversuch durchgeführt. Hierbei handelt es sich um eine Versuchsanordnung mit erzwungener Lage der Scherfläche. Den Aufbau des Versuchs zeigt Abb. 8.1. Die quadratischen Rahmen haben eine Seitenlänge von 25 cm und werden, nach vertikaler Belastung der eingebauten Probe, gegeneinander verschoben. Dabei wird die auftretende, horizontale Scherkraft gemessen und zur Ermittlung der Scherspannung auf die Scherfläche bezogen. Im oberen Rahmen befindet sich Bodenmaterial, während im unteren Rahmen, je nach Versuch, rauhes oder glatter Beton oder Boden eingebaut wird. Weitere Angaben sind in Reul [90] zu finden.

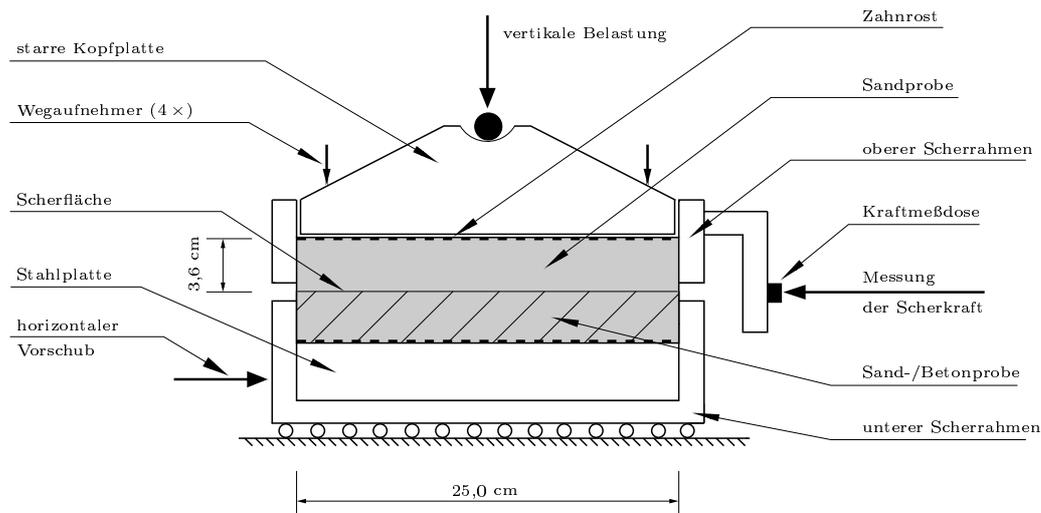


Abb. 8.1: Aufbau des Rahmenschersversuchs

8.2 Numerische Simulation eines Rahmenschersversuchs

Der Rahmenschersversuch am trockenen Bodenmaterial wird mit Hilfe des Stoffmodells, das hier als Einphasenmodell eingesetzt wird, numerisch simuliert. Hierzu wird der Versuch einschließlich einer steifen Lastplatte zur Aufbringung der vertikalen Auflast unter der Voraussetzung eines ebenen Verzerrungszustands (EVZ) diskretisiert. Der obere Rahmen wird verschiebungsgesteuert gegen den unteren verschoben. Dabei werden die Spannungen in horizontaler Richtung über den Rand des unteren Rahmens integriert und auf die Scherfläche bezogen.

8.2.1 Kontinuierliche Formulierung

Für die Berechnung des Randwertproblems in der kontinuierlichen Formulierung wird ein ausreichend verfeinertes Netz gewählt. In Abb. 8.2 ist das deformierte Netz bei einer Horizontalverschiebung von 7 mm dargestellt.

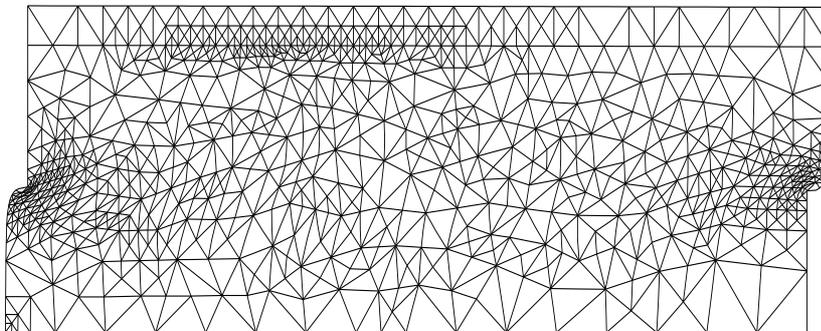


Abb. 8.2: Rahmenschersversuch: Diskretisierung im EVZ

In Abb. 8.3 ist anhand des gezeigten Verschiebungsfelds zu erkennen, daß sich zunächst keine scharf abgegrenzte Scherfuge herausbildet, die den oberen und den unteren Bodenkörper voneinander trennt. Statt dessen bildet sich innerhalb des Rahmenschergeräts eine breite Zone aus, die aus den Bereichen des Bodens besteht, die hinter der aufgezungenen Verschiebung zurückbleiben. Das daraus resultierende, breite Scherband ist in Abb. 8.4 wiedergegeben.

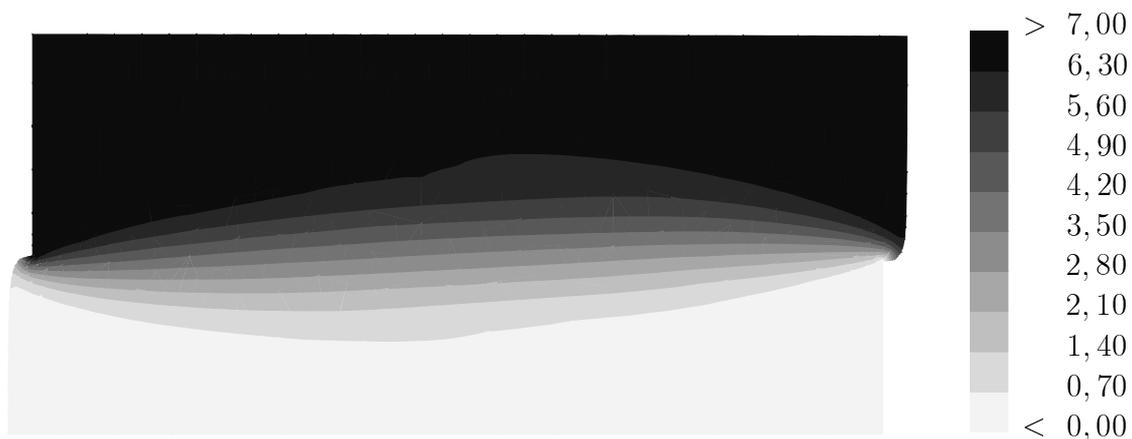


Abb. 8.3: Rahmenscherversuch: Horizontalverschiebung [mm]

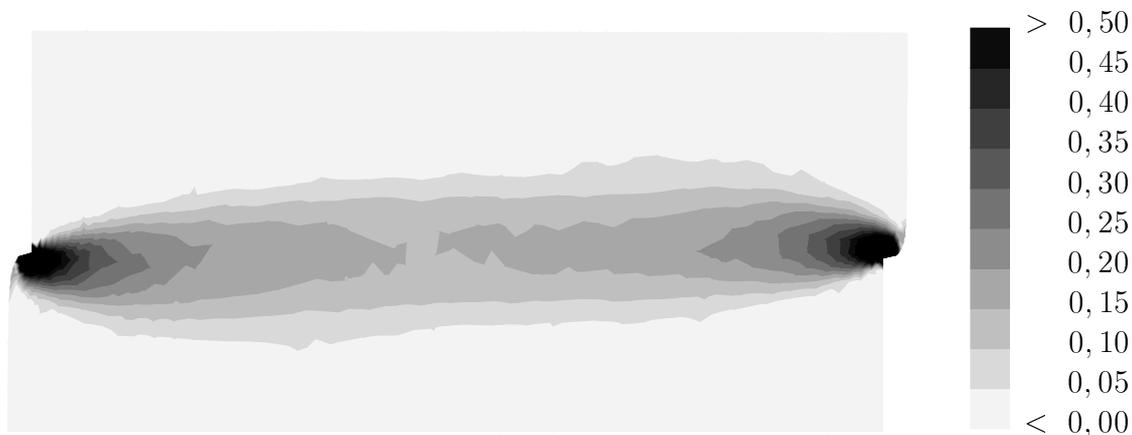


Abb. 8.4: Rahmenscherversuch: Plastische Vergleichsdehnung

Die berechnete Schubspannungs-Verschiebungs-Kurve ist zusammen mit den Meßdaten einer Versuchsserie mit einer Vertikalspannung von 100 kN/m^2 in Abb. 8.5 angegeben. Die experimentellen Ergebnisse können bis zum Erreichen der maximalen Schubspannung (Bruchscherfestigkeit) gut wiedergegeben werden. Nach Erreichen der maximalen Schubspannung fällt die Spannung im Experiment auf die Gleitfestigkeit (Restscherfestigkeit) ab, bei der sich eine erzwungene Scherfuge zwischen dem oberen und unteren Bodenkörper ausbildet. Dieser Effekt läßt sich im Rahmen einer kontinuierlichen Formulierung nicht mehr abbilden.

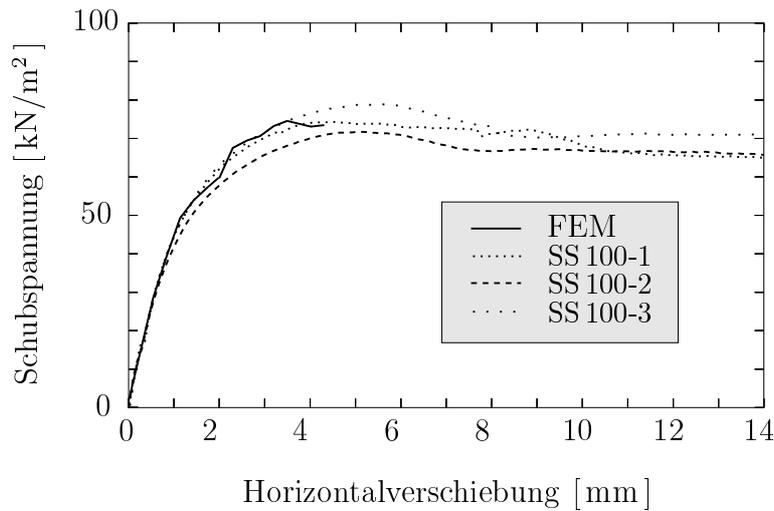


Abb. 8.5: Rahmenschersversuch „Sand-Sand“ mit einer vertikalen Auflast von 100 kN/m^2 : Vergleich von Experiment und numerischer Simulation

8.2.2 Diskontinuierliche Formulierung

Bei der diskontinuierliche Formulierung des Randwertproblems werden zur Abbildung der erzwungenen Scherfuge zwischen den Rahmen des Schergeräts Interface-Elemente angeordnet. In Abb. 8.6 ist die Diskretisierung mit vier Elementlagen skizziert. Die obere Lage bildet die starre Lastplatte, darunter der Boden, der durch die Interface-Elemente verbunden ist.

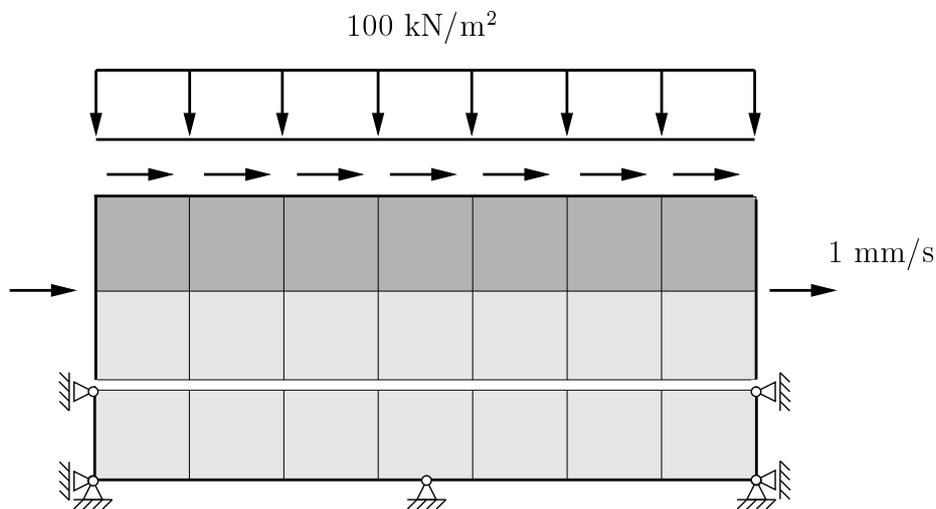


Abb. 8.6: Rahmenschersversuch „Sand-Sand“ mit einer vertikalen Auflast von 100 kN/m^2 : Diskretisierung im EVZ mit Interface-Elementen

In Abb. 8.7 sind die horizontalen Verschiebungen bei einer aufgezwungenen Verschiebung von 7 mm dargestellt. Auch bei der Verwendung von Interface-Elementen bildet sich keine scharf abgegrenzte Scherfuge heraus, da sich in der unteren Bodenlage Horizontalverschiebungen einstellen. Zudem ist die Relativverschiebung zwischen den Lagen minimal. Dies

läßt den Schluß zu, daß die Interface-Elemente eine starke Kopplung zwischen den Elementlagen erzeugen. Diese Kopplung ist natürlich von der vertikalen Auflast abhängig.

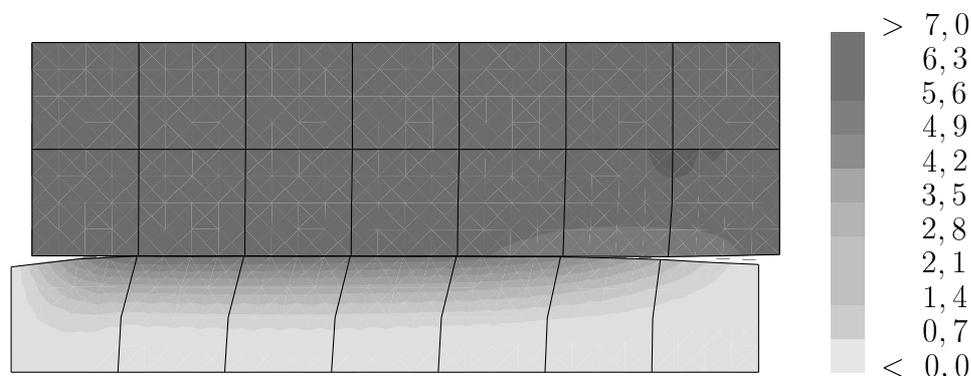


Abb. 8.7: Horizontalverschiebung [mm] bei der Verwendung von Interface-Elementen

Die resultierenden Schubspannungs-Verschiebungs-Kurven für unterschiedliche Werte des Interface-Parameters δ (Abb. 8.8) zeigen eine deutlich geringere aufnehmbare Schubspannung als die experimentellen Resultate. Hier kann argumentiert werden, daß bei der Verwendung von Interface-Elementen der Ort der Scherzone apriorisch festgelegt wird, während sich diese Scherzone in der kontinuierlichen Formulierung erst herausbilden muß. So zeigt die Interface-Simulation ein deutlich weiches Materialverhalten, das eher auf die Restscherfestigkeit aufeinander gleitender Bodenkörper hindeutet.

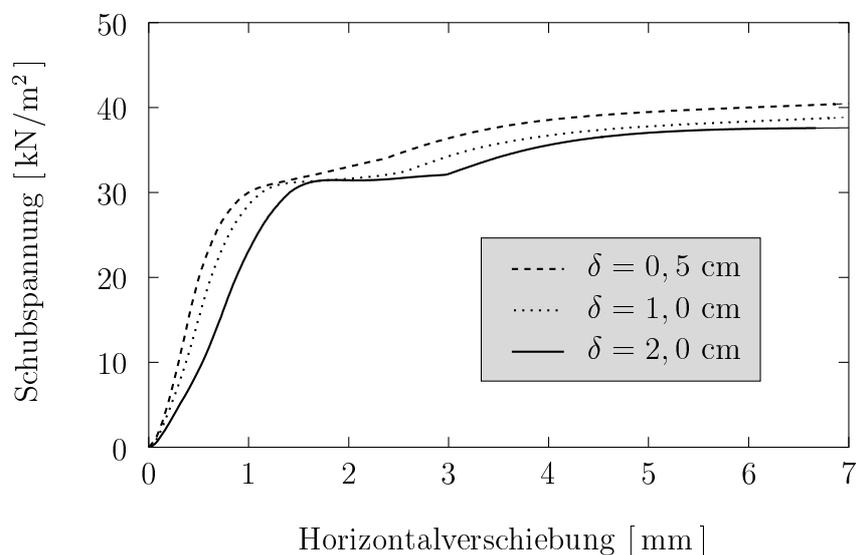


Abb. 8.8: Schubspannungs-Verschiebungs-Kurven bei der Verwendung von Interface-Elementen

Anhand der vorgestellten Untersuchungen wird deutlich, daß es sich bei dem geotechnischen Standardversuch „Rahmenscherversuch“ um ein kompliziertes Randwertproblem handelt, das wegen des erzwungenen Versagensmechanismus höchste Ansprüche an das für die numerische Simulation verwendete Materialmodell stellt. Allerdings wird in der

alltäglichen Laborpraxis aus dem Rahmenscherversuch lediglich die Bruchscherfestigkeit bei unterschiedlichen vertikalen Auflasten ermittelt. Diese Daten werden zur Ermittlung nur eines einzigen Parameters, nämlich des Winkels der inneren Reibung des Bodenmaterials, verwendet.

8.3 Bestimmung von Interface-Parametern

Im Rahmen einer kontinuierlichen Formulierung ergibt sich die Möglichkeit, einzelne Elementlagen mit speziellen Parametersätzen zu versehen, die ein Interface, d. h. das Materialverhalten unter Schubbeanspruchung, geeignet abbilden. Das Stoffgesetz des Materials bleibt dabei unverändert.

Die Elemente werden dort angeordnet, wo eine Lokalisierung der plastischen Dehnungen eintreten wird: z. B. im Übergang zwischen Gründungkörper und Boden. Dabei wird davon ausgegangen, daß das Materialverhalten im lokalisierten und nichtlokalisierten Gebiet unterschiedlich ist.

Durch numerische Simulation des einfachen Scherversuchs (Abb. 8.9) ist es möglich, Stoff- bzw. Interface-Gesetze und zugehörige Parametersätze qualitativ zu überprüfen.

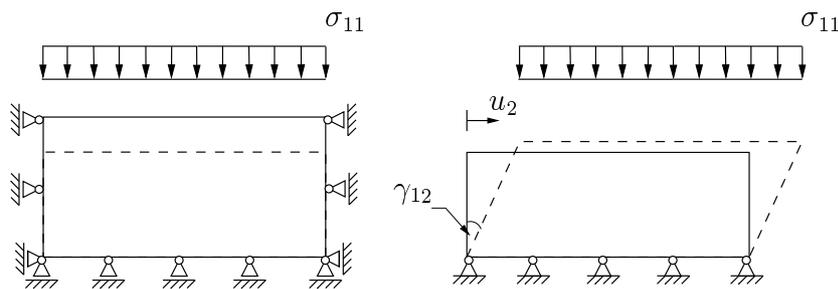


Abb. 8.9: Prinzipskizze des einfachen Scherversuchs

Verschiedene Parametersätze für *Berliner* Sand und für das kontinuierliche Interface zwischen Sand und Beton werden durch Simulation des einfachen Scherversuchs überprüft. Die Parameter des Interface ergeben sich dabei aus den Parametern für das Bodenmaterial durch eine Reduktion der durch das Material aufnehmbaren plastischen Arbeit.

Ergebnis sind Schubspannungs-Schubverzerrungs-Kurven bei unterschiedlicher Vertikalast (25, 100, 200 kN/m²), die die maximal erreichbare Schubspannung des Materials liefern (Abb. 8.10). In Abb. 8.10, oben, sind Kurven für *Berliner* Sand dargestellt, darunter die Kurven des Interface „glatter Beton und Sand“. Zusätzlich ist die erreichte Volumendehnung der Materialmodelle angegeben (Abb. 8.10, rechts). Dabei zeigt sich ein grundsätzlich dilatantes Materialverhalten unter Schubbeanspruchung. Bei größerer Auflast ist die Dilatanz weniger ausgeprägt, da eine Ausdehnung durch die Auflast behindert wird.

In Abb. 8.11 sind die maximal erreichbaren Schubspannungen für verschiedene vertikale Auflasten (25, 100, 200 kN/m²) aus den experimentellen Rahmenscherversuchen dargestellt. Ein Vergleich zeigt die Übereinstimmung der Extremwerte der numerischen Simula-

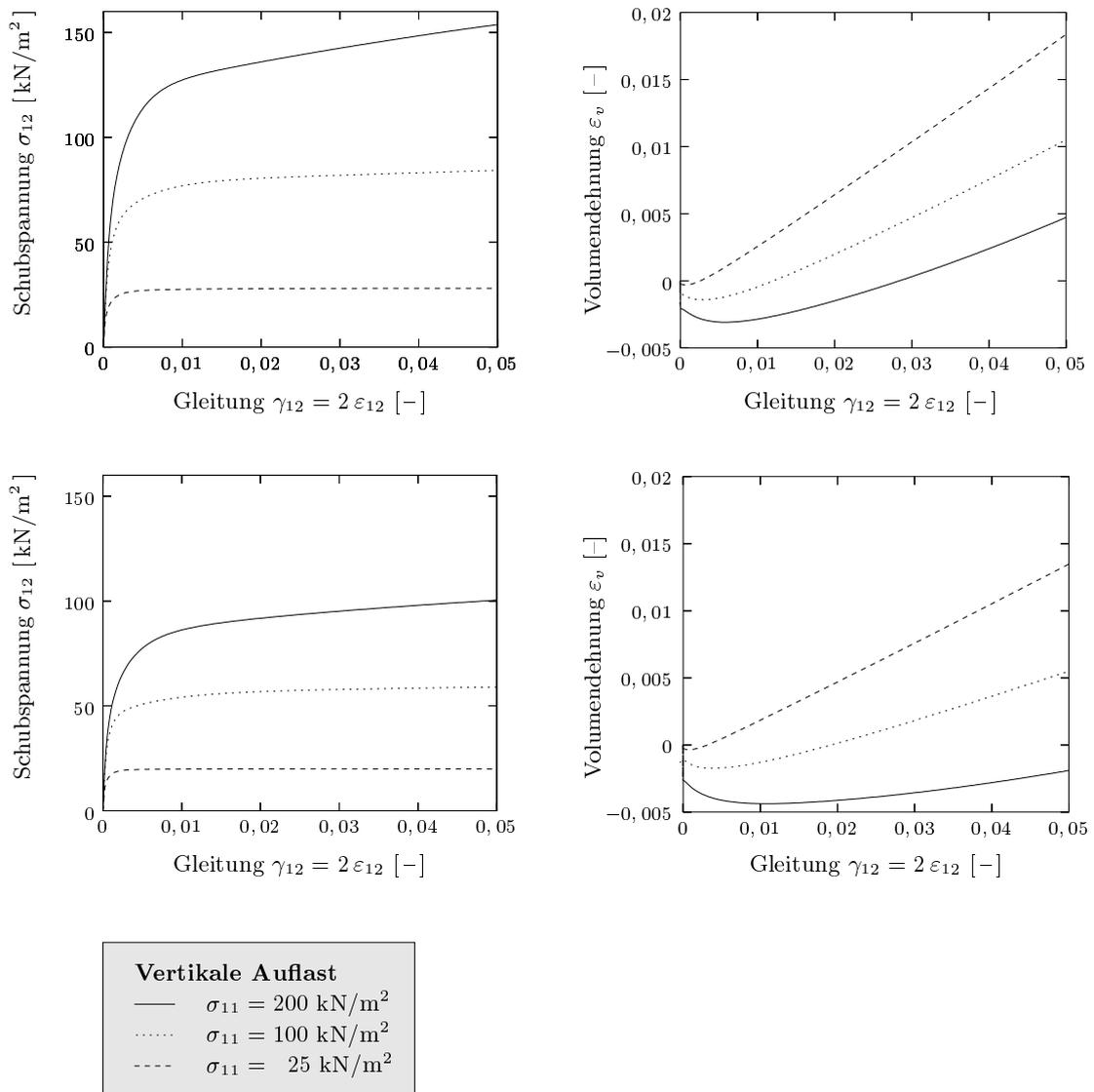


Abb. 8.10: Schubspannung und Volumendehnung im einfachen Scherversuch

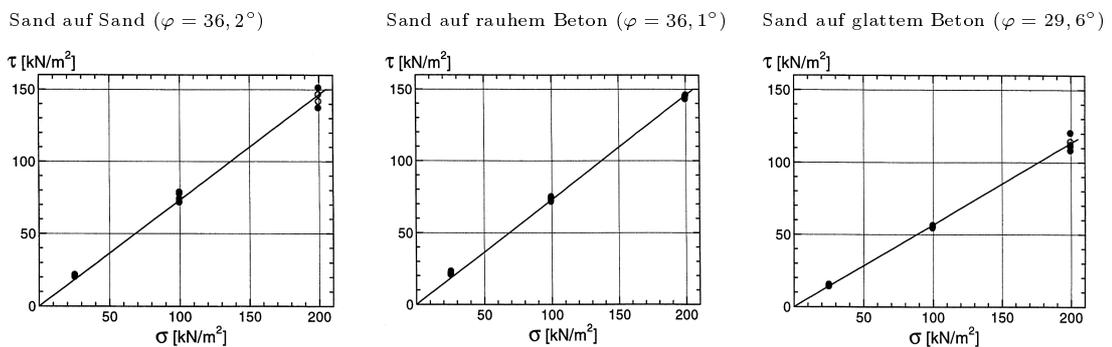


Abb. 8.11: Maximal erreichbare Schubspannung im Rahmenscherversuch (Reul [90])

tion einfacher Scherversuche mit den experimentell ermittelten Werten der Rahmenscherversuche und dem daraus resultierenden Winkel der inneren Reibung φ .

Damit bietet sich mit der modifizierten kontinuierlichen Formulierung eine simple Möglichkeit zur Abbildung des Scherverhaltens zwischen unterschiedlichen Materialien, ohne daß ein spezielles Reibgesetz eingeführt werden mußte.

9

Numerische Beispielrechnungen

Die numerischen Beispielrechnungen behandeln zum einen Probleme, die der Verifikation des entwickelten Stoffmodells für Böden dienen (Abschnitt 9.1), zum anderen werden Anfangs-Randwertprobleme im Rahmen baupraktischer Anwendung gelöst (Abschnitt 9.2). Die Beispiele wurden mit dem entsprechend erweiterten FE-Programm PANDAS [57] berechnet.

9.1 Rechnungen zur Verifikation des entwickelten Stoffmodells

In diesem Abschnitt werden Anfangs-Randwertprobleme zur Überprüfung der Wiedergabe der fluid- und festkörpermechanischen Eigenschaften von Böden durch das entwickelte Mehrphasen-Stoffmodell vorgestellt. Ziel ist es, jede Eigenschaft separat zu testen, um die Qualität der phänomenologischen Beschreibung zu überprüfen.

Zunächst werden in Abschnitt 9.1.1 Sandsäulenversuche zur Überprüfung der fluidmechanischen Eigenschaften des Stoffmodells behandelt. Die Festkörpereigenschaften werden durch die Nachrechnung eines unabhängigen Triaxialversuchs in Abschnitt 9.1.2 und einer großmaßstäblichen Fundamentbelastung in Abschnitt 9.1.3 überprüft. Schließlich wird die Interface-Formulierung in Abschnitt 9.1.4 durch ein Problem mit erzwungenem Scherversagen getestet.

9.1.1 Sandsäulenversuche

Für das Dreiphasenmodell existieren eine Vielzahl von eindimensionalen Anfangs-Randwertproblemstellungen, in denen ausschließlich fluidmechanische und kapillare Effekte maßgeblich sind. Hier werden im Rahmen der Verifikation dieser Eigenschaften des Modells die folgenden Probleme anhand einer Sandsäule untersucht:

- *Buckley-Leverett*-Problem

Es wird die Verdrängung eines materiell inkompressiblen Fluids durch ein anderes materiell inkompressibles Fluid aus einem porösen Festkörper untersucht [17]. Dabei sollen Kapillaritätseffekte ausgeschlossen sein.

- Ausflußproblem

Wasser fließt aus einer zu Beginn wassergesättigten Sandsäule unter Gravitationseinfluß vollständig aus.

- Einströmproblem
Hier wird Wasser in eine vollständig ungesättigte, d. h. trockene, Sandsäule entgegen der Wirkungsrichtung der Gravitation eingesaugt.
- *Liakopoulos*-Problem
Eine wassergesättigte Sandsäule wird unter Gravitationseinfluß teilweise entwässert. Der Säulenfuß steht dabei im Wasser. Das Problem wurde von *Liakopoulos* [82] experimentell untersucht.
- *Darmstädter* Laborversuch (Unterdruckversuch)
An eine vollgesättigte Sandprobe wird eine veränderliche Saugspannung angelegt. Die mittlere Sättigung der Probe wird aus der Menge des aus- bzw. zuströmenden Wassers bestimmt und mit dem zugehörigen Kapillardruck zum Nachweis der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung des Probenmaterials verwendet.
Der *Darmstädter* Laborversuch wird vom Institut für Geotechnik der TU Darmstadt zur Untersuchung des hydraulischen Verhaltens von Böden eingesetzt. Der Versuch wird ausführlich in Kapitel 7 behandelt.

Bei allen Randwertproblemen tritt eine geringfügige Festkörperdeformation auf, die auf das qualitative, numerische Ergebnis einen vernachlässigbaren Einfluß hat. Aus diesem Grund wird die Festkörperdeformation bei allen Problemen – mit Ausnahme des *Buckley-Leverett*-Problems, bei dem der Festkörper als starr angenommen wird – zwar zugelassen, aber nicht weiter betrachtet. Alle Randwertprobleme werden dreiphasig, mit voneinander unabhängigen Fluidphasen, formuliert (Modellvariante I, vgl. Tab. 6.1).

Für die Berechnungen werden die Permeabilitätskoeffizienten aus Tab. 3.3 verwendet. Die Wichtung der Koeffizienten zur Berücksichtigung der aktuell vorhandenen Sättigung geschieht mit den relativen Permeabilitäten aus (3.31). Dabei wird der Parameter $m = 0,81$ gesetzt, vgl. Tab. 7.3, Zeile 4, Spalte 3.

Als Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung wird die zweiparametrische van Genuchten-Funktion aus Tab. 3.4, Zeile 3, mit den Parametern aus Tab. 7.3, Spalte 3, verwendet. Für die verschiedenen Randwertprobleme werden dabei die jeweiligen Parameter eines Entwässerungs- bzw. Bewässerungszyklus verwendet.

***Buckley-Leverett*-Problem**

Das *Buckley-Leverett*-Problem [17] stellt sich bei der Beschreibung der Verdrängung eines materiell inkompressiblen Fluids durch ein anderes materiell inkompressibles Fluid aus einem starren, porösen Festkörper. Es zeigt die Bedeutung der Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung als Stabilisator bei der numerischen Lösung des Problems und wird von Helmig [67] in dieser Hinsicht intensiv behandelt. Hier wird es vorgestellt, um die unterschiedliche Problemstellung bei der Beschreibung von Materialien mit und ohne (ausgeprägte) kapillare Eigenschaften zu verdeutlichen.

In Abb. 9.1 ist das *Buckley-Leverett*-Problem skizziert. Der dargestellte eindimensionale Bereich besteht aus einem starren, porösen Festkörper ($n^F = \text{konst.}$), dessen Porenraum mit einem materiell inkompressiblen Fluid φ^M vollständig gesättigt ist. Dieses Fluid wird

durch eine andere materiell inkompressible Fluidphase φ^L , die mit der Filtergeschwindigkeit $\|n^F \dot{\mathbf{x}}_L\|$ von links in den porösen Festkörper einströmt, verdrängt. Ziel ist die Bestimmung der Sättigungsfunktion $s^L = s^L(\mathbf{x}, t)$ des Fluids φ^L in Abhängigkeit von Ort und Zeit. Hierzu wird im folgenden die Sättigung als Freiheitsgrad eingeführt.

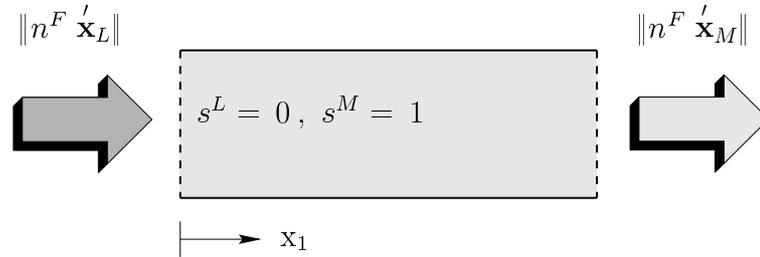


Abb. 9.1: Buckley-Leverett-Problem: Anfangsbedingungen ($t = 0$)

Zur mathematischen Beschreibung des Problems wird für beide Fluidphasen das Darcysche Filtergesetz (3.27) angesetzt. Addition der Filtergesetze unter Verwendung der totalen Filtergeschwindigkeit

$$\mathbf{f} = n^F (\dot{\mathbf{x}}_L + \dot{\mathbf{x}}_M), \quad (9.1)$$

den Ausdrücken

$$\bar{k}_1 = \frac{\gamma^{LR} k^M}{k^L \gamma^{MR} + k^M \gamma^{LR}}, \quad \bar{k}_2 = \frac{k^L k^M}{k^L \gamma^{MR} + k^M \gamma^{LR}} \quad (9.2)$$

und dem Kapillardruck $p^C = p^{MR} - p^{LR}$ führt auf

$$n^F \dot{\mathbf{x}}_M = \bar{k}_1 \mathbf{f} - \bar{k}_2 (\text{grad } p^C + \rho^{LR} \mathbf{b} - \rho^{MR} \mathbf{b}). \quad (9.3)$$

Einsetzen von (9.3) in die Volumenbilanz

$$-n^F \frac{\partial s^L}{\partial t} + \text{div} (n^F \dot{\mathbf{x}}_M) = 0 \quad (9.4)$$

der Phase φ^M mit $s^L + s^M = 1$ resultiert in

$$-n^F \frac{\partial s^L}{\partial t} + \text{div} [\bar{k}_1 \mathbf{f} - \bar{k}_2 (\text{grad } p^C + \rho^{LR} \mathbf{b} - \rho^{MR} \mathbf{b})] = 0. \quad (9.5)$$

Schließlich werden alle Ableitungen bezogen auf die Sättigung s^L gebildet:

$$n^F \frac{\partial s^L}{\partial t} - \left[\frac{d\bar{k}_1}{ds^L} \mathbf{f} - \frac{d\bar{k}_2}{ds^L} (\rho^{LR} - \rho^{MR}) \mathbf{b} \right] \cdot \text{grad } s^L + \text{div} \left(\bar{k}_2 \frac{dp^C}{ds^L} \text{grad } s^L \right) = 0. \quad (9.6)$$

Als Ergebnis liegt nun eine Gleichung vor, in der die Sättigung s^L und die totale Filtergeschwindigkeit \mathbf{f} die Unbekannten sind. Der letzte Term in (9.6) ist ein Diffusionsterm, der den Typ der Differentialgleichung bestimmt. Durch Weglassen dieses Terms werden

kapillare Effekte aus dem Modell genommen. Wird außerdem die äußeren Beschleunigung \mathbf{b} weggelassen, reduziert sich die Modellgleichung zu

$$n^F \frac{\partial s^L}{\partial t} - \frac{d\bar{k}_1}{ds^L} \mathbf{f} \cdot \text{grad } s^L = 0. \quad (9.7)$$

Die Reduktion auf den eindimensionalen Fall führt auf die mathematische Formulierung des in Abb. 9.1 dargestellten *Buckley-Leverett*-Problems:

$$n^F \frac{\partial s^L}{\partial t} - \frac{d\bar{k}_1}{ds^L} f_1 \frac{\partial s^L}{\partial x_1} = 0. \quad (9.8)$$

In einem ersten Schritt wird die vorliegende partielle Differentialgleichung mit einem gewöhnlichen Differenzenverfahren gelöst. Hierbei wird für \bar{k}_1 eine lineare Abhängigkeit von der Sättigung angenommen ($d\bar{k}_1/ds^L = \bar{k} = \text{konst.}$) und die totale Filtergeschwindigkeit f_1 als Konstante vorgegeben:

$$\begin{aligned} n^F \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \bar{k} f_1 \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \Delta x_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow u_j^{n+1} &= \frac{\bar{k}}{n^F} f_1 \frac{\Delta t}{2 \Delta x_1} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + u_j^n. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Das anzuwendende Schema ist in Abb. 9.2, links, zu sehen. Das Ergebnis der Berechnung ist eine numerische Oszillation (Abb. 9.3, links). Hier tritt der besondere Fall auf, daß für die Sättigung Ergebnisse erzielt werden, die außerhalb des Definitionsbereichs von $0 \leq s^L \leq 1$ liegen (engl. Over Shooting).

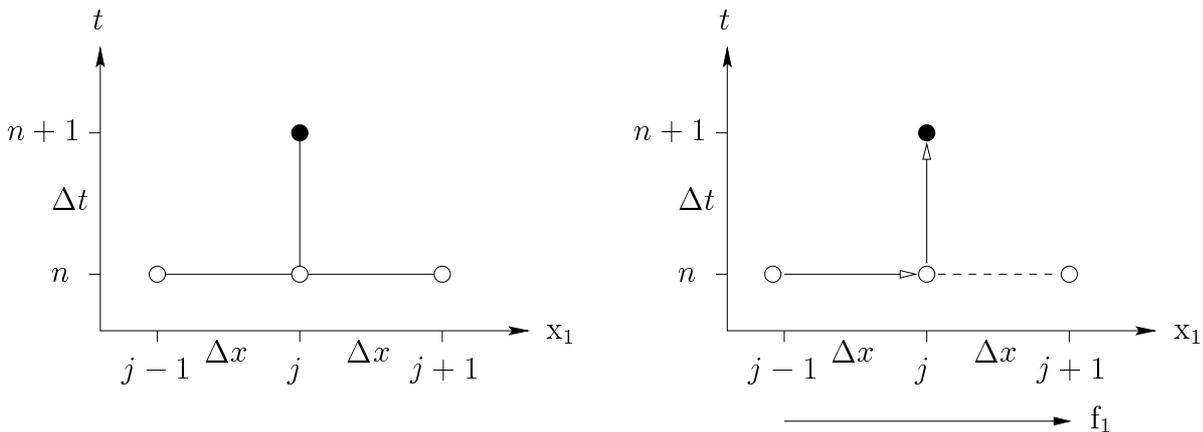


Abb. 9.2: Differenzen- und Upstream-Differenzenverfahren

Um die numerische Oszillation zu beseitigen, wird ein Upstream-Differenzenverfahren angewendet, dessen Schema in Abb. 9.2, rechts, dargestellt ist:

$$u_j^{n+1} = \frac{\bar{k}}{n^F} f_1 \frac{\Delta t}{2 \Delta x_1} (u_j^n - u_{j-1}^n) + u_j^n. \quad (9.10)$$

Bei diesem Verfahren wird eine zusätzliche Information, nämlich die Strömungsrichtung, verwendet. Resultat ist eine oszillationsfreie Lösung (Abb. 9.3, rechts). Die analytische Lösung von Buckley und Leverett ist jedoch ein Sprung der Sättigung von eins auf null. Diese Lösung wird nur näherungsweise erreicht.

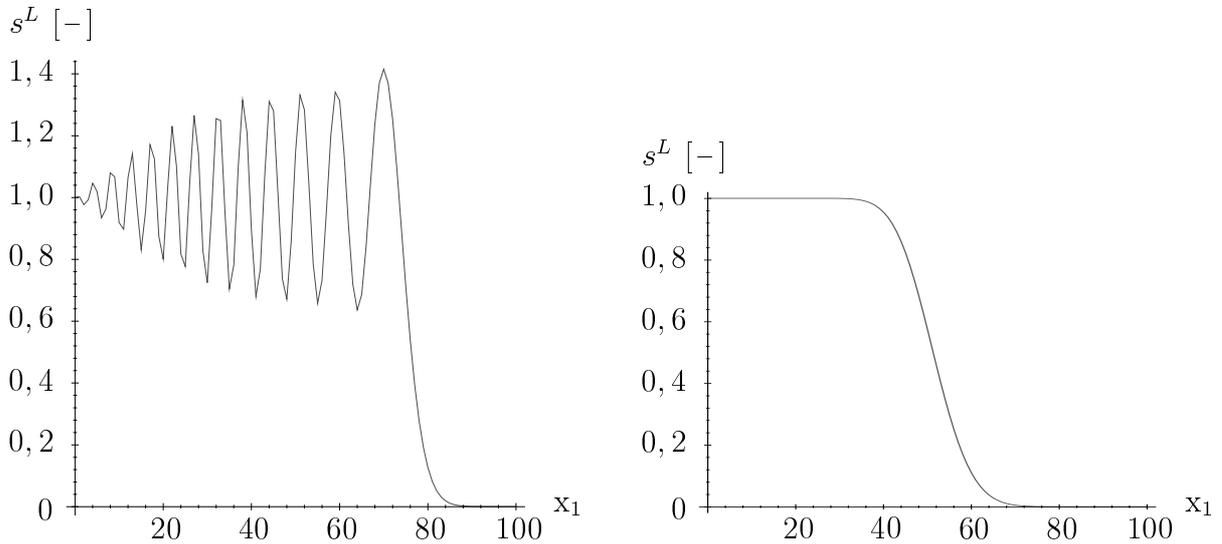


Abb. 9.3: Buckley-Leverett-Problem: Numerische Simulation ohne und mit Diffusionsterm

Bei Verwendung des Diffusionsterms in (9.6) werden numerische Oszillationen weitestgehend vermieden, vgl. Helmig [67]. Das heißt, daß die folgenden hier gezeigten Problemstellungen keiner besonderen numerischen Behandlung bedürfen, da eine Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung verwendet wird.

Ausflußproblem

Beim Ausflußproblem wird von einer zu Beginn vollständig wassergesättigten Sandsäule ausgegangen (Abb. 9.4).

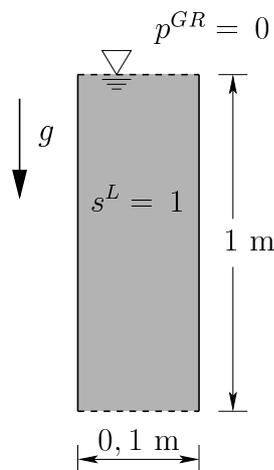


Abb. 9.4: Ausflußproblem: Anfangsbedingungen ($t = 0$)

Am Kopf und am Fuß der Säule wird die Randbedingung „trocken“, d. h. $s^L = 0$, vorgegeben. Luft kann an beiden Enden zuströmen. Im Rahmen einer Verschiebungs-Druck-Formulierung steht der Freiheitsgrad „Sättigung“ nicht zur Verfügung; statt dessen wird eine Saugspannung, die der Randbedingung $s^L = 0$ nahe kommt, am oberen und unteren Ende des diskretisierten Bereichs angelegt: hier $p^C = -p^{LR} = 10 \text{ kN/m}^2$ (entspricht 1 mWS). Die Auswertung der verwendeten Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung für einen Entwässerungszyklus ergibt für diese Saugspannung eine Sättigung von $s^L = 0,0009$, womit die geforderte Randbedingung als erfüllt angesehen wird.

In Abb. 9.5 ist die Entwicklung der Sättigung s^L in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Die Sandsäule entwässert unter Gravitationseinfluß nahezu vollständig.

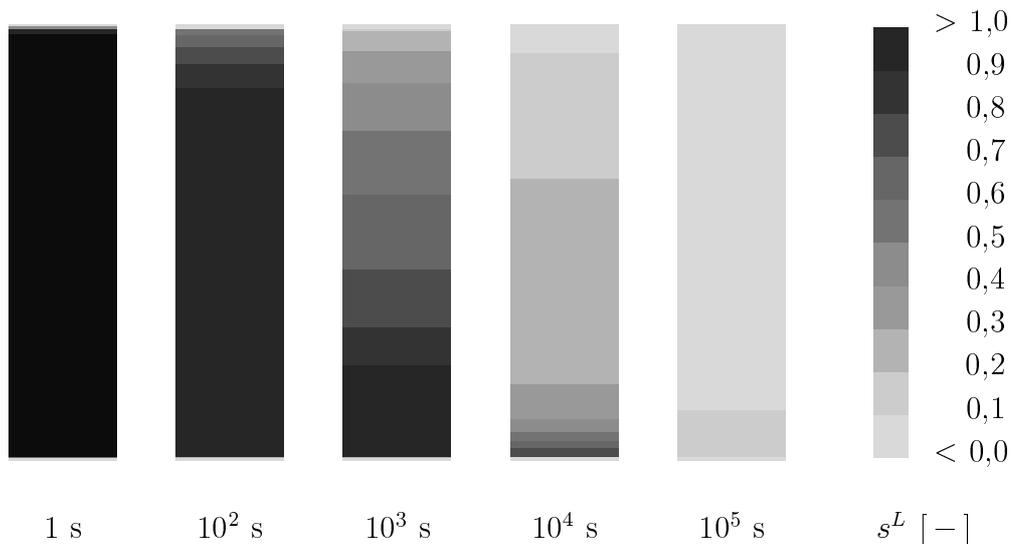


Abb. 9.5: Ausflußproblem: Zeitabhängige Entwicklung der Wassersättigung

Abb. 9.6 zeigt die Abnahme der Filtergeschwindigkeit $\|n_L \mathbf{w}_L\|$ des ausströmenden Wassers am Säulenfuß in Abhängigkeit von der Zeit t . Integration über die Zeit führt auf die ausgeströmte Wassermenge, die dem Porenvolumen ($n^F = 0,39$) der Sandsäule entspricht.

Einströmproblem

Beim Einströmproblem wird eine vollständig ungesättigte, d. h. trockene ($s^L = 0$), Sandsäule mit dem unteren Ende in Wasser getaucht (Abb. 9.7). Das Wasser soll aufgrund der Kapillarität des Sands entgegen der Wirkungsrichtung der Gravitationsbeschleunigung eingesaugt werden, so daß hier die Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung für einen Bewässerungszyklus verwendet wird. Im Rahmen einer Verschiebungs-Druck-Formulierung werden Saugspannungen, die der Randbedingung $s^L = 1$ am unteren Ende und $s^L = 0$ am oberen Ende und der Anfangsbedingung $s^L = 0$ im Inneren der Säule entsprechen, vorgegeben. Dabei wird für $s^L = 0$ der Kapillardruck $p^C = -p^{LR} = 10 \text{ kNm}^2$ (1 mWS) und für $s^L = 1$ der Kapillardruck $p^C = 0$ angesetzt.

In Abb. 9.8 ist die Entwicklung der Sättigung s^L in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. In die Sandsäule strömt aufgrund kapillaren Saugens Wasser ein und bildet einen

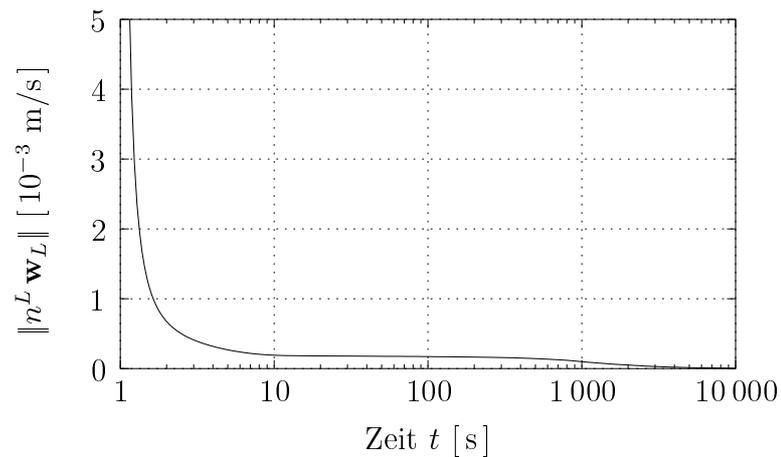
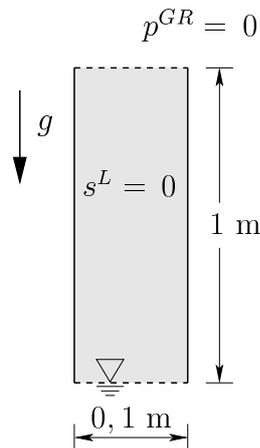


Abb. 9.6: Ausflußproblem: Filtergeschwindigkeit am Säulenfuß

Kapillarsaum aus.

Abb. 9.7: Einströmproblem: Anfangsbedingungen ($t = 0$)

In Abb. 9.9 ist die Sättigungsverteilung über die Säulenhöhe 5 h nach dem Eintauchen der Säule in das Wasser dargestellt. Die Höhe des Kapillarsaums ergibt sich aus der zugrunde gelegten Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung.

Liakopoulos-Problem

Bei diesem Problem wird eine wassergesättigte Sandsäule unter Gravitationseinfluß teilweise entwässert (Abb. 9.10). Zunächst ist das untere Ende der Säule verschlossen, zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das untere Ende geöffnet, aber im Wasser belassen. Am oberen Ende der Säule kann Luft nachströmen.

Das *Liakopoulos*-Problem [82] wurde von der Gruppe *Alert Geomaterials*¹ als Test zur Überprüfung von Mehrphasenmodellen verwendet (siehe z. B. Klubertanz et al. [74] und Lewis und Schrefler [81]).

¹*Alert Geomaterials: Allied Laboratories in Europe for Research and Technology, Grenoble*

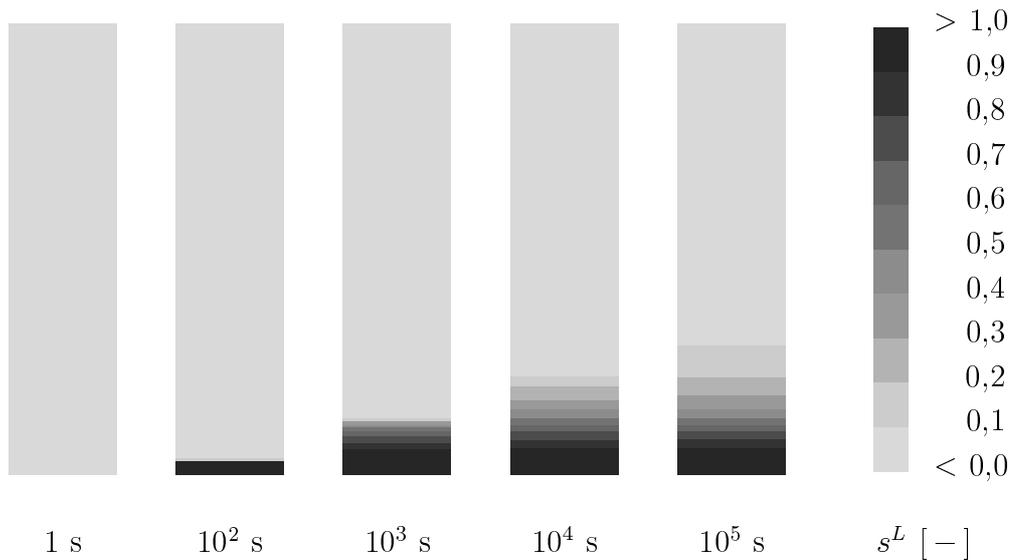
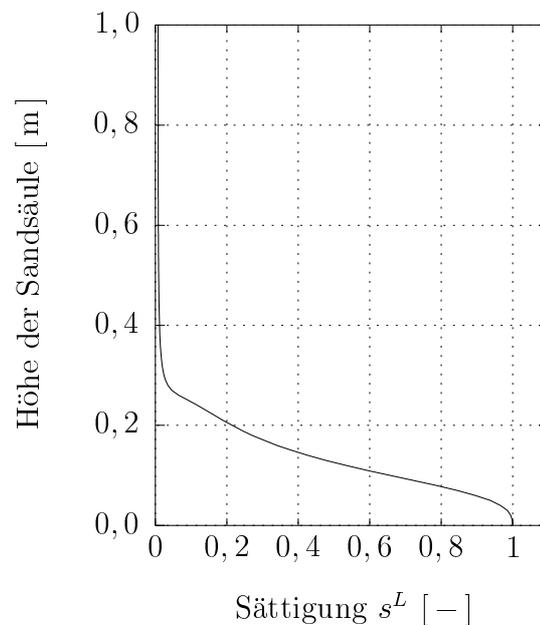
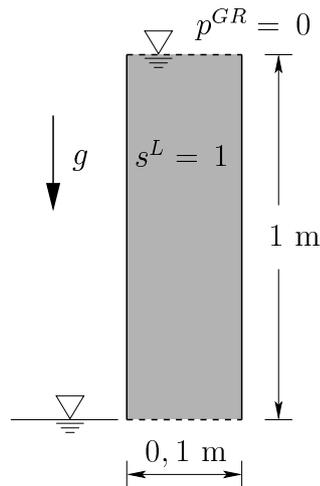
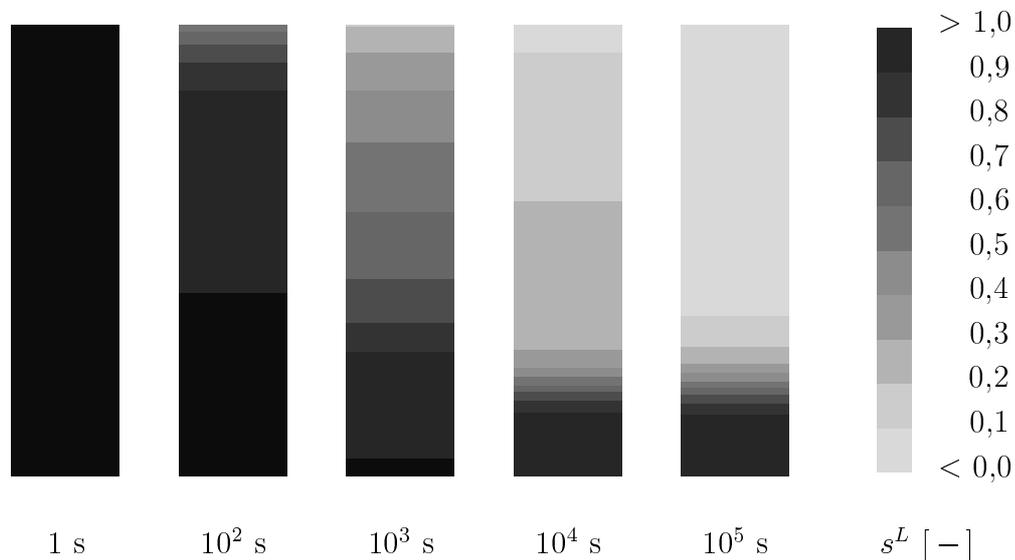


Abb. 9.8: Einströmproblem: Zeitabhängige Entwicklung der Wassersättigung

Abb. 9.9: Einströmproblem: Wassersättigung über die Säulenhöhe ($t = 5\text{ h}$)

In Abb. 9.11 ist die Entwicklung der Sättigung s^L in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Aus der Sandsäule strömt, entsprechend der Kapillarität des Materials, ein Teil des Wasser aus. Für die Berechnung sind die Parameter für einen Entwässerungszyklus der Kapillardruck-Sättigungs-Kurve verwendet worden.

Abb. 9.12 zeigt die Filtergeschwindigkeit $\|n^L \mathbf{w}_L\|$ am Säulenfuß im Zeitintervall von $t = 0$ bis 3 h . Dabei wurde eine Rechnung mit dem Gasdruck als unabhängiger Variable (Modellvariante I, vgl. Tab. 6.1) und eine weitere Rechnung mit einer statischen Gasphase (Modellvariante II) durchgeführt. Der Vergleich beider Varianten zeigt eine Überschätzung der Ausflußgeschwindigkeit zu Beginn der Simulation bei der Verwendung einer statischen

Abb. 9.10: *Liakopoulos*-Problem: Anfangsbedingungen ($t = 0$)Abb. 9.11: *Liakopoulos*-Problem: Zeitabhängige Entwicklung der Wassersättigung

Gasphase.

In Abb. 9.13 ist die Sättigung s^L über die Säulenhöhe 5 h nach Beginn der Simulation dargestellt. Das Ergebnis entspricht der zugrunde gelegten Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung.

Die Ergebnisse entsprechen qualitativ den experimentellen Ergebnissen von Liakopoulos [82]. Auf eine Materialparameteranpassung an den von Liakopoulos verwendeten *Del Monte*-Sand wurde hier verzichtet, da in dieser Arbeit eine Anpassung an *Darmstädter* Versuchssand/*Berliner* Sand durchgeführt wird.

Klubertanz [73] hat den *Liakopoulos*-Versuch mit eigenem Versuchssand durchgeführt, um auf gesicherte Bodenkennwerte zurückgreifen zu können. Zur quantitativen Behandlung des *Liakopoulos*-Problems siehe auch Kolditz [75].

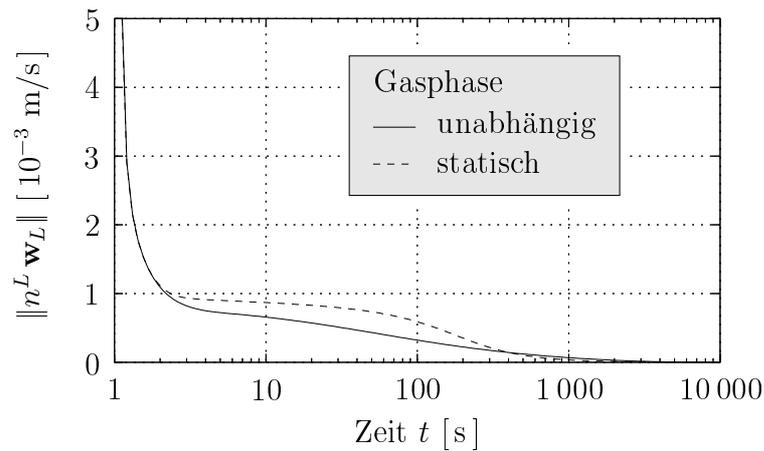


Abb. 9.12: *Liakopoulos*-Problem: Filtergeschwindigkeit am Säulenfuß ($t = 0 \dots 3$ h)

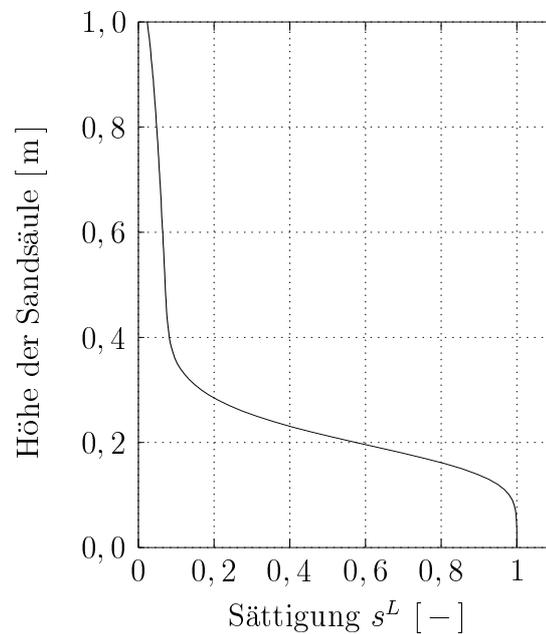


Abb. 9.13: *Liakopoulos*-Problem: Wassersättigung über die Säulenhöhe ($t = 5$ h)

9.1.2 Triaxialversuch

Beim Triaxialversuch handelt es sich um einen Standardversuch der Geotechnik zur Beurteilung der Tragfähigkeit von Böden (DIN 18 137, Teil 2).

Eine zylindrische Bodenprobe wird in eine Druckzelle eingebaut, in der Radialspannungen $\sigma_2 = \sigma_3$ durch Wasserdruck aufgebracht werden. Dabei verhindert eine Latexhülle den Zutritt des Wassers zur Probe. Die Axialspannung σ_1 wird mit Hilfe eines Druckstempels, an den eine Kraftmeßdose gekoppelt ist, gesteuert.

Am Institut für Geotechnik der TU Darmstadt wurde an trockenem *Berliner* Sand ein Versuchsprogramm durchgeführt, das achtzehn Kompressionsversuche ($|\sigma_1| \geq |\sigma_2| = |\sigma_3|$), sechs Extensionsversuche ($|\sigma_1| \leq |\sigma_2| = |\sigma_3|$) und drei hydrostatische Kompressionsversuche ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) umfaßte. Der Sand wurde nahe seiner dichtesten Lagerung in die

Triaxialprüfmaschine eingebaut. Die bodenmechanischen Kennwerte des Sands können Tab. 4.1 entnommen werden.

Der Belastungspfad für einen Kompressionsversuch ist in Abb. 9.14 dargestellt. Im Versuchsverlauf werden, ausgehend vom hydrostatischen Spannungszustand, die zum jeweiligen Spannungszustand gehörende Axialdehnung ε_1 und Volumendehnung ε_V gemessen. Während der Verfestigung, d. h. Aufweitung der Fließfläche, ändert sich die Richtung des plastischen Fließens, die die Volumendehnung der Probe bestimmt. Die unterschiedlichen, während eines Belastungsprozesses auftretenden Richtungen der plastischen Verzerrungsrate $(\varepsilon_{Sp})'_S$ sind beispielhaft in Abb. 9.14 angegeben.

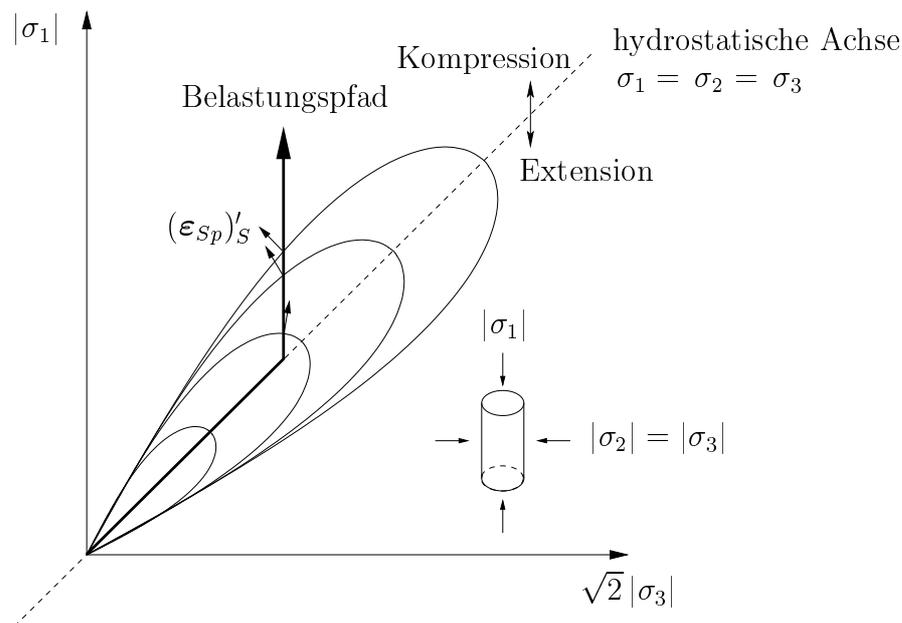


Abb. 9.14: Triaxialer Belastungspfad im Hauptspannungsraum: Fließkurven und Richtungen der plastischen Verzerrungsrate $(\varepsilon_{Sp})'_S$

Im Hinblick auf die Anwendung des Stoffmodells auf dreidimensionale Geometrien wurde das Modell anhand eines Würfels, dessen Seitenflächen unabhängig voneinander belastet werden, getestet (Abb. 9.15). Auf diese Weise lassen sich neben „einfachen“ auch „wahre“ Triaxialversuche simulieren, bei denen beliebige Spannungspfade im Hauptspannungsraum abgefahren werden (Lade und Kim [72]).

Der Spannungszustand im diskretisierten Randwertproblem bleibt homogen, da sich die gewählte Geometrie affin (parallelentreu) verformt. Es genügt daher, ein einziges finites Element mit beliebigen Abmessungen und mit linearer Ansatzfunktion zu verwenden. Im Experiment ist der Spannungszustand idealer Weise homogen, wird aber spätestens beim Versagen der Probe inhomogen. Dieser Zustand kann hier nicht abgebildet werden.

In Abb. 9.16 ist der Vergleich der experimentellen Meßdaten eines Standard-Triaxialversuchs mit $\sigma_3 = -500 \text{ kN/m}^2$ Seitenspannung und der Ergebnisse der numerischen Simulation des Versuchs mit einem dreidimensionalen bzw. einem rotationssymmetrischen Element dargestellt. Die Scherspannung $|\sigma_1 - \sigma_3|$ und die Volumendehnung ε_V sind über

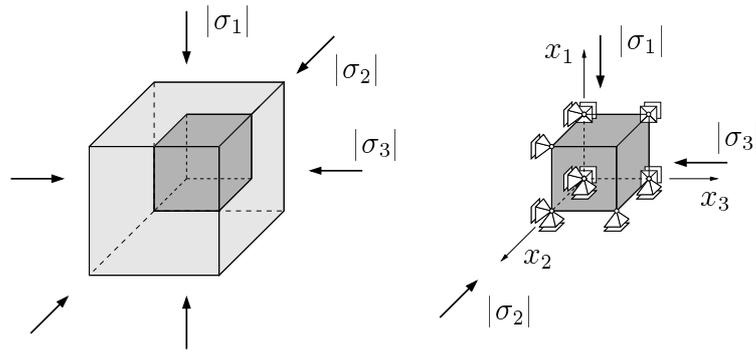


Abb. 9.15: „Wahrer“ Triaxialversuch: Würfel im homogenen Spannungszustand und diskretisiertes RWP

die Axialdehnung ε_1 aufgetragen. Die Probe zeigt zunächst kontraktantes Verhalten (negative Volumendehnung), im weiteren Verlauf der Belastung dilatantes Verhalten (positive Volumendehnung).

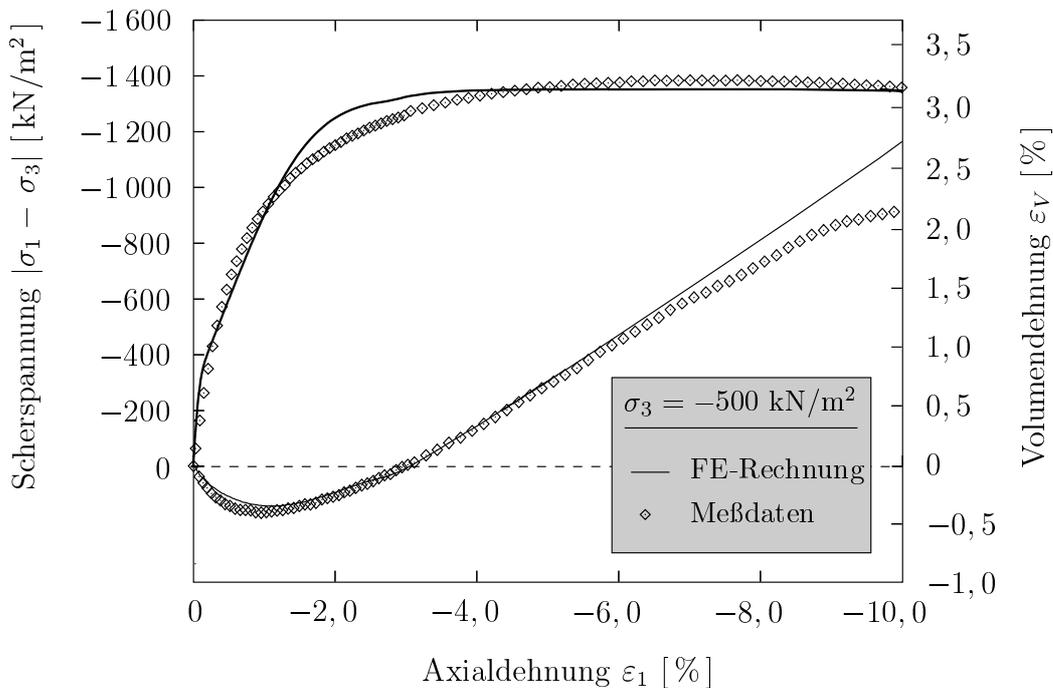


Abb. 9.16: Standard-Triaxialversuch: Vergleich der Meßdaten (Müllerschön [87]) mit der numerischen Simulation

Die numerische Simulation zeigt die Übereinstimmung der Spannungs-Dehnungs-Kurven und insbesondere die exakte Übereinstimmung der Ergebnisse, die mit dem dreidimensionalen und dem rotationssymmetrischen Element erzielt wurden. Die Volumendehnung der Probe wird durch das Stoffmodell gut wiedergegeben.

Die experimentellen Ergebnisse des Versuchs wurden nicht zur Identifikation der Materialparameter des Modells (vgl. Abschnitt 4.3) verwendet, so daß die Simulation als unabhängige Verifikation des Stoffmodells anzusehen ist (engl. Back-Analysis).

9.1.3 Degebo-Versuch

Von der *Degebo*² wurden großmaßstäbliche Belastungsversuche an Einzelfundamenten auf *Berliner* Sand durchgeführt. Hier wird die numerische Simulation für einen ausgewählten Belastungsversuch an einem Streifenfundament auf dicht gelagertem, wassergesättigten *Berliner* Sand vorgestellt (Abb. 9.17). Ergebnis des Experiments, das von Elmiger und Muhs [59] bis zum Eintreten eines Grundbruchs durchgeführt wurde, ist eine Last-Setzungs-Kurve. Diese soll im folgenden mit der numerisch ermittelten Kurve verglichen wird.

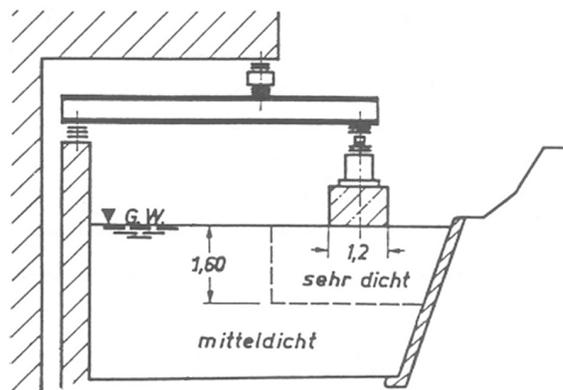


Abb. 9.17: Großmaßstäblicher Versuch der *Degebo* zur Fundamentbelastung auf *Berliner* Sand
(Elmiger und Muhs [59])

Da das Fundament ein Seitenverhältnis von 1:2 aufweist, ist die Annahme eines ebenen Verzerrungszustands (EVZ) bei der numerischen Simulation nur näherungsweise zutreffend (Abb. 9.18). Das Randwertproblem wird daher sowohl im EVZ als auch räumlich, unter Ausnutzung der doppelten Achsensymmetrie des Problems, diskretisiert.

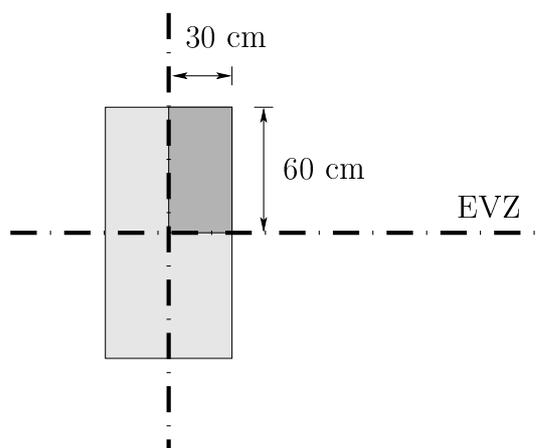


Abb. 9.18: *Degebo*-Versuch: Diskretisierter Bereich in der Draufsicht

² *Degebo*: Deutsche Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik, TU Berlin

In Abb. 9.19 ist die Diskretisierung im EVZ dargestellt (1 024 Freiheitsgrade). Es wird ein Diskretisierungsgrad gewählt, der dem der räumlichen Diskretisierung entspricht: Nur so ist ein direkter Vergleich der numerischen Ergebnisse beider Berechnungen möglich.

Die Rechnungen werden verschiebungsgesteuert durchgeführt, d. h. das aufgesetzte Fundament wird als starr betrachtet. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da das Fundament extrem stark bewehrt wurde [59]. Die Verschiebungsgeschwindigkeit ist so gewählt, daß sich der Boden immer im auskonsolidierten Zustand befindet.

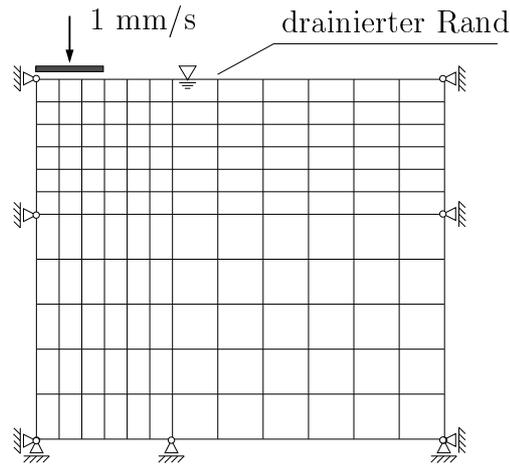


Abb. 9.19: Diskretisierung des *Degebo*-Versuchs im ebenen Verzerrungszustand (EVZ)

In Abb. 9.20 sind die Ergebnisse der numerischen Simulation des Versuchs den experimentellen Ergebnissen in Form einer Last-Setzungs-Kurve gegenübergestellt. Im Experiment wurde eine maximale Belastung des Fundaments von $0,9 \text{ MN/m}^2$ erreicht, danach trat Versagen in Form eines Grundbruchs ein. Die Bruchlast des Fundaments wird in der dreidimensionalen FE-Rechnung sehr gut approximiert, bei Annäherung an diese kritische Last wird die numerische Lösung instabil. Die FE-Rechnung im ebenen Verzerrungszustand zeigt große Abweichungen vom experimentellen Ergebnis: Die Lastaufnahme des Fundaments ist zu gering. Durch die vorgestellte Vergleichsrechnung wird nachgewiesen, daß die Annahme eines EVZ für Fundamente mit einem Seitenverhältnis von 1:2 nicht gerechtfertigt ist.

In Abb. 9.21 ist das FE-Netz der räumlichen Diskretisierung dargestellt: Es werden 30 780 Freiheitsgrade berechnet. Angegeben ist außerdem die plastische Vergleichsdehnung $\|\epsilon_{Sp}\|$ bei einer errechneten Absenkung des Fundaments um 2,3 cm.

Die Vergleichsdehnung weist keine Lokalisierung auf, d. h. es hat sich bisher kein Scherband ausgebildet, da in der Berechnung der Punkt der maximalen Lastaufnahme des Fundaments nicht erreicht wurde (Absenkung um ca. 3 cm, vgl. Abb. 9.20).

Das Simulationsergebnis der räumlichen Berechnung wird für den Belastungsbereich bis hin zum Versagen, d. h. Abfall der aufnehmbaren Last, als übereinstimmend mit dem Ergebnis des *Degebo*-Experiments gewertet. Für das Last-Setzungs-Verhalten nach einem aufgetretenen Grundbruch kann keine Aussage getroffen werden.

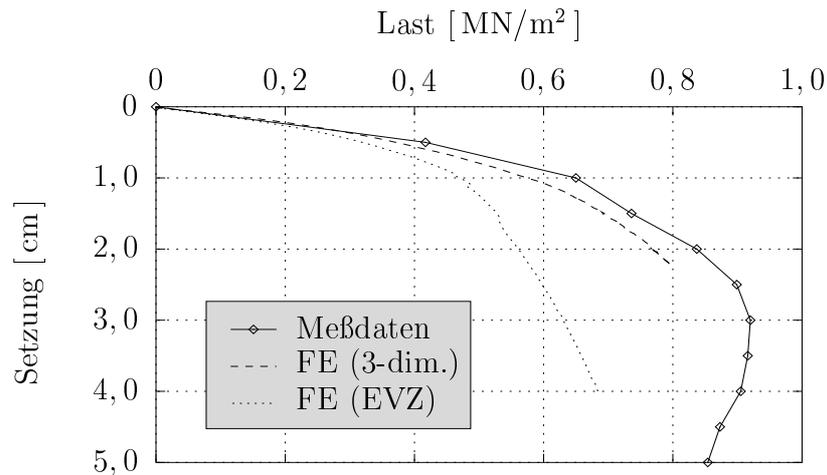


Abb. 9.20: Last-Setzungs-Kurven des *Degebo*-Versuchs: Vergleich der Meßdaten mit der numerischen Simulation

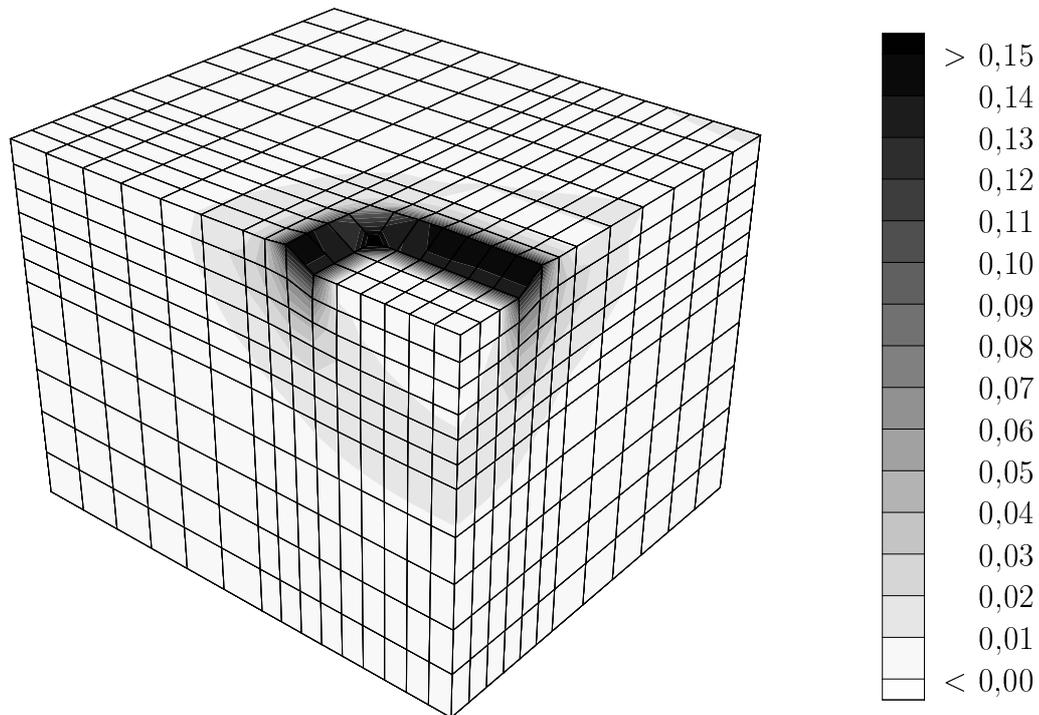


Abb. 9.21: *Degebo*-Versuch: Deformiertes Netz (dreifach überhöht) und plastische Vergleichsdehnung

9.1.4 Abgleitende Ecke

Das Beispiel „abgleitende Ecke“ dient der Überprüfung der Interface-Formulierung und wird hier in zwei Varianten vorgestellt, die in ähnlicher Form von Steinmann [98] bzw. Lambrecht [77] behandelt wurden. Anstelle des von Steinmann und Lambrecht verwendeten *von-Mises*-Plastizitätsmodells wird hier das Modell aus Kapitel 4 verwendet.

Variante I: Gerade Scherfuge

Bei der Variante I wird ein gerades Scherband erzeugt. Ein rechteckiger, fluidgesättigter Bereich mit den Abmessungen 10×16 m wird mit Dreieckselementen diskretisiert (Abb. 9.22). Der linke und der untere Rand sind gehalten, während ein Bereich von 6 m am oberen Rand verschiebungsgesteuert abgesenkt wird. Das Gebiet ist oben, neben dem abgesenkten Bereich, drainiert. Der Berechnung liegt die Annahme eines ebenen Verzerrungszustands zugrunde.

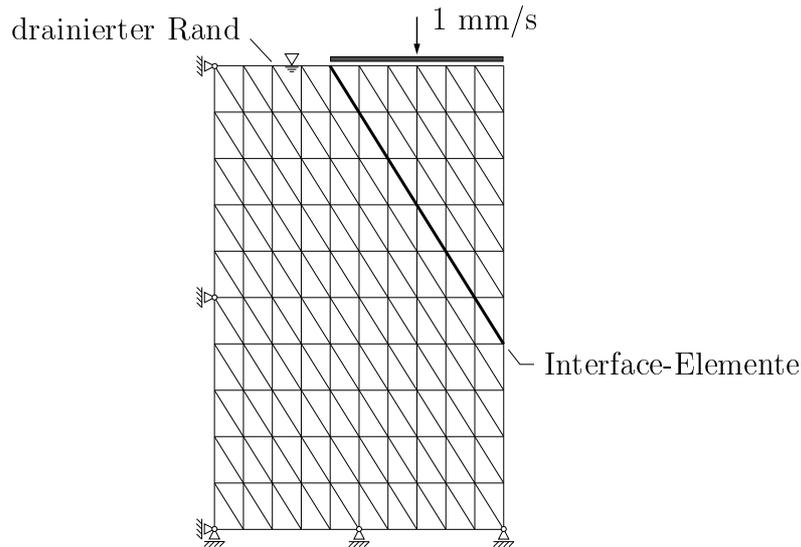


Abb. 9.22: Variante I: Diskretisierung der abgleitenden Ecke im EVZ (Variante I)

Der rechte, obere Rand des Gebiets wird um $\Delta u = 20$ cm abgesenkt. In einer kontinuierlichen Formulierung stellt sich infolge der Absenkung ein Scherband, d. h. eine Lokalisierung der plastischen Dehnungen, ein (Abb. 9.23, links).

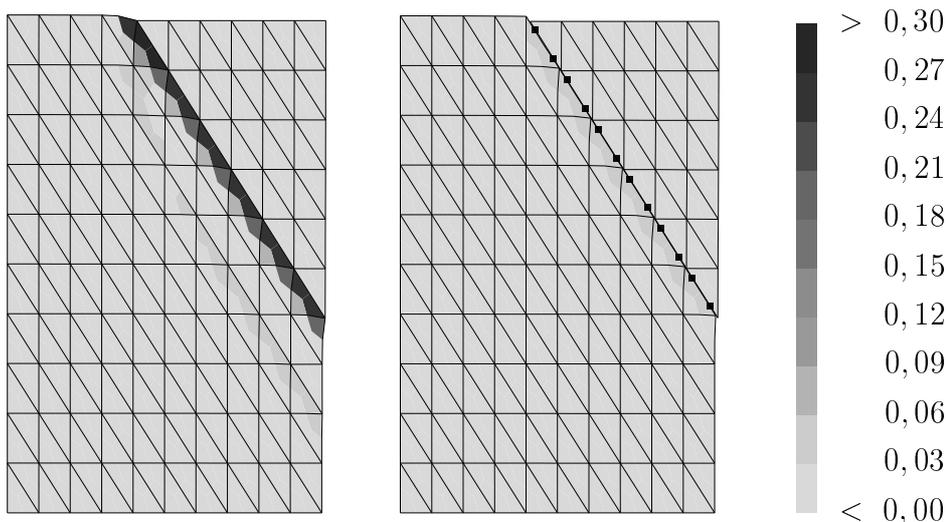


Abb. 9.23: Variante I: Plastische Vergleichsdehnung in der kontinuierlichen (links) und diskontinuierlichen (rechts) Formulierung

Bei der Verwendung von Interface-Elementen sind die plastischen Dehnungen in der Scherfläche konzentriert, vgl. Abb. 9.23, rechts. Der Winkel, unter dem sich das Scherband ausbildet, wird bei der Verwendung von Interface-Elementen vorgegeben und fließt als zusätzliche, apriorische Information in die Lösung des Randwertproblems mit ein.

In Abb. 9.24 ist der Porenfluidüberdruck p und mit Vektorpfeilen das zugehörige Strömungsfeld $n^F \mathbf{w}_F$ dargestellt. Das Scherband zeigt eine ausgeprägte Volumendilatanz, daher strömt das Porenfluid in den Bereich des Interface ein.

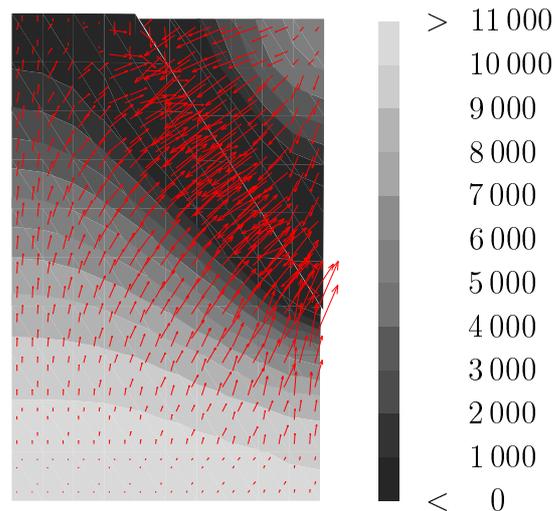


Abb. 9.24: Variante I: Strömungsfeld (Vektorpfeile) und Porenfluidüberdruck p [N/m²]

Variante II: Scherfuge entlang eines Kreisbogens

In der Variante II des Randwertproblems wird ein Scherband entlang eines Kreisbogens erzeugt. Der diskretisierte Bereich entspricht dem Bereich der Variante I. (Abb. 9.25). Der linke, der untere und der untere rechte Rand sind gehalten, während ein Bereich von 6 m am oberen Rand verschiebungsgesteuert um ein fixes Lager verdreht wird (Abb. 9.25).

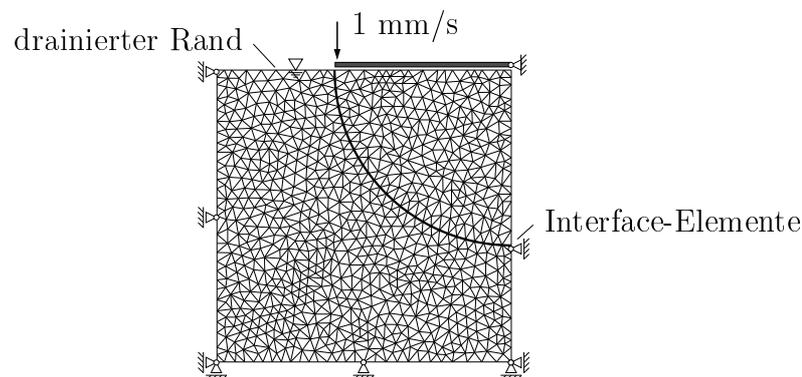


Abb. 9.25: Variante II: Diskretisierung der abgleitenden Ecke im EVZ

Es wird eine maximale Verdrehung des oberen Rands von 3° vorgegeben. In einer kontinuierlichen Formulierung stellt sich infolge der Verdrehung ein Scherband ein (Abb. 9.26,

links), das wie in Variante I eine Netzabhängigkeit aufweist.

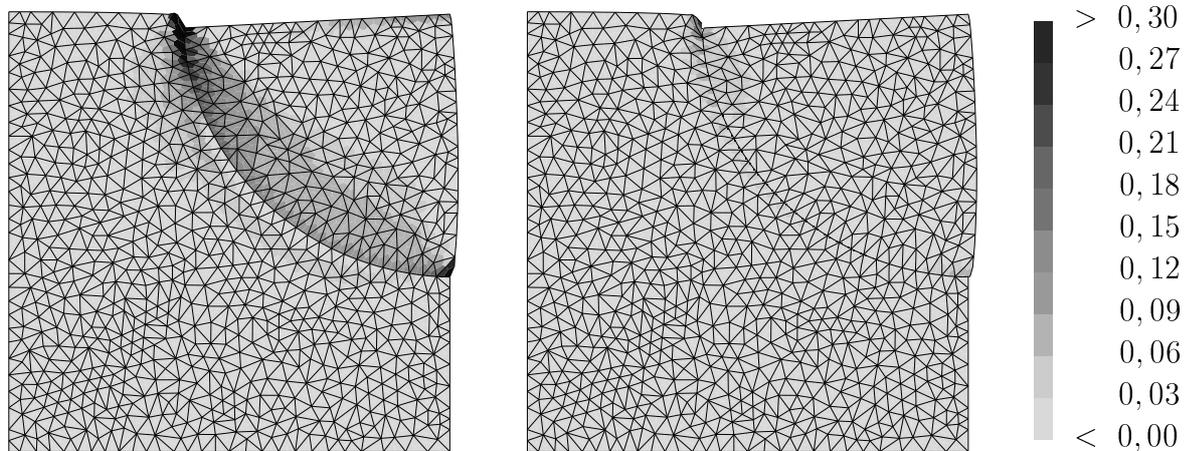


Abb. 9.26: Variante II: Plastische Vergleichsdehnung in der kontinuierlichen (links) und diskontinuierlichen (rechts) Formulierung

In Abb. 9.26, rechts, ist die plastische Dehnung bei der Verwendung von Interface-Elementen dargestellt. Die Dehnungen sind in der Scherfläche konzentriert, wenn auch an die Interface-Elemente angrenzende kontinuierliche Elemente plastische Dehnungen erfahren.

9.2 Rechnungen im Rahmen baupraktischer Anwendung

Die Rechnungen konkreter Randwertprobleme sollen zeigen, daß das entwickelte Stoffmodell dazu geeignet ist, Probleme mit baupraktischem Bezug zu lösen.

In Abschnitt 9.2.1 wird ein Einzelpfahl berechnet, dessen Tragmechanismus mit einer Lokalisierungsanalyse untersucht wird. Der Abschnitt 9.2.2 behandelt die Nachrechnung von Belastungsversuchen an verschiedenen Gründungsvarianten in einem Modellversuch. Schließlich wird in Abschnitt 9.2.3 das Strömungsfeld in einem Deich simuliert.

9.2.1 Einzelpfahl

Ein Einzelpfahl (Durchmesser 0,5 m) wird mit einer vorgegebenen Verschiebungsgeschwindigkeit von 1 mm/s senkrecht in einen wassergesättigten Boden gedrückt (Abb. 9.27, links). Der Pfahl überträgt die aufgebrachte Last in den Untergrund durch zwei Lastkomponenten: die Pfahlmantelreibung und die Pfahlfußkraft. Um die Pfahlmantelreibung zu aktivieren, muß der Pfahl eine Setzung erfahren, die zu einer Relativverschiebung zwischen dem Beton des Pfahlmantels und dem Bodenmaterial führt. Dieser Versatz resultiert in einer Scherzone entlang des Pfahlmantels, die durch eine Lokalisierungsanalyse (Abb. 9.27, Mitte) bei $t = 1$ s erkannt wird, noch bevor sich bei $t = 20$ s plastische Dehnungen einstellen (Abb. 9.27, rechts).

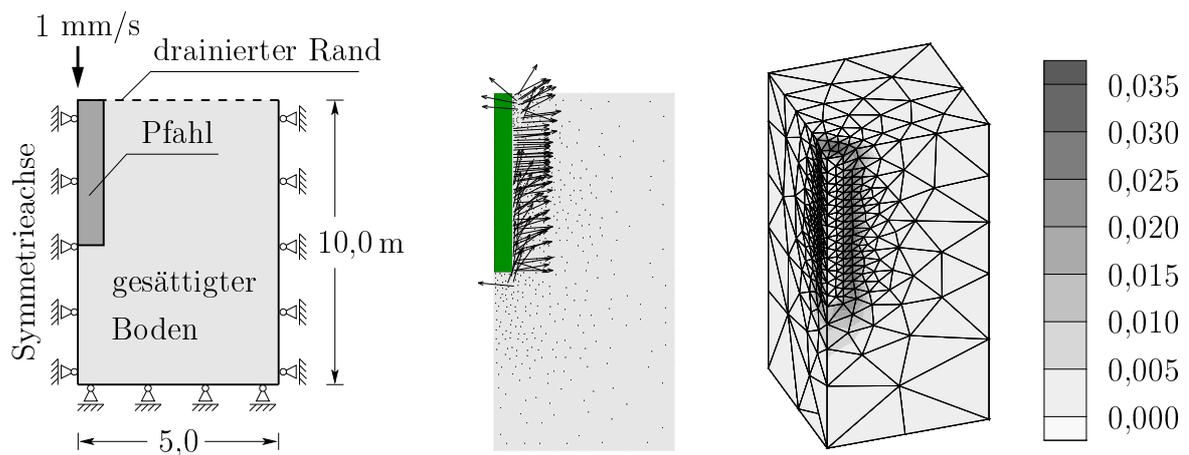


Abb. 9.27: Einzelpfahl: Randwertproblem, Lokalisierungsanalyse und plastische Vergleichsdehnung

9.2.2 Nachrechnung von Modellversuchen

An einem Modell im Maßstab 1:50 wurden von Katzenbach et al. [71] Belastungsversuche an einer kombinierten Pfahl-Platten-Gründung (KPP), einer Plattengründung und einer Pfahlgründung durchgeführt. Dabei wurde die KPP aus der Platten- und der Pfahlgründung zusammengesetzt, so daß vergleichbare Gründungsvarianten vorlagen.

Das Modell besteht aus einem Versuchsbehälter (Grundfläche $1,0 \times 1,0$ m) gefüllt mit trockenem, dicht gelagertem *Darmstädter* Sand (Füllhöhe 1,18 m). Die Flachgründung ist durch eine Aluminium-Platte und die Pfähle durch 64 cm lange PVC-Rohre gegeben, siehe Draufsicht in Abb. 9.28. Mit diesem Versuchsaufbau werden die Eigenschaften eines zugrunde gelegten Prototypen im Modellmaßstab wiedergegeben (vgl. Jessberger und Güttler [70]).

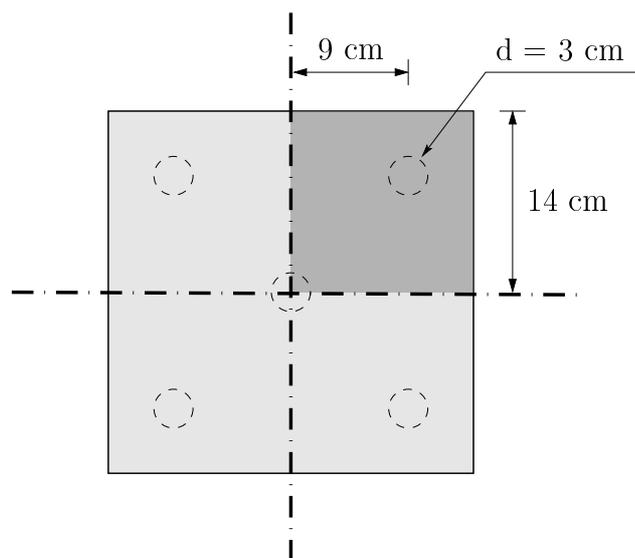


Abb. 9.28: Kombinierte Pfahl-Platten-Gründung: Diskretisierter Bereich in der Draufsicht

Bei der Diskretisierung des Modells werden die PVC-Rohre als quaderförmige Bauteile approximiert, deren Querschnitt flächengleich zum Rohrvollquerschnitt ist und die einen vergleichbaren Elastizitätsmodul zugewiesen bekommen. Eine Verschiebungssteuerung gibt eine starre Plattengründung vor, so daß die Aluminium-Platte nicht modelliert werden muß. Zwischen den Gründungskörpern und dem Bodenmaterial besteht idealer Verbund, d. h. das Randwertproblem wird standardmäßig als Kontinuum behandelt.

Der im Versuch verwendete *Darmstädter* Versuchssand ist mit *Berliner* Sand vergleichbar, so daß das hier vorgestellte Materialmodell (Kapitel 4) mit den entsprechenden Materialparametern eingesetzt werden kann. Allerdings berücksichtigt das nichtlineare Elastizitätsgesetz aus Abschnitt 4.1 Materialeigenschaften, die sich aus einer hydrostatischen Kompression des Materials und den daraus resultierenden plastischen Volumendehnungen ergeben. Diese hydrostatische Kompression wird im Modellversuch nicht erreicht, daher wird das Gesetz durch das lineare Elastizitätsgesetz nach *Hooke* ersetzt. Zur Übertragbarkeit von Plastizitätsmodellen auf den Modellmaßstab siehe z. B. Abdel-Rahman [1].

Die Berechnungen werden unter Ausnutzung einer doppelten Achsensymmetrie für alle Gründungsvarianten auf demselben Finite-Elemente-Netz durchgeführt; dabei werden 77 073 Verschiebungsfreiheitsgrade berechnet. In Abb. 9.29 ist das verwendete FE-Netz und die maximalen Vertikalverschiebungen bei der Berechnung der KPP dargestellt.

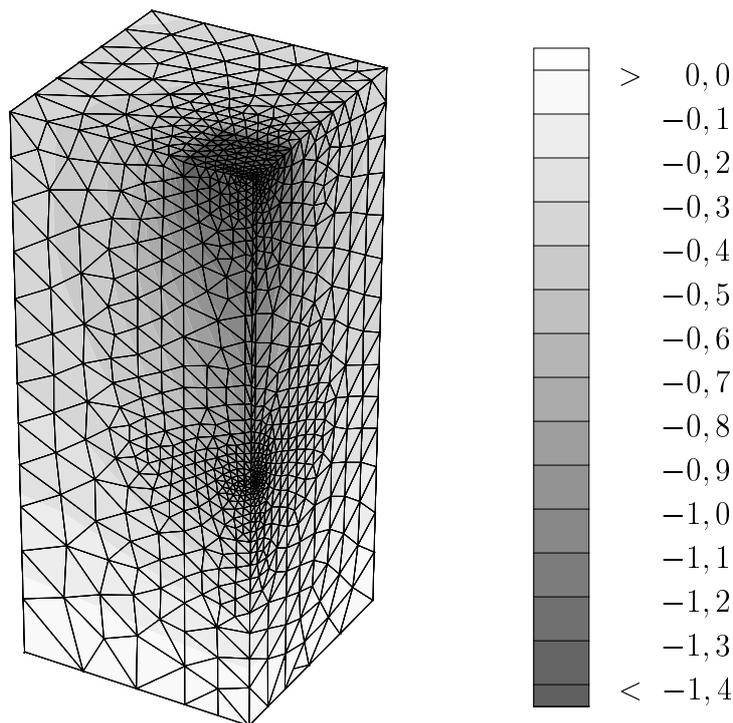


Abb. 9.29: Kombinierte Pfahl-Platten-Gründung: Deformiertes Netz (zehnfach überhöht) und Vertikalverschiebungen [mm]

In Abb. 9.30 sind die Last-Setzungs-Kurven des Modellversuchs (je zwei Versuchsserien) und der FE-Simulation vergleichend aufgetragen. Im Versuch wurden stufenweise Gewichte über eine Lasttraverse auf die Aluminium-Platte bzw. auf die Pfähle aufgebracht. Zur

Auswertung im direkten Vergleich wurden die resultierenden Spannungen aus der FE-Rechnung über die Fläche der Lastplatte bzw. der Pfahlköpfe integriert und in Masse umgerechnet.

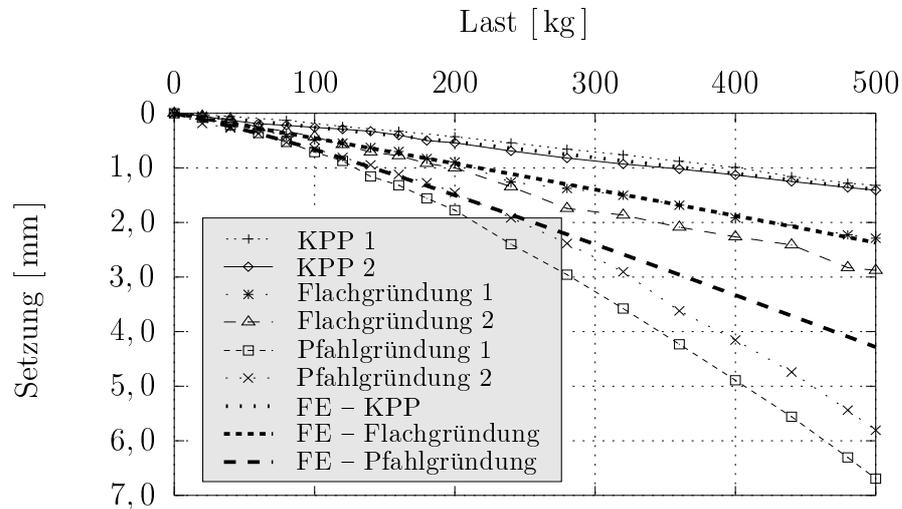


Abb. 9.30: Last-Setzungs-Kurven des *Darmstädter* Modellversuchs: Vergleich der Meßdaten (Katzenbach et al. [71]) mit der numerischen Simulation

Die Steifigkeit der Gründungskonstruktionen nimmt von der KPP über die Flachgründung zur Pfahlgründung hin ab. Dieses Ergebnis des Experiments wird durch die FE-Simulation qualitativ bestätigt. Die Meßdaten von KPP und Flachgründung werden quantitativ durch die Nachrechnung gut wiedergegeben; die rechnerische Last-Setzungs-Kurve der Pfahlgründung weist allerdings ein steiferes Verhalten als die Kurven aus dem Experiment auf. Dies läßt sich mit der kontinuierlichen Diskretisierung des Randwertproblems erklären, die eine Relativverschiebung der Pfähle gegenüber dem Boden nicht zuläßt und daher zu einer geringeren Setzung führt.

9.2.3 Durchströmung eines Deichs

In diesem Abschnitt wird die Sickerlinie in einem wasserdurchströmten Deich ermittelt. Der ausgewählte Deich besteht aus homogenem, schwach durchlässigem Bodenmaterial ($k_0^L = 10^{-6}$ m/s) und ist mit einer Basis von 110 m auf einer undurchlässigen Sohle gegründet. Ein horizontales Filterbett von 15 m Länge ist am landseitigen Deichfuß angeordnet (siehe Abb. 9.31). Der Deich ist durch sein Eigengewicht und durch einen Wasserstand von 15 m auf der Seeseite belastet.

Zu Beginn der Berechnung ist der Deich vollständig wassergesättigt. Das Wasser strömt unter dem Einfluß der Gravitation und dem Druck des anstehenden Wassers auf der Seeseite zum landseitigen Filterbett, bis sich ein stationärer Zustand eingestellt hat. Der partielle Wasserdruck im Deich liegt dann zwischen $+15 \cdot 10^4$ N/m² und $-10 \cdot 10^4$ N/m². Dies entspricht einer Wassersäule von 15 Metern auf der Seeseite des Deichs und einer Saugspannung von 10 Metern Wassersäule innerhalb des Deichs (Abb. 9.32).

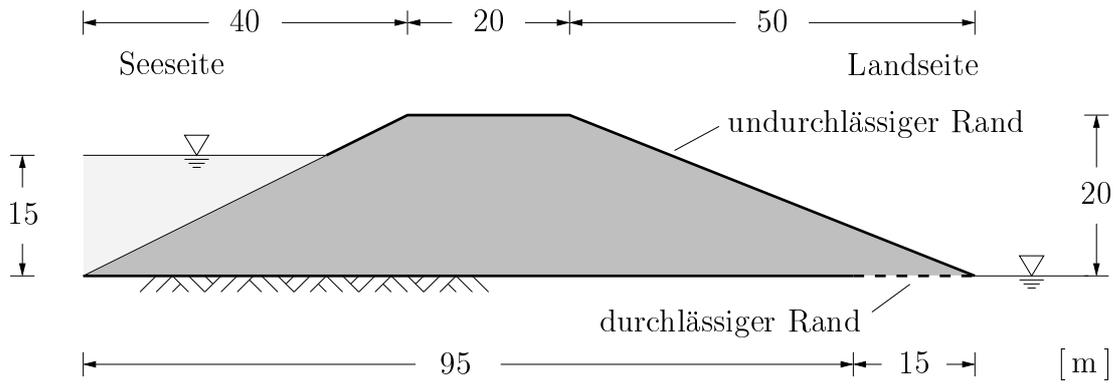


Abb. 9.31: Deich auf undurchlässiger Sohle

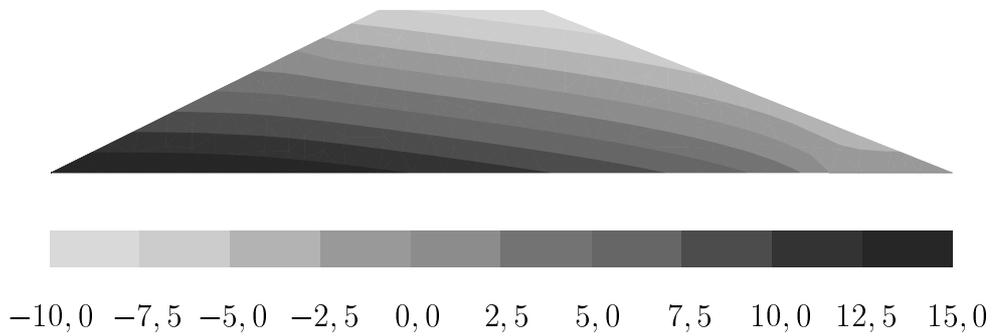


Abb. 9.32: Wasserdruck p^{LR} [10^4 N/m²]

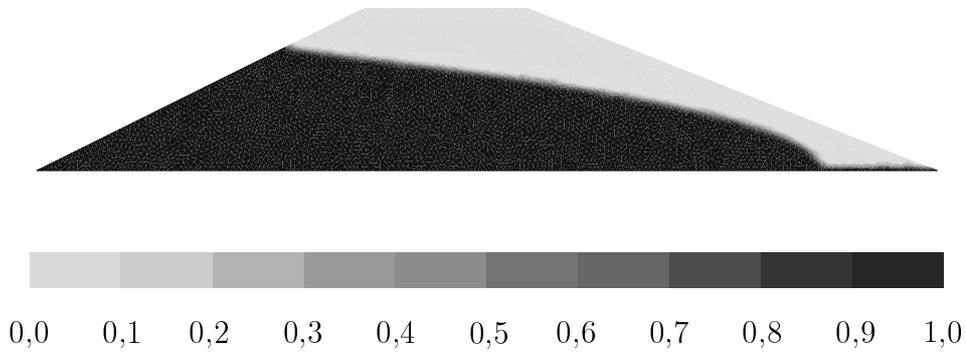


Abb. 9.33: Wassersättigung s^L [-]

Die Wassersättigung, die sich aufgrund des Kapillardrucks im Deich einstellt, ist in Abb. 9.33 dargestellt. Zwischen voll wassergesättigtem und leerem, d. h. gasgefülltem, Bereich bildet sich ein Kapillarsaum aus.

In Abb. 9.34 ist das Strömungsfeld des Wassers durch den Deich durch Vektorpfeile angegeben. Die Sickerlinie im Deich wird durch die deutliche Verkürzung der Pfeillängen markiert. Die Strömung findet nur in dem Gebiet mit positivem Wasserdruck, d. h. in der voll wassergesättigten Zone, statt.

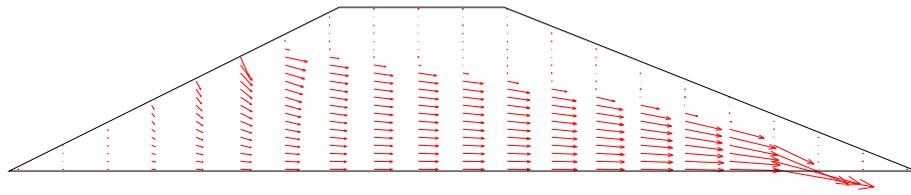


Abb. 9.34: Strömungsfeld des Wassers im Deich

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Baugrund-Modellierung auf der Basis der *Theorie Poröser Medien* zur realitätsnahen Beschreibung mechanischer und fluidmechanischer Bodeneigenschaften vorgestellt. Ausgehend von einer allgemeinen Definition mehrphasiger Materialien wurde das Material Boden durch ein Zwei- und ein Dreiphasen-Stoffmodell beschrieben.

Das Zweiphasenmodell besteht aus einem elastisch-plastischen Festkörper (Bodenskelett) und einer viskosen, materiell inkompressiblen Porenflüssigkeit (Porenwasser) bzw. einem viskosen, materiell kompressiblen Porengas (Porenluft). In Erweiterung dieses Zweiphasenmodells wurde ein Dreiphasenmodell entwickelt, das zum einen Lufteinschlüsse im Porenwasser berücksichtigt und damit eine materiell kompressible Fluidphase enthält und das zum anderen zwei separate Porenfluide (Wasser und Luft) behandelt. Mit diesem neuen Modell läßt sich neben gesättigtem und leerem Boden auch teilgesättigter Baugrund beschreiben. Die Abwärtskompatibilität des Modells auf das Standard-Zweiphasenmodell für materiell inkompressible Konstituierenden ist dabei gewährleistet. Außerdem läßt sich das Mehrphasenmodell durch „Weglassen“ der Porenfluide in das Einphasenmodell des Baugrund-Feststoffanteils überführen.

Zur Beschreibung der Elastoplastizität des Festkörperskeletts von Böden wurde ein physikalisch nichtlineares Elastizitätsgesetz und ein Plastizitätsmodell verwendet, das aus einem Einflächenfließkriterium mit einer isotropen Arbeitsverfestigung und einem plastischen Potential zur Bildung einer geeigneten Fließregel besteht. Für dieses Modell stand ein Parametersatz für *Berliner Sand* zur Verfügung.

Eine Interface-Formulierung für Mehrphasenmaterialien wurde zur Abbildung starker Diskontinuitäten, d. h. einem Sprung im Verschiebungsfeld, entwickelt. Dieser Sprung ergibt sich entlang von schubbelasteten Fundamentkörpern oder bei Versagenszuständen des Bodens, z. B. bei einem Grundbruch, in Form von einem Scherband. Zur Vorhersage von Scherbändern wurden schwache Diskontinuitäten im Rahmen einer Lokalisierungsanalyse, die auf Zweiphasenmaterialien beschränkt bleibt, betrachtet. Für ein spezielles Interface-Element wurden Konstitutivgesetze angegeben, die zu einer Projektion der mechanischen und fluidmechanischen Stoffgesetze des kontinuierlichen Mehrphasenkörpers in die Ebene der Diskontinuität führen.

Es wurden die für die numerische Simulation erforderlichen Gleichungen – einerseits stoffunabhängige Gleichungen bezüglich der Kinematik und der Bilanzen, andererseits Gleichungen der Konstitutivtheorie – kohärent dargestellt. Hieraus wurde ein Gleichungssystem gebildet, das in den Primärvariablen des Problems formuliert ist. Zur Lösung des in den Volumenanteilen gekoppelten Mehrfeldproblems wurden die Gleichungen in ihren schwachen Formen konsistent linearisiert. Eine Ortsdiskretisierung der linearisierten schwachen Formen im Rahmen der Methode der finiten Elemente und anschließende Zeit-

diskretisierung mit einem impliziten Zeitintegrationsverfahren führten zu einer Lösung des vorliegenden Gleichungssystems.

Schließlich zeigte die numerische Simulation verschiedener, teils baupraktischer Anfangs-Randwertprobleme mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Mehphasen-Stoffmodell im Ergebnis die wirklichkeitsnahe Beschreibung des Materialverhaltens von Böden. Zum einen wurde die Belastung eines Streifenfundaments auf *Berliner* Sand, die als großmaßstäblicher Versuch von der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik (*Degebo*) durchgeführt wurde, im Rahmen einer zwei- und dreidimensionalen Formulierung simuliert, zum anderen wurde ein Modellversuch an einer kombinierten Pfahl-Platten-Gründung im Maßstab 1:50 simuliert. Ergebnis ist das richtige numerische Nachfahren der in den Versuchen ermittelten Last-Setzungs-Kurven.

Im weiteren Vorgehen können mit dem entwickelten Mehrphasen-Stoffmodell für Böden anspruchsvolle Probleme aus den Bereichen der Geo- und Hydromechanik behandelt werden. Die Erweiterung des Modells zur Simulation von Transportvorgängen und Phasenwechselwirkungen, wie sie z. B. in der Hydrosystemmodellierung oder in der Biomechanik auftreten, würde ein sinnvolles Werkzeug zur Berechnung derartiger Problemstellungen zur Verfügung stellen.

Literaturverzeichnis

- [1] Abdel-Rahman, K.: *Numerische Untersuchung von Maßstabeffekten beim Erddruck in Sand*. Dissertation, Schriftenreihe des Lehrstuhls Baugrund-Grundbau, Heft 23. Universität Dortmund 1999.
- [2] Arslan, M. U.: Zur Frage des elastoplastischen Verformungsverhaltens von Sand. In Breth, H. (Hrsg.): *Beitrag zum Spannungs-Verformungsverhalten der Böden*. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der TH Darmstadt, Heft 23, 1980.
- [3] Bear, J.: *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Elsevier, New York 1972.
- [4] Beitz, W., Küttner, K.-H. (Hrsg.): *Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer-Verlag, 18. Auflage, Berlin 1995.
- [5] Biarez, J., Hicher, P.-Y.: *Elementary Mechanics of Soil Behaviour – Saturated Remoulded Soils*. Balkema, Rotterdam 1994.
- [6] Bishop, A. W.: The principle of effective stress. *Teknisk Ukeblad* **39** (1959), 859–863.
- [7] de Boer, R.: Highlights in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory. *Appl. Mech. Rev.* **49** (1996), 201–262.
- [8] de Boer, R.: *Theory of Porous Media: Highlights in Historical Development and Current State*. Springer-Verlag, Berlin 2000.
- [9] de Boer, R., Ehlers, W.: *Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme*. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 40, Universität-GH-Essen 1986.
- [10] de Boer, R., Ehlers, W.: The development of the concept of effective stresses. *Acta Mech.* **83** (1990), 77–94.
- [11] de Boer, R., Ehlers, W., Kowalski, S., Plischka, J.: *Porous Media – A Survey of Different Approaches*. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 54, Universität-GH-Essen 1991.
- [12] Bolzon, G., Schrefler, B. A., Zienkiewicz, O. C.: Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states. *Géotechnique* **46** (1996), 279–289.
- [13] Bowen, R. M.: Theory of mixtures. In Eringen, A. C. (Ed.): *Continuum Physics*, Bd. III. Academic Press, New York 1976, pp. 1–127.
- [14] Bowen, R. M.: Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int. J. Engng. Sci.* **18** (1980), 1129–1148.

- [15] Bowen, R. M.: Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int. J. Engng. Sci.* **20** (1982), 697–735.
- [16] Brooks, R. N., Corey, A. T.: Properties of porous media affecting fluid flow. *ASCE: J. Irrig. Drain. Div.* **92** (1966), 61–68.
- [17] Buckley, S. E., Leverett, M. C.: Mechanism of fluid displacements in sands. *Transactions of the AIME* **146** (1942), 107–116.
- [18] Busch, K. F., Luckner, L., Tiemer, K.: *Lehrbuch der Hydrogeologie: Geohydraulik*. Gebrüder Borntraeger, Stuttgart 1993.
- [19] Childs, E. C.: *An Introduction to the Physical Basis of Soil Water Phenomena*. Wiley-Interscience, London 1969.
- [20] Childs, E. C., Collis-George, N.: The permeability of porous materials. *Proc. Royal Soc.* **201 A** (1950), 392–405.
- [21] Darcy, H.: *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Dalmont, Paris 1856.
- [22] Diebels, S.: *Mikropolare Zweiphasenmodelle: Formulierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien*. Habilitation, Bericht Nr. II-4 aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen). Universität Stuttgart 2000.
- [23] Diebels, S., Ehlers, W.: Dynamic analysis of a fully saturated porous medium accounting for geometrical and material non-linearities. *Int. J. Numer. Methods Eng.* **39** (1996), 81–97.
- [24] Ehlers, W.: *Poröse Medien – ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie*. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 47, Universität-GH-Essen 1989.
- [25] Ehlers, W.: Compressible, incompressible and hybrid two-phase models in porous media theories. In Angel, Y. (Ed.): *Anisotropy and Inhomogeneity in Elasticity and Plasticity, AMD-Vol. 158*. ASME, New York 1993, pp. 25–38.
- [26] Ehlers, W.: Constitutive equations for granular materials in geomechanical context. In Hutter, K. (Ed.): *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*, CISM Courses and Lectures **337**. Springer-Verlag, Wien 1993, pp. 313–402.
- [27] Ehlers, W.: A single surface yield function for geomaterials. *Arch. Appl. Mech.* **65** (1995), 246–259.
- [28] Ehlers, W.: Grundlegende Konzepte in der Theorie Poröser Medien. *Technische Mechanik* **16** (1996), 63–76.
- [29] Ehlers, W.: Continuum and numerical simulation of porous materials in science and technology. In Capriz, G., Ghionna, V. N., Giovine, P. (Eds.): *Modeling and Mechanics of Granular and Porous Materials*. Birkhäuser, Boston 2002, pp. 245–292.

- [30] Ehlers, W.: Foundations of multiphasic and porous materials. In Ehlers, W., Bluhm, J. (Eds.): *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*. Springer-Verlag, Berlin 2002, pp. 3–86.
- [31] Ehlers, W., Blome, P.: *Ein Mehrphasen-Stoffmodell für Böden mit Übergang auf Interface-Gesetze, Zwischenbericht zum Teilprojekt 1 der DFG-Forschergruppe Baugrund-Tragwerk-Interaktion an der Technischen Universität Darmstadt, Ka 1153/5-1*. Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen), Nr. 99-II-14, Universität Stuttgart 1998.
- [32] Ehlers, W., Blome, P.: *Ein Mehrphasen-Stoffmodell für Böden mit Übergang auf Interface-Gesetze, 2. Zwischenbericht zum Teilprojekt 1 der DFG-Forschergruppe Baugrund-Tragwerk-Interaktion an der Technischen Universität Darmstadt, Ka 1153/5-2*. Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen), Nr. 00-II-3, Universität Stuttgart 2000.
- [33] Ehlers, W., Blome, P.: Modelling of soils by use of the theory of porous media. In Ehlers, W. (Ed.): *IUTAM Symposium on Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials*. Kluwer, Dordrecht 2000, pp. 209–214.
- [34] Ehlers, W., Blome, P.: On porous soil materials saturated with a compressible pore-fluid mixture. *ZAMM* **80** (2000), S141–S144.
- [35] Ehlers, W., Blome, P.: Consistent multiphase models for soils. Erscheint in R. Katzenbach, Arslan, U. (Eds.): *Darmstadt Geotechnics, No. 6*, 2001.
- [36] Ehlers, W., Blome, P.: Konsistente Mehrphasen-Stoffmodelle für Böden. Erscheint in R. Katzenbach, Arslan, U. (Hrsg.): *2. Workshop Baugrund-Tragwerk-Interaktion*, Mitteilungen des Institutes und der Versuchsanstalt für Geotechnik der TU Darmstadt, Heft 50, 2001.
- [37] Ehlers, W., Blome, P.: A multi-phase soil model including a soil-foundation interface. *ZAMM* **81** (2001), S523–S524.
- [38] Ehlers, W., Blome, P.: A triphasic model for unsaturated soil based on the theory of porous media. Erscheint in *Mathl. Comput. Modelling* (2001).
- [39] Ehlers, W., Blome, P.: On two-phasic flow problems in elasto-plastic porous materials. *PAMM* **1** (2002), 365–366.
- [40] Ehlers, W., Blome, P.: An elasto-plastic formulation of a soil-foundation interface. Erscheint in *PAMM* (2003).
- [41] Ehlers, W., Blome, P.: Theorie und Numerik eines Mehrphasen-Stoffmodells für Böden. Erscheint in R. Katzenbach (Hrsg.): *3. Workshop Baugrund-Tragwerk-Interaktion*, Mitteilungen des Institutes und der Versuchsanstalt für Geotechnik der TU Darmstadt, 2003.

- [42] Ehlers, W., Blome, P.: Theory and numerics of a multiphase model for soils. Erscheint in R. Katzenbach (Ed.): *Darmstadt Geotechnics*, 2003.
- [43] Ehlers, W., Blome, P., Müllerschön, H.: Baugrund-Modellierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien. In Katzenbach, R., Arslan, U. (Hrsg.): *Workshop Baugrund-Tragwerk-Interaktion*, Mitteilungen des Institutes und der Versuchsanstalt für Geotechnik der TH Darmstadt, Heft 38, 1997, pp. 65–90.
- [44] Ehlers, W., Bluhm, J.: (Eds.): *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*. Springer-Verlag, Berlin 2002.
- [45] Ehlers, W., Diebels, S., Blome, P.: Modelling of partially saturated soils by the theory of porous media. In Schanz, T. (Hrsg.): *3. Workshop Teilgesättigte Böden*, Schriftenreihe Geotechnik, Heft 6. Bauhaus-Universität Weimar 2001, pp. 91–112.
- [46] Ehlers, W., Droste, A.: Baugrund-Modellierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien. *ZAMM* **78** (1998), S357–S358.
- [47] Ehlers, W., Ellsiepen, P.: Theoretical and numerical methods in environmental continuum mechanics based on the theory of porous media. In Schrefler, B. A. (Ed.): *Environmental Geomechanics*, CISM Courses and Lectures **417**. Springer-Verlag, Wien 2001, pp. 1–81.
- [48] Ehlers, W., Ellsiepen, P., Ammann, M.: Time- and space-adaptive methods applied to localization phenomena in empty and saturated and micropolar and standard porous materials. *Int. J. Numer. Methods Eng.* **52** (2001), 503–526.
- [49] Ehlers, W., Ellsiepen, P., Blome, P., Mahnkopf, D., Markert, B.: *Theoretische und numerische Studien zur Lösung von Rand- und Anfangswertproblemen in der Theorie Poröser Medien, Abschlußbericht zum DFG-Forschungsvorhaben Eh 107/6-2*. Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen), Nr. 99-II-1. Universität Stuttgart 1999.
- [50] Ehlers, W., Müllerschön, H.: Stress-strain behaviour of cohesionless soils: Experiments, theory and numerical computations. In Cividini, A. (Ed.): *Application of Numerical Methods to Geotechnical Problems. Proceedings of the 4th European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering – NUMGE '98*, CISM Courses and Lectures **397**. Springer-Verlag, Wien 1998, pp. 675–684.
- [51] Ehlers, W., Müllerschön, H.: Zum Materialverhalten Granularer Stoffe – Theorie und Experimente. *ZAMM* **78** (1998), S363–S364.
- [52] Ehlers, W., Müllerschön, H.: On coupled solid-fluid problems for cohesionless soils. In Vitharana, N., Colman, R. (Eds.): *Consolidating Knowledge*, Bd. 2. The 8th Australia New Zealand Conference on Geomechanics 1999, pp. 945–951.
- [53] Ehlers, W., Müllerschön, H.: Parameteridentifikation für Granulare Materialien. *ZAMM* **79** (1999), S597–S598.

- [54] Ehlers, W., Müllerschön, H.: Parameter identification of a macroscopic granular soil model applied to dense berlin sand. *Granular Matter* **2** (2000), 105–112.
- [55] Ehlers, W., Volk, W.: The shear band problem in soil-structure interaction. In Katzenbach, R., Arslan, U. (Eds.): *Darmstadt Geotechnics*, Bd. 4(2). COST Action C7, Darmstadt 1998, pp. 397–409.
- [56] Eipper, G.: *Theorie und Numerik finiter elastischer Deformationen in fluidgesättigten porösen Festkörpern*. Dissertation, Bericht Nr. II-1 aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen). Universität Stuttgart 1998.
- [57] Ellsiepen, P. (Hrsg.): *PANDAS – Benutzer- und Referenzhandbuch*. Bericht Nr. 97-II-9 aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen). Universität Stuttgart 1997.
- [58] Ellsiepen, P.: *Zeit- und ortsadaptive Verfahren angewandt auf Mehrphasenprobleme poröser Medien*. Dissertation, Bericht Nr. II-3 aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen). Universität Stuttgart 1999.
- [59] Elmiger, R., Muhs, H.: Sohlspannung und Sohlreibung im Sand unter flachgegründeten Einzelfundamenten. In *Sohlreibung und Grenztragfähigkeit unter lotrecht und schräg belasteten Einzelfundamenten*, Bd. 24. Mitteilungen der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik (Degebo) an der Technischen Universität Berlin 1970, pp. 13–67.
- [60] Fredlund, D. G., Rahardjo, H.: *Soil mechanics for unsaturated soils*. John Wiley & Sons, New York 1993.
- [61] van Genuchten, M. T.: A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soc. of Petr. Eng. of AIME* **44** (1980), 892–898.
- [62] Groen, A. E.: *Three-dimensional elasto-plastic analysis of soils*. Dissertation, Delft University Press 1997.
- [63] Hadamard, J.: *Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique*. Herman, Paris 1903. Reprinted in 1949 by Chelsea Publishing Company, New York.
- [64] Haines, W. B.: Studies in the physical properties of soils. *IV. Journal Agric. Soc.* **17** (1927), 264–291.
- [65] Haupt, P.: Foundation of continuum mechanics. In Hutter, K. (Ed.): *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*, CISM Courses and Lectures **337**. Springer-Verlag, Wien 1993.
- [66] Haupt, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer-Verlag, Berlin 2000.
- [67] Helmig, R.: *Multiphase Flow and Transport Processes in Subsurface: A Contribution to the Modeling of Hydrosystems*. Springer-Verlag, Berlin 1997.

- [68] Hornung, U. (Ed.): *Homogenization and Porous Media*. Springer-Verlag, New York 1997.
- [69] Jaynes, D. B.: Soil water hysteresis: Models and implications. In Anderson, M. G., Burt, T. P. (Eds.): *Process Studies in Hillslope Hydrology*. John Wiley & Sons, New York 1990.
- [70] Jessberger, H. L., Güttler, U.: Geotechnische Großzentrifuge Bochum – Modellversuche im erhöhten Schwerfeld. *Geotechnik* **11** (1988), 85–97.
- [71] Katzenbach, R., Gutberlet, C., Ittershagen, M., Kinzel-Turek, J., Turek, J.: Möglichkeiten und Grenzen der Modellbildungen zur Untersuchung der Baugrund-Tragwerk-Interaktion. Erscheint in R. Katzenbach (Hrsg.): *3. Workshop Baugrund-Tragwerk-Interaktion*, Mitteilungen des Institutes und der Versuchsanstalt für Geotechnik der TU Darmstadt, 2003.
- [72] Kim, M. K., Lade, P. V.: Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials I. Plastic Potential Function. *Computers and Geotechnics* **5** (1988), 307–324.
- [73] Klubertanz, G.: *Zur hydromechanischen Kopplung in dreiphasigen porösen Medien*. Département de Génie Civil, Thèse No. 2027. École Polytechnique Fédérale de Lausanne 1999.
- [74] Klubertanz, G., Laloui, L., Vulliet, L.: Numerical modelling of the hydro-mechanical behaviour of unsaturated porous media. *NAFEMS Proceedings, Universität Stuttgart* (1997), 1302–1313.
- [75] Kolditz, O.: *Computational Methods in Environmental Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin 2002.
- [76] Lade, P. V., Kim, M. U.: Single hardening constitutive model for frictional material, Part I/II. *Computers and Geotechnics* **6** (1988), 13–47.
- [77] Lambrecht, M.: *Theorie und Numerik von Materialinstabilitäten elastoplastischer Festkörper auf der Grundlage inkrementeller Variationsformulierungen*. Dissertation, Bericht Nr. I-8 aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen). Universität Stuttgart 2002.
- [78] Larsson, J.: *On the Modelling of Porous Media with Emphasis on Localization*. Ph. D. Thesis, Chalmers University of Technology 1999.
- [79] Larsson, J., Larsson, R.: Finite-element analysis of localization of deformation and fluid pressure in an elastoplastic porous medium. *Int. J. Solids and Structures* **37** (2000), 7231–7257.
- [80] Larsson, R., Runesson, K., Ottosen, N.: Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization. *Int. J. Numer. Methods Eng.* **36** (1993), 2087–2105.

- [81] Lewis, R. W., Schrefler, B. A.: *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*, 2nd Edition. John Wiley & Sons, Chichester 1998.
- [82] Liakopoulos, A. C.: *Transient flow through unsaturated porous media*. Ph. D. Thesis, University of California 1965.
- [83] Mahnkopf, D.: *Lokalisierung fluidgesättigter poröser Festkörper bei finiten elasto-plastischen Deformationen*. Dissertation, Bericht Nr. II-5 aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen). Universität Stuttgart 2000.
- [84] Maxwell, J. C.: *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Oxford 1881.
- [85] Miller, E. E., Miller, R. D.: Physical theorie for capillary flow phenomena. *Journal of Applied Physics* **27(4)** (1956), 324–332.
- [86] Montenegro-Ferrigno, H.: Parameterbestimmung und Modellierung der Wasserbewegung in heterogenen Böden. In *Umwelttechnik*, VDI Fortschritt-Berichte Nr. 134, Reihe 15. VDI-Verlag, Düsseldorf 1956.
- [87] Müllerschön, H.: *Spannungs-Verformungsverhalten granularer Materialien am Beispiel von Berliner Sand*. Dissertation, Bericht Nr. II-6 aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen). Universität Stuttgart 2000.
- [88] Parker, J., Lenhard, R.: A model for hysteretic constitutive relations governing multiphase flow. 1. saturation-pressure relations. *Water Resour. Res.* **23** (1987), 2187–2196.
- [89] Perzyna, P.: Fundamental problems in viscoplasticity. *Adv. Appl. Mech.* **9** (1966), 243–377.
- [90] Reul, O.: *In-situ-Messungen und numerische Studien zum Tragverhalten der Kombinierten Pfahl-Plattengründung*. In Katzenbach, R., Arslan, U. (Hrsg.): *Mitteilungen des Institutes und der Versuchsanstalt für Geotechnik*, Heft 53, 2000.
- [91] Richwien, W., Perau, E., Golücke, K.: Beschreibung von Luft-Wasserströmungen in Böden. *Bauingenieur* **72(5)** (1997), 215–220.
- [92] Ricken, T.: *Kapillarität in porösen Medien*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Essen. Shaker Verlag, Aachen 2002.
- [93] Schanz, T.: *Zur Modellierung des mechanischen Verhaltens von Reibungsmaterialien*. Habilitation, Institut für Geotechnik, Mitteilung 45. Universität Stuttgart 1998.
- [94] Schrefler, B. A., Simoni, L., Xikui, L., Zienkiewicz, O. C.: Mechanics of partially saturated porous media. In Desai, C. S., Gioda, G. (Eds.): *Numerical methods and constitutive modelling in geomechanics*, CISM Courses and Lectures **311**. Springer-Verlag, Wien 1990, pp. 169–209.

- [95] Schubert, H.: *Kapillarität in porösen Feststoffsystemen*. Springer-Verlag, Berlin 1982.
- [96] Skempton, A. W.: Significance of Terzaghi's concept of effective stress (Terzaghi's discovery of effective stress). In Bjerrum, L., Casagrande, A., Peck, R. B., Skempton, A. W. (Eds.): *From Theory to Practice in Soil Mechanics*. John Wiley & Sons, New York 1960, pp. 42–53.
- [97] Smolczyk, U. (Hrsg.): *Grundbau-Taschenbuch*. Teil 1: Geotechnische Grundlagen, 6. Auflage. Ernst & Sohn, Berlin 2001.
- [98] Steinmann, P.: A finite element formulation for strong discontinuities in fluid-saturated porous media. *Mech. Cohes.-Frict. Mater.* **4** (1999), 133–152.
- [99] Steinmann, P., Larsson, R., Runesson, K.: On the localization properties of multiplicative hyperelasto-plastic continua with strong discontinuities. *Int. J. Solids and Structures* **34** (1997), 969–990.
- [100] Stumpf, M.: Kapillardruck-Sättigungs-Beziehung (p - s -Kurve) von Sand und numerische Simulation der Versuche mit der Finite-Elemente-Methode. Diplomarbeit, Institut für Geotechnik, TU Darmstadt 2001.
- [101] Taylor, J. R.: *Fundamentals of Soil Mechanics*. John Wiley & Sons, New York 1948.
- [102] Terzaghi, K., Jelinek, R.: *Theoretische Bodenmechanik*. Springer-Verlag, Berlin 1954.
- [103] Truesdell, C.: *Rational Thermodynamics*, 2nd Edition. Springer-Verlag, New York 1984.
- [104] Vogler, M.: *Einfluß der Kapillarität auf die Mehrphasenströmung bei der Sanierung von Mineralölschadensfällen im Boden*. In Katzenbach, R., Arslan, U. (Hrsg.): *Mitteilungen des Institutes und der Versuchsanstalt für Geotechnik*, Heft 45, 1999.
- [105] Weiß, K.: *Der Einfluß der Fundamentform auf die Grenztragfähigkeit flachgegründeter Fundamente*, Bd. 25. *Mitteilungen der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik (Degebo)* an der Technischen Universität Berlin 1970.
- [106] Wieners, C., Ammann, M., Diebels, S., Ehlers, W.: Parallel 3-d simulations for porous media models in soil mechanics. *Comp. Mech.* **29** (2002), 75–87.
- [107] Wood, D. M.: *Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics*. Cambridge University Press 1990.
- [108] Wriggers, P.: *Konsistente Linearisierung in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Elemente-Methode*, Bd. F 88/4. Universität Hannover 1988.
- [109] Wriggers, P., Haraldsson, A.: A frictional law for soil-concrete contact based on a numerical model for the microstructure. In Katzenbach, R., Arslan, U. (Eds.): *Darmstadt Geotechnics*, Bd. 4(2). COST Action C7, Darmstadt 1998, pp. 333–344.

- [110] Zienkiewicz, O. C.: Coupled problems and their numerical solution. In Lewis, R. W., Bettess, P., Hinton, E. (Eds.): *Numerical Methods in Coupled Systems*. John Wiley & Sons, New York 1984.

Lebenslauf

Klaus-Peter Blome

09.06.1969	geboren in Essen
1975 – 1979	Grundschule in Essen
1979 – 1988	Burggymnasium in Essen Abschluß: Abitur
10/1988 – 09/1989	Grundwehrdienst in Dörverden
10/1989 – 09/1990	Ruhr-Universität Bochum Studiengang Physik
10/1990 – 10/1996	Universität-Gesamthochschule Essen Studiengang Bauingenieurwesen Abschluß: Diplom-Ingenieur
12/1996 – 04/2003	Universität Stuttgart wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik (Bauwesen)
seit 05/2003	Autoliv GmbH, Elmshorn Berechnungsingenieur

Bisher in dieser Reihe erschienen:

- II-1 G. EIPPER: Theorie und Numerik finiter elastischer Deformationen in fluidgesättigten porösen Festkörpern, Juni 1998.
- II-2 W. VOLK: Untersuchung des Lokalisierungsverhaltens mikropolarer poröser Medien mit Hilfe der *Cosserat*-Theorie, Mai 1999.
- II-3 P. ELLSIEPEN: Zeit- und ortsadaptive Verfahren angewandt auf Mehrphasenprobleme poröser Medien, Juli 1999.
- II-4 S. DIEBELS: Mikropolare Zweiphasenmodelle: Formulierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien, März 2000.
- II-5 D. MAHNKOPF: Lokalisierung fluidgesättigter poröser Festkörper bei finiten elastoplastischen Deformationen, März 2000.
- II-6 H. MÜLLERSCHÖN: Spannungs-Verformungsverhalten granularer Materialien am Beispiel von Berliner Sand, August 2000.
- II-7 S. DIEBELS (Hrsg.): Zur Beschreibung komplexen Materialverhaltens: Beiträge anlässlich des 50. Geburtstages von Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers, August 2001.
- II-8 J. WIDJAJAKUSUMA: Quantitative Prediction of Effective Material Parameters of Heterogeneous Materials, Juni 2002.
- II-9 A. DROSTE: Beschreibung und Anwendung eines elastisch-plastischen Materialmodells mit Schädigung für hochporöse Metallschäume, Oktober 2002.
- II-10 K.-P. BLOME: Ein Mehrphasen-Stoffmodell für Böden mit Übergang auf Interface-Gesetze, Oktober 2003.