



Universität Stuttgart

Germany

Institut für Mechanik (Bauwesen) Lehrstuhl II, Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

Poröse Medien

ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie

Wolfgang Ehlers



Bericht Nr.: II-21 (2011)

Mit den besten Wünschen überreicht vom MIB2-Team



Poröse Medien ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie

Vom Fachbereich 10 – Bauwesen der Universität-Gesamthochschule-Essen genehmigte Habilitationsschrift

> von Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. R. de Boer Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns Prof. Dr.-Ing. G. Thierauf

Tag der Habilitation: 19. April 1989

Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers 2011 Bericht Nr. II-21 Institut für Mechanik (Bauwesen) Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik Universität Stuttgart, Deutschland, 2011

Neuauflage der Originalarbeit Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 47 Herausgeber: Der Dekan des Fachbereichs 10 – Bauwesen der Universität-Gesamthochschule-Essen 1989

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

Gasteditoren:

PD Dr.-Ing. B. Markert Dr.-Ing. N. Karajan

© Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers Institut für Mechanik (Bauwesen) Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik Universität Stuttgart Pfaffenwaldring 7 70569 Stuttgart, Germany

> 1989: Priv. Doz. Dr.-Ing. W. Ehlers Universität-Gesamthochschule-Essen Fachbereich 10 – Bauwesen Fachgebiet Mechanik Universitätsstr. 15 D-4300 Essen 1

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise in jeglicher Form zu vervielfältigen.

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Akademischer Oberrat im Fachbereich 10 – Bauwesen, Fachgebiet Mechanik, der Universität – Gesamthochschule – Essen.

Von Herrn Prof. Dr.-Ing. R. de Boer wurde ich zu dieser Arbeit angeregt. Ihm danke ich herzlich für die großzügige Förderung, konstruktive Unterstützung und stete Bereitschaft zu hilfreichen Diskussionen sowie für die Übernahme des ersten Gutachtens.

Mein besonderer Dank gilt weiterhin den Herren Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns und Prof. Dr.-Ing. G. Thierauf für die Übernahme der weiteren Gutachten sowie für zahlreiche wertvolle Anregungen und Hinweise.

Ferner danke ich Frau S. Frohleiks für das mit großem Geschick angefertigte Manuskript und Frau V. Jorisch für die Herstellung sämtlicher Abbildungen und Tabellen.

Essen, im November 1989

Wolfgang Ehlers

Vorwort

Die meisten praxisrelevanten Probleme des Ingenieurwesens werden auf der Basis einer Kontinuumstheorie eines einzelnen homogenen Materials behandelt, ohne daß die innere Struktur des Materials oder die Zusammensetzung des Materials aus verschiedenen Bestandteilen berücksichtigt wird. Es ist erstaunlich, daß diese doch sehr einfache Betrachtungsweise von in der Regel viel komplizierter aufgebauten Strukturen überhaupt einen so großen Erfolg haben konnte; der Anwendungsbereich der klassischen Kontinuumsmechanik erstreckt sich immerhin von der Strömungs- oder Fluidmechanik, über Aerodynamik und der Dynamik starrer Körper bis hin zur allgemeinen Festkörpermechanik.

Der Erfolg der klassischen Kontinuumsmechanik ist sicher eine Frage der Größenordnung der kleinsten betrachteten Anteile des zu beschreibenden Materials. In einem hinreichend kleinen Maßstab, also im Mikrobereich, sind die verschiedenen Materialien weder homogen, noch sind die Voraussetzungen erfüllt, ein solches Material als Kontinuum zu behandeln. Vielmehr besitzen im Mikrobereich fast alle Materialien einerseits eine innere Struktur; andererseits sind sie häufig aus unterschiedlichen Bestandteilen mit verschiedenen physikalischen und chemischen Eigenschaften heterogen zusammengesetzt. Wird dagegen ein hinreichend großer bzw. makroskopischer Maßstab zur Beschreibung des Materials gewählt, so müssen alle gemessenen Materialwerte als statistische Mittelwerte der im Mikrobereich auftretenden Größen verstanden werden. Unter diesen Voraussetzungen ist die Annahme eines homogenen und kontinuierlich verteilten Materials in den meisten Fällen gerechtfertigt. Demzufolge ist die klassische phänomenologische Kontinuumsmechanik der Einkomponentenmedien als makroskopische Theorie aufzufassen.

Es existieren jedoch etliche Materialien, die sich nicht im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik beschreiben lassen. Dazu gehören alle Mischungen ebenso wie der gesamte Bereich der porösen Medien, wobei unter einem porösen Medium im folgenden ein poröser Festkörper verstanden wird, dessen Porenräume mit Flüssigkeiten oder Gasen oder Flüssigkeiten und Gasen gefüllt sind. Diese Materialien zeichnen sich dadurch aus, daß sie erstens nicht aus einem einheitlichen Material bestehen und daß andererseits eine Relativbewegung zwischen den Bestandteilen des Gesamtkörpers zugelassen werden muß. Die Tatsache als solche, daß eine Mischung oder ein poröses Medium aus mehr als einem Material besteht, wäre allein noch kein zwingender Grund, ein solches Medium nicht innerhalb der klassischen Kontinuumsmechanik zu beschreiben; hier ließen sich sicherlich, ebenso wie im Anwendungsbereich vieler Verbundwerkstoffe, gewisse Techniken entwickeln, die unter Voraussetzung einer statistischen Verteilung der unterschiedlichen Anteile im Gesamtmaterial das Makromodell eines klassischen Kontinuums rechtfertigen würden. Schwerwiegender ist die Tatsache, daß bei Mischungen und porösen Medien unterschiedliche Bewegungszustände der Teilkörper vorausgesetzt werden müssen, was nichts anderes bedeutet, als daß man ein Medium mit inneren Freiheitsgraden zu beschreiben hat. Darüber hinaus können Massenkopplungen infolge Phasentransformation einiger Bestandteile des Körpers auftreten, und es ist mit Kopplungen in Bewegungsgröße, Drall und Energie zwischen den verschiedenen Anteilen des Gesamtkörpers zu rechnen.

Diese Ausführungen zeigen, daß eine kontinuumsmechanische Beschreibung von Mischungen ebenso wie von porösen Medien nur im Rahmen einer Theorie "heterogen zusammengesetzter Materialien mit inneren Wechselwirkungen"erfolgen kann. Während diese Vorgehensweise bei der theoretischen Beschreibung von Gasgemischen schon seit mehr als einhundert Jahren angewandt wird und schließlich in den letzten dreißig Jahren zur Entwicklung der Mischungstheorie geführt hat, sind bei der Behandlung poröser Medien sehr viele verschiedene und zum Teil sehr vereinfachende Wege versucht worden. Der Grund für dieses unterschiedliche Vorgehen liegt in erster Linie darin, daß ein poröses Medium natürlich keine ideale Mischung darstellt, bei der man von vornherein von einer idealen Vermengung auch der kleinsten Bestandteile des Körpers ausgehen kann. Ein poröses Medium zeichnet sich vielmehr dadurch aus, daß es aus verschiedenen, sich auch im makroskopischen Bereich gegeneinander abgrenzenden Materialien heterogen zusammengesetzt ist. Eine kontinuumsmechanische Beschreibung poröser Medien kann daher nur im Rahmen einer idealisierenden Modellbildung durchgeführt werden, wie sie z. B. durch das Konzept der Volumenanteile gegeben ist.

Durch ein intensives Studium der Literatur zu porösen Medien wird man feststellen, daß der geeignetste Weg zur Beschreibung dieser Materialien innerhalb der Mischungstheorie zu finden ist, sofern man die Mischungstheorie um das Konzept der Volumenanteile ergänzt. Innerhalb der Mischungstheorie können alle relevanten Kopplungsmechanismen zwischen dem porösen Festkörper und den Poreninhalten beschrieben werden. Viele klassische Modelle poröser Medien, wie die von Terzaghi oder Biot, um nur die bekanntesten zu nennen, lassen sich als Vereinfachungen der oben genannten Vorgehensweise entwickeln. Die Wahl komplizierterer Grundlagen zur Beschreibung poröser Medien als die Mischungstheorie, wie z. B. die Theorie der Mehrphasengemische oder die Einarbeitung verschiedener Direktoren-Theorien erscheint zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht angeraten zu sein, führen diese Theorien doch eher auf eine weitere Komplizierung der zu entwickelnden Beziehungen als zu Gleichungen, mit denen sich praktische Probleme des Ingenieurwesens bei vertretbarer Idealisierung besser bzw. genauer beschreiben ließen. Nicht nur im Ingenieurbereich muß sich jede Theorie daran messen lassen, wie praxisrelevant sie ist, d. h. wie genau die betrachteten Phänomene bei vertretbarem Aufwand beschrieben werden können.

Die Theorie poröser Medien, wie sie in der vorliegenden Arbeit dargelegt ist, ist zur Beschreibung vieler ingenieurwissenschaftlicher Probleme geeignet. Auf der Basis dieser Theorie können flüssigkeits- und gasgefüllte poröse Festkörper ebenso beschrieben werden wie die sogenannten leeren Festkörperskelette, also poröse Medien, bei denen die mechanische Wirkung des Poreninhalts vernachlässigt wird.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort					
1	Einführung				
2	Zur Geschichte der Mischungstheorie und der Theorie poröser Medien				
3	Das	Konzept der Volumenanteile	21		
4	Mis	chungstheorie	25		
	4.1	Einleitung	25		
	4.2	Kinematik	26		
	4.3	Bilanzgleichungen	29		
	4.4	Entropieungleichung	33		
	4.5	Ergänzende Bemerkungen	36		
5	Gru	ndlagen der konstitutiven Theorie	43		
	5.1	Einleitung	43		
	5.2	Voraussetzungen und Annahmen	44		
	5.3	Thermodynamische Prozeßvariablen	48		
	5.4	Zerlegung der Deformationen	53		
	5.5	Isotropiegruppe für Materialien zweiten Grades	64		
	5.6	Materielle Objektivität	74		
	5.7	Zusammenstellung der Ergebnisse	80		
	5.8	Ergänzende Bemerkungen	90		
6	Das Modell eines flüssigkeitsgesättigten, elastisch-plastisch deformier-				
	bare	en porösen Körpers	91		
	6.1	Einleitung	91		
	6.2	Grundlegende Beziehungen	92		
	6.3	Thermodynamische Restriktionen	96		

	6.4	Konstitutive Gleichungen und thermodynamische Restriktionen in der Nähe			
		des Mischungsgleichgewichts			
	6.5	Vereinfachtes konstitutives Modell			
	6.6	Ergänzende Bemerkungen			
7	Ein	Elastizitätsgesetz für isotrope poröse Körper 131			
	7.1	Einleitung			
	7.2	Voraussetzungen und Annahmen			
	7.3	Nichtlineare Elastizität			
	7.4	Linearisierte Elastizitätsgesetze			
	7.5	Ein Vergleich verschiedener Elastizitätsgesetze			
	7.6	Ergänzende Bemerkungen			
8	Elas	stisch-plastisches Materialverhalten poröser Körper 153			
	8.1	Einleitung			
	8.2	Fließbedingung			
	8.3	Fließregel			
	8.4	Inkrementelle Materialgleichungen			
	8.5	Ergänzende Bemerkungen			
9	Ein	ige Ergänzungen zum Modell eines flüssigkeitsgesättigten, elastisch-			
	plastisch deformierbaren porösen Körpers				
	9.1	Einleitung			
	9.2	Wärmeleitungsgleichung			
	9.3	Bewegungsgleichungen			
	9.4	Zur Implementierung der Theorie poröser Medien in numerische Algorithmen180			
	9.5	Ergänzende Bemerkungen			
10	Abs	chließende Bemerkungen 185			
Α	Rec	henregeln – ohne Beweis 187			
	A.1	Tensoren höherer Stufe			
	A.2	Gradienten und Divergenzen			
	A.3	Ableitungen nach Tensoren 2. Stufe			

В	Gruppen linearer Abbildungen 2. Grades		
	B.1	Die lineare Gruppe \mathcal{L}	193
	B.2	Die eigentlich unimodulare Gruppe \mathcal{U}_e	196
	B.3	Die eigentlich orthogonale Gruppe \mathcal{O}_e	198
С	Tab	ellen	201
Literatur			209

Kapitel 1: Einführung

Die Beschreibung des thermodynamischen Verhaltens poröser Medien, also flüssigkeitsund/oder gasgefüllter poröser Festkörper hat in den letzten Jahrzehnten durch die fortschreitende technologische Entwicklung zunehmend an Interesse gewonnen. Häufig reichen die in der Vergangenheit entwickelten, zum Teil stark vereinfachenden Berechnungsverfahren heute nicht mehr aus, den vielfältigen Problemstellungen aus solch unterschiedlichen Bereichen wie dem Petroingenieurwesen, dem Bergbau, der Bodenmechanik, dem Felsbau, dem Massivbau, der Bauphysik oder der Werkstofftechnik zu genügen. Gerade in diesen Bereichen muß dem Zusammenwirken von Feststoff und Fluiden oftmals große Aufmerksamkeit geschenkt werden; d. h. es ist nicht nur das Deformationsverhalten des Festkörpers oder das Strömungs- oder Diffusionsverhalten der Poreninhaltsstoffe isoliert zu betrachten, sondern es ist auch die gegenseitige Beeinflussung des Feststoffes und der Fluide zu untersuchen.

Bei der Entwicklung einer Theorie poröser Medien bieten sich zunächst grundsätzlich verschiedene Wege an. Zum einen können die einzelnen Teilkörper im Sinne des Eulerschen Schnittprinzips aus dem Gesamtkörper herausgetrennt und dann jeweils für sich im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik der Einkomponentenkörper behandelt werden; zum anderen lassen sich Ersatzkontinua schaffen, auf deren Basis sich das Materialverhalten eines idealisierten Gesamtmodells angeben läßt. Der Vorteil der erstgenannten Vorgehensweise besteht darin, daß man bei der Beschreibung des Stoffverhaltens der Teilkörper auf die Ergebnisse der umfangreichen Literatur zur Elasto- und Plastomechanik sowie zur Fluidmechanik zurückgreifen kann. Der Nachteil dieser Vorgehensweise ergibt sich zwangsläufig dann, wenn die Teilkörper wieder zum Gesamtkörper zusammengefügt werden sollen. Hier sind sämtliche geometrischen und physikalischen Übergangsbedingungen an den inneren Trennflächen zwischen den Teilkörpern zu beachten, wozu die innere Geometrie des porösen Mediums als bekannt vorausgesetzt werden muß. Und genau hier liegt das eigentliche Problem. Die innere Porenstruktur poröser Festkörper ist nämlich in der Regel, abgeschen von einigen industriell hergestellten Produkten, von derart kompliziertem Aufbau, daß sie sich einer exakten geometrischen Erfassung verschließt.

Man wird daher bei der Entwicklung einer allgemeinen Theorie poröser Medien dem zweiten Weg den Vorzug geben müssen, d. h. man beschreibt den real existierenden Körper auf der Basis eines idealisierten Ersatzmodells. Bei dieser Vorgehensweise geht man davon aus, daß die den Gesamtkörper konstituierenden Teilkörper in idealer Unordnung, also statistisch über den Kontrollraum verteilt sind. Entsprechend dem Konzept der Volumenanteile werden die Teilkörper im Kontrollraum "verschmiert", d. h. man verzichtet auf eine genaue Lagebeschreibung der einzelnen Teilkörper und nimmt vielmehr an, daß jeder Teilkörper für sich gemeinsam mit den übrigen Teilkörpern das gesamte Volumen des Kontrollraums einnimmt. Die Anteile der Teilkörper am Gesamtkörper werden dabei durch das lokale Verhältnis der Teil- oder Partialvolumina in Bezug zum Gesamtvolu-

men festgelegt. Die Annahme superponierter Kontinua und die Forderung, daß für jeden Teilkörper eines porösen Mediums grundsätzlich ein eigener Bewegungszustand zuzulassen ist, beinhaltet, daß die hier eingeführte Modellvorstellung auf ein aus verschiedenen Materialien heterogen zusammengesetztes Kontinuum mit inneren Freiheitsgraden führt. Diese Modellvorstellung ist identisch mit der Axiomatik der Mischungstheorie, so daß die Mischungstheorie, ergänzt um das Konzept der Volumenanteile, als Grundlage zur Beschreibung poröser Medien herangezogen werden kann. Während man in der Mischungstheorie von einer realen Vermengung der Teilkörper auch bis in ihre kleinsten Bestandteile ausgeht, so daß die ursprünglichen Partialvolumina in der Regel nicht mehr feststellbar sind, besitzt ein poröses Medium eine innere Struktur, z. B. durch die Geometrie des Porenraumes. Diese Struktur wird im Rahmen der hier gewählten Modellvorstellung nur durch die Angabe der Partialvolumina der Teilkörper erfaßt. Eine auf der Basis der Mischungstheorie entwickelte Theorie poröser Medien bleibt daher auf solche Materialien beschränkt, bei denen eine isotrope Verteilung der Konstituierenden im Kontrollraum angenommen werden kann. Die Beschreibung poröser Medien auf der Basis der Mischungstheorie bzw. die Beschreibung von Festkörper-Fluid-Gemischen ist nicht neu, sondern schon seit Anfang der sechziger Jahre Gegenstand intensiver Forschungstätigkeit. In jüngeren Veröffentlichungen werden poröse Medien dabei als Mischungen mit unvermischbaren Konstituierenden eingeführt, bestehend aus einem in der Regel elastischen Festkörperskelett und ein oder mehreren Fluiden, wobei eine Spezifizierung dieser Fluide als Flüssigkeiten oder Gase häufig unterbleibt; zusätzlich werden sämtliche Konstituierenden entweder als kompressible oder als inkompressible Körper behandelt. Die thermodynamischen Restriktionen und die konstitutiven Gleichungen derartiger Modelle sind in der Literatur dokumentiert, wenngleich längst nicht alle Autoren bei identischer Modellbildung zu gleichen Ergebnissen gelangen. Dies ist in erster Linie eine Frage der unabhängigen thermodynamischen Prozeßvariablen, die für die jeweiligen Modelle angesetzt werden. Neben den hier genannten Modellen gibt es nur sehr wenige Arbeiten zum Thema allgemeiner poröser Medien, in denen elastisch-plastische Festkörper berücksichtigt werden. Hier existieren entweder Arbeiten, in denen "leere" Festkörperskelette behandelt werden, also poröse Medien, bei denen die mechanische Wirkung der Poreninhaltsstoffe vernachlässigt wird, oder es findet im Rahmen flüssigkeits- und/oder gasgefüllter poröser Körper eine stark vereinfachende thermodynamische Beschreibung statt, bei der im geringsten Fall auf die in der Mischungstheorie erforderliche Einführung von Materialien zweiten Grades verzichtet wird. Darüber hinaus werden häufig weitreichende Vereinfachungen der mechanischen und thermodynamischen Grundlagen vorausgesetzt. Ist die Annahme leerer Festkörperskelette in vielen Fällen noch gerechtfertigt, etwa wenn der Porenraum ein zusammenhängendes Gebiet mit offenem Rand darstellt und lediglich eine Gasfüllung wie z.B. atmosphärische Luft enthält, so werden leere Festkörperskelette häufig wie ein klassisches Einkomponentenmaterial beschrieben ohne zumindest die Porosität als zusätzliche thermodynamische Variable zu berücksichtigen. Die Vernachlässigung der Porosität oder des Festkörpervolumenanteils als thermodynamische Variable bedeutet jedoch, daß man ein inkompressibles Material beschreibt, was allerdings nicht damit gleichzusetzen ist, daß ein inkompressibles poröses Festkörpermaterial auch makroskopisch, also in Bezug auf das Gesamtvolumenelement, inkompressibel wäre.

Bei der Behandlung poröser Medien auf der Basis der Mischungstheorie bestehen zum gegenwärtigen Zeitpunkt zwei grundsätzliche Probleme: Das eine liegt in der Bestimmung der unabhängigen thermodynamischen Variablen des jeweils betrachteten Prozesses – diese werden in den meisten Arbeiten zur Theorie poröser Medien im Rahmen einer gewissen Willkür und nicht als Folge eines strengen Ausleseprozesses angesetzt –, das andere besteht in der Beschreibung großer elastischer und plastischer Deformationen der Festkörpermatrix; und zwar sowohl bezüglich der Zerlegung der Deformationen in elastische und plastische Anteile und den daraus resultierenden Konsequenzen in Bezug auf die thermodynamischen Restriktionen des jeweiligen Prozesses als auch hinsichtlich der Angabe geeigneter Stoffbeziehungen des elastisch-plastischen Materialverhaltens poröser Festkörperskelette im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, eine in sich geschlossene Theorie poröser Medien vorzustellen, wobei der Lösung der zuvor genannten Problemstellungen besondere Bedeutung zukommt. Zur Einordnung der folgenden Ausführungen in den Gesamtkomplex der Mischungstheorie und der Theorie poröser Medien wird in Kapitel 2 eine Übersicht über die historische Entwicklung der verschiedenen theoretischen Ansätze angeboten. Der verbleibende Umfang der Arbeit entfällt etwa hälftig auf die beiden Hauptproblemkreise der Theorie poröser Medien: Dies ist zum einen, abgesehen vom "Konzept der Volumenanteile" und der "Mischungstheorie", der gesamte Grundlagenbereich und hier vor allem die Entwicklung geeigneter Auswahlkriterien zur Definition der Menge der unabhängigen thermodynamischen Prozeßvariablen unter Einbeziehung elastisch-plastischer Deformationen der Feststoffkonstituierenden des jeweiligen Modells, Kapitel 3 bis Kapitel 5, und zum anderen die Durchgestaltung praxisrelevanter Materialmodelle einschließlich der Entwicklung geeigneter Stoffbeziehungen zur Beschreibung des elastisch-plastischen Materialverhaltens poröser Festkörper im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie, Kapitel 6 bis Kapitel 9.

Im Grundlagenbereich können das Konzept der Volumenanteile, Kapitel 3, und die Mischungstheorie, Kapitel 4, als in der Literatur bekannt vorausgesetzt werden, wenngleich in den meisten Arbeiten zur Theorie poröser Medien eine konsequente Verbindung dieser beiden Grundelemente fehlt. Im Rahmen der konstitutiven Theorie poröser Medien, Kapitel 5, ist ebenso wie in der Mischungstheorie grundsätzlich von Materialien zweiten Grades auszugehen, d. h. daß z. B. für Fluide nicht nur die Partialdichten sondern auch deren Gradienten und daß für Festkörper nicht nur die ersten sondern auch die zweiten Deformationsgradienten als unabhängige Prozeßvariablen anzusetzen sind. Für Mischungen mit "unvermischbaren Konstituierenden", wie poröse Medien, sind zusätzlich die Volumenanteile der Partialkörper und die Gradienten der Volumenanteile als Prozeßvariablen zu berücksichtigen. Die Einbeziehung elastisch-plastischen Materialverhaltens der Feststoffkonstituierenden macht es erforderlich, das im Rahmen der endlichen Theorie zu benutzende multiplikative Konzept bei der Zerlegung der Deformationen nicht nur auf die ersten sondern auch auf die zweiten materiellen Deformationsgradienten anzuwenden. Dieses Vorgehen ist in der bisher erschienenen Literatur unbekannt. Darüber hinaus wird in Kapitel 5 auf der Basis der Grundprinzipe der konstitutiven Theorie gezeigt, auf welche Weise die Menge der unabhängigen thermodynamischen Prozeßvariablen des jeweils zu beschreibenden Materialmodells ausgehend von einem in der Literatur zur Mischungstheorie dokumentierten, gesicherten und um das Konzept der Volumenanteile erweiterten Grundvariablensatz zu bestimmen ist. Beispiele für viele Materialkombinationen werden angegeben und verglichen. In Kapitel 5 wird auch gezeigt, wie die durch die Inkompressibilitätseigenschaften einzelner Konstituierenden oder aller Konstituierenden verursachten Zwangsbedingungen innerhalb der konstitutiven Theorie zu berücksichtigen sind. Damit werden im Rahmen der Theorie poröser Medien erstmalig systematisch sämtliche Voraussetzungen angelegt, die zur Entwicklung thermodynamischer Restriktionen und konstitutiver Gleichungen für beliebige Materialkombinationen erforderlich sind.

Da die thermodynamischen Restriktionen und konstitutiven Gleichungen von der Wahl des Materialmodells bestimmt werden, können in der vorliegenden Arbeit natürlich nicht alle denkbaren Materialkombinationen im Detail untersucht werden. Die Durchgestaltung praxisrelevanter Modelle soll daher exemplarisch am Beispiel eines flüssigkeitsgesättigten, elastisch-plastisch deformierbaren porösen Festkörpers aufgezeigt werden, Kapitel 6. Andere Materialmodelle können durch analoges Vorgehen leicht behandelt werden; einige Sonderfälle werden in Abschnitt 6.6 angesprochen. Mit dem gewählten Modell wird der für die Anwendung wichtigste Fall diskutiert, der vielen Problemstellungen aus der Praxis gerecht wird, zumal das sogenannte leere Festkörperskelett ebenso enthalten ist wie die gesamte Problematik von Flüssigkeitsströmungen in porösen Körpern. Für das in Kapitel 6 diskutierte Modell wird ein gemeinsamer Temperaturzustand für beide Konstituierenden vorausgesetzt. Zusätzlich wird durch die Einführung von inkompressiblen Konstituierenden – dies entspricht dem Materialverhalten der Porenflüssigkeit und in guter Näherung demjenigen poröser Festkörper mit nicht zu geringer Porosität – gezeigt, auf welche Weise sich eine kinematische Zwangsbedingung auf die Entwicklung thermodynamischer Restriktionen und konstitutiver Gleichungen auswirkt. Neben dem allgemeinen Modell, das auch konstitutive Gleichungen für den Spannungszustand linear-viskoser Porenflüssigkeiten, den Wärmefluß und die Interaktionskraft zwischen Festkörperskelett und Flüssigkeit enthält, wird in Abschnitt 6.5. ein vereinfachtes konstitutives Modell angeboten. Das vereinfachte Modell erscheint in besonderem Maße zur Behandlung praxisrelevanter Problemstellungen geeignet, da es, verglichen mit der Komplexität des allgemeinen Modells, zu einer relativ einfachen Beschreibungsmöglichkeit führt, die es gestattet, das in den üblichen Versuchen beobachtete Materialverhalten von Flüssigkeiten und porösen Festkörpern in das Materialmodell einzubringen; darüber hinaus ist der direkte Ubergang zu den Grenzfällen des leeren Festkörperskeletts und des Problems der Flüssigkeitsbewegung in starren porösen Körpern enthalten. Das vereinfachte Modell, das sich mit Hilfe eines speziellen konstitutiven Ansatzes für die freien Energiefunktionen der Partialkörper aus dem allgemeinen Modell ergibt, steht nicht wie viele vergleichbare Modelle der umfangreichen Literatur zu porösen Medien im Widerspruch zu den allgemeinen Grundlagen der konstitutiven Theorie, Kapitel 5, da es sich als direkte Konsequenz aus den Grundlagen herleiten läßt. Beide Modelle, das allgemeine Materialmodell und das vereinfachte Modell, enthalten eine Restriktion für den Zuwachs der plastischen Arbeit des porösen Festkörperskeletts, in der durch den Translationstensor (back-stress tensor) auch die kinematische Verfestigungseigenschaft berücksichtigt ist.

Das elastische und plastische Materialverhalten poröser Festkörper wird in Kapitel 7 und Kapitel 8 untersucht. Hier liegen je nach Struktur der Festkörpermatrix zwei grundsätzlich. verschiedene Verhaltensmuster vor. Bei granularen und spröden Stoffen wie Schüttgütern, Erdstoffen (Böden), natürlichen und künstlichen Steinen, Keramik und Betonen ist der elastische Bereich sehr klein, zum Teil sogar vernachlässigbar. Stattdessen tritt bei Erreichen einer bestimmten Spannungsgrenze eine Plastizierung des Materials ein, darüber hinaus bilden sich schnell Bruchzonen aus, in denen die Körner eines granularen Materials plastizierend übereinander hinwegrollen. Ein völlig anderes Verhalten zeigen duktile bzw. bildsame Materialien wie porige Metalle, etwa Metallsinter, Polymere oder andere Werkstoffe der Kunststofftechnologie. Diese Materialien besitzen einen großen, im Grenzfall sogar uneingeschränkt elastischen Bereich, zum Teil mit viskosen Effekten, und zeigen, sofern plastisches Materialverhalten auftritt, ein ausgesprochenes Verfestigungsverhalten. Grundsätzlich muß mit großen elastischen und plastischen Volumendehnungen gerechnet werden.

Während zur Beschreibung des elastischen Materialverhaltens spröder und granularer Stoffe auch lineare Elastizitätsgesetze ausreichen, kann der elastische Bereich vieler duktiler Stoffe nicht mit Elastizitätsgesetzen vom Hookeschen Typ abgedeckt werden. Man stelle sich etwa einen leeren, feinporigen Schwamm aus inkompressiblem Material, wie z. B. Gummi, vor. Es ist offensichtlich, daß sich die hier möglichen elastischen Volumendehnungen, die je nach Anfangsporosität durchaus 80% und mehr betragen können, nicht im Rahmen des Hookeschen Materialmodells beschreiben lassen. Daher soll in 7 ein neues, einfaches Elastizitätsgesetz vorgeschlagen werden, das zur Beschreibung allgemeiner großer elastischer Deformationen geeignet ist. Der Bereich kleiner und kleinster elastischer Deformationen ist selbstverständlich ebenso enthalten wie die durch Linearisierung des endlichen Elastizitätsgesetzes entstehenden verschiedenen Varianten des Hookeschen Materialtyps.

Die Behandlung des plastischen Bereichs poröser Medien, Kapitel 8, soll auf der Basis einer von Herrn Prof. de Boer vorgeschlagenen Fließbedingung erfolgen, die in der vorliegenden Arbeit auf die geometrisch nichtlineare Theorie übertragen wird. Der Einfluß der kinematischen Verfestigungseigenschaft wird berücksichtigt. Diese Fließbedingung ist im Zusammenhang mit einer nichtassoziierten Fließregel in hervorragendem Maße zur Beschreibung granularer und spröder Stoffe geeignet und läßt sich in vereinfachter Form durch Nullsetzen einzelner Parameter, hier im Zusammenhang mit der assoziierten Fließregel, auch auf duktile Materialien anwenden. Die vorliegende Arbeit wird überwiegend auf die Beschreibung duktiler Materialien abgestellt; die Beschreibung spröder und granularer Stoffe im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie bleibt einem geplanten Forschungsbericht von Herrn Prof. de Boer und mir vorbehalten.

Das Kapitel 9 enthält einige Ergänzungen zum Modell eines flüssigkeitsgesättigten, elastisch-plastisch deformierbaren porösen Körpers wie die Wärmeleitungsgleichung und die Diskussion der Bewegungsgleichungen von Porenflüssigkeit und Festkörperskelett. Einige Bemerkungen zur einfachen Implementierung des Modells in numerische Algorithmen beschließen dieses Kapitel.

Alle mathematischen Herleitungen der vorliegenden Arbeit werden im modernen, absoluten Tensorkalkül verfaßt. In diesem Zusammenhang sei auf das von Herrn Prof. de Boer verfaßte Buch zur Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure *de Boer* [1982] verwiesen. Darüber hinaus werden etliche neue Rechenregeln benutzt, die in der gesamten Fachliteratur entweder nicht oder in dieser Form nicht existieren. Diese Rechenregeln, die nicht nur im hier benutzten Zusammenhang von Interesse sein dürften, sind der Arbeit im Anhang A beigefügt, allerdings ohne Beweis. Anhang B enthält schließlich einige Definitionen bezüglich der Gruppen linearer Abbildungen zweiten Grades, die bei der Zerlegung der Deformationen und bei der Untersuchung der Entropieeigenschaft von Materialien zweiten Grades erforderlich sind.

Kapitel 2: Zur Geschichte der Mischungstheorie und der Theorie poröser Medien

Das Wesen eines Körpers wurde erstmals von *Euler* in einfacher und einleuchtender Weise definiert; und zwar in den Briefen an eine deutsche Prinzessin *Euler* [1769], die *Euler* in den Jahren 1760 – 1762 an die damals 15 – 17 Jahre alte Markgräfin Friederike Charlotte Ludovica Luise richtete. Eine Veröffentlichung dieser in französischer Sprache verfaßten Briefe erfolgte erstmals in den Jahren 1768 für die ersten beiden Bände und 1772 für den dritten, als *Euler* bereits nach Petersburg übergesiedelt war. Schon 1769 entstanden die deutsche und russische Übersetzung. Im 69. Brief schrieb *Euler*:

Unterdessen findet man doch ein Kennzeichen, das aller Materie, also auch allen Körpern eigen ist; und dieses ist die Undurchdringlichkeit, oder die Unmöglichkeit, daß zwey Körper zugleich einerley Ort einnehmen können. ... Also sind alle Körper undurchdringlich, oder jeder Körper schließt von dem Orte, den er selbst einnimmt, alle andere Körper aus; kein anderer kann an diesen Ort kommen, ohne daß der erste ihn zuvor verlassen hätte.

Auf dieses Zitat folgend erläuterte *Euler* im 70. Brief ein typisches poröses Medium, einen wassergefüllten Schwamm:

Ew.H.^I werden mir vielleicht gegen die Undurchdringlichkeit der Körper das Beyspiel des Schwammes anführen, der vom Wasser durchdrungen zu werden scheint, wenn man ihn in dasselbe eintaucht. Aber es ist falsch, daß die Theilchen des Schwammes so durchdrungen würden, daß ein Wassertheilchen sich mit einem Theilchen des Schwammes an einem Orte befände. Sondern man weiß, daß der Schwamm ein Körper mit sehr vielen Öffnungen oder Poris ist. Ehe man ihn ins Wasser legte, waren diese Pori mit Luft angefüllt. So bald aber Wasser in die Poros tritt, so wird die Luft ausgetrieben und steigt in kleinen Blasen in die Höhe. Also wird hier weder die Luft vom Wasser, noch das Wasser von der Luft durchdrungen, sondern die Luft entweicht von den Oertern wo das Wasser hinein tritt. Es bleibt also diese Eigenschaft allen Körpern wesentlich und allgemein; und man muß folglich die Richtigkeit der Erklärung zugeben, daß ein Körper eine undurchdringliche Ausdehnung sey, weil nicht nur alle Körper ausgedehnt und undurchdringlich, sondern auch umgekehrt, alles was zugleich ausgedehnt und undurchdringlich ist, Körper sind.

Die Erklärungen *Eulers* betreffen alle Körper, Fluide wie Festkörper, poröse Medien oder Mischungen. De facto ist die im Rahmen einer phänomenologischen Beschreibung von Mischungen und porösen Medien gewählte Vorstellung superponierter Kontinua lediglich als

^IEure Herrin (Anmerkung des Verfassers)

diejenige eines idealisierten Modells zu verstehen, wobei sich der Grad der Idealisierung bei Mischungen oder porösen Medien der Hauptsache nach nur durch die Größenordnung des gewählten Maßstabs unterscheidet.

Erste Versuche, eine phänomenologische Theorie von Gemischen zu entwickeln, stammen von Fick [1855], der sich mit dem Problem der Gasdiffusion befaßte. Fick war der erste, der in seinen Abhandlungen die Existenz superponierter Kontinua voraussetzte, indem er annahm, daß jedes an einer Mischung beteiligte Material gleichzeitig mit den übrigen Materialien das gesamte Volumen des Kontrollraums einnähme. Die nach ihm benannten Diffusionsgesetze, die auch heute noch in vielen Bereichen des angewandten Ingenieurwesens verwendet werden, leitete Fick im damals weit verbreiteten Analogieschlußverfahren nach dem Muster der Fourierschen Entwicklung für den Wärmestrom her. Stefan [1871] verbesserte die Fickschen Diffusionsgesetze, indem er auch Gemische von drei Gasen untersuchte. Stefan ist im übrigen der erste, der sich im Rahmen einer Kontinuumstheorie auch mit dem Problem der Diffusion von Gasen durch poröse Wände beschäftigte und damit ein poröses Medium behandelte. Im konstitutiven Sinne faßte Stefan die poröse Wand, in [1871] beschrieb er das Problem der Gasdiffusion durch eine starre Membrane, wie ein starres Gas auf, d. h. er übertrug seine Ergebnisse für die Bewegung zweier Gase durcheinander auf das poröse Medium und bestätigte so die von Graham und Bunsen in erster Linie experimentell bestimmten Diffusionsgleichungen. Das Verhältnis des freien Gasdrucks zum Partialdruck des im porösen Körper eingeschlossenen Gases gab Stefan mit Hilfe der Porosität des Festkörpers an. Damit war Stefan der erste, der das Konzept der Volumenanteile im Rahmen einer Kontinuumstheorie für poröse Medien benutzte.

Etwa zur gleichen Zeit veröffentlichte *Maxwell* [1866, 1868] seine dynamische Gastheorie, auch als kinetische Theorie einatomiger Gase bekannt, in der er ein Gas als ein System von materiellen Punkten auffaßte, die sich in sehr raschen progressiven Bewegungen befinden. Die *Maxwell*schen Lösungen des Diffusionsproblems sind ihrem Charakter nach in etwa mit denen *Stefan*s vergleichbar, obwohl *Maxwell* einen völlig anderen theoretischen Ansatz wählte.

Jaumann [1911] entwickelte auf der Basis der phänomenologischen Kontinuumstheorie ein geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze für eine aus beliebig vielen chemischen Komponenten konstituierte Mischung. Jaumann war der erste Autor, der eine umfassende Mischungstheorie vorstellte, die auch die Beschreibung chemischer Reaktionen und elektromagnetischer Effekte enthielt. Die von Jaumann entwickelten Bilanzgleichungen enthalten in gewisser Weise bereits die aus der modernen Mischungstheorie bekannten Zuwachsgrößen, eingeführt durch die Definition einer sogenannten "körperlichen Fluxion", ein Ableitungsbegriff, den Jaumann zusätzlich zur lokalen Fluxion (lokale Zeitableitung) und zur totalen Fluxion (materielle Zeitableitung) benutzte. Alle von Jaumann angegebenen Gleichungssysteme beziehen sich auf ein ortsfestes Basissystem. Jaumann hielt dies für die einzige Möglichkeit, die Orts- und Richtungsabhängigkeit eines Gleichungssystems zu beschreiben: Die Orts- und Richtungsangaben des Gleichungssystems müssen meiner Meinung nach bezogen werden auf ein Koordinatensystem, welches in der indifferenten (also auch undeformierten) Grenzschale des betrachteten Vorgangs festgelegt ist.

Im vorliegenden Kapitel zur Geschichte der Mischungstheorie und der Theorie poröser Medien wird natürlich kein Anspruch auf eine vollständige Darstellung der gesamten geschichtlichen Entwicklung zu diesem Themenkreis erhoben. Eine solche Darstellung würde, wenn sie sich nicht sogar als unmöglich erweisen sollte, zumindest dem Umfang nach eine eigenständige Arbeit darstellen. Daher soll eine weitere Diskussion von Arbeiten anderer Autoren wie *Massieu*, *Duhem*, *Gibbs*, *Reynolds* oder *Lohr*, die auch einige Beiträge zu den Ursprüngen der Mischungstheorie geleistet haben, unterbleiben. Auch sollen die verschiedenen kinetischen oder molekularen Theorien von Gasen oder Flüssigkeiten nicht näher erläutert werden, da hier ein im wesentlichen anderes Konzept als dasjenige einer Kontinuumstheorie verfolgt wird.

Es ist sicherlich auf eine in erster Linie anwendungsorientierte Forschung in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts zurückzuführen, daß nach Erscheinen der Arbeiten Jaumanns 46 Jahre vergehen mußten, bis die Mischungstheorie wieder ins Licht der Wissenschaft rückte. So muß der Ursprung der modernen Mischungstheorie auf das Jahr 1957 datiert werden, als *Truesdell* [1957] lokale Bilanzgleichungen für Masse, Bewegungsgröße und Energie von beliebig konstituierten Gemischen vorstellte. Diese Bilanzgleichungen, die unter Einbeziehung geeigneter Zuwachs- bzw. Kopplungsterme zur Beschreibung der Interaktion zwischen den einzelnen Konstituierenden analog zu denen eines Einkomponentenmaterials angegeben wurden, sind in ausführlicherer Form auch in "The Classical Field Theories" [1960, Abschnitte 158, 159, 215, 243, 254, 255, 259, 295] von Truesdell und Toupin enthalten. Den grundsätzlichen Zusammenhang zwischen den Partialbilanzen der einzelnen Konstituierenden und deren Summe als entsprechender Bilanzgleichung der Mischung erklärte Truesdell mit Hilfe sogenannter "metaphysischer Prinzipe", vgl. Kapitel 4, S. 41, die er jedoch erst 1969 zum Prinzip erhob [1969]. Der von Truesdell definierte Zusammenhang zwischen den mechanischen Größen der einzelnen Konstituierenden und den korrespondierenden Größen der Mischung weist viele Parallelen zu kinetischen Theorien auf, vgl. z. B. Maxwells kinetische Theorie einatomiger Gasmischungen [1866, 1868]; wie sich ein Vergleich mit kinetischen Theorien bei der Entwicklung der Mischungstheorie überhaupt als sehr nützlich erwiesen hat. In Truesdells Darstellung der Mischungstheorie fehlte 1960 allerdings ebenso noch eine geeignete Darstellung der Drallerhaltung – in [1960, Abschnitt 215] wird nur die Möglichkeit angedeutet, einen lokalen Drallzuwachs einzuführen – wie eine auf Mischungen bezogene Verallgemeinerung des ursprünglich von Clausius formulierten Entropieprinzips, das sich in der klassischen Kontinuumsmechanik der Einkomponentenmaterialien zu jener Zeit bereits längst etabliert hatte, vgl. [1960, Abschnitte 245 - 258]. Ohne ihre Hypothese zum Prinzip zu erheben, vermuteten Truesdell und Toupin lediglich [1960, Abschnitt 259], daß die Entropieungleichung eines heterogenen Mediums prinzipiell von gleicher Form sei wie diejenige des Einkomponentenmaterials.

Kelly [1964] verallgemeinerte Truesdells Mischungstheorie, indem er auch elektromagnetische Effekte in die Theorie einbezog und diverse Sprungbedingungen an einer Diskon-

tinuitätsfläche angab. Kellys wesentlicher Verdienst besteht jedoch darin, daß er die verschiedenen Bilanzgleichungen ausgehend von einer Fundamentalbilanz entwickelte. Damit beendete er die bis dahin bestehende Unsicherheit bei der Herleitung der Mischungsbilanzen aus der Summe der Partialbilanzen der einzelnen Konstituierenden; nämlich das Problem, welcher mechanischen Größe der Mischung die verschiedenen aus den Partialbilanzen resultierenden Effekte hinzuzuaddieren seien. Darüber hinaus war Kelly der erste, der für die partialen Drallbilanzen einen Drallzuwachs einführte und damit auch unsymmetrische partiale Spannungstensoren zuließ. Diese Unsymmetrie resultiert aus einer prinzipiell zuzulassenden Drallkopplung zwischen den einzelnen Konstituierenden und ist daher nicht vergleichbar mit der Einführung unsymmetrischer Spannungstensoren z. B. im Rahmen eines Cosserat-Kontinuums, vgl. Cosserat & Cosserat [1907, 1909]. Die Bilanzgleichungen von Truesdell mit den Erweiterungen von Kelly wurden in der folgenden Zeit, abgesehen von einigen prinzipiell jedoch äquivalenten Definitionsänderungen, in den meisten Beiträgen zur Mischungstheorie benutzt und können auch aus heutiger Sicht noch als allgemeingültig betrachtet werden. Dazu schrieben Atkin und Craine in einem Ubersichtsartikel [1976b, S. 234]:

The balance laws currently accepted to describe the behaviour of mixtures ... are essentially those which were originally proposed by *Truesdell* and *Kelly*.

Auf der Basis von Truesdells Mischungstheorie entwickelten Adkins [1963a,b, 1964a,b], sowie Green & Adkins [1964] erste, rein mechanische Theorien für Mischungen aus Fluiden sowie Mischungen aus einem Fluid und einem elastischen Festkörper, wobei sie ihre konstitutiven Gleichungen gewissen, aus dem Prinzip der materiellen Objektivität resultierenden Invarianzforderungen unterzogen. Eine thermodynamische Betrachtungsweise der konstitutiven Theorie von Mischungen war Anfang der sechziger Jahre noch unbekannt. Im Hinblick auf das Vorgehen von Green und Adkins bei der Entwicklung konstitutiver Gleichungen kommentierten Truesdell und Noll in "The Non-Linear Field Theories of Mechanics" [1965, S. 541]:

The foregoing summary makes clear that the rational theory of diffusion is in its infancy, with many possibilities awaiting search. The uncertainty as to even the overall pattern for the right constitutive equations, ..., suggest that some basic principle of the subject remains to be discovered. ... The "missing principle", surely, is a proper generalization of the Clausius-Duhem inequality.

Coleman & Noll [1963] sowie Coleman & Mizel [1964] hatten damals erst kürzlich für Einkomponentenmaterialien gezeigt, wie aus der Entropieungleichung thermodynamische Restriktionen entwickelt werden können, und diese dann als Rahmen für die Menge zulässiger konstitutiver Gleichungen aufgefaßt.

Erste Versuche, die konstitutive Theorie von Mischungen im Rahmen der Thermodynamik zu behandeln, wurden etwa zeitgleich von *Eringen & Ingram* [1965] sowie von *Green & Naghdi* [1965a] unternommen. Dazu war allerdings die Übertragung des Entropieprinzips auf heterogene Materialien erforderlich. Das völlig unterschiedliche Vorgehen von Eringen und Ingram bzw. von Green und Naghdi zeigt, wie schwierig es damals war, die richtige Form dieses Prinzips zu finden. Während Eringen und Ingram für eine Mischung mit unterschiedlichen Temperaturen der Konstituierenden jeder Konstituierenden eine eigene Entropieungleichung zuordneten, gingen Green und Naghdi davon aus, daß nur für die Mischung als Ganzes eine Entropieungleichung angeschrieben werden könne. Obwohl das Vorgehen von Green und Naghdi im Prinzip richtig war – das Vorgehen von Eringen und Ingram kann aus heutiger Sicht nicht mehr akzeptiert werden –, so war die für eine Mischung mit gemeinsamer Temperatur aller Konstituierenden entwickelte Entropieungleichung, die in [1967b] als Summe gekoppelter partialer Entropieungleichungen erneut postuliert wurde, dennoch falsch. Bowen & Wiese [1969] stellten später fest, daß in der Theorie von Green und Naghdi der Einfluß des durch den Diffusionsprozeß verursachten Transports der freien Energie fehlte.

Die in der Anwendung der Entropieungleichung von *Green* und *Naghdi* von verschiedenen Autoren entwickelten konstitutiven Gleichungen stellten sich bald als zu speziell heraus, um als Grundlage einer allgemeinen Theorie beliebiger Mischungen dienen zu können. Dazu schrieb *Bowen* [1967] auch mit Hinweis auf seine ersten eigenen Versuche, konstitutive Gleichungen für Mischungen zu entwickeln:

This procedure led to the result that, in equilibrium, the partial free energy density of a given constituent is independent of the deformations of the other constituents in the mixture. ... Such independence fails to be confirmed by experiments on fluid mixtures.

Bowen glaubte, den Fehler der existierenden Theorien darin zu finden, daß die in diesen Theorien eingeführten Partialspannungen der Konstituierenden nur eine Beschreibung idealer Mischungen zuließen, z. B. Mischungen idealer Gase, bei denen die von Bowen genannte Unabhängigkeit durch Versuche bestätigt war. Als Basis einer umfassenden Mischungstheorie wählte Bowen eine Formulierung mit Hilfe sogenannter Tensoren chemischer Potentiale; eine Erweiterung des ursprüglich von Gibbs als Skalar definierten Begriffs, vgl. z. B. [1928]. Die von Bowen postulierte Entropieungleichung, die sich später als die erste richtige Version einer Verallgemeinerung des Entropieprinzips für Mischungen herausstellte, ist bis auf die Tatsache, daß Bowen zusätzlich zum Wärmezufluß einen weiteren, durch den Diffusionsprozeß motivierten Energiezufluß einführte, vgl. [1967, Ungl. (3.3)], mit derjenigen eines Einkomponentenmaterials identisch. Die Tensoren der chemischen Potentiale und deren Zusammenhang mit partialen Spannungstensoren bestimmte Bowen mit Hilfe konstitutiver Gleichungen.

Green & Naghdi [1967a] kritisierten Bowens Arbeit auch im Hinblick auf ihre eigenen Veröffentlichungen [1965a, 1967b] unter anderem insofern, daß sie nicht nur sehr "künstlich" sei, sondern daß vor allem nicht allein durch die Einführung von Tensoren chemischer Potentiale anstelle von Partialspannungen eine allgemeinere Mischungstheorie entstehen könne; ein Argument, daß später von Bowen & Wiese [1969] akzeptiert wurde.

Die erste, vollständig richtige Mischungstheorie, A Thermodynamic Theory of Mixtures of Fluids, wurde von Müller [1968] entwickelt. Durch ein einfaches Konzept entwickelte Müller im Vergleich mit der irreversiblen Thermodynamik von Eckart [1940] und Meixner [1941, 1943] eine Entropieungleichung, die sich zwar formal von derjenigen von Bowen [1967] unterschied, prinzipiell jedoch mit dieser identisch war. Der Unterschied zwischen den beiden Versionen der Entropieungleichung besteht lediglich darin, daß Müller den gesamten Entropiezuflußvektor nicht a priori spezifizierte sondern über eine konstitutive Gleichung bestimmte; während Bowen von vornherein einen speziellen Zusammenhang zwischen Entropiezufluß und Wärmezufluß postulierte. Das wesentliche Verdienst von Müller besteht jedoch weniger in der Entwicklung der Entropieungleichung als vielmehr in der Tatsache, daß Müller der erste war, der im Rahmen der konstitutiven Theorie die einzelnen Konstituierenden der Mischung als Materialien zweiten Grades auffaßte. Bezogen auf die von ihm untersuchte Mischung aus Fluiden mit gemeinsamer Temperatur der Konstituierenden bedeutet dies, daß Müller nicht nur die Partialdichten der einzelnen Fluide sondern auch deren Gradienten als unabhängige thermodynamische Variablen auffaßte. Erst durch die Einführung von Materialien zweiten Grades konnten die bis dahin unakzeptablen Ergebnisse der konstitutiven Theorie von Mischungen vermieden werden: nämlich daß sich die freien Energien der einzelnen Konstituierenden als unabhängig vom Deformationszustand der übrigen Konstituierenden erwiesen. Müller zeigte, daß jede Mischungstheorie, die auf der Basis von Materialien ersten Grades entwickelt wird, immer nur ideale Mischungen beschreiben kann.

Im Jahre 1969 wies Truesdell darauf hin, vgl. dazu [1984], daß bis zu diesem Zeitpunkt nur eine in allen Punkten akzeptable Theorie für Mischungen existierte, nämlich die von Müller. Bezüglich der Entropieungleichung hatte Truesdell [1968] bereits eine eigene Version aus dem Postulat hergeleitet, daß die Entropieungleichung der Mischung als Summe über alle Konstituierenden in Analogie zur klassischen Kontinuumsmechanik der Einkomponentenmaterialien zu bestimmen sei. Truesdells Resultat ist identisch mit Bowens Entropiepostulat, so daß die allgemeine Form der Entropieungleichung für Mischungen heute im allgemeinen als Bowen-Truesdell-Form bekannt ist. Es sollte im übrigen nicht unerwähnt bleiben, daß Green & Naghdi [1969] mit Hinweis auf Bowen und Truesdell eine verbesserte Version ihrer ursprünglichen Entropieungleichung veröffentlichten, die nun ebenfalls der Bowen-Truesdell-Form entsprach.

Die Arbeit von Müller [1968] revolutionierte die gesamte konstitutive Theorie von Mischungen insofern, daß in fast allen nachfolgenden Beiträgen zur Mischungstheorie ebenfalls Materialien zweiten Grades betrachtet wurden. Besondere Erwähnung verdient in diesem Zusammenhang die Arbeit von Bowen & Wiese [1969], in der das von Müller ursprünglich für Fluide vorgestellte Konzept von Materialien zweiten Grades auf allgemeine elastische Materialien übertragen wurde. In dieser Arbeit gingen Bowen und Wiese zwar wieder vom Konzept der Tensoren der chemischen Potentiale aus, vgl. [1967], definierten aber von vornherein einen Zusammenhang zwischen diesen Größen und den Partialspannungen. Auf diese Weise gelang ihnen ein Konzept, das zu einer besonders einfachen und im Hinblick auf die Entwicklung thermodynamischer Restriktionen gut zu handhabenden Form der Entropieungleichung führte. In der Folgezeit erschienen Arbeiten, in denen im Rahmen der konstitutiven Theorie auch Mischungen mit unterschiedlichen Temperaturen untersucht wurden, z. B. Dunwoody & Müller [1968], Truesdell [1969], Bowen & Garcia [1970] oder Craine et al. [1970]; um nur einige zu nennen. Ein anderer Anwendungsbereich der Mischungstheorie sind Mischungen mit chemischen Reaktionen bzw. Massenaustauschprozessen zwischen den die Mischung konstituierenden Teilkörpern. Hier seien als Beispiele die Arbeiten von Bowen [1968a,b, 1969a,b] sowie Doria & Bowen [1970] oder Bowen & Chen [1972] genannt.

Ein anderer Mischungstyp, nämlich Mischungen aus inkompressiblen Konstituierenden, wurde erstmals von Mills [1966] behandelt. Darin untersuchte Mills auf der Basis der ersten, falschen Version der Entropieungleichung von Green & Naghdi [1965a] eine Mischung aus zwei inkompressiblen Newtonschen Fluiden. Das Bemerkenswerte an Mills' Arbeit ist, daß er zur Beschreibung der Inkompressibilitätseigenschaft sogenannte "Kompositionsfaktoren"^{II} – diese sind nichts anderes als die Volumenanteile der jeweiligen Konstituierenden – einführte und mit deren Hilfe eine Zwangsbedingung formulierte. Diese Zwangsbedingung, multipliziert mit einem Lagrangeschen Multiplikator, wurde der Entropieungleichung zugeschlagen. Auf diese Weise gelang es Mills, im Rahmen einer konstitutiven Theorie sogenannter "constrained materials" Stoffgleichungen unter Berücksichtigung des auf die Mischung wirkenden unbestimmten hydrostatischen Druckes zu entwickeln. Mills war damit der erste, der das Konzept der Volumenanteile in die Mischungstheorie einführte; ein Konzept, das speziell auch zur Beschreibung poröser Medien geeignet ist. Die Entwicklung der Mischungstheorie zwischen 1965 und 1969 veranlaßte Craine [1971], das mechanische Modell von Mills unter Berücksichtigung von Materialien zweiten Grades auf der Basis der Entropieungleichung von Truesdell [1968], Green & Naghdi [1969] sowie Bowen & Wiese [1969] erneut zu untersuchen.

Anfang der siebziger Jahre war die Entwicklung der Mischungstheorie bereits insofern abgeschlossen, als die bis dahin entwickelten Grundlagen bis heute uneingeschränkt gültig geblieben sind. Im Rahmen der konstitutiven Theorie erhielt die Mischungstheorie jedoch noch viele weitere Impulse. Wesentlich erscheint mir, in diesem Zusammenhang die Arbeit von Cross [1973] zu nennen. Cross erweiterte die von Noll [1958] für Materialien ersten Grades eingeführte Symmetrie- bzw. Isotropiegruppe zunächst allgemein auf Materialien zweiten Grades und übertrug diese Ergebnisse dann auf Mischungen aus Fluiden oder/und isotropen Festkörpern, wobei er auch chemische Reaktionen in seine Überlegungen einbezog. Ausgehend von einem für beliebige Materialkombinationen geltenden Grundvariablensatz lieferte er so einen Beitrag, die Menge der unabhängigen thermodynamischen Prozeßvariablen für viele Materialmodelle systematisch zu bestimmen. Cross beendete damit die bis dahin vielen Arbeiten zur Mischungstheorie anhaftende Willkür bei der Wahl konstitutiver Variablen. Bowens "Theory of Mixtures" [1976] kann schließlich als Abschluß der Entwicklung der allgemeinen Mischungstheorie angesehen werden. Diese Arbeit enthält, ausführlich und übersichtlich dargestellt, alle akzeptierten Grund-

^{II} Der Begriff Kompositionsfaktor (composition factor) wurde jedoch erst von *Craine* [1971, S. 1179] benutzt.

lagen der Mischungstheorie und viele Beispiele zur konstitutiven Theorie von Mischungen zweiten Grades; unter anderem auch das Modell eines porösen Mediums; allerdings ohne die Einführung des Konzepts der Volumenanteile. Ebenfalls 1976 erschien ein ähnlicher Übersichtsartikel von Atkin & Craine [1976a,b].

Die theoretische Beschreibung poröser Medien, also flüssigkeits- und/oder gasgefüllter poröser Körper, hatte zunächst nichts mit der Mischungstheorie zu tun, obwohl Stefan [1871] bereits das Problem der Diffusion in starren porösen Körpern behandelt hatte. In der Literatur, vgl. z. B. Atkin & Craine [1976a] oder Drumheller [1987] werden in der Regel von Terzaghi [1923, 1925] und Biot [1941, 1955, 1956a,b] als Begründer der Theorie poröser Medien auf der Basis des Konzepts der Volumenanteile genannt. In diesen Arbeiten werden Probleme der Bodenmechanik behandelt, in erster Linie das Setzungsbzw. Konsolidationsproblem. Speziell in der englischsprachigen Literatur finden sich jedoch nur sehr spärliche Hinweise auf die Ursprünge einer systematischen Einführung des Konzepts der Volumenanteile, vgl. dazu de Boer & Ehlers [1988b]. Man gewinnt den Eindruck, daß etliche Veröffentlichungen zu diesem Gebiet völlig ignoriert wurden. Abgesehen von ersten Arbeiten zur Grundwasserströmung in starren porösen Festkörpern – Darcy [1856], Forchheimer [1901] – war Fillunger [1913], soweit mir bekannt ist, der erste, der ein poröses Medium, einen flüssigkeitsgesättigten Festkörper, auf der Basis des Konzepts der Volumenanteile, kombiniert mit Oberflächenporositätskoeffizienten untersuchte. In dieser sowie in folgenden Arbeiten [1913, 1914, 1929, 1930] beschäftigte sich Fillunger mit dem Problem des Auftriebs in Gewichtsstaumauern; siehe dazu auch de Boer & Ehlers [1988a]. Bereits 1913 gab Fillunger einen Hinweis auf eine Arbeit von Delesse [1848], vgl. auch Fillunger [1935]. Delesse war Bergbauingenieur und interessierte sich für die Frage, auf welche Weise man die Anteile der verschiedenen Bestandteile eines Gesteins bestimmen könne, ohne dieses vorher zu zerkleinern. Dabei wies er nach, daß die Anteile der einzelnen Mineralien in einer repräsentativen bzw. statistischen Schnittfläche des Gesteins mit den volumetrischen Anteilen dieser Mineralien identisch war, und schuf damit die Voraussetzung, poröse Medien auf der Basis von idealisierten Ersatzkontinua zu behandeln.

Das Vorgehen von von Terzaghi [1923, 1925] sowie von Terzaghi & Fröhlich [1936] kann aus heutiger Sicht nicht mehr befriedigen, da in diesen Arbeiten die Probleme bei der Beschreibung poröser Medien eher intuitiv als auf der Grundlage gesicherter mechanischer Prinzipien behandelt wurden; so gingen die Autoren unter anderem nicht von den Bilanzgleichungen der einzelnen Teilkörper, Feststoff und Wasser, sondern direkt von einer entsprechenden Bilanz des Gesamtkörpers aus. Auch die ersten Arbeiten von Biot, z. B. [1935, 1941], müssen zu der hier genannten Gruppe von Veröffentlichungen gezählt werden. Im Gegensatz dazu wählte Fillunger ein völlig anderes Vorgehen, indem er z. B. für die Teilkörper Feststoff und Wasser getrennte Bewegungsgleichungen benutzte, die über eine Interaktionskraft gekoppelt waren; ein Vorgehen, daß im Prinzip demjenigen der Mischungstheorie entspricht. Daher war es nur natürlich, daß speziell zwischen Fillunger und Terzaghi bzw. Terzaghi/Fröhlich ein Streit entbrannte, der mit sehr polemisch gehaltenen Veröffentlichungen ausgetragen wurde; siehe dazu z. B. Fillunger [1936], von Terzaghi & Fröhlich [1937] sowie die Ausführungen in de Boer & Ehlers [1988b]. Das Vorgehen *Fillungers* wurde später von *Heinrich* [1938] sowie *Heinrich & Desoyer* [1955, 1956, 1958, 1961] übernommen. In diesen Arbeiten wurden flüssigkeitsgesättigte poröse Festkörper ausgehend von statistischen Überlegungen auf der Basis eines Modells superponierter Kontinua beschrieben, wobei für jede Konstituierende eine eigene Bilanz-gleichung für Masse und Bewegungsgröße benutzt wurde. Mit Hilfe des Konzepts der Volumenanteile wurden die Teilkörper über den gesamten Kontrollraum "verschmiert", d. h. man ging davon aus, daß jeder Teilkörper für sich das gesamte Volumen des Kontrollraums einnimmt; das mechanische Verhalten der Teilkörper wurde mit Hilfe statistischer Ersatzfunktionen in Bezug auf ein Volumenelement des Gesamtkörpers beschrieben. *Heinrich* und *Desoyer* untersuchten damit erstmalig ein poröses Medium im Rahmen einer in sich geschlossenen Kontinuumstheorie. Ihre Vorgehensweise ist in vielen Punkten identisch mit der Axiomatik der Mischungstheorie. Dazu schrieb *Raats* [1968] im Hinblick auf die in vielen anderen Arbeiten zum Thema poröser Medien bestehenden Widersprüche bei der Beschreibung des Kräftespiels zwischen den Teilkörpern:

The work of *Heinrich & Desoyer* [1955, 1956, 1961] is an outstanding exemption in this respect, but apparently it has been noted by only a few investigators.

Die Arbeiten von *Raats*, siehe Ubersichtsartikel von *Raats* bezüglich seiner eigenen Arbeiten [1984], schließen sich im übrigen nahtlos an diejenigen von *Heinrich* und *Desoyer* an, wobei *Raats* jedoch auch neuere Überlegungen der Mischungstheorie einbezog. Den ausgezeichneten Arbeiten von *Heinrich* und *Desoyer* ist aus heutiger Sicht lediglich ein einziger Fehler anzulasten: die Schnittführung bei der Heraustrennung superponierter Teilkörper aus dem gesamten porösen Medium. Dieser ursprünglich von *Fillunger* stammende Fehler besteht darin, daß man entweder sogenannte statistische Schnitte führte, vgl. Abb. 2.1a), in denen die Oberflächenanteile der am Gesamtkörper beteiligten Materialien entsprechend dem *Deless*eschen Gesetz mit den Volumenanteilen dieser Materialien gleichgesetzt wurden, oder man führte ausgewählte Schnitte wie den sogenannten Korn-zu-Korn-Schnitt, vgl. Abb. 2.1b), bei dem man annahm, die einzelnen Körner eines granularen Feststoffes würden nicht geschnitten, und die gesamte Oberfläche bestünde daher nur aus Flüssigkeit.

Je nach Schnittführung erhielt man so ein anderes Ergebnis für die auf den granularen Feststoff einwirkende Auftriebskraft; im Korn-zu-Korn-Schnitt den vollen Auftrieb, im statistischen Schnitt keinen Auftrieb. Die unterschiedlichen Ergebnisse sind um so verwunderlicher, als erstens nach dem Archimedesschen Prinzip der volle Auftrieb wirken muß, zweitens die Frage des Auftriebs nicht von einer willkürlichen Schnittführung abhängen darf und drittens im Rahmen einer statistischen Modellbildung superponierter Kontinua nur der statistische Schnitt zulässig ist. Diese Bemerkungen führen im Rahmen der oben genannten Arbeiten zwangsläufig zum Widerspruch. Daß Heinrich und Desoyer diesen Defekt in ihrer Theorie nicht erkannten, hat wahrscheinlich folgenden Grund: Heinrich und Desoyer beschrieben das Modell eines mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gesättigten inkompressiblen Festkörpers, ohne im Rahmen der konstitutiven Gleichungen die Wirkung



Abb. 2.1: Schnittführung in einem granularen Medium

- a) statistischer Schnitt
- b) Korn-zu-Korn-Schnitt

des unbestimmten hydrostatischen Druckes zu berücksichtigen. Dies hätte zwangsläufig zu einer Klärung des oben genannten Problems geführt, vgl. de Boer & Ehlers [1988a]. Man muß Heinrich und Desoyer jedoch zugute halten, daß 1955 weder die rationale Thermodynamik voll entwickelt war, noch war die Entwicklung konstitutiver Gleichungen mit Hilfe der Entropieungleichung bekannt; und schließlich wurde die Auswirkung einer Inkompressibilitätsbedingung auf Mehrphasensysteme erstmals von Mills [1966] untersucht. Um so erstaunlicher bleibt es, daß Raats [1968] den Fehler spezieller Schnittführungen voll übernahm. Grundsätzlich bleibt festzustellen, daß eine andere Oberfläche als die des statistischen Schnittes nur als Randbedingung in Bezug auf den Gesamtkörper, nicht jedoch als Ergebnis einer willkürlichen inneren Schnittführung zugelassen werden darf.

Im Rahmen der modernen Kontinuumsmechanik führt die Vorgehensweise von Heinrich und Desoyer direkt auf die Mischungstheorie, allerdings erweitert um das Konzept der Volumenanteile. Dabei wird die innere Struktur des porösen Mediums zumindest insofern berücksichtigt, als die volumetrischen Anteile der Teilkörper bestimmt werden können. Ohne das Konzept der Volumenanteile anzuwenden, erschienen schon relativ früh etliche Veröffentlichungen, in denen eine Mischung aus Feststoff und Fluiden behandelt wurde, vgl. z. B. Adkins [1964a,b], Green & Adkins [1964], Green & Steel [1966], Mills [1967], Atkin [1967], Green & Naghdi [1970], Dunwoody [1970], Atkin & Craine [1976a] sowie Bowen [1976] oder Kenyon [1976b]. Abgesehen von einer Arbeit von Morland [1972], die jedoch ebenso wenige mischungstheoretische Aspekte enthält wie die vielen Publikationen von Biot, zitiert in de Boer & Ehlers [1988b], tauchte der Begriff "Volumenanteil" im Zusammenhang mit Feststoff–Fluid–Gemischen, soweit mir bekannt ist, erstmals bei Kenyon [1976a] auf; und zwar ebenso wie bei Mills [1966] und anderen bei der Beschreibung inkompressiblen Materialverhaltens. Erst Drumheller [1978] verwendete das Konzept der Volumenanteile bei der Beschreibung eines leeren porösen Festkörpers auf der Basis der Mischungstheorie in konsequenter Weise, indem er die Volumenanteile auch als unabhängige konstitutive Variablen auffaßte. In [1978] wies Drumheller als erster darauf hin, daß im Rahmen allgemeiner, kompressibler poröser Medien eine konstitutive Gleichung für die zeitliche Anderung der Volumenanteile ermittelt werden muß, da innerhalb der

Mischungstheorie keine Bilanzgleichung für die Volumenanteile existiert. Die Überlegungen Drumhellers wurden von Bowen [1980, 1982] bei der Beschreibung inkompressibler und kompressibler fluidgesättigter poröser Festkörper aufgegriffen. In diesen Arbeiten hatte Bowen alle Kenntnisse der modernen Mischungstheorie verarbeitet, indem er alle Konstituierenden als Materialien zweiten Grades behandelte und in diesem Sinne auch die Volumenanteile und deren Gradienten als unabhängige thermodynamische Variablen berücksichtigte. Damit war die Beschreibung poröser Medien auf der Basis der Mischungstheorie im Prinzip bekannt. Es bleibt festzustellen, daß das Konzept der Volumenanteile immer dann in die Mischungstheorie einzuarbeiten ist, wenn im makroskopischen Sinne unvermischbare Konstituierenden behandelt werden sollen.

Neben den hier zitierten Arbeiten zur Mischungstheorie sowie zur Theorie poröser Medien existiert noch eine weitere Gruppe von Veröffentlichungen; und zwar zum Thema sogenannter Mehrphasengemische, siehe dazu Passman et al. [1984]. In diesen Arbeiten wird ein Mehrphasengemisch ähnlich wie ein poröses Medium als Mischung mit "unvermischbaren" Konstituierenden definiert. Im Vergleich der oben diskutierten Mischungstheorie und der Theorie der Mehrphasengemische fallen jedoch zwei wesentliche Unterschiede auf: Zunächst ist die Theorie der Mehrphasengemische eine Mischungstheorie, die von vornherein das Konzept der Volumenanteile enthält. Die Menge der Bilanzgleichungen ist im Gegensatz zur Mischungstheorie jedoch um eine zusätzliche Bilanz, die sogenannte "balance of equilibrated force", erweitert. Diese Bilanzgleichung, die eine per Variationsanalyse aufgestellte Bewegungsgleichung für die Volumenanteile repräsentiert, wurde erstmals von Goodman & Cowin [1972] bei der Entwicklung einer Kontinuumstheorie für granulare Materialien angegeben. Der zweite Unterschied liegt im Bereich der konstitutiven Theorie. Hier wird das in der Mischungstheorie benutzte Prinzip der Äquipräsenz, also die Annahme, daß alle Auswirkungsfunktionen zunächst als Funktionen eines gemeinsamen Parametersatzes anzusehen sind, durch das "Prinzip der Phasentrennung" ersetzt. Damit werden die Partialgrößen der einzelnen Konstituierenden nur als Funktion ihrer eigenen konstitutiven Variablen bestimmt; für die Interaktions- bzw. Kopplungsgrößen bleibt das Prinzip der Aquipräsenz jedoch erhalten. Nach Meinung der Autoren Passman, Nunziato und Walsh ist die Theorie der Mehrphasengemische dadurch besser als die Mischungstheorie geeignet, verschiedene Materialmodelle wie Suspensionen, verdünnte Lösungen, Granulate und auch poröse Medien zu beschreiben; eine Auffassung, der man je nach Einstellung folgen kann oder auch nicht. Mir persönlich scheint die Mischungstheorie, ergänzt um das Konzept der Volumenanteile, der geeignetere Weg zur Beschreibung dieser Materialmodelle zu sein.

Einen ausgezeichneten Überblick über die verschiedenen theoretischen Untersuchungen zur Gesamtproblematik der Mischungstheorie lieferte *Truesdell* mit dem Buch "Rational Thermodynamics" [1984]. Der Übersichtsartikel von *Bedford & Drumheller* [1983] enthält neben einer Diskussion der Mischungstheorie auch viele weitere Aspekte zu verschiedenen Kontinuumstheorien, z. B. zu diversen Direktoren–Theorien.

Wie bereits in der Einführung bemerkt, existieren jedoch nur sehr wenige Arbeiten zum Thema allgemeiner poröser Medien, bei denen neben elastischem auch plastisches Deformationsverhalten der Festkörpermatrix zugelassen wird. Leere elastisch-plastische Festkörperskelette wurden dagegen von vielen Autoren untersucht, vgl. z. B. Berg [1970], Caroll & Holt [1972a,b], Green [1972], Shima & Oyane [1976], Gadala et al. [1980] oder Mielniczuk [1982]. Ein erster Versuch, plastisches Materialverhalten von flüssigkeitsgesättigten porösen Festkörpern zu beschreiben, stammt von Kojić & Cheatham [1974a,b]. Diese Arbeiten gehen jedoch nicht von den Grundlagen der Mischungstheorie aus. De Boer & Kowalski [1983] entwickelten eine Plastizitätstheorie für flüssigkeitsgesättigte poröse Festkörper im Rahmen einer geometrisch linearen Beschreibung, benutzten allerdings ein stark vereinfachtes Konzept im Bereich der mechanischen und thermodynamischen Grundlagen. In Erweiterung von [1983] veröffentlichten de Boer & Ehlers [1986a] auf der Basis der um das Konzept der Volumenanteile erweiterten Mischungstheorie eine Arbeit zum Thema flüssigkeits- und gasgefüllter poröser Körper, die ebenfalls, speziell im Bereich der konstitutiven Theorie, etliche Vereinfachungen enthält; so wird z. B. von vornherein implizit das Prinzip der Phasentrennung benutzt. Ein vollständiges thermodynamisches Konzept, unter Einbeziehung von Materialien zweiten Grades, wurde erstmals von Ehlers [1988, 1989b] zur Beschreibung flüssigkeitsgesättigter elastisch-plastischer poröser Medien entwickelt. In diesen Arbeiten wurde im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie von einer multiplikativen Zerlegung des ersten und zweiten Deformationsgradienten des Festkörperskeletts in elastische und plastische Anteile ausgegangen; ein Konzept, das auch in der vorliegenden Arbeit verfolgt wird. Darüber hinaus wurde in [1989b] gezeigt, daß die multiplikative Zerlegung von Deformationsgradienten mit einer additiven Zerlegung von Verzerrungstensoren und deren Geschwindigkeiten kompatibel ist, vgl. dazu auch Kleiber [1975, 1984], Haupt [1985] und Tsakmakis [1987]. Spannungs– und Deformationsgeschwindigkeiten wurden im Rahmen eines geometrischen Konzepts objektiver Lie-Ableitungen behandelt.

Es bleibt grundsätzlich festzustellen, daß eine Beschreibung elastischer sowie elastischplastischer poröser Medien im Rahmen der Mischungstheorie wegen der Komplexität der Gesamtproblematik grundsätzlich zu relativ komplizierten konstitutiven Gleichungen führt, vgl. Bowen [1980, 1982] und Ehlers [1989b]. Zur sinnvollen Beschreibung praktischer Probleme sind daher häufig konzeptionelle Vereinfachungen erforderlich. Dazu führte Ehlers [1989b] in konzeptioneller Analogie zum Prinzip der Phasentrennung von Passman et al. [1984] ein "Prinzip der konstitutiven Trennung der Teilkörper" ein, siehe dazu auch Abschnitt 6.5 der vorliegenden Arbeit, das auf eine Entkopplung der dichtebezogenen freien Energien der Teilkörper führt, ohne das in der Mischungstheorie grundsätzlich zu benutzende Konzept von Materialien zweiten Grades zu verletzen. Dieses Konzept ermöglicht eine relativ einfache, praxisorientierte Beschreibung des elastischen bzw. elastisch-plastischen Materialverhaltens der Festkörpermatrix. So kann unter anderem in Erweiterung eines Gesetzes von Simo & Pister [1984] ein nichtlineares isotropes Elastizitätsgesetz entwickelt werden, das speziell auch für duktile Materialien mit großen elastischen Volumendehnungen geeignet ist. Der plastische Bereich poröser Festkörper kann mit Hilfe einer erstmals von de Boer [1988a] im Rahmen der geometrisch linearen Theorie ohne elastischen Bereich entwickelten Fließbedingung beschrieben werden, die sich als

19

Bruchbedingung sowohl auf granulare Stoffe, siehe dazu auch *Dresenkamp* [1987], als auch in vereinfachter Form auf duktile Stoffe anwenden läßt. Die von *Green* [1972] sowie von *de Boer & Kowalski* [1983] für duktile poröse Festkörper benutzten Fließbedingungen sind als Grenzfall ebenso enthalten wie die von *de Boer & Ehlers* [1986a] entwickelte Bruchbedingung für spröde und granulare Stoffe.

Kapitel 3: Das Konzept der Volumenanteile

Die Beschreibung poröser Medien auf der Basis der Mischungstheorie – Theorie heterogen zusammengesetzter Kontinua mit inneren Wechselwirkungen – setzt zunächst das Modell eines makroskopischen Ersatzkörpers voraus, bei dem die sich de facto gegeneinander abgrenzenden Teilkörper im Kontrollraum "verschmiert" werden, vgl. Abb. 3.1.



Abb. 3.1: Poröses Medium Beispiel: Festkörperskelett mit Flüssigkeit

a) geometrische Darstellung b) verschmierte Modellvorstellung



Festkörperskelett

Im Rahmen der hier gewählten Modellbildung wird angenommen, daß die Partialkörper in idealer Unordnung, also statistisch über den Kontrollraum verteilt sind. Dies führt zu der Vorstellung eines statistischen Ersatzkörpers, bei dem alle Partialkörper gleichzeitig das gesamte Volumen des Kontrollraums einnehmen. Alle geometrischen und physikalischen Größen der Teilkörper wie Bewegung, Deformation und Spannung sind im gesamten Kontrollraum definiert und somit als statistische Mittelwerte der tatsächlich auftretenden Größen zu verstehen. Die Anteile der den Gesamtkörper konstituierenden Teilkörper werden durch das lokale Verhältnis der Teil- oder Partialvolumina in bezug zum Gesamtvolumen bestimmt: Dies ist das Konzept der Volumenanteile.

Um den Aufwand an rein mathematischen Definitionen in Grenzen zu halten, werden im folgenden alle auftretenden Funktionen in ihren Definitionsbereichen als hinreichend stetig und stetig differenzierbar aufgefaßt. Sofern Verwechslungen ausgeschlossen sind, wird zusätzlich auf die Benutzung unterschiedlicher Symbole für eine Funktion und deren Funktionswert verzichtet. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden poröse Medien als Mischungen mit "unvermischbaren" Konstituierenden aufgefaßt. Daher wird ein poröses Medium gelegentlich auch als "Mischung" angesprochen.

Es sei \mathcal{B} der Bereich und \mathcal{P} ein beliebiger Teilbereich des Gesamtvolumens V eines porösen

Mediums, das aus k Konstituierenden φ^i mit Partialvolumina V^i gebildet wird. Die Oberfläche von \mathcal{B} sei $\partial \mathcal{B}$, die Oberfläche von \mathcal{P} sei $\partial \mathcal{P}$. Die Vorstellung superponierter Kontinua bedingt, daß zur Zeit t jeder räumliche Punkt \mathbf{x} der Momentankonfiguration gleichzeitig mit materiellen Punkten X^i aller k Konstituierenden φ^i besetzt ist, i = 1, 2, ..., k. Mit Hilfe der Volumenanteile

$$n^{i} = n^{i} \left(\mathbf{x}, t \right) \,, \tag{3.1}$$

für die im allgemeinen eine Orts- und Zeitveränderlichkeit zuzulassen ist, gilt für die Partialvolumina

$$V^{i} = \int_{\mathcal{B}} n^{i} \,\mathrm{d}v \;. \tag{3.2}$$

Die Größe dv kennzeichnet das aktuelle Volumene
lement des Gesamtkörpers. Entsprechend kann

$$\mathrm{d}v^i = n^i \,\mathrm{d}v \tag{3.3}$$

als Partialvolumenelement der Konstituierenden φ^i verstanden werden. Mit (3.1) – (3.3) sind verschiedene Darstellungen des Gesamtvolumens V möglich:

$$V = \sum_{i=1}^{k} V^{i}$$

$$= \int_{\mathcal{B}} dv = \int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{k} dv^{i} = \int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{k} n^{i} dv.$$
(3.4)

Die Volumenanteile genügen der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{k} n^{i} = 1 . (3.5)$$

Abweichungen von (3.4) und (3.5) in der Form, daß

$$V > \sum_{i=1}^{k} V^{i} \tag{3.6}$$

und somit

$$\sum_{i=1}^{k} n^{i} < 1 , \qquad (3.7)$$

beschreiben sogenannte "ungesättigte" Medien, vgl. z. B. Passman et al. [1984], also poröse Medien, deren Porenräume zumindest teilweise materiefrei sind. Im folgenden soll jedoch fast ausnahmslos von gesättigten Medien ausgegangen werden. Es sei noch darauf hingewiesen, daß in der Literatur anstelle des Begriffs Volumenanteil – volume fraction – auch der Begriff Wichtungskoeffizient – weighting factor – benutzt wird, vgl. z. B. de Boer & Ehlers [1986b] bzw. Ehlers [1988].
Da im Rahmen einer statistischen Modellbildung superponierter Kontinua nur der statistische Schnitt, vgl. Abb. 2.1a), zugelassen ist, gilt analog zu (3.3) entsprechend dem Delesseschen Gesetz, vgl. Delesse [1848] sowie Fillunger [1935]:

$$\mathrm{d}a^i = n^i \,\mathrm{d}a \;. \tag{3.8}$$

Darin kennzeichnen da das Oberflächenelement des Gesamtkörpers und daⁱ das partiale Oberflächenelement der Konstituierenden φ^i . Die Voraussetzung superponierter Kontinua bedingt ferner

$$\mathrm{d}\mathbf{a}^i = n^i \,\mathrm{d}\mathbf{a} \,. \tag{3.9}$$

mit

$$d\mathbf{a}^{i} = \mathbf{n} da^{i}, \qquad (3.10)$$
$$d\mathbf{a} = \mathbf{n} da.$$

Die Größe \mathbf{n} gibt den nach außen orientierten Normaleneinheitsvektor an.

Die Beziehungen (3.1) - (3.10) verdeutlichen, daß mit dem Konzept der Volumenanteile die Beschreibung der inneren Struktur eines porösen Mediums auf die Angabe der Partialvolumina beschränkt bleibt. Damit ist implizit eine Einschränkung der Theorie auf poröse Medien mit isotroper Verteilung der Konstituierenden und daher auch mit isotroper Verteilung des Porenraums verbunden. Dies ist jedoch nicht damit gleichzusetzen, daß ein solcher Porenraum auch isotrope Permeabilitätseigenschaften aufweisen muß; denn die Angabe des lokalen Porenvolumens beinhaltet keine Aussage darüber, ob sich dieses Porenvolumen auf wenige und damit leichter zu durchströmende oder auf sehr viele und damit kaum zu durchströmende Porenzüge verteilt. Demzufolge ist die Berücksichtigung von Anisotropieeigenschaften im Rahmen der oben genannten Einschränkung nicht Gegenstand der Modellbildung sondern vielmehr ebenso wie in der klassischen Kontinuumsmechanik der Einkomponentenkontinua Gegenstand konstitutiver Gleichungen. Dies trifft sowohl auf das Materialverhalten der Festkörpermatrix zu als auch auf die Permeabilität; eine Materialeigenschaft, die gleichermaßen vom Festkörper und den den Festkörper durchströmenden Fluiden bestimmt wird. Es erübrigen sich somit weitere Definitionen wie Struktur–Permeabilitätstensoren, vgl. Kubik [1986a,b], mit denen bereits im Rahmen der Modellbildung durch zusätzliche Mittelungsprozesse anisotrope Permeabilitätseigenschaften des Materials berücksichtigt werden sollen; zumal die Einführung solcher zusätzlichen Definitionen bereits im Bereich der stoffunabhängigen Grundlagen zu nicht unbeträchtlichen Schwierigkeiten führt.

Das Konzept der Volumenanteile bedingt die Einführung von zwei verschiedenen Dichtefunktionen einer Konstituierenden φ^i :

$$\rho^i = \rho^i(\mathbf{x}, t) \tag{3.11}$$

ist die sogenannte Partialdichte,

$$\rho^{iR} = \rho^{iR}(\mathbf{x}, t) \tag{3.12}$$

die effektive oder "realistische" Dichte. Beide Dichtefunktionen sind als statistische Mittelwerte der tatsächlich auftretenden Materialdichten zu verstehen. Mit der Partialdichte wird die lokale Masse auf ein Volumenelement dv des Gesamtkörpers bezogen, die effektive Dichte gibt die lokale Masse in Bezug auf das Partialvolumenelement d v^i an. Für die Gesamtmasse einer Konstituierenden φ^i gilt:

$$M^{i} = \int_{\mathcal{B}} \rho^{i} \, \mathrm{d}v = \int_{\mathcal{B}} \rho^{iR} \, \mathrm{d}v^{i} \,.$$
(3.13)

Mit (3.3) erhält man

$$\rho^i = n^i \,\rho^{iR} \,. \tag{3.14}$$

Die Masse des Gesamtkörpers ist

$$M = \sum_{i=1}^{k} M^{i}$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \rho \, \mathrm{d}v = \int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{k} \rho^{i} \, \mathrm{d}v \,.$$
(3.15)

Die Größe

$$\rho = \sum_{i=1}^{k} \rho^i \tag{3.16}$$

kennzeichnet die Dichte des Gesamtkörpers bzw. die sogenannte Mischungsdichte. In der Mischungstheorie ist es darüber hinaus üblich, den Begriff Konzentration als lokales Verhältnis der Partialdichten in Bezug zur Mischungsdichte einzuführen:

$$c^{i} = \frac{\rho^{i}}{\rho} . \tag{3.17}$$

Die Konzentrationen genügen der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{k} c^{i} = 1.$$
 (3.18)

Mit Hilfe der Konzentrationen kann die Partialmasse M^i alternativ zu (3.13) auch in der Form

$$M^{i} = \int_{\mathcal{B}} c^{i} \rho \,\mathrm{d}v \tag{3.19}$$

angegeben werden.

Kapitel 4: Mischungstheorie

4.1 Einleitung

Die Mischungstheorie ist eine Kontinuumstheorie für heterogen zusammengesetzte Medien mit inneren Wechselwirkungen. Die Voraussetzung superponierter Kontinua mit inneren Freiheitsgraden bedingt, daß für jede Konstituierende der Mischung grundsätzlich ein eigener Bewegungszustand zuzulassen ist. Darüber hinaus können Massenaustauschprozesse zwischen den einzelnen Konstituierenden auftreten; zusätzlich sind Kopplungsmechanismen in Bewegungsgröße, Drall und Energie möglich. Alle Kopplungsmechanismen werden entweder durch chemische Reaktionen oder physikalische Austauschprozesse verursacht.

Die Grundgedanken bei der Entwicklung der Mischungstheorie hat *Truesdell* in drei sogenannten "metaphysischen Prinzipen" zusammengefaßt, vgl. z. B. *Truesdell* [1984, S. 221]

- 1. All properties of the mixture must be mathematical consequences of properties of the constituents.
- 2. So as to describe the motion of a constituent, we may in imagination isolate it from the rest of the mixture, provided we allow properly for the actions of the other constituents upon it.
- 3. The motion of the mixture is governed by the same equations as is a single body.

Diese Prinzipe kommentiert Truesdell wie folgt:

The first principle asserts, roughly, that the whole is no more than the sum of its parts, and the third, that in its motion as a whole a body does not know whether it is a mixture or not.

The second is an extension of the familiar principle of solidification, by which the parts of a body occupying different regions of space are imagined cut as under in geometry but united in physics by suitable forces or energies. Here we distinguish in imagination different constituents occupying the same region of space.

Ausgehend von der Mischungskinematik können alle Bilanzgleichungen für Masse, Bewegungsgröße, Drall und Energie ebenso wie die Entropieungleichung auf der Basis der metaphysischen Prinzipe entwickelt werden. Nach anfänglich heftigen Diskussionen in der Literatur, speziell über die richtige Form der Entropieungleichung für Mischungen – vgl. dazu auch die Ausführungen in Kapitel 2. –, bestehen in diesem Bereich aus heutiger Sicht keine Unklarheiten mehr. Unterschiede in den von verschiedenen Autoren veröffentlichten Arbeiten zur Mischungstheorie treten lediglich bei der Definition einzelner mechanischer Größen auf. Diese Unterschiede sind allerdings nur formaler Natur und beinhalten daher keine prinzipiell anderen Ergebnisse im Bereich der stoffunabhängigen Grundlagen.

Eine umfangreiche Darstellung der Mischungstheorie einschließlich einer ausführlichen Diskussion der Bilanzgleichungen für Masse, Bewegungsgröße, Drall und Energie sowie der Entropieungleichung wurde von *de Boer & Ehlers* in [1986b] veröffentlicht. Das vorliegende Kapitel soll daher im wesentlichen auf die Angabe der stoffunabhängigen Grundlagen der Mischungstheorie beschränkt bleiben. Bei der Definition der verschiedenen mechanischen Größen beziehe ich mich auf die in [1986b] gewählte Darstellung. Die Herleitung einzelner Beziehungen kann ebenfalls [1986b] entnommen werden.

4.2 Kinematik

Die Annahme superponierter Kontinua bedingt, daß zur Zeit t ein räumlicher Punkt \mathbf{x} der Momentankonfiguration gleichzeitig von materiellen Punkten X^i aller k Konstituierenden φ^i besetzt ist. Die Voraussetzung unabhängiger Bewegungszustände der Konstituierenden bedingt ferner, daß sich diese materiellen Punkte zum Zeitpunkt $t = t_0$ in unterschiedlichen Referenzlagen \mathbf{X}_i befanden, vgl. Abb. 4.1



Abb. 4.1: Bewegungszustand einer binären Mischung

Demzufolge ist jeder Konstituierenden eine eigene Bewegungsfunktion

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_i(\mathbf{X}_i, t) \tag{4.2.1}$$

zuzuordnen. Die inverse Bewegungsfunktion

$$\mathbf{X}_i = \boldsymbol{\chi}_i^{-1}(\mathbf{x}, t) \tag{4.2.2}$$

setzt die Existenz nicht-singulärer Jacobischer Determinanten voraus.

Gemäß (4.2.1) besitzt jede Konstituierende ein eigenes Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld:

$$\dot{\mathbf{x}}_{i} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{i}(\mathbf{X}_{i}, t)}{\partial t}, \qquad \ddot{\mathbf{x}}_{i} = \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\chi}_{i}(\mathbf{X}_{i}, t)}{\partial t^{2}}.$$
(4.2.3)

Mit (4.2.2) gilt alternativ zu (4.2.3)

$$\mathbf{\dot{x}}_{i} = \mathbf{\dot{x}}_{i}(\mathbf{x}, t) , \qquad \mathbf{\ddot{x}}_{i} = \mathbf{\ddot{x}}_{i}(\mathbf{x}, t) .$$
 (4.2.4)

Die Mischungsgeschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k} \rho^{i} \, \dot{\mathbf{x}}_{i} \tag{4.2.5}$$

kennzeichnet die baryzentrische bzw. lokale Schwerpunktsgeschwindigkeit des Körpers.

Darüber hinaus ist es in der Mischungstheorie üblich, die Diffusionsgeschwindigkeit

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{\dot{x}}_i - \dot{\mathbf{x}} \tag{4.2.6}$$

einzuführen. Die Diffusionsgeschwindigkeiten genügen der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{k} \rho^{i} \mathbf{u}_{i} = \mathbf{0} , \qquad (4.2.7)$$

d.h. die Diffusionsmassenströme $\rho^i \mathbf{u}_i$ aller k Konstituierenden ergänzen sich zu Null.

Ist Γ eine differenzierbare Skalarfunktion der Variablen **x** und *t*, so existieren gemäß $(4.2.4)_1 k$ unabhängige materielle Zeitableitungen von Γ :

$$\overset{\prime}{\Gamma}_{i} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{grad} \Gamma \cdot \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{i} .$$

$$(4.2.8)$$

Entsprechend gilt mit (4.2.5) für die materielle Zeitableitung der Mischung

$$\dot{\Gamma} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{grad} \Gamma \cdot \dot{\mathbf{x}} .$$
(4.2.9)

Daraus folgt

$$\overset{\prime}{\Gamma}_{i} - \dot{\Gamma} = \operatorname{grad} \Gamma \cdot \mathbf{u}_{i} .$$
(4.2.10)

In (4.2.8) - (4.2.10) kennzeichnet der Differentialoperator grad die partielle Differentiation nach dem Ortsvektor \mathbf{x} der Momentankonfiguration. Die Beziehungen (4.2.8) - (4.2.10)

sind auf vektor- und tensorwertige Funktionen analog anzuwenden.

Für den Deformationsgradienten \mathbf{F}_i und den inversen Deformationsgradienten \mathbf{F}_i^{-1} einer Konstituierenden φ^i gilt mit (4.2.1) und (4.2.2):

$$\mathbf{F}_{i} = \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{x} ,$$

$$\mathbf{F}_{i}^{-1} = \operatorname{grad} \mathbf{X}_{i} .$$

$$(4.2.11)$$

Der Differentialoperator Grad_i gibt die partielle Differentiation nach der Referenzlage \mathbf{X}_i der Konstituierenden φ^i an. Unter den üblichen Voraussetzungen ist der Wertebereich der Determinante von \mathbf{F}_i eingeschränkt:

$$\det \mathbf{F}_i > 0 \ . \tag{4.2.12}$$

Mit (4.2.11) können mit Ausnahme logarithmischer Verzerrungsmaße alle Deformationsund Verzerrungstensoren dargestellt werden. Die Definition logarithmischer Verzerrungsmaße setzt die polare Zerlegung von \mathbf{F}_i voraus.

Mit $(4.2.3)_1$ erhält man für den materiellen Geschwindigkeitsgradienten von φ^i

$$(\mathbf{F}_i)'_i = \operatorname{Grad}_i \mathbf{x}'_i . \tag{4.2.13}$$

Der räumliche Geschwindigkeitsgradient ergibt sich mit $(4.2.4)_1$:

$$\mathbf{L}_i = \operatorname{grad} \mathbf{x}_i \,. \tag{4.2.14}$$

Die zu \mathbf{L}_i gehörenden Deformations- und Drehgeschwindigkeitstensoren lauten:

$$\mathbf{D}_{i} = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_{i} + \mathbf{L}_{i}^{T}) ,$$

$$\mathbf{W}_{i} = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_{i} - \mathbf{L}_{i}^{T}) .$$

$$(4.2.15)$$

Die Größe \mathbf{L}_i^T kennzeichnet die Transposition von \mathbf{L}_i . Für den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten der Mischung gilt mit (4.2.5)

$$\mathbf{L} = \operatorname{grad} \dot{\mathbf{x}} \tag{4.2.16}$$

bzw.

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k} (\rho^{i} \mathbf{L}_{i} + \mathbf{u}_{i} \otimes \operatorname{grad} \rho^{i}) .$$
(4.2.17)

Die symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteile von \mathbf{L} ergeben sich analog zu (4.2.15).

Auf die Definition weiterer kinematischer Größen sei an dieser Stelle verzichtet. Ich werde diese Größen dort einführen, wo sie benötigt werden.

4.3 Bilanzgleichungen

Alle Bilanzgleichungen der Mischungstheorie wie Massenbilanz, Bewegungsgrößen-, Drallund Energiebilanz können auf der Basis von *Truesdells* metaphysischen Prinzipien hergeleitet werden. Dabei ist folgendermaßen vorzugehen: Zunächst ist eine Bilanzgleichung für jede Konstituierende φ^i getrennt aufzustellen. Diese Bilanzgleichung wird unter Einbeziehung geeigneter Interaktions- bzw. Zuwachsgrößen in Analogie zu derjenigen eines klassischen Einkomponentenkontinuums postuliert. Die Interaktionsgrößen dienen zur Beschreibung der chemischen und physikalischen Austauschprozesse zwischen den Konstituierenden der Mischung. Aus der Summe der Partialbilanzen folgt dann eine entsprechende Bilanzgleichung für die Mischung. Diese Bilanzgleichung muß in ihrer äußeren Form der Bilanzgleichung eines Einkomponentenmaterials entsprechen. Aus dieser Forderung ergibt sich einerseits eine Zwangsbedingung für die eingeführten Interaktionsgrößen; andererseits liefert diese Forderung ein Kriterium dafür, welcher mechanischen Größe der Mischung die verschiedenen aus den Teilbilanzen resultierenden Effekte hinzuzuaddieren sind. Alle folgenden Bilanzgleichungen werden in lokaler Form in Bezug auf ein Volumenelement dvder Mischung entsprechend den Ausführungen in [1986b] angegeben.

Die lokale Massenbilanz lautet für eine beliebige Konstituierende φ^i :

$$\dot{\rho}_i^i + \rho^i \operatorname{div} \mathbf{x}_i^\prime = \hat{\rho}^i . \tag{4.3.1}$$

Die Größe

$$\hat{\rho}^i = \hat{\rho}^i(\mathbf{x}, t) \tag{4.3.2}$$

kennzeichnet darin den lokalen Massenzuwachs, also denjenigen Anteil der auf ein Volumenelement dv bezogenen zeitlichen Dichteänderung, der durch die Existenz der übrigen k - 1 Konstituierenden verursacht wird, die zum Zeitpunkt t ebenfalls die Lage \mathbf{x} einnehmen. In der Mischungstheorie wird die Existenz von $\hat{\rho}^i$ in der Regel mit chemischen Reaktionen begründet. In der Anwendung der Mischungstheorie auf poröse Medien kann $\hat{\rho}^i$ in einigen Fällen jedoch auch rein physikalisch motiviert sein, etwa wenn die Poreninhaltsstoffe bei unterschiedlichen Bewegungszuständen von gleichem chemischen Aufbau sind. Dies trifft z. B. in der Bodenmechanik auf das Problem des freien und gebundenen Porenwassers zu. Kann die Existenz von $\hat{\rho}^i$ ausgeschlossen werden, läßt sich (4.3.1) integrieren, und man erhält

$$\rho^{i} = \rho^{i}_{0i} \,(\det \mathbf{F}_{i})^{-1} \,. \tag{4.3.3}$$

Darin gibt

$$\rho_{0i}^{i} = \rho_{0i}^{i}(\mathbf{X}_{i}, t_{0}) \tag{4.3.4}$$

die Partialdichte von φ^i in der Referenzlage \mathbf{X}_i an.

Durch Summation von (4.3.1) über alle k Konstituierenden entsteht

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{\rho}^{i} = 0 .$$
(4.3.5)

Die Beziehung $(4.3.5)_2$ beinhaltet, daß sich die Summe der lokalen Massenzuwächse aller k Konstituierenden zu Null ergänzt.

Die lokale Form des Erhaltungssatzes für die Bewegungsgröße einer Konstituierenden φ^i ist das Postulat

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^{i} + \rho^{i} (\mathbf{b}^{i} - \overset{"}{\mathbf{x}_{i}}) + \hat{\mathbf{p}}^{i} = \mathbf{0} .$$

$$(4.3.6)$$

Darin sind \mathbf{T}^i der partiale *Cauchysche* Spannungstensor von φ^i und \mathbf{b}^i eine der Konstituierenden φ^i durch Fernwirkung eingeprägte Beschleunigung. Die Größe

$$\hat{\mathbf{p}}^i = \hat{\mathbf{p}}^i(\mathbf{x}, t) \tag{4.3.7}$$

kennzeichnet den durch die übrigen k - 1 Konstituierenden verursachten Bewegungsgrößenzuwachs pro Volumenelement dv, vgl. auch *Truesdell & Toupin* [1960, Abschnitt 215]. Die Größe $\hat{\mathbf{p}}^i$ kann auch als volumenbezogene lokale Interaktionskraft zwischen den Konstituierenden der Mischung aufgefaßt werden. Der vollständige Interaktionsterm lautet, vgl. de Boer & Ehlers [1986b]:

$$\hat{\mathbf{s}}^i = \hat{\mathbf{p}}^i + \hat{\rho}^i \, \mathbf{x}_i \, . \tag{4.3.8}$$

In (4.3.8) wird zusätzlich zum lokalen Bewegungsgrößenzuwachs $\hat{\mathbf{p}}^i$ auch der durch den Dichtezuwachs $\hat{\rho}^i$ verursachte Bewegungsgrößenaustausch berücksichtigt. Durch Summation von (4.3.6) über alle k Konstituierenden entsteht

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \left(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{x}} \right) = \mathbf{0} ,$$

$$\sum_{i=1}^{k} (\hat{\mathbf{p}}^{i} + \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i}') = \mathbf{0} .$$

$$(4.3.9)$$

In (4.3.9) sind folgende Definitionen enthalten, vgl. de Boer & Ehlers [1986b]:

$$\mathbf{T}^{I} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{T}^{i},$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{I} - \sum_{i=1}^{k} \rho^{i} \mathbf{u}_{i} \otimes \mathbf{u}_{i},$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k} \rho^{i} \mathbf{b}^{i},$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k} [\rho^{i} \overset{"}{\mathbf{x}}_{i} - \operatorname{div} (\rho^{i} \mathbf{u}_{i} \otimes \mathbf{u}_{i}) + \hat{\rho}^{i} \overset{'}{\mathbf{x}}_{i}].$$
(4.3.10)

Die Größe \mathbf{T}^{I} wird als "innerer Anteil" des Spannungstensors \mathbf{T} bezeichnet. Die Anregung, den Ausdruck $\rho^{i} \mathbf{u}_{i} \otimes \mathbf{u}_{i}$ als Spannungstensor zu interpretieren, stammt von *Eckart* [1940] und befindet sich in völliger Übereinstimmung mit *Maxwells* kinetischer Gastheorie [1866, 1868], vgl. auch *Truesdell & Toupin* [1960, Abschnitt 215].

Die lokale Form der Drallbilanz einer Konstituierenden φ^i ist das Postulat

$$\mathbf{T}^{i} = \mathbf{T}^{T\,i} - \hat{\mathbf{M}}^{i} \,. \tag{4.3.11}$$

Darin repräsentiert

$$\hat{\mathbf{M}}^{i} = \hat{\mathbf{M}}^{i}(\mathbf{x}, t) \tag{4.3.12}$$

den schiefsymmetrischen Drallkopplungstensor, der mit dem volumenbezogenen Drallzuwachsvektor

$$\hat{\mathbf{m}}^i = \hat{\mathbf{m}}^i(\mathbf{x}, t) , \qquad (4.3.13)$$

einem axialen Vektor, gekoppelt ist:

$$\hat{\mathbf{m}}^{i} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{M}}^{i}) . \tag{4.3.14}$$

Das in (4.3.14) benutzte Vektorprodukt zweier Tensoren ist in de Boer [1982, Abschnitt 4.9.4] definiert. Ebenso wie bei der Definition des Bewegungsgrößenzuwachses stellt der lokale Drallzuwachs $\hat{\mathbf{m}}^i$ nicht den gesamten Interaktionsterm dar. Der gesamte Momentenzuwachs ist vielmehr durch

$$\hat{\mathbf{m}}^{i} = \hat{\mathbf{m}}^{i} + \mathbf{x} \times (\hat{\mathbf{p}}^{i} + \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i})$$
(4.3.15)

gegeben, vgl. de Boer & Ehlers [1986b].

Die Drallbilanz (4.3.11) zeigt, daß die Partialspannungen \mathbf{T}^i im Rahmen der Mischungstheorie nur für den Fall $\hat{\mathbf{M}}^i = \mathbf{0}$ symmetrische Tensoren sind. Die grundsätzlich zuzulassende Unsymmetrie von \mathbf{T}^i ist hier jedoch eine Folge des Drallkopplungsprozesses zwischen den Konstituierenden der Mischung und daher nicht vergleichbar mit der in der Theorie der Cosserat-Kontinua üblichen Einführung unsymmetrischer Spannungstensoren.

Die Drallbilanz der Mischung ist das Postulat

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T ,$$

$$\sum_{i=1}^k \hat{\mathbf{M}}^i = \mathbf{0} , \qquad (4.3.16)$$

woraus mit $(4.3.10)_1$ direkt auf die Symmetrie des inneren Anteils von ${\bf T}$ geschlossen werden kann:

$$\mathbf{T}^{I} = \mathbf{T}^{T I} \,. \tag{4.3.17}$$

Das Ergebnis der Drallbilanz ist die Aussage, daß die Spannungstensoren \mathbf{T}^{I} und \mathbf{T} der Mischung symmetrisch sind, die Partialspannungen \mathbf{T}^{i} jedoch auch schiefsymmetrische Anteile enthalten können.

Die lokale Form der Energiebilanz einer Konstituierenden φ^i ist das Postulat

$$\rho^{i} \, \stackrel{\prime}{\varepsilon}_{i}^{i} = -\hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \stackrel{\prime}{\mathbf{x}}_{i} - \hat{\rho}^{i} (\varepsilon^{i} + \frac{1}{2} \stackrel{\prime}{\mathbf{x}}_{i} \cdot \stackrel{\prime}{\mathbf{x}}_{i}) +$$

$$+ \mathbf{T}^{i} \cdot \mathbf{L}_{i} + \rho^{i} r^{i} - \operatorname{div} \mathbf{q}^{i} + \hat{e}^{i} .$$

$$(4.3.18)$$

Darin kennzeichnen ε^i die spezifische innere Energie von φ^i pro Massenelement $\rho^i dv$, r^i die durch Fernwirkung eingeprägte innere Wärmequelle und \mathbf{q}^i den partialen Wärmezu-flußvektor. Die Größe

$$\hat{e}^i = \hat{e}^i(\mathbf{x}, t) \tag{4.3.19}$$

repräsentiert den lokalen Energiezuwachs, verursacht durch Energietransfer zwischen φ^i und den übrigen k-1 Konstituierenden. Für einige Anwendungszwecke ist es vorteilhaft, den Zuwachsterm \hat{e}^i in mehrere Anteile aufzuspalten, vgl. z. B. *de Boer & Ehlers* [1986b]:

$$\hat{e}^{i} = \hat{\varepsilon}^{i} + \hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \mathbf{\dot{x}}_{i}^{\prime} + \hat{\rho}^{i} \left(\varepsilon^{i} + \frac{1}{2}\mathbf{\dot{x}}_{i}^{\prime} \cdot \mathbf{\dot{x}}_{i}^{\prime}\right)^{\mathrm{I}}.$$
(4.3.20)

^I Diese Definition ist nicht identisch mit *Bowen* [1976, Gl. (1.6.8)]. Die Größe $\hat{\varepsilon}^i$ entspricht jedoch dem von *Bowen* [1976, Gl. (1.5.1)] eingeführten Energiezuwachsterm.

Durch Summation von (4.3.18) über alle k Konstituierenden folgt

$$\rho \dot{\varepsilon} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} + \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} ,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{e}^{i} = 0 .$$
(4.3.21)

In $(4.3.21)_1$ sind folgende Definitionen enthalten, vgl. de Boer & Ehlers [1986b]:

$$\varepsilon^{I} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k} \rho^{i} \varepsilon^{i} ,$$

$$r^{I} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k} \rho^{i} r^{i} ,$$

$$q^{I} = \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{q}^{i} - \mathbf{T}^{T i} \mathbf{u}_{i} + \rho^{i} \varepsilon^{i} \mathbf{u}_{i}) ;$$

$$\varepsilon = \varepsilon^{I} + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} \rho^{i} \mathbf{u}_{i} \cdot \mathbf{u}_{i} ,$$

$$r = r^{I} + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k} \rho^{i} \mathbf{b}^{i} \cdot \mathbf{u}_{i} ,$$

$$q = \mathbf{q}^{I} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} \rho^{i} (\mathbf{u}_{i} \cdot \mathbf{u}_{i}) \mathbf{u}_{i} .$$
(4.3.23)

Die Ausdrücke ε^{I} , r^{I} und \mathbf{q}^{I} stellen die inneren Anteile von ε , r und \mathbf{q} dar. Die spezifische innere Energie ε der Mischung setzt sich aus der Summe der über die Dichten gewichteten spezifischen Energien der k Konstituierenden und der durch den Diffusionsprozeß entstehenden kinetischen Energien zusammen. Die äußere Energiequelle r der Mischung resultiert ebenfalls aus zwei Anteilen; der über die Dichten gewichteten Summe der äußeren Wärmequellen r^{i} sowie der Summe der Diffusionsarbeit infolge äußerer Volumenkräfte. Der Zuflußvektor \mathbf{q} ergibt sich aus der Summe der partialen Wärmezuflüsse \mathbf{q}^{i} , der Summe der Zuflüsse infolge der Diffusionsarbeit der partialen Kontaktkräfte sowie der Zuflußvektoren der durch den Diffusionsprozeß erzeugten inneren und kinetischen Energien.

Sonderformen der Energiebilanz wie die Formulierung mit Hilfe der freien Helmholtzschen Energie werden im Zusammenhang mit entsprechenden Formen der Entropieungleichung für Mischungen im Abschnitt 4.5 angegeben.

4.4 Entropieungleichung

In der Literatur wurde lange über die richtige Form der Entropieungleichung für Mischungen diskutiert, vgl. dazu auch die Ausführungen in Kapitel 2. Zunächst war unklar, ob eine Entropieungleichung für jede Konstituierende φ^i oder ob nur eine einzige Entropieungleichung für die gesamte Mischung zuzulassen sei. Aus heutiger Sicht muß das Postulat getrennter Entropieungleichungen zwar als eine hinreichende, andererseits aber zu strenge Forderung beurteilt werden. Das Postulat einer gemeinsamen Entropieungleichung aller Konstituierenden ist gleichzeitig notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Dissipationsmechanismen innerhalb der Mischung und daher vorzuziehen.

Korrekte Formen der Entropieungleichung für Mischungen wurden erstmals von Bowen [1967] und Müller [1968] angegeben.

Das Entropiepostulat von Müller lautet, vgl. [1968, Ungl. (3.4)]:

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} - \frac{1}{\theta} \rho r^{I} \ge 0 .$$
(4.4.1)

Darin sind

$$\eta = \eta(\mathbf{x}, t) \tag{4.4.2}$$

die spezifische Entropie der Mischung pro Massenelement $\rho \, \mathrm{d}v$,

$$\theta = \theta(\mathbf{x}, t) \tag{4.4.3}$$

die absolute, für alle Konstituierenden gleiche Kelvinsche Temperatur und

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) \tag{4.4.4}$$

der Entropiezuflußvektor der Mischung, den *Müller* in Analogie zu [1967] mit Hilfe einer konstitutiven Gleichung bestimmte.

Die von Bowen postulierte Entropieungleichung, vgl. Bowen & Wiese [1969, Ungl. (3.3)], hat die Form

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta^{i}} \mathbf{h}^{i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta^{i}} \rho^{i} r^{i} \ge 0$$
 (4.4.5)

Diese Beziehung kann mit einigen Umformungen in Bowens ursprüngliches Entropiepostulat überführt werden, vgl. Bowen [1967, Abschnitt 3] sowie Bowen & Wiese [1969, (3.13), (3.14)]. Im Gegensatz zu Bowen und Wiese, die für jede Konstituierende φ^i eine eigene Temperatur

$$\theta^i = \theta^i(\mathbf{x}, t) \tag{4.4.6}$$

zuließen, ging Bowen 1967 ebenso wie Müller von einer gemeinsamen Temperatur $\theta = \theta^i$ für alle k Konstituierenden aus. Müllers ursprüngliches Postulat (4.4.1) wurde von

Dunwoody & Müller [1968, Ungl. (3.2)] für den Fall k verschiedener Temperaturen θ^i erweitert:

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \phi - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta^{i}} \rho^{i} r^{i} \ge 0$$
 (4.4.7)

Der Unterschied zwischen den Entropieungleichungen (4.4.5) und (4.4.7) besteht lediglich darin, daß Dunwoody & Müller ebenso wie Müller den Entropiezufluß zunächst nicht näher spezifizierten, während Bowen & Wiese den Entropiezuflußvektor in der Weise auffaßten, daß

$$\boldsymbol{\phi} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta^{i}} \mathbf{h}^{i} \,. \tag{4.4.8}$$

Die Größe

$$\mathbf{h}^{i} = \mathbf{h}^{i}(\mathbf{x}, t) \tag{4.4.9}$$

repräsentiert darin einen Zuflußvektor, der über die Beziehung

$$\mathbf{h}^{i} = \mathbf{q}^{i} + \theta^{i} \,\rho^{i} \,\eta^{i} \,\mathbf{u}_{i} \tag{4.4.10}$$

als Summe des partialen Wärmezuflußvektors \mathbf{q}^i und des durch den Diffusionsprozeß verursachten, mit θ^i multiplizierten Entropiezuflusses definiert wurde.

Ausgehend von den metaphysischen Prinzipen leitete *Truesdell* [1968] eine Entropieungleichung der Form (4.4.5) als Summe über alle k Konstituierenden in Analogie zur klassischen Kontinuumsmechanik der Einkomponentenmaterialien her. Diese Vorgehensweise, die auch von *de Boer & Ehlers* [1986b] benutzt wurde, führt in [1986b, Abschnitt 3.8] zunächst auf eine lokale Entropieungleichung der Form

$$\sum_{i=1}^{k} \left[\rho^{i} \ \eta^{i}_{i} + \hat{\rho}^{i} \eta^{i} + \operatorname{div}\left(\frac{1}{\theta^{i}} \mathbf{q}^{i}\right) - \frac{1}{\theta^{i}} \rho^{i} r^{i} \right] \ge 0 , \qquad (4.4.11)$$

in der η^i die spezifische Entropie von φ^i pro Massenelement $\rho^i dv$ kennzeichnet.

Mit (4.4.10), der Definition

$$\eta = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k} \rho^{i} \eta^{i}$$
(4.4.12)

sowie der Identität

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\rho^{i} \ \eta^{i}_{i} + \hat{\rho}^{i} \ \eta^{i} \right) = \rho \ \dot{\eta} + \sum_{i=1}^{k} \operatorname{div} \left(\rho^{i} \ \eta^{i} \ \mathbf{u}_{i} \right) , \qquad (4.4.13)$$

vgl. [1986b, Gl. (3.8.9)], kann (4.4.11) leicht in das Postulat (4.4.5) von Bowen & Wiese überführt werden. Dieses Postulat ist die bis heute gültige, auch von verschiedenen anderen Autoren hergeleitete Bowen-Truesdell-Form der Entropieungleichung für Mischungen.

Bei der Entwicklung thermodynamischer Restriktionen erscheint es ratsam, die Entropieungleichung in der Form (4.4.11) zu benutzen; und zwar immer dann, wenn nicht nur Restriktionen für konstitutive Gleichungen der Mischung sondern wenn auch Restriktionen für die entsprechenden Partialgrößen gesucht sind, vgl. z. B. *Bowen* [1976] oder *de Boer* & *Ehlers* [1986b]. Dazu ist es erforderlich, die Entropieungleichung (4.4.11) mit Hilfe der partialen Energiebilanz (4.3.18) umzuformen. Man erhält

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta^{i}} \left[-\rho^{i} \left(\varepsilon_{i}^{\prime i} - \theta^{i} \ \eta_{i}^{\prime i} \right) - \hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - \hat{\rho}^{i} \left(\varepsilon^{i} - \theta^{i} \ \eta^{i} + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{i}^{\prime} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} \right) + \mathbf{T}^{i} \cdot \mathbf{L}_{i} - \frac{1}{\theta^{i}} \mathbf{q}^{i} \cdot \operatorname{grad} \theta^{i} + \hat{e}^{i} \right] \geq 0 .$$

$$(4.4.14)$$

4.5 Ergänzende Bemerkungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die Grundlagen der Mischungstheorie vorgestellt. In Ergänzung zu diesen Ausführungen sollen im folgenden zwei weitere Themen behandelt werden; und zwar zum einen eine im Hinblick auf die Entwicklung thermodynamischer Restriktionen geeignete Formulierung der Entropieungleichung und der Energiebilanz mit Hilfe der freien *Helmholtz*schen Energie und zum anderen die durch die Einführung von inkompressiblen Konstituierenden verursachten Modifikationen einzelner Beziehungen.

In der Mischungstheorie ist es üblich, zwei verschiedene Ausdrücke der freien Helmholtzschen Energie zu benutzen, vgl. z. B. Bowen [1976] oder de Boer & Ehlers [1986b]:

$$\psi^{i} = \varepsilon^{i} - \theta^{i} \eta^{i} ,$$

$$\Psi^{i} = \rho^{i} \varepsilon^{i} - \theta^{i} \P^{i} .$$
(4.5.1)

In $(4.5.1)_1$ wird die partiale freie Energie ψ^i einer Konstituierenden φ^i pro Massenelement $\rho^i dv$ angegeben, in $(4.5.1)_2$ werden die partiale freie Energie Ψ^i und die partiale Entropie

 \P^i auf ein Volumenelement dv des Mischungskörpers bezogen:

$$\Psi^{i} = \rho^{i} \psi^{i} , \qquad (4.5.2)$$
$$\P^{i} = \rho^{i} \eta^{i} .$$

Die Definitionen $(4.5.1)_1$ und $(4.5.1)_2$ führen zu zwei unterschiedlichen Formen der Entropieungleichung (4.4.14). Mit $(4.5.1)_1$ erhält man

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta^{i}} \left[-\rho^{i} \left(\psi_{i}^{i} + \theta_{i}^{i} \eta^{i} \right) - \hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - \hat{\rho}^{i} \left(\psi^{i} + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{i}^{\prime} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} \right) + \mathbf{T}^{i} \cdot \mathbf{L}_{i} - \frac{1}{\theta^{i}} \mathbf{q}^{i} \cdot \operatorname{grad} \theta^{i} + \hat{e}^{i} \right] \geq 0$$

$$(4.5.3)$$

und daraus mit (4.5.2) und der Massenbilanz (4.3.1)

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta^{i}} \left[- \Psi_{i}^{i} - \theta_{i}^{i} \P^{i} - \hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \mathbf{x}_{i} - \frac{1}{2} \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i} \cdot \mathbf{x}_{i} - \frac{1}{2} \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i} \cdot \mathbf{x}_{i} - \rho^{i} \mathbf{K}^{T i} \cdot \mathbf{L}_{i} - \frac{1}{\theta^{i}} \mathbf{q}^{i} \cdot \operatorname{grad} \theta^{i} + \hat{e}^{i} \right] \geq 0 .$$

$$(4.5.4)$$

In (4.5.4) kennzeichnet die Größe

$$\mathbf{K}^{i} = \psi^{i} \mathbf{I} - \frac{1}{\rho^{i}} \mathbf{T}^{T i}$$
(4.5.5)

den von Bowen eingeführten Tensor des chemischen Potentials, eine Erweiterung des ursprünglich von Gibbs als Skalar definierten Begriffs, vgl. Bowen [1967] sowie Bowen & Wiese [1969]. Bei der Entwicklung thermodynamischer Restriktionen sind prinzipiell natürlich alle Formen der Entropieungleichung zugelassen. Es erscheint jedoch ratsam, die Entropieungleichung in der Form (4.5.4) zu benutzen. Diese Form hat den einfachsten Aufbau und läßt sich daher am besten handhaben. Die Annahme unterschiedlicher Temperaturen θ^i bedingt, daß aus jeder der k partialen Energiebilanzen eine Wärmeleitungsgleichung zur Ermittlung der Temperaturänderungen θ_i^{i} zu ermitteln ist. Diese Wärmeleitungsgleichungen sind untereinander durch die Energiezuwachsterme \hat{e}^i gekoppelt, vgl. (4.3.18).

 $Mit (4.5.1)_1$ kann die partiale Energiebilanz (4.3.18) in folgender Form dargestellt werden:

$$-\rho^{i}\left(\psi_{i}^{i}+\psi_{i}^{i}\eta^{i}+\theta^{i}\eta_{i}^{i}\right)-\hat{\mathbf{p}}^{i}\cdot\dot{\mathbf{x}}_{i}-\hat{\rho}^{i}\left(\psi^{i}+\theta^{i}\eta^{i}+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}_{i}\cdot\dot{\mathbf{x}}_{i}\right)-\mathbf{T}^{i}\cdot\mathbf{L}_{i}+\rho^{i}r^{i}-\operatorname{div}\mathbf{q}^{i}+\hat{e}^{i}=0.$$

$$(4.5.6)$$

Aus (4.5.6) erhält man mit (4.3.1) sowie den Definitionen (4.5.2) und (4.5.5) als alternative

Form der Energiebilanz:

$$\psi_{i}^{i} - \theta^{i} \, \left(\overset{i}{\mathbf{h}}_{i}^{i} - \P^{i} \left(\overset{i}{\theta}_{i}^{i} + \theta^{i} \operatorname{div} \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{i} \right) - \hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{i} - \frac{1}{2} \hat{\rho}^{i} \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{i} \cdot \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{i} - \frac{1}{2} \rho^{i} \mathbf{K}^{T i} \cdot \mathbf{L}_{i} + \rho^{i} r^{i} - \operatorname{div} \mathbf{q}^{i} + \hat{e}^{i} = 0 .$$

$$(4.5.7)$$

Die oben genannten Wärmeleitungsgleichungen ergeben sich durch Einsetzen der konstitutiven Gleichungen des jeweils untersuchten Mischungstyps in die Beziehungen (4.5.6)bzw. (4.5.7).

In vielen praxisrelevanten Anwendungen der Mischungstheorie ist es nicht notwendig, jeder Konstituierenden eine eigene Temperatur zuzuordnen. Stattdessen kann von einer gemeinsamen Temperatur $\theta^i = \theta$ aller Konstituierenden ausgegangen werden. In diesen Fällen ist es erforderlich, sowohl die Entropieungleichung (4.5.3) bzw. (4.5.4) als auch die Energiebilanzen (4.5.6) bzw. (4.5.7) weiter umzuformen. Dabei hat es sich als zweckmäßig erwiesen, die materielle Zeitableitung der Temperatur θ und der Entropiefunktionen \P^i nicht mit den Absolutgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}_i$ der einzelnen Konstituierenden sondern mit der Mischungsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ zu bilden. Da im Rahmen der konstitutiven Theorie ausschließlich von der Entropieungleichung in der Form (4.5.4) und der Energiebilanz in der Form (4.5.7) ausgegangen werden soll, sollen alle weiteren Überlegungen am Beispiel dieser Ausdrücke durchgeführt werden.

Unter Voraussetzung von $\theta^i = \theta$ lautet die Entropieungleichung (4.5.4) nach Multiplikation mit θ , die Energiekopplungsterme \hat{e}^i können mit (4.3.21)₂ eliminiert werden:

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \left[-\psi_{i}^{i} - \dot{\theta} \P^{i} - \hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - \frac{1}{2} \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i}^{\prime} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - \rho^{i} \mathbf{K}^{T i} \cdot \mathbf{L}_{i} - \frac{1}{\theta} \mathbf{h}^{i} \cdot \operatorname{grad} \theta \right] \geq 0 .$$

$$(4.5.8)$$

In (4.5.8) wurden die Definitionen (4.2.10) und (4.4.10) benutzt.

Die Annahme einer gemeinsamen Temperatur für alle Konstituierenden bedingt, daß die Temperaturänderung $\dot{\theta}$ nicht aus getrennten partialen Energiebilanzen bestimmt werden muß. Stattdessen kann $\dot{\theta}$ aus der Energiebilanz der Mischung ermittelt werden, in der sich die Summe der Energiekopplungen \hat{e}^i zu Null ergänzt, vgl. $(4.3.21)_2$. Im Rahmen der konstitutiven Theorie ist es bei Mischungen mit nur einem Temperaturfeld $\theta^i = \theta$ daher nicht erforderlich, konstitutive Gleichungen für die Energiekopplungsterme \hat{e}^i zu bestimmen. Eine zur Entwicklung der Wärmeleitungsgleichung geeignete Form der Energiebilanz der Mischung ergibt sich durch Summation über alle k Partialbilanzen (4.5.7). Mit (4.2.6), $(4.2.10), (4.4.10) \text{ und } (4.3.21)_2$ lautet diese Beziehung

$$\sum_{i=1}^{k} \left[-\psi_{i}^{'i} - \theta \,\dot{\mathbf{q}}^{i} - \mathbf{q}^{i} \left(\dot{\theta} + \theta \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} \right) - \hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{i} - \frac{1}{2} \,\hat{\rho}^{i} \,\dot{\mathbf{x}}_{i} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{i} - \rho^{i} \,\mathbf{K}^{T\,i} \cdot \mathbf{L}_{i} - \rho^{i} \,r^{i} - \operatorname{div} \mathbf{h}^{i} \right] = 0 \,.$$

$$(4.5.9)$$

Die Identität von (4.5.9) mit der Energiebilanz in der Form $(4.3.21)_1$ kann mit den im vorangegangenen angegebenen Definitionen leicht verifiziert werden.

Weitere Modifikationen einiger Beziehungen der Mischungstheorie ergeben sich, wenn entweder einzelne oder sogar alle Konstituierenden der Mischung inkompressibel sind; im letzten Fall spricht man von einer inkompressiblen Mischung.

Der erste, der eine inkompressible Mischung im Rahmen einer Theorie sogenannter "constrained materials" untersuchte, war *Mills* [1966]. Dazu führte *Mills* Kompositionsfaktoren ein; ein Begriff, der mit den in Kapitel 3 definierten Volumenanteilen identisch ist. Da das Konzept der Volumenanteile prinzipiell auch auf beliebige Mischungen übertragbar ist – die Annahme superponierter Kontinua muß auch hier als Modellvorstellung verstanden werden –, soll die Inkompressibilitätsbedingung im folgenden analog zum Vorgehen von *Mills* mit Hilfe der Volumenanteile angegeben werden. Dazu wird ein Konzept eingeführt, das im Gegensatz zum Vorgehen vieler anderer Autoren, vgl. *Mills* [1966], *Craine* [1971], *Atkin & Craine* [1976a], *Bowen* [1980, 1984], *de Boer & Ehlers* [1986b] sowie *Ehlers* [1989b] prinzipiell auch auf Mischungen mit Massenaustauschprozessen übertragen werden kann.

Die Inkompressibilitätsbedingung für eine beliebige Konstituierende wird folgendermaßen definiert:

Eine Konstituierende φ^i ist inkompressibel, wenn sich ihre effektive Dichte ρ^{iR} während des Deformationsprozesses nicht ändert, d. h. wenn

$$\rho^{iR} = \text{konst.} \quad \text{bzw.} \quad \rho_i^{iR} = 0.$$
(4.5.10)

Im Rahmen der Mischungstheorie ist die Massenbilanz eine Bilanzgleichung für die Partialdichten ρ^i , vgl. (4.3.1), d. h. für das Produkt aus Volumenanteil n^i und effektiver Dichte ρ^{iR} . Bei Beachtung von (3.14) und (4.5.10) reduziert sich diese Bilanzgleichung für inkompressible φ^i auf eine Bilanzgleichung für die Partialvolumina:

$$n_i^{\prime i} + n^i \operatorname{div} \mathbf{x}_i^{\prime} = \hat{n}^i .$$
 (4.5.11)

In (4.5.11) wurde die Definition

$$\hat{n}^i = \frac{\hat{\rho}^i}{\rho^{i\,R}} \tag{4.5.12}$$

benutzt. Die Größe \hat{n}^i kennzeichnet darin einen durch chemisch und physikalisch motivierte Massenaustauschprozesse verursachten Volumenzuwachs.

Sind alle Konstituierenden einer Mischung inkompressibel, so entsteht mit (4.2.8) durch Summation über alle k Volumenbilanzen (4.5.11)

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{div}\left(n^{i} \mathbf{x}_{i}^{\prime}\right) = \sum_{i=1}^{k} \hat{n}^{i} , \qquad (4.5.13)$$

d. h. die Summe der Volumenströme entspricht der Summe der k Volumenzuwächse \hat{n}^i . In (4.5.13) wurde entsprechend (3.5)

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial n^{i}}{\partial t} = 0 \tag{4.5.14}$$

vorausgesetzt.

Eine Zwangsbedingung der Form $\sum_{i=1}^k\,\hat{n}^i=0$ in Analogie zu $(4.3.5)_2$ kann für inkompressible Mischungen im allgemeinen nicht vorausgesetzt werden, da im Gegensatz zur klassischen Kontinuumsmechanik der Einkomponentenmaterialien die Inkompressibilitätsbedingung für Mischungen nicht an die Forderung der Volumenkonstanz gebunden ist. Füllt man zum Beispiel eine inkompressible Flüssigkeit wie warmes Wasser in eine inkompressible Festkörpermatrix wie poröses Eis, so entsteht eine inkompressible Mischung mit einem bestimmten Ausgangsvolumen. Infolge der entstehenden Eisschmelze bleibt die Mischung zwar inkompressibel; das Mischungsvolumen nimmt jedoch ab. Eine Zwangsbedingung der oben genannten Form gilt daher nur in Sonderfällen wie z.B. bei Phasentransformationen zwischen zwei Konstituierenden, die sich bei gleicher effektiver Dichte nur in ihrem Bewegungszustand unterscheiden. Dies ist z. B. in der Bodenmechanik bei der Beschreibung des Massenaustausches zwischen freiem und gebundenem Porenwasser der Fall. Diese Ausführungen zeigen, daß die Inkompressibilitätseigenschaft von Mischungen nicht auf der Basis von Truesdells metaphysischen Prinzipen beschrieben werden kann. Dies ist jedoch nicht verwunderlich, denn die Volumenbilanz (4.5.11) ist lediglich eine aus der Massenbilanz (4.3.1) infolge der Materialeigenschaft Inkompressibilität resultierende Bilanzgleichung und somit nicht wie die Massenbilanz selbst oder die Bilanzen für Bewegungsgröße, Drall und Energie Konsequenz eines für beliebige Materialien gültigen Prinzips.

Können Phasentransformationen ausgeschlossen werden, so daß $\hat{n}^i = 0$, läßt sich (4.5.11) integrieren, und man erhält

$$n^{i} = n_{0i}^{i} \,(\det \mathbf{F}_{i})^{-1} \,. \tag{4.5.15}$$

Darin gibt

$$n_{0\,i}^{i} = n_{0\,i}^{i} \left(\mathbf{X}_{i}, \, t_{0} \right) \tag{4.5.16}$$

den Volumenanteil von φ^i in der Referenzlage \mathbf{X}_i an. Die Beziehung (4.5.15) beinhaltet die Aussage, daß das Partialvolumen einer inkompressiblen Konstituierenden φ^i während des Deformationsprozesses konstant bleibt, wenn keine Massenaustauschprozesse auftreten:

$$V^{i} = \int_{\mathcal{B}} n^{i} \,\mathrm{d}v = \int_{\mathcal{B}} n^{i}_{0\,i} \,\mathrm{d}V_{0\,i} \,. \tag{4.5.17}$$

Die Größe dV_{0i} kennzeichnet darin das Volumenelement der Mischung in der Referenzlage \mathbf{X}_i der Konstituierenden φ^i .

In der Mischungstheorie werden alle partialen Deformationsgrößen einer Konstituierenden φ^i in Bezug auf Linien- und Volumenelemente des Mischungskörpers angegeben. Dies hat zur Folge, daß eine inkompressible Konstituierende, für die bei Ausschluß von Massenaustauschprozessen mit (4.5.17) Konstanz des Partialvolumens V^i gilt, im makroskopischen Sinne, also in Bezug auf ein Volumenelement dv des Gesamtkörpers, immer kompressible bleibt; so sind wegen det $\mathbf{F}_i \neq 1$ z. B. immer Änderungen der Partialdichte ρ^i möglich, und zwar als Folge lokaler Änderungen der Volumenanteile n^i .

Ist die Mischung inkompressibel, dann liefert (4.5.13) eine Zwangsbedingung für den Deformationsgeschwindigkeitszustand der Mischung. Diese Zwangsbedingung muß bei der Entwicklung thermodynamischer Restriktionen aus der Entropieungleichung berücksichtigt werden, d. h. man muß diese Zwangsbedingung, multipliziert mit einem Lagrangeschen Multiplikator λ , der Entropieungleichung des jeweils zu untersuchenden Modells hinzuaddieren. Für beliebige inkompressible Mischungen mit Massenaustauschprozessen und verschiedenen Temperaturen θ^i der Konstituierenden φ^i folgt aus (4.5.13)

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta^{i}} \left[\theta^{i} \lambda n^{i} \operatorname{div} \mathbf{x}_{i}^{\prime} + \theta^{i} \lambda \operatorname{grad} n^{i} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - \theta^{i} \lambda \hat{n}^{i} \right] = 0.$$

$$(4.5.18)$$

Mit (4.5.18) lautet die Entropieungleichung (4.5.4):

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta^{i}} \left[-\psi_{i}^{i} - \theta_{i}^{i} \Psi^{i} - (\hat{\mathbf{p}}^{i} - \theta^{i} \lambda \operatorname{grad} n^{i}) \cdot \mathbf{x}_{i}^{i} - \frac{1}{2} \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i}^{i} \cdot \mathbf{x}_{i}^{i} - (\rho^{i} \mathbf{K}^{T i} - \theta^{i} \lambda n^{i} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{L}_{i} - \theta^{i} \lambda \hat{n}^{i} - \frac{1}{\theta^{i}} \mathbf{q}^{i} \cdot \operatorname{grad} \theta^{i} + \hat{e}^{i} \right] \geq 0.$$

$$(4.5.19)$$

Für Mischungen mit $\theta^i = \theta$ folgt aus (4.5.13) alternativ zu (4.5.18)

$$\sum_{i=1}^{k} \left[\lambda n^{i} \operatorname{div} \mathbf{x}_{i}^{\prime} + \lambda \operatorname{grad} n^{i} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - \lambda \hat{n}^{i} \right] = 0 .$$

$$(4.5.20)$$

Damit nimmt die Entropieungleichung (4.5.8) die Form

$$\sum_{i=1}^{k} \left[- \psi_{i}^{i} - \dot{\theta} \P^{i} - (\hat{\mathbf{p}}^{i} - \lambda \operatorname{grad} n^{i}) \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - \frac{1}{2} \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i}^{\prime} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - (\rho^{i} \mathbf{K}^{T i} - \lambda n^{i} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{L}_{i} - \lambda \hat{n}^{i} - \frac{1}{\theta} \mathbf{h}^{i} \cdot \operatorname{grad} \theta \right] \geq 0$$

$$(4.5.21)$$

an. Ein Vergleich zwischen (4.5.19) und (4.5.21) zeigt, daß die Dimension des Lagrangeschen Multiplikators nicht in beiden Fällen identisch ist sondern sich den jeweiligen Anwendungen entsprechend ergibt.

In einigen Arbeiten zur Mischungstheorie, vgl. z. B. *Liu* [1972] oder *Liu & Müller* [1984], werden mit Hilfe Lagrangescher Multiplikatoren weitere, durch die Bilanzgleichungen für Masse, Bewegungsgröße und Energie motivierte Zwangsbedingungen in die allgemeine Form der Entropieungleichung eingearbeitet. Auf diese prinzipiell möglichen Erweiterungen der Entropieungleichung sei hier lediglich hingewiesen.

Ebenfalls soll an dieser Stelle auf die Angabe weiterer formaler Modifikationen der im vorangegangenen diskutierten Versionen der Entropieungleichung für Mischungen verzichtet werden.

Kapitel 5: Grundlagen der konstitutiven Theorie

5.1 Einleitung

Zur vollständigen Beschreibung eines Materials im Rahmen einer Kontinuumstheorie sind neben den Bilanzgleichungen für Masse, Bewegungsgröße, Drall und Energie auch konstitutive Gleichungen erforderlich; und zwar für alle mechanischen und thermodynamischen Größen, die sich nicht durch Vorgabe des vollständigen Bewegungs– und Temperaturzustands aus den Bilanzgleichungen bestimmen lassen. In der klassischen Kontinuumsmechanik der Einkomponentenmaterialien sind daher konstitutive Gleichungen für die freie Energie ψ , die Entropie η , den Spannungstensor **T** und den Wärmezuflußvektor **q** anzugeben. Die durch Fernwirkung eingeprägten Größen, Beschleunigung **b** und innere Wärmequelle r, können in der Regel als bekannt vorausgesetzt werden. Alle postulierten konstitutiven Gleichungen müssen zulässig sein, d. h. sie dürfen nicht im Widerspruch stehen zu den aus der Entropieungleichung folgenden thermodynamischen Restriktionen, die auf der Basis einer bestimmten Menge thermodynamischer Prozeßvariablen entwickelt werden.

Die bisherigen Ausführungen gelten in erweiterter Form selbstverständlich auch für poröse Medien oder Mischungen. Hier sind allerdings nicht nur konstitutive Gleichungen für die jeweiligen Partialgrößen erforderlich, sondern es sind auch konstitutive Gleichungen für die verschiedenen Kopplungsmechanismen zwischen den einzelnen Konstituierenden anzugeben. Für kompressible poröse Medien sind zusätzlich konstitutive Gleichungen für die zeitlichen Anderungen der Volumenanteile erforderlich, da diese im Rahmen der Mischungstheorie nicht durch eine Bilanzgleichung zu bestimmen sind. Das prinzipielle Problem bei der Beschreibung poröser Medien auf der Basis der Mischungstheorie liegt jedoch weniger in dem nicht unerheblichen Aufwand, der zur Entwicklung konstitutiver Gleichungen von Mehrphasensystemen erforderlich ist, sondern vielmehr in der Wahl geeigneter thermodynamischer Prozeßvariablen; vor allem, wenn inkompressible poröse Medien beschrieben werden sollen oder wenn elastisch-plastisches Materialverhalten der Festkörpermatrix vorausgesetzt werden muß, vgl. dazu auch die Ausführungen in [1989b].Durch die in der Mischungstheorie grundsätzlich anzunehmenden Materialien zweiten Grades, siehe dazu auch Kapitel 2, treten insofern weitere Schwierigkeiten auf, als im Rahmen eines multiplikativen Konzepts elastisch-plastischer Deformationen nicht nur der erste sondern auch der zweite Deformationsgradient des Festkörperskeletts in elastische und plastische Anteile zerlegt werden muß.

Im vorliegenden Kapitel werden die Grundlagen der konstitutiven Theorie beliebiger poröser Medien auf der Basis eines in sich geschlossenen Konzepts unabhängiger thermodynamischer Prozeßvariablen entwickelt. Damit soll ein Beitrag geleistet werden, einerseits die in vielen Veröffentlichungen über poröse Medien anzutreffende Willkür bei der Wahl thermodynamischer Prozeßvariablen zu beurteilen und andererseits die Einbeziehung plastischen Materialverhaltens im Rahmen der Mischungstheorie aufzuzeigen.

5.2 Voraussetzungen und Annahmen

Beliebige poröse Medien müssen im Rahmen der um das Konzept der Volumenanteile erweiterten Mischungstheorie auf der Basis der folgenden Beziehungen beschrieben werden, vgl. (3.5), (3.14), (4.3.1), $(4.3.5)_2$, (4.3.6), $(4.3.9)_2$, $(4.3.21)_2$, (4.5.4), (4.5.7), (4.5.8), (4.5.9), (4.5.19) und (4.5.21):

Konzept der Volumenanteile:

$$\rho^{i} = n^{i} \rho^{iR}, \qquad \sum_{i=1}^{k} n^{i} = 1.$$
(5.2.1)

Bilanzgleichungen für ψ^i :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{i}^{i} + \rho^{i} \operatorname{div} \mathbf{x}_{i}^{\prime} &= \hat{\rho}^{i} ,\\ \operatorname{div} \mathbf{T}^{i} + \rho^{i} \left(\mathbf{b}^{i} - \mathbf{x}_{i}^{\prime} \right) + \hat{\mathbf{p}}^{i} &= \mathbf{0} ,\\ \mathbf{T}^{i} &= \mathbf{T}^{T\,i} - \hat{\mathbf{M}}^{i} ,\\ - \mathbf{\psi}_{i}^{i} - \theta^{i} \left\| \mathbf{y}_{i}^{i} - \mathbf{q}^{i} \left(\mathbf{\theta}_{i}^{i} + \theta^{i} \operatorname{div} \mathbf{x}_{i} \right) - \hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \mathbf{x}_{i} -\\ &- \frac{1}{2} \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - \rho^{i} \mathbf{K}^{T\,i} \cdot \mathbf{L}_{i} + \rho^{i} r^{i} - \operatorname{div} \mathbf{q}^{i} + \hat{e}^{i} = 0 . \end{aligned}$$

$$(5.2.2)$$

Bilanzgleichungen für die Mischung:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \hat{\rho}^{i},$$

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k} (\hat{\mathbf{p}}^{i} + \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i}),$$

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k} \hat{\mathbf{M}}^{i},$$

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \hat{e}^{i}.$$
(5.2.3)

Entropieungleichung für die Mischung:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta^{i}} \left[- \Psi_{i}^{i} - \dot{\theta}_{i}^{i} \P^{i} - \hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \mathbf{x}_{i}^{i} - \frac{1}{2} \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i}^{i} \cdot \mathbf{x}_{i}^{i} - \rho^{i} \mathbf{K}^{T i} \cdot \mathbf{L}_{i} - \frac{1}{\theta_{i}} \mathbf{q}^{i} \cdot \operatorname{grad} \theta^{i} + \hat{e}^{i} \right] \geq 0.$$

$$(5.2.4)$$

Entropieungleichung für die inkompressible Mischung:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta^{i}} \left[- \stackrel{\prime}{\Psi}_{i}^{i} - \stackrel{\prime}{\theta}_{i}^{i} \P^{i} - (\hat{\mathbf{p}}^{i} - \theta^{i} \lambda \operatorname{grad} n^{i}) \cdot \stackrel{\prime}{\mathbf{x}}_{i} - \frac{1}{2} \hat{\rho}^{i} \stackrel{\prime}{\mathbf{x}}_{i} \cdot \stackrel{\prime}{\mathbf{x}}_{i} - (\rho^{i} \mathbf{K}^{T i} - \theta^{i} \lambda n^{i} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{L}_{i} - \theta^{i} \lambda \hat{n}^{i} - \frac{1}{\theta^{i}} \mathbf{q}^{i} \cdot \operatorname{grad} \theta^{i} + \hat{e}^{i} \right] \geq 0.$$

$$(5.2.5)$$

Energiebilanz für die Mischung mit $\theta^i = \theta$:

.

$$\sum_{i=1}^{k} \left[- \stackrel{\prime}{\Psi}_{i}^{i} - \theta \stackrel{\dot{\P}^{i}}{\Pi} - \stackrel{\P^{i}}{\Pi} \left(\stackrel{\dot{\theta}}{\theta} + \theta \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} \right) - \hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \stackrel{\prime}{\mathbf{x}}_{i} - \frac{1}{2} \hat{\rho}^{i} \stackrel{\prime}{\mathbf{x}}_{i} \cdot \stackrel{\prime}{\mathbf{x}}_{i} - \rho^{i} \mathbf{K}^{T i} \cdot \mathbf{L}_{i} + \rho^{i} r^{i} - \operatorname{div} \mathbf{h}^{i} \right] = 0.$$
(5.2.6)

Entropieungleichung für die Mischung mit $\theta^i = \theta$:

$$\sum_{i=1}^{k} \left[- \Psi_{i}^{i} - \dot{\theta} \P^{i} - \hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - \frac{1}{2} \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i}^{\prime} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - \rho^{i} \mathbf{K}^{T i} \cdot \mathbf{L}_{i} - \frac{1}{\theta} \mathbf{h}^{i} \cdot \operatorname{grad} \theta \right] \geq 0.$$

$$(5.2.7)$$

Entropieungleichung für die inkompressible Mischung mit $\theta^i = \theta$:

$$\sum_{i=1}^{k} \left[- \Psi_{i}^{i} - \dot{\theta} \P^{i} - (\hat{\mathbf{p}}^{i} - \lambda \operatorname{grad} n^{i}) \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - \frac{1}{2} \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i}^{\prime} \cdot \mathbf{x}_{i}^{\prime} - (\rho^{i} \mathbf{K}^{T i} - \lambda n^{i} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{L}_{i} - \lambda \hat{n}^{i} - \frac{1}{\theta} \mathbf{h}^{i} \cdot \operatorname{grad} \theta \right] \geq 0.$$

$$(5.2.8)$$

Alternativ zu den hier angegebenen Versionen der Energiebilanzen und der Entropieungleichung können zur Beschreibung poröser Medien natürlich auch alle anderen im Abschnitt 4.5 diskutierten Formen sowie weitere, in der Literatur dokumentierte Versionen dieser Beziehungen benutzt werden, vgl. z. B. *Bowen* [1976] oder *Truesdell* [1984].

Die Entwicklung konstitutiver Gleichungen basiert für Mischungen auf denselben Grundprinzipen, die auch in der klassischen Kontinuumsmechanik der Einkomponentenmaterialien gelten, vgl. *Truesdell & Toupin* [1960], *Truesdell & Noll* [1965] sowie *Truesdell* [1984, S. 230]. Diese Prinzipe sind:

1. Determinismus	-Noll	$\left[1958 ight] .$
2. Äquipräsenz	-Truesdell	[1949].
3. Lokale Wirkungen ^I	-Noll	[1958] .
4. Materielle Objektivität	-Noll	[1955] .
5. Dissipation	-Coleman/Noll	[1963].

In der Theorie der Mehrphasengemische, vgl. z. B. *Passman et al.* [1984] sowie die Ausführungen in Kapitel 2, wird das Prinzip der Äquipräsenz durch das Prinzip der Phasentrennung ersetzt. Dieses Prinzip bewirkt jedoch eine Einschränkung in Bezug auf die Form der zulässigen konstitutiven Gleichungen und soll daher im folgenden nicht im Sinne eines Grundprinzips verwendet werden.

Für ein allgemeines, kompressibles poröses Medium mit Massenaustauschprozessen und verschiedenen Temperaturen θ^i der Konstituierenden φ^i zeigen die Bilanzen (5.2.2), daß für folgende Größen konstitutive Gleichungen anzugeben sind – Prinzip des Determinismus – :

$$(\psi^i, \eta^i, \mathbf{T}^i, \mathbf{q}^i, \hat{\rho}^i, \hat{\mathbf{p}}^i, \hat{e}^i, \dot{\eta}^i_i) = \mathcal{R}.$$

$$(5.2.9)$$

Die Größe \mathcal{R} kennzeichnet die gesamte Menge der $8 \times k$ Auswirkungsfunktionen aus (5.2.9). Diese Auswirkungsfunktionen sind so zu bestimmen, daß keine der Nebenbedingungen (5.2.1) und (5.2.3) verletzt wird; d. h. : Die Summe der Partialspannungen \mathbf{T}^i muß ein symmetrischer Tensor sein, die Zuwachsgrößen $\hat{\rho}^i$, $\hat{\mathbf{p}}^i$ und \hat{e}^i müssen den Zwangsbedingungen (5.2.3)₁, (5.2.3)₂ und (5.2.3)₄ genügen, und die Summe der Volumenänderungen n_i^i darf die aus (5.2.1)₂ folgenden Forderungen

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial n^{i}}{\partial t} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \operatorname{grad} n^{i} = \mathbf{0}$$
(5.2.10)

nicht verletzen.

Für die Drallkopplungstensoren $\hat{\mathbf{M}}^{i}$ sind keine konstitutiven Gleichungen erforderlich, da diese Größen mit $(5.2.2)_3$ direkt aus den Partialspannungen ermittelt werden können.

In vielen Fällen ist es vorteilhaft, die Funktionen ψ^i , η^i , \mathbf{T}^i , \mathbf{q}^i , $\hat{\rho}^i$ und \hat{e}^i in Abhängigkeit anderer Auswirkungsfunktionen zu bestimmen. Mögliche Alternativen zu (5.2.9) ergeben sich mit den Beziehungen (4.3.8), (4.3.20), (4.4.10), (4.5.2), (4.5.5) und (4.5.12); d. h. bei

^INichtlokale Materialien werden in der vorliegenden Arbeit nicht behandelt. Nichtlokale Effekte, die durch gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Konstituierenden einer Mischung entstehen, werden im Rahmen des Konzepts von Materialien zweiten Grades erfaßt.

Ausnutzung von

$$\Psi^{i} = \rho^{i} \psi^{i} ,$$

$$\P^{i} = \rho^{i} \eta^{i} ,$$

$$\rho^{i} \mathbf{K}^{i} = \rho^{i} \psi^{i} \mathbf{I} - \mathbf{T}^{T i} ,$$

$$\mathbf{h}^{i} = \mathbf{q}^{i} + \theta^{i} \rho^{i} \eta^{i} \mathbf{u}_{i} ,$$

$$\hat{n}^{i} = \hat{\rho}^{i} / \rho^{iR} ,$$

$$\hat{\mathbf{s}}^{i} = \hat{\mathbf{p}}^{i} + \hat{\rho}^{i} \mathbf{x}_{i} ,$$

$$\hat{\varepsilon}^{i} = \hat{e}^{i} - \hat{\mathbf{p}}^{i} \cdot \mathbf{x}_{i} - \hat{\rho}^{i} (\varepsilon^{i} + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{i} \cdot \mathbf{x}_{i}) .$$
(5.2.11)

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß für Mischungen mit $\theta^i = \theta$ die Temperaturänderung $\dot{\theta}$ direkt aus (5.2.5) ermittelt werden kann und nicht wie die Temperaturänderungen $\dot{\theta}_i^i$ allgemeiner Mischungen mit k Funktionen θ^i aus (5.2.2)₄ bestimmt werden muß. Für Mischungen mit $\theta^i = \theta$ ist es daher nicht erforderlich, konstitutive Gleichungen für die Energiezuwachsterme \hat{e}^i bzw. $\hat{\varepsilon}^i$ anzugeben.

Können Massenzuwächse für einzelne Konstituierenden φ^i ausgeschlossen werden, so sind die daraus resultierenden Auswirkungen bezüglich der Menge der zu entwickelnden konstitutiven Gleichungen wegen $\hat{\rho}^i = 0$ offensichtlich.

Für inkompressible φ^i ist keine konstitutive Gleichung für die Volumenänderung n_i^i erforderlich. Stattdessen können diese Größen aus den Bilanzgleichungen (4.5.11) für die Partialvolumina bestimmt werden. Sind k-1 Konstituierenden φ^i einer Mischung inkompressibel, so entfallen sämtliche konstitutiven Gleichungen für die Volumenänderungen, da wegen (4.5.11) und (5.2.9)

$$\dot{n}_{k}^{k} = \sum_{i=1}^{k-1} \left[n^{i} \operatorname{div} \mathbf{x}_{i}^{\prime} + \operatorname{grad} n^{i} \cdot (\mathbf{x}_{i}^{\prime} - \mathbf{x}_{k}^{\prime}) - \hat{n}^{i} \right] .$$
 (5.2.12)

Für die inkompressible Mischung geht (5.2.12) in eine Zwangsbedingung der Form (4.5.18) bzw. (4.5.20) über, die bei der Entwicklung thermodynamischer Restriktionen aus der Entropieungleichung – Prinzip der Dissipation – zu berücksichtigen ist. In diesem Fall zeigen die Entropieungleichungen (5.2.5) bzw. (5.2.8) im Zusammenhang mit (5.2.11)₃, daß die Partialspannungen \mathbf{T}^i und die Bewegungsgrößenzuwächse $\hat{\mathbf{p}}^i$ nur bis auf einen unbestimmten Ausdruck angegeben werden können, d. h. man kann nur die sogenannten Extraspannungen \mathbf{T}^i_c und Extrazuwächse $\hat{\mathbf{p}}^i_c$ bestimmen; bezüglich des Begriffs "Extra.." siehe *Truesdell & Noll* [1965, Abschnitt 30]. Für Mischungen mit *k* Temperaturfunktionen θ^i lauten diese Extragrößen

$$\mathbf{T}_{c}^{i} = \mathbf{T}^{i} + \theta^{i} \lambda n^{i} \mathbf{I} ,$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{c}^{i} = \hat{\mathbf{p}}^{i} - \theta^{i} \lambda \operatorname{grad} n^{i} .$$
(5.2.13)

Entsprechend gilt für Mischungen mit $\theta^i = \theta$:

$$\mathbf{T}_{c}^{i} = \mathbf{T}^{i} + \lambda \, n^{i} \mathbf{I} ,$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{c}^{i} = \hat{\mathbf{p}}^{i} - \lambda \operatorname{grad} n^{i} .$$
(5.2.14)

Alle Auswirkungsfunktionen \mathcal{R} , die für den jeweils untersuchten Typ eines porösen Mediums zu entwickeln sind, müssen zunächst als Funktionen eines gemeinsamen Variablensatzes \mathcal{A} aufgefaßt werden – Prinzip der Äquipräsenz:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{A}) \ . \tag{5.2.15}$$

Im Rahmen der konstitutiven Theorie erfüllt das Prinzip der Äquipräsenz zwei Funktionen, die in der Literatur folgendermaßen kommentiert werden:

Wang & Truesdell [1973, S. 135]:

 \dots a rule to guide us when we come to set up constitutive equations in the first place.

Truesdell [1984, Lecture 1]:

... the principle of equipresence, which forbids the theorist from choosing independent variables by caprice.

Diese Bemerkungen zeigen, daß das Prinzip der Äquipräsenz als eine Arbeitsvorschrift aufzufassen ist; und zwar in dem Sinn, daß nicht bereits vor der Entwicklung thermodynamischer Restriktionen aus der Entropieungleichung einige Auswirkungsfunktionen ad hoc und damit im Rahmen einer gewissen Willkür als Funktionen einzelner Variablen der Menge s postuliert werden. Dies würde zwangsläufig zu einer Einschränkung der konstitutiven Theorie führen.

5.3 Thermodynamische Prozeßvariablen

Alle Auswirkungsfunktionen \mathcal{R} sind in der Weise durch die Bewegungsgeschichten ${}^{t}\chi_{i}$ und Temperaturgeschichten ${}^{t}\theta^{i}$ bestimmt, daß die Werte der Auswirkungsfunktionen zur Zeit t an jeder Stelle \mathbf{x} durch die Werte der Prozeßvariablen $\mathfrak{s}(\mathbf{x}, t)$ gegeben sind – Prinzip der lokalen Wirkungen –. Für allgemeine poröse Medien bzw. Mischungen mit unvermischbaren Konstituierenden werden die folgenden Größen als thermodynamische Grundvariablen postuliert:

$$s = \{\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{i}, \operatorname{grad} \rho^{i}, \mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i}, \mathbf{x}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{x}_{i}\}$$

mit $i = 1, \dots, k$,
 $a = 2, \dots, k$.
(5.3.1)

Mit (5.3.1) kann eine Klasse viskoelastischer Materialien zweiten Grades mit Massenaustauschprozessen und unabhängigen Bewegungs- und Temperaturzuständen der einzelnen Konstituierenden beschrieben werden. Der Einfluß plastischen Materialverhaltens auf den Variablensatz (5.3.1) wird in Abschnitt 5.4 behandelt, vgl. (5.4.8) und (5.4.9).

Die in (5.3.1) gewählte Menge \diamond entspricht prinzipiell den von Bowen [1969b, Gl. (5.7)] oder Cross [1973, Gl. (6.1)] für Mischungen mit chemischen Reaktionen postulierten Variablensätzen, allerdings erweitert um die Variablen n^a , grad n^a und Grad_i \mathbf{x}_i . In (5.3.1) fehlt eine explizite Einbeziehung der Referenzlagen \mathbf{X}_i der Konstituierenden φ^i , d. h. es können nur homogene Mischungen beschrieben werden, vgl. Wang [1973, S. 771]. Die Einschränkung auf homogene Mischungen beinhaltet, daß alle φ^i zum Zeitpunkt $t = t_0$ homogen und homogen verteilt sein müssen:

$$\operatorname{Grad}_{i} \rho_{0i}^{iR} = \mathbf{0},$$

$$\operatorname{Grad}_{i} n_{0i}^{i} = \mathbf{0}.$$
(5.3.2)

Die Größe

$$\rho_{0\,i}^{i\,R} = \frac{\rho_{0\,i}^{i}}{n_{0\,i}^{i}} \tag{5.3.3}$$

kennzeichnet darin die effektive Dichte von φ^i in der Referenzlage \mathbf{X}_i .

Die Wahl der thermodynamischen Grundvariablen entsprechend (5.3.1) ist folgendermaßen motiviert: Die Referenzkonfigurationen von φ^i zum Zeitpunkt $t = t_0$ werden als ungestörte Ausgangszustände aufgefaßt, in denen zusätzlich zu (5.3.2) die effektiven Dichten $\rho_{0i}^{i\,R}$ und Volumenanteile n_{0i}^i gegeben und damit bekannt sind. Der vollständige Temperaturzustand ist durch die Variablen θ^i und grad θ^i repräsentiert. Die Voraussetzung von Materialien zweiten Grades bedingt, daß nicht nur der erste Deformationsgradient \mathbf{F}_i sondern daß auch der zweite Deformationsgradient Grad_i \mathbf{F}_i als unabhängige Prozeßvariable zugelassen werden muß. Für Mischungen mit Massenaustauschprozessen ist der vollständige Deformationszustand durch die Vorgabe von \mathbf{F}_i und Grad_i \mathbf{F}_i jedoch nicht hinreichend spezifiziert. Vielmehr müssen zusätzlich die Partialdichten ρ^i und deren Gradienten grad ρ^i als unabhängige Prozeßvariablen aufgefaßt werden, da diese Größen nicht als Funktionen von \mathbf{F}_i und Grad_i \mathbf{F}_i darstellbar sind. Darüber hinaus sind die Volumenanteile n^i und deren Gradienten grad n^i für kompressible φ^i nicht durch ρ^i und grad ρ^i bestimmbar – und umgekehrt –, so daß auch diese Größen als Variablen des Deformationsprozesses zu verstehen sind. Die Voraussetzung, daß alle Prozeßvariablen voneinander unabhängig sein müssen, bedingt wegen

$$n^{1} = 1 - \sum_{a=2}^{k} n^{a},$$

$$\operatorname{grad} n^{1} = -\sum_{a=2}^{k} \operatorname{grad} n^{a},$$
(5.3.4)

vgl. $(5.2.1)_2$ und $(5.2.10)_2$, daß nur n^a und grad n^a , a = 2, ..., k, als unabhängige Prozeßvariablen vorgegeben werden dürfen. Schließlich wird mit den Variablen $\mathbf{\dot{x}}_i$ den unterschiedlichen Geschwindigkeitszuständen der Konstituierenden Rechnung getragen; die Variablen Grad_i $\mathbf{\dot{x}}_i$ dienen zur Einbeziehung viskoser Effekte.

Der Grundvariablensatz β aus (5.3.1) kann für viele Anwendungszwecke auf einfache Weise reduziert werden. Können zum Beispiel Massenzuwächse $\hat{\rho}^i$ für einzelne Konstituierenden φ^i ausgeschlossen werden, so gilt entsprechend (4.3.3)

$$\rho^{i} = \rho^{i}_{0\,i} \,(\det \mathbf{F}_{i})^{-1} \,. \tag{5.3.5}$$

Daraus folgt mit (5.3.2) und (5.3.3)

grad
$$\rho i = -\rho_{0i}^{i} (\det \mathbf{F}_{i})^{-2} \operatorname{grad} (\det \mathbf{F}_{i})$$

$$= -\rho_{0i}^{i} (\det \mathbf{F}_{i})^{-2} \mathbf{F}_{i}^{T-1} \operatorname{Grad}_{i} (\det \mathbf{F}_{i}).$$
(5.3.6)

Die Anwendung der Rechenregel (A.2.8) beinhaltet

$$\operatorname{Grad}_{i}\left(\det \mathbf{F}_{i}\right) = \det \mathbf{F}_{i}\left(\mathbf{F}_{i}^{T-1}\operatorname{Grad}_{i}\mathbf{F}_{i}\right)^{\underline{1}},\tag{5.3.7}$$

so daß

grad
$$\rho^i = -\rho_{0i}^i (\det \mathbf{F}_i)^{-1} \mathbf{F}_i^{T-1} (\mathbf{F}_i^{T-1} \operatorname{Grad}_i \mathbf{F}_i)^{\underline{1}}.$$
 (5.3.8)

Darin kennzeichnet $(\cdots)^{\underline{1}}$ eine Multiplikationsvorschrift, die auf einen Vektor führt. Zum besseren Verständnis kann (5.3.7) in einer einfachen Indexdarstellung angegeben werden:

$$[\det(F_i)_{aB}]_{,C} = [\det(F_i)_{aB}] (F_i^{-1})_{Ln} (F_i)_{nL,C}.$$
(5.3.9)

In (5.3.9) beziehen sich die Indizierungen a, n auf die aktuelle Basis, die Indizierungen B, L, C auf die Referenzbasis von φ^S .

Da $\rho_{0i}^i = n_{0i}^i \rho_{0i}^{iR}$ zum Zeitpunkt $t = t_0$ als gegeben und bekannt vorauszusetzen ist, zeigen die Beziehungen (5.3.5) und (5.3.8), daß ρ^i und grad ρ^i unter der Voraussetzung $\hat{\rho}^i = 0$

eindeutig als Funktionen von \mathbf{F}_i und $\operatorname{Grad}_i \mathbf{F}_i$ – nicht umgekehrt – angegeben werden können. Daher sind ρ^i und grad ρ^i als unabhängige Prozeßvariablen zu streichen. Somit folgt aus (5.3.1):

$$s \rightarrow s_1 = \{\theta^i, \operatorname{grad} \theta^i, n^a, \operatorname{grad} n^a, \rho^b, \operatorname{grad} \rho^b, \mathbf{F}_i, \operatorname{Grad}_i \mathbf{F}_i, \mathbf{\dot{x}}_i, \operatorname{Grad}_i \mathbf{\dot{x}}_i\}$$

mit $i = 1, \dots, k$,
 $a = 2, \dots, k$,
 $b = 1, \dots, r$
und $\hat{\rho}^j = 0$ mit $j = r + 1, \dots, k$.
(5.3.10)

Für Mischungen ohne Massenaustauschprozesse gilt entsprechend:

$$s \rightarrow s_{2} = \{\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i}, \mathbf{x}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{x}_{i}\}$$

mit $i = 1, \dots, k,$
 $a = 2, \dots, k$

$$(5.3.11)$$
und $\hat{\rho}^{i} = 0.$

Sind einzelne Konstituierenden der Mischung inkompressibel, so folgt mit (4.5.10), $(5.2.1)_1$ und $(5.3.2)_1$

$$\rho^{iR} = \rho_{0R}^{iR} = \text{konst.},$$

$$\rho^{i} = n^{i} \rho^{iR}, \qquad (5.3.12)$$

$$\text{grad} \rho^{i} = \rho^{iR} \text{grad} n^{i}.$$

Demzufolge sind die Größen ρ^i und grad ρ^i eindeutig durch die Volumenanteile n^i und deren Gradienten grad n^i bestimmbar und daher als Prozeßvariablen zu streichen. Die aus (5.3.12) resultierenden Konsequenzen auf den Parametersatz (5.3.1) ergeben sich entsprechend (5.3.10) und (5.3.11), d.h. :

$$s \rightarrow s_1$$
 für $\rho^{jR} = \text{konst.}$ mit $j = r + 1, \dots, k$ (5.3.13)

bzw.

$$s \rightarrow s_2$$
 für $\rho^{iR} = \text{konst.}$ mit $i = 1, \dots, k$. (5.3.14)

Sofern für inkompressible φ^i Massenaustauschprozesse ausgeschlossen werden können, gilt gemäß (4.5.15)

$$n^{i} = n^{i}_{0\,i} \,(\det \mathbf{F}_{i})^{-1} \tag{5.3.15}$$

und daraus analog zu (5.3.8)

$$\operatorname{grad} n^{i} = -n_{0i}^{i} \left(\det \mathbf{F}_{i} \right)^{-1} \mathbf{F}_{i}^{T-1} \left(\mathbf{F}_{i}^{T-1} \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i} \right)^{\underline{1}}.$$
 (5.3.16)

Damit reduzieren sich die Parametersätze (5.3.13) und (5.3.14) auf

$$\begin{split} s_1 &\to s_3 = \{\theta^i, \operatorname{grad} \theta^i, n^b, \operatorname{grad} n^b, \rho^c, \operatorname{grad} \rho^c, \mathbf{F}_i, \operatorname{Grad}_i \mathbf{F}_i, \mathbf{x}_i', \operatorname{Grad}_i \mathbf{x}_i'\} \\ \operatorname{mit} \quad i = 1, \dots, k, \\ \quad b = 2, \dots, r, \\ \quad c = 1, \dots, r \end{split}$$
(5.3.17)
und $\hat{\rho}^j = 0, \ \rho^{jR} = \operatorname{konst.} \quad \operatorname{mit} \quad \mathbf{j} = \mathbf{r} + 1, \dots, \mathbf{k}$

bzw.

$$s_{2} \rightarrow s_{4} = \{\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, \mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i}, \mathbf{x}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{x}_{i}\}$$

mit $i = 1, \dots, k$ (5.3.18)
und $\hat{\rho}^{i} = 0, \ \rho^{iR} = \operatorname{konst.}$

In (5.3.18) ist jedoch zu beachten, daß die Deformationsgradienten \mathbf{F}_i und $\operatorname{Grad}_i \mathbf{F}_i$ in der Weise voneinander abhängen, daß mit $(5.3.4)_1$ und (5.3.15)

$$\det \mathbf{F}_1 = n_{01}^1 \left[1 - \sum_{a=2}^k n_{0a}^a \left(\det \mathbf{F}_a \right)^{-1} \right]^{-1}$$
 (5.3.19)

sowie mit $(5.3.4)_2$, (5.3.15) und (5.3.19)

$$\operatorname{Grad}_{1}\left(\det \mathbf{F}_{1}\right) = -\frac{n_{01}^{1} \mathbf{F}_{1}^{T} \sum_{a=2}^{k} n_{0a}^{a} \left(\det \mathbf{F}_{a}\right)^{-2} \operatorname{Grad}_{a} \left(\det \mathbf{F}_{a}\right)}{\left[1 - \sum_{a=2}^{k} n_{0a}^{a} \left(\det \mathbf{F}_{a}\right)^{-1}\right]^{2}}$$
(5.3.20)

Diese nur bei inkompressiblen porösen Medien ohne Massenaustauschprozesse auftretende Abhängigkeit zwischen den Prozeßvariablen kann z. B. im Zusammenhang mit der Isotropiegruppe für die Fluid-Konstituierenden eliminiert werden, vgl. Abschnitt 5.7.

Neben den hier angegebenen Parametersätzen s_1 bis s_4 sind natürlich noch viele weitere Modifikationen des Grundvariablensatzes s denkbar, die mit den im vorangegangenen angegebenen Beziehungen leicht aus s_1 bis s_4 entwickelt werden können.

5.4 Zerlegung der Deformationen

Bei porösen Medien ist es grundsätzlich möglich, daß die Festkörpermatrix nicht nur aus einem Material besteht, sondern sie kann sich auch im Sinne von Verbundmaterialien aus mehreren Stoffen zusammensetzen, die dann allerdings einen gemeinsamen Bewegungszustand aufweisen. In einigen Fällen, z. B. beim Sieben granularer Stoffe, können sogar mehrere Festkörpermaterialien mit unabhängigen Bewegungszuständen auftreten. Daher soll im vorliegenden Abschnitt der Einfluß elastisch-plastischer Deformationen auf den thermodynamischen Prozeß am Beispiel einer beliebigen Feststoffkonstituierenden φ^s diskutiert werden.

Im Rahmen der endlichen Theorie wird zur Zerlegung der Deformationen in elastische und plastische Anteile ein multiplikatives Konzept auf der Basis folgender Komposition eingeführt:

$$(\mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}) = (\mathbf{F}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}) \circ (\mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}).$$
(5.4.1)

Die Verknüpfung^{II} $(\cdots) \circ (\cdots)$ ist darin entsprechend der Vorschrift (A.2.16) in der Weise definiert, daß

$$\mathbf{F}_{S} = \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp},$$

$$\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S} = (\mathbf{F}_{Se} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp})^{\underline{3}} + [(\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} \mathbf{F}_{Sp})^{\underline{3}^{23}} \mathbf{F}_{Sp}]^{\underline{3}^{23}}.$$

$$(5.4.2)$$

In (5.4.2) repräsentieren \mathbf{F}_{Se} und \mathbf{F}_{Sp} die elastischen und plastischen Anteile von \mathbf{F}_S , $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}$ und $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}$ die entsprechenden Anteile von $\operatorname{Grad}_S \mathbf{F}_S$. Das Symbol (\cdots) kennzeichnet einen dreistufigen Tensor, (\cdots)³ eine Multiplikationsvorschrift, die auf einen dreistufigen Tensor führt, und (\cdots)² eine Transposition bezüglich der Indizes 2 und 3.

In der Plastizitätstheorie ist die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten mit der Vorstellung einer spannungsfreien, aber im allgemeinen inkompatiblen plastischen Zwischenkonfiguration verbunden, vgl. Abb. 5.1.

Die Inkompatibilität der Zwischenkonfiguration besteht darin, daß die elastischen und plastischen Anteile von \mathbf{F}_S und $\operatorname{Grad}_S \mathbf{F}_S$ in der Regel nicht durch feldlich definierte Gradienten der Form

$$\mathbf{F}_{Se} = \operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{x} , \quad \mathbf{F}_{Sp} = \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{x}_{Sz} ,$$

$$\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} = \operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{F}_{Se} , \quad \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} = \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{Sp}$$
(5.4.3)

^{II}In der englischsprachigen Literatur, vgl. z. B. Cross [1973] oder Bowen [1976], wird anstelle des Begriffs Verknüpfung der Begriff Komposition (composition bzw. composition rule) gebraucht.

plastische Zwischenkonfiguration



Abb. 5.1: Plastische Zwischenkonfiguration von φ^S

bestimmbar sind. In (5.4.3) kennzeichnen \mathbf{x}_{Sz} den "Ortsvektor" der materiellen Punkte X^S in der Zwischenkonfiguration von φ^S und der Operator grad_{Sz} die partielle Differentiation nach \mathbf{x}_{Sz} . Den Charakter von Gradientenfeldern besitzen die Beziehungen (5.4.3) nur für den Fall homogener Deformationen, also wenn nach Belastung bis in den plastischen Bereich und anschließender Entlastung – auch die Temperatur ist auf die Referenztemperatur zurückzunehmen – eine kinematisch kompatible, spannungsfreie Konfiguration entsteht. Konzeptionsbedingt ist dieser Entlastungsprozeß als Ergebnis eines gedachten, zeitgleich mit der Belastung verlaufenden Entlastungsvorgangs aufzufassen, der formal mit dem für die Konstituierende φ^S gültigen Elastizitätsgesetz durchzuführen ist. Für den Fall beliebiger Deformationen führt die Rücknahme der äußeren Lasten zunächst auch auf eine kinematisch kompatible Konfiguration. Diese Konfiguration ist jedoch nicht spannungsfrei. Sie weist vielmehr eine Restspannungsverteilung auf, die den Charakter eines elastischen Eigenspannungszustands besitzt. Ein spannungsfreier Zustand kann hier nur durch Führung konzeptioneller Schnitte im Zusammenhang mit einer lokalen Entlastung durch die negative Restspannungsverteilung erzeugt werden. Die auf diese Weise entstehende inkompatible plastische Zwischenkonfiguration, in der der rein plastische Deformationzustand – für Materialien zweiten Grades charakterisiert durch \mathbf{F}_{Sp} und \mathbf{G}_{Sp} - im Gedächtnis des Materials gespeichert ist, ist kein geometrisch zusammenhängendes Gebiet. Daher sind die Beziehungen (5.4.3) im allgemeinen nicht als Feld- sondern als Punktfunktionen zu verstehen.

Die Symmetrieeigenschaften der eigentlich zweiten Gradienten

$$\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{F}_{Se} = \left(\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{F}_{Se}\right)^{\frac{23}{T}},$$

$$\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{Sp} = \left(\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}\right)^{\frac{23}{T}}$$
(5.4.4)

bleiben jedoch in jedem Fall auch für $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}$ und $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}$ erhalten:

$${}^{3}_{\mathbf{G}_{Se}} = ({}^{3}_{\mathbf{G}_{Se}})^{23}, {}^{3}_{\mathbf{G}_{Sp}} = ({}^{3}_{\mathbf{G}_{Sp}})^{23}.$$
(5.4.5)

Die Voraussetzung, daß die Größen $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}$ und $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}$ im Sinne der linearen Gruppe \mathcal{L}^{III} dieselben Eigenschaften zweiter Deformationsgradienten besitzen wie $\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{F}_{Se}$ und $\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{Sp}$ bedingt den Aufbau der Zerlegung von $\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}$ aus $(5.4.2)_2$. Mit Hilfe der Terminologie Vorwärtstransformation (push-forward) und Rückwärtstransformation (pull-back), vgl. z. B. Simo & Taylor [1985], kann $(5.4.2)_2$ folgendermaßen interpretiert werden: Im ersten Summanden wird das erste Basissystem von $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}$ per Vorwärtstransformation mit \mathbf{F}_{Se} aus der Zwischenkonfiguration in die aktuelle Konfiguration geschoben; im zweiten Summanden werden das zweite und dritte Basissystem von $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}$ per Rückwärtstransformation aus der Zwischenkonfiguration in die Referenzkonfiguration von φ^{S} zurückgenommen. Zum besseren Verständnis kann die Beziehung $(5.4.2)_2$ in einer einfachen Indexdarstellung angegeben werden:

$$(F_S)_{aB,C} = (F_{Se})_{a\alpha} (G_{Sp})_{\alpha BC} + (G_{Se})_{a\alpha\beta} (F_{Sp})_{\alpha B} (F_{Sp})_{\beta C}.$$
(5.4.6)

Die Indizierungen B, C kennzeichnen darin die Zugehörigkeit zur Referenzbasis von φ^S , die Indizierung a die Zugehörigkeit zur aktuellen Basis. Indizierungen mit griechischen Buchstaben beziehen sich auf die Zwischenkonfiguration von φ^S .

Das im vorangegangenen eingeführte multiplikative Konzept zur Zerlegung der Deformationen führt zu einer Trennung der elastischen und plastischen Deformationsanteile. Es reicht daher für elastisch-plastische φ^i nicht aus, in einem thermodynamischen Prozeß nur die Gradienten \mathbf{F}_S und $\operatorname{Grad}_S \mathbf{F}_S$ vorzugeben, da diese Größen als Funktionen der voneinander unabhängigen Variablen, \mathbf{F}_{Se} , \mathbf{F}_{Sp} , $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}$, und $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}$ aufzufassen sind:

$$\mathbf{F}_{S} = f(\mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}),$$

$$\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S} = f(\mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}).$$
(5.4.7)

Folglich ist für elastisch–plastisch
e φ^i die Menge der Prozeßvariablen

$$\mathcal{S} = \{\dots, \mathbf{F}_S, \operatorname{Grad}_S \mathbf{F}_S, \dots\}$$
(5.4.8)

^{III}vgl. Anhang B.1

durch die Menge

$$\boldsymbol{b}_{p} = \{\dots, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}, \mathbf{G}_{Se}, \mathbf{G}_{Sp}, \dots\}$$
(5.4.9)

zu ersetzen, wobei nur \mathbf{F}_{Se} und $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}$ bei vorgegebener Geometrie der plastischen Zwischenkonfiguration als externe Variablen verstanden werden dürfen, während \mathbf{F}_{Sp} und $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}$ im Sinne prozeßgesteuerter Variablen durch die plastische Belastungsgeschichte bestimmt sind.

In der Plastizitätstheorie der Einkomponentenmaterialien ist die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F}_S häufig allein deswegen nicht benutzt worden, weil man der Ansicht war, dieses Konzept sei nur in Sonderfällen mit der sonst üblichen additiven Zerlegung der Deformationsgeschwindigkeiten kompatibel, siehe dazu Lee [1969, 1981], Lee & McMeeking [1980], Lubarda & Lee [1981] sowie Nemet-Nasser [1979, 1982]. Kleiber [1975] zeigte dagegen, daß die multiplikative Zerlegung von \mathbf{F}_S im Rahmen eines geometrischen Konzepts sowohl kompatibel ist mit einer additiven Zerlegung von Verzerrungstensoren als auch mit einer additiven Zerlegung der zugehörigen Deformationsgeschwindigkeiten. Das Konzept von Kleiber hat den Vorteil, daß man durch Vorwärts- und Rückwärtstransformation der Verzerrungstensoren und Verzerrungsgeschwindigkeiten in jeder Konfiguration geeignete Deformationsmaße erhält, die in der Zwischenkonfiguration entkoppelt sind, vgl. auch Argyris & Kleiber [1977], Kleiber [1984], Haupt [1985], Simo & Ortiz [1985], Tsakmakis [1987] sowie Ehlers [1989b].

Verzerrungstensoren können über die Differenz der Quadrate der Linienelemente der verschiedenen Konfigurationen eingeführt werden:

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X}_{S} \cdot d\mathbf{X}_{S} = d\mathbf{X}_{S} \cdot 2 \mathbf{E}_{S} d\mathbf{X}_{S}$$

= $d\mathbf{x} \cdot 2 \mathbf{A}_{S} d\mathbf{x}$. (5.4.10)

Darin sind

$$\mathbf{E}_{S} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{S} - \mathbf{I} \right) \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{S} = \mathbf{F}_{S}^{T} \mathbf{F}_{S} ,$$

$$\mathbf{A}_{S} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{S}^{-1} \right) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_{S} = \mathbf{F}_{S} \mathbf{F}_{S}^{T}$$
(5.4.11)

der Greensche und der Almansische Verzerrungstensor von φ^S . Die multiplikative Zerlegung von \mathbf{F}_S beinhaltet, daß die elastische Deformation zwischen der aktuellen Konfiguration und der Zwischenkonfiguration von φ^S gemessen wird, die plastische Deformation zwischen der Zwischenkonfiguration und der Referenzkonfiguration von φ^S . In Analogie zu (5.4.11) werden mit

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x}_{Sz} \cdot d\mathbf{x}_{Sz} = d\mathbf{x}_{Sz} \cdot 2 \,\widehat{\mathbf{E}}_{Se} \, d\mathbf{x}_{Sz}$$

$$= d\mathbf{x} \cdot 2 \, \mathbf{A}_{Se} \, d\mathbf{x}$$
(5.4.12)

der elastische Greensche Verzerrungstensor $\widehat{\mathbf{E}}_{Se}^{IV}$ der Zwischenkonfiguration und der elastische Almansische Verzerrungstensor \mathbf{A}_{Se} der aktuellen Konfiguration definiert:

$$\widehat{\mathbf{E}}_{Se} = \frac{1}{2} \left(\widehat{\mathbf{C}}_{Se} - \mathbf{I} \right) \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathbf{C}}_{Se} = \mathbf{F}_{Se}^T \, \mathbf{F}_{Se} \,,$$

$$\mathbf{A}_{Se} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{Se}^{-1} \right) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_{Se} = \mathbf{F}_{Se} \, \mathbf{F}_{Se}^T \,.$$
(5.4.13)

Entsprechend ergeben sich die plastischen Verzerrungstensoren \mathbf{E}_{Sp} der Referenzkonfiguration und $\widehat{\mathbf{A}}_{Sp}$ der Zwischenkonfiguration:

$$d\mathbf{x}_{Sz} \cdot d\mathbf{x}_{Sz} - d\mathbf{X}_{S} \cdot d\mathbf{X}_{S} = d\mathbf{X}_{S} \cdot 2 \mathbf{E}_{Sp} d\mathbf{X}_{S}$$
$$= d\mathbf{x}_{Sz} \cdot 2 \,\widehat{\mathbf{A}}_{Sp} d\mathbf{x}_{Sz}, \qquad (5.4.14)$$

$$\mathbf{E}_{Sp} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{Sp} - \mathbf{I} \right) \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{Sp} = \mathbf{F}_{Sp}^T \, \mathbf{F}_{Sp} \,,$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_{Sp} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{-1} \right) \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathbf{B}}_{Sp} = \mathbf{F}_{Sp} \, \mathbf{F}_{Sp}^T \,.$$
 (5.4.15)

Durch diese einfachen Definitionen wird sofort klar, daß durch die Summe von (5.4.12) und (5.4.14),

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X}_{S} \cdot d\mathbf{X}_{S} = d\mathbf{x}_{Sz} \cdot 2\left(\widehat{\mathbf{E}}_{Se} + \widehat{\mathbf{A}}_{Sp}\right) d\mathbf{x}_{Sz}, \qquad (5.4.16)$$

ein Verzerrungstensor

$$\widehat{\Gamma}_{S} = \widehat{\mathbf{E}}_{Se} + \widehat{\mathbf{A}}_{Sp} = \frac{1}{2} \left(\widehat{\mathbf{C}}_{Se} - \widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{-1} \right)$$
(5.4.17)

der Zwischenkonfiguration definiert ist, der die elastischen und plastischen Verzerrungsanteile in entkoppelter Form enthält. Durch Rückwärtstransformation von (5.4.17) mit $\mathbf{F}_{Sp}^{T}(\cdots) \mathbf{F}_{Sp}$ entstehen die Greenschen Verzerrungstensoren der Referenzkonfiguration, durch Vorwärtstransformation mit $\mathbf{F}_{Se}^{T-1}(\cdots) \mathbf{F}_{Se}^{-1}$ die Almansischen Verzerrungstensoren der aktuellen Konfiguration. Diese Ausführungen zeigen, daß die multiplikative Zerlegung von \mathbf{F}_{S} mit einer additiven Zerlegung von Verzerrungstensoren in der Weise kompatibel ist, daß in jeder der drei Konfigurationen geeignete Verzerrungsmaße zur Verfügung stehen, vgl. Tafel 5.1.

^{IV}Da eine Verwechslung mit den Kopplungs- bzw. Zuwachstermen der Mischungstheorie ausgeschlossen scheint, wird zur Kennzeichnung von Größen der plastischen Zwischenkonfiguration ebenfalls das Symbol $(\hat{\cdots})$ benutzt.



Tafel 5.1: Greensche und Almansische Verzerrungstensoren von $\varphi^S.$

Schließlich sei erwähnt, daß das Transformationsverhalten der hier eingeführten Verzerrungstensoren^V, die bei der Darstellung in einer natürlichen Basis kontravariante Basissysteme aufweisen, im Sinne eines kontravarianten Transports zu verstehen ist.

 $^{^{\}rm V}{\rm Die}$ Definition weiterer Verzerrungsmaße kann Anhang C entnommen werden.
Der Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L}_{S} erhält mit $(5.4.2)_{1}$ die Form

$$\mathbf{L}_{S} = (\mathbf{F}_{Se})'_{S} \mathbf{F}_{Se}^{-1} + \mathbf{F}_{Se} (\mathbf{F}_{Sp})'_{S} \mathbf{F}_{Sp}^{-1} \mathbf{F}_{Se}^{-1} .$$
(5.4.18)

Daraus folgern Lee [1969, 1981] und andere, daß

$$\overline{\mathbf{L}}_{Se} = (\mathbf{F}_{Se})'_{S} \mathbf{F}_{Se}^{-1} , \quad \overline{\mathbf{D}}_{Se} = \frac{1}{2} \left(\overline{\mathbf{L}}_{Se} + \overline{\mathbf{L}}_{Se}^{T} \right),$$

$$\overline{\mathbf{L}}_{Sp} = (\mathbf{F}_{Sp})'_{S} \mathbf{F}_{Sp}^{-1} , \quad \overline{\mathbf{D}}_{Sp} = \frac{1}{2} \left(\overline{\mathbf{L}}_{Sp} + \overline{\mathbf{L}}_{Sp}^{T} \right)$$
(5.4.19)

und somit

$$\mathbf{D}_S \neq \overline{\mathbf{D}}_{Se} + \overline{\mathbf{D}}_{Sp} \,. \tag{5.4.20}$$

In Lees Konzept ist die additive Zerlegung von \mathbf{D}_S daher nur für den Fall infinitesimaler elastischer Deformationen, $\mathbf{F}_{Se} \simeq \mathbf{I}$, und für einige andere Sonderfälle enthalten.

Die von Lee definierten Geschwindigkeitsgradienten haben bei Beachtung von (5.4.3) die Form

$$\overline{\mathbf{L}}_{Se} = (\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{x})'_{S} \mathbf{F}_{Se}^{-1},$$

$$\overline{\mathbf{L}}_{Sp} = \operatorname{Grad}_{S} (\mathbf{x}_{Sz})'_{S} \mathbf{F}_{Sp}^{-1}.$$
(5.4.21)

Unter Voraussetzung homogener Deformationen hat darin nur

$$\overline{\mathbf{L}}_{Sp} = \frac{\partial(\mathbf{x}_{Sz})'_{S}}{\partial \mathbf{x}_{Sz}} = \operatorname{grad}_{Sz}(\mathbf{x}_{Sz})'_{S}$$
(5.4.22)

die Form eines Geschwindigkeitsgradienten, nicht jedoch

$$\overline{\mathbf{L}}_{Se} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_{Sz}}\right)_{S}^{\prime} \frac{\partial \mathbf{x}_{Sz}}{\partial \mathbf{x}}, \qquad (5.4.23)$$

da \mathbf{x}_{Sz} als Funktion von t nicht konstant ist bezüglich der Ableitung $(\cdots)'_{S}$.

Die infolge (5.4.20) in Lees Konzept auftretenden Komplikationen lassen sich vermeiden, wenn man nur solche Größen als Geschwindigkeitsgradienten einführt, die im Fall homogener Deformationen tatsächlich Geschwindigkeitsgradienten sind und die für beliebige Deformationen zumindest den Charakter von Geschwindigkeitsgradienten haben. Unter dieser Voraussetzung existieren nur zwei Geschwindigkeitsgradienten, nämlich

$$\mathbf{L}_{S} = (\mathbf{F}_{S})'_{S} \mathbf{F}_{S}^{-1},$$

$$\widehat{\mathbf{L}}_{Sp} = (\mathbf{F}_{Sp})'_{S} \mathbf{F}_{Sp}^{-1}.$$
(5.4.24)

Ein elastischer Geschwindigkeitsgradient kann demzufolge nur als eine mehr oder weniger willkürliche Definition verstanden werden.

Die aus (5.4.24) resultierenden Deformations- und Drehgeschwindigkeitstensoren sind:

$$\mathbf{D}_{S} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{L}_{S} + \mathbf{L}_{S}^{T} \right) , \quad \mathbf{W}_{S} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{L}_{S} - \mathbf{L}_{S}^{T} \right),$$

$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = \frac{1}{2} \left(\widehat{\mathbf{L}}_{Sp} + \widehat{\mathbf{L}}_{Sp}^{T} \right) , \quad \widehat{\mathbf{W}}_{S} = \frac{1}{2} \left(\widehat{\mathbf{L}}_{S} - \widehat{\mathbf{L}}_{S}^{T} \right).$$
(5.4.25)

Die Größen $\widehat{\mathbf{D}}_{Sp}$ und $\widehat{\mathbf{W}}_{Sp}$ kennzeichnen die plastischen Deformations- und Drehgeschwindigkeiten der Zwischenkonfiguration.

Die Definition von Deformations – bzw. Verzerrungsgeschwindigkeiten für die jeweiligen Konfigurationen kann in Analogie zu (5.4.10) - (5.4.17) mit Hilfe der Geschwindigkeit der Quadrate der Linienelemente eingeführt werden, vgl. *Kleiber* [1975]. Aus (5.4.10) folgt

$$(\mathbf{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} - \mathbf{d}\mathbf{X}_S \cdot \mathbf{d}\mathbf{X}_S)'_S = \mathbf{d}\mathbf{X}_S \cdot 2 (\mathbf{E}_S)'_S \mathbf{d}\mathbf{X}_S = \mathbf{d}\mathbf{x} \cdot 2 [(\mathbf{A}_S)'_S + \mathbf{L}_S^T \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_S \mathbf{L}_S] \mathbf{d}\mathbf{x} .$$

$$(5.4.26)$$

Darin sind $(\mathbf{E}_S)'_S$ die Greensche Verzerrungsgeschwindigkeit der Referenzkonfiguration und

$$(\mathbf{A}_S)^{\triangle} = \mathbf{D}_S \tag{5.4.27}$$

die obere Lie-Ableitung

$$(\cdots)^{\Delta} = (\cdots)'_{S} + \mathbf{L}_{S}^{T}(\cdots) + (\cdots) \mathbf{L}_{S}$$
(5.4.28)

des Almansischen Verzerrungstensors der aktuellen Konfiguration. Die Beziehung (5.4.27) kann mit

$$(\mathbf{B}_{S}^{-1})_{S}^{\prime} = -\mathbf{L}_{S}^{T} \mathbf{B}_{S}^{-1} - \mathbf{B}_{S}^{-1} \mathbf{L}_{S}$$
(5.4.29)

im Zusammenhang mit $(5.4.13)_2$ und (5.4.28) leicht verifiziert werden.

Das Konzept objektiver Lie- bzw. Oldroyd-Ableitungen (konvektive Zeitableitungen) beinhaltet, daß die jeweilige tensorielle Größe, für die diese Ableitung zu bilden ist, zunächst per Rückwärtstransformation in die Referenzkonfiguration zu überführen ist. In der Referenzkonfiguration wird die materielle Zeitableitung $(\cdots)'_{S}$ gebildet und schließlich wird die so entstehende Größe per Vorwärtstransformation wieder in ihre Ausgangslage transportiert. Der Begriff "obere" Lie-Ableitung deutet an, daß für den Fall einer Darstellung in der natürlichen Basis nur die kovariante Metrik der Verzerrungstensoren abzuleiten ist. Die kontravariante Basis ist konstant zu halten. Aus (5.4.12) folgt

$$(\mathbf{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} - \mathbf{d}\mathbf{x}_{Sz} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x}_{Sz})'_{S} = \mathbf{d}\mathbf{x}_{Sz} \cdot 2 \left[(\widehat{\mathbf{E}}_{Se})'_{S} + \widehat{\mathbf{L}}^{T}_{Sp} \widehat{\mathbf{E}}_{Se} + \widehat{\mathbf{E}}_{Se} \widehat{\mathbf{L}}_{Sp} \right] \mathbf{d}\mathbf{x}_{Sz}$$

$$= \mathbf{d}\mathbf{x} \cdot 2 \left[(\mathbf{A}_{Se})'_{S} + \mathbf{L}^{T}_{S} \mathbf{A}_{Se} + \mathbf{A}_{Se} \mathbf{L}_{S} \right] \mathbf{d}\mathbf{x} .$$

$$(5.4.30)$$

Mit (5.4.28) und der Definition einer oberen plastischen Lie-Ableitung der Zwischenkonfiguration,

$$(\widehat{\cdots})_P^{\Delta} = (\widehat{\cdots})_S' + \widehat{\mathbf{L}}_{Sp}^T (\widehat{\cdots}) + (\widehat{\cdots}) \widehat{\mathbf{L}}_{Sp}, \qquad (5.4.31)$$

sind die Lie-Ableitungen des elastischen Greenschen Verzerrungstensors $\widehat{\mathbf{E}}_{Se}$ der Zwischenkonfiguration und des elastischen Almansischen Verzerrungstensors \mathbf{A}_{Se} der aktuellen Konfiguration durch (5.4.30) definiert:

$$(\widehat{\mathbf{E}}_{Se})_{P}^{\Delta} = (\widehat{\mathbf{E}}_{Se})_{S}' + \widehat{\mathbf{L}}_{Sp}^{T} \widehat{\mathbf{E}}_{Se} + \widehat{\mathbf{E}}_{Se} \widehat{\mathbf{L}}_{Sp},$$

$$(\mathbf{A}_{Se})^{\Delta} = (\mathbf{A}_{Se})_{S}' + \mathbf{L}_{S} \mathbf{A}_{Se} + \mathbf{A}_{Se} \mathbf{L}_{S}.$$

$$(5.4.32)$$

Entsprechend folgt aus (5.4.14)

$$(\mathbf{d}\mathbf{x}_{Sz} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x}_{Sz} - \mathbf{d}\mathbf{X}_{S} \cdot \mathbf{d}\mathbf{X}_{S})'_{S} = \mathbf{d}\mathbf{X}_{S} \cdot 2 (\mathbf{E}_{Sp})'_{S} \mathbf{d}\mathbf{X}_{S}$$

$$= \mathbf{d}\mathbf{x}_{Sz} \cdot 2 [(\widehat{\mathbf{A}}_{Sp})'_{S} + \widehat{\mathbf{L}}_{Sp}^{T} \widehat{\mathbf{A}}_{Sp} + \widehat{\mathbf{A}}_{Sp} \widehat{\mathbf{L}}_{Sp}] \mathbf{d}\mathbf{x}_{Sz}.$$

$$(5.4.33)$$

Darin sind $(\mathbf{E}_{Sp})'_S$ die plastische Greensche Verzerrungsgeschwindigkeit der Referenzkonfiguration und

$$(\widehat{\mathbf{A}}_{Sp})_{p}^{\Delta} = (\widehat{\mathbf{A}}_{Sp})_{S}' + \widehat{\mathbf{L}}_{Sp}^{T} \,\widehat{\mathbf{A}}_{Sp} + \widehat{\mathbf{A}}_{Sp} \,\widehat{\mathbf{L}}_{Sp}$$
(5.4.34)

die obere plastische Lie-Ableitung des plastischen Almansischen Verzerrungstensors der Zwischenkonfiguration. Aus (5.4.34) kann mit $(5.4.15)_2$, (5.4.31) und der Beziehung

$$(\widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{-1})'_{S} = -\widehat{\mathbf{L}}_{Sp}^{T} \,\widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{-1} - \widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{-1} \,\widehat{\mathbf{L}}_{Sp}$$
(5.4.35)

auf

$$(\widehat{\mathbf{A}}_{Sp})_p^{\Delta} = \widehat{\mathbf{D}}_{Sp} \tag{5.4.36}$$

geschlossen werden.

Schließlich folgt aus (5.4.16) und (5.4.17), daß

$$(\mathbf{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} - \mathbf{d}\mathbf{X}_S \cdot \mathbf{d}\mathbf{X}_S)'_S = \mathbf{d}\mathbf{x}_{Sz} \cdot 2\left[(\widehat{\mathbf{E}}_{Se})_p^{\bigtriangleup} + (\widehat{\mathbf{A}}_{Sp})_p^{\bigtriangleup}\right] \mathbf{d}\mathbf{x}_{Sz}$$
(5.4.37)

mit

$$(\widehat{\mathbf{\Gamma}}_S)_p^{\Delta} = (\widehat{\mathbf{E}}_{Se})_p^{\Delta} + (\widehat{\mathbf{A}}_{Sp})_p^{\Delta}.$$
(5.4.38)

Durch (5.4.38) ist in Analogie zu (5.4.17) ein additives Konzept objektiver Verzerrungsbzw. Deformationsgeschwindigkeiten gegeben. Durch Rückwärtstransformation von (5.4.38) mit $\mathbf{F}_{Sp}^{T}(\cdots) \mathbf{F}_{Sp}$ entstehen die Greenschen Verzerrungsgeschwindigkeiten der Referenzkonfiguration, durch Vorwärtstransformation mit $\mathbf{F}_{Se}^{T-1}(\cdots) \mathbf{F}_{Se}^{-1}$ die oberen Lie-Ableitungen der Almansischen Verzerrungstensoren der aktuellen Konfiguration, vgl. Tafel 5.2.

Es bleibt festzustellen, daß die Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L}_S in symmetrische und schiefsymmetrische Anteile zu folgender Darstellung führt, vgl. $(5.4.25)_1$ und Tafel 5.2:

$$\mathbf{L}_S = (\mathbf{A}_{Se})^{\triangle} + (\mathbf{A}_{Sp})^{\triangle} + \mathbf{W}_S.$$
(5.4.39)

Abschließend ist anzumerken, daß die elastischen und plastischen Deformationsanteile im Rahmen des hier gewählten multiplikativen Konzepts zur Zerlegung der Deformationen, vgl. (5.4.1) und (5.4.2), nur bis auf eine beliebige Rotation bestimmbar sind. Für Materialien zweiten Grades kann diese Rotation auch durch ein Paar

$$(\widehat{\mathbf{Q}}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \in \mathcal{O}_l \tag{5.4.40}$$

angegeben werden (bzgl. der Gruppe \mathcal{O}_l der eigentlich orthogonalen Transformation von Materialien zweiten Grades siehe Anhang B.3).

Mit (5.4.40) kann alternativ zu (5.4.1)

$$(\mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}) = (\overline{\mathbf{F}}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}) \circ (\overline{\mathbf{F}}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp})$$
(5.4.41)

mit

$$(\overline{\mathbf{F}}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}) = (\mathbf{F}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}) \circ (\widehat{\mathbf{Q}}, \overset{3}{\mathbf{O}})^{T},$$

$$(\overline{\mathbf{F}}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}) = (\widehat{\mathbf{Q}}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \circ (\mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp})$$

$$(5.4.42)$$

gesetzt werden. Entsprechend (B.1.4) und (B.1.5) sind darin

$$\overline{\mathbf{F}}_{Se} = \mathbf{F}_{Se} \widehat{\mathbf{Q}}^{T}, \quad \overline{\mathbf{F}}_{Sp} = \widehat{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{Sp},$$

$$\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} = [(\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} \widehat{\mathbf{Q}}^{T})^{\underline{3}} \overset{23}{T} \widehat{\mathbf{Q}}^{T}]^{\underline{3}} \overset{23}{T}, \qquad (5.4.43)$$

$$\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} = (\widehat{\mathbf{Q}} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp})^{\underline{3}}.$$



Tafel 5.2: Greensche und Almansische Verzerrungsgeschwindigkeiten von φ^S .

Aus $(5.4.43)_1$ folgt mit der polaren Zerlegung

$$\mathbf{F}_{Se} = \mathbf{R}_{Se} \mathbf{U}_{Se}, \quad \mathbf{F}_{Sp} = \mathbf{R}_{Sp} \mathbf{U}_{Sp}, \qquad (5.4.44)$$

daß die plastische Rotation \mathbf{R}_{Sp} wegen

$$\overline{\mathbf{F}}_{Sp} = \overline{\mathbf{R}}_{Sp} \overline{\mathbf{U}}_{Sp},$$

$$\overline{\mathbf{R}}_{Sp} = \widehat{\mathbf{Q}} \mathbf{R}_{Sp}, \quad \overline{\mathbf{U}}_{Sp} = \mathbf{U}_{Sp}$$
(5.4.45)

als eine willkürlich vorgegebene Größe erscheint.

Mit $(5.4.24)_2$ und $(5.4.25)_2$ gelten die Beziehungen

$$\widehat{\overline{\mathbf{L}}}_{Sp} = \widehat{\mathbf{Q}} \, \widehat{\mathbf{L}}_{Sp} \, \widehat{\mathbf{Q}}^T + (\widehat{\mathbf{Q}})'_S \, \widehat{\mathbf{Q}}^T \tag{5.4.46}$$

sowie

$$\overline{\mathbf{D}}_{Sp} = \widehat{\mathbf{Q}} \, \widehat{\mathbf{D}}_{Sp} \, \widehat{\mathbf{Q}}^T ,$$

$$\widehat{\overline{\mathbf{W}}}_{Sp} = \widehat{\mathbf{Q}} \, \widehat{\mathbf{W}}_{Sp} \, \widehat{\mathbf{Q}}^T + (\widehat{\mathbf{Q}})'_S \, \widehat{\mathbf{Q}}^T$$
(5.4.47)

mit

$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = \frac{1}{2} \mathbf{R}_{Sp} \left[(\mathbf{U}_{Sp})'_{S} \mathbf{U}_{Sp}^{-1} + \mathbf{U}_{Sp}^{-1} (\mathbf{U}_{Sp})'_{S} \right] \mathbf{R}_{Sp}^{T},
\widehat{\mathbf{W}}_{Sp} = \frac{1}{2} \mathbf{R}_{Sp} \left[(\mathbf{U}_{Sp})'_{S} \mathbf{U}_{Sp}^{-1} - \mathbf{U}_{Sp}^{-1} (\mathbf{U}_{Sp})'_{S} \right] \mathbf{R}_{Sp}^{T} + (\mathbf{R}_{Sp})'_{S} \mathbf{R}_{Sp}^{T}.$$
(5.4.48)

Die Beziehungen (5.4.48) zeigen, daß die plastische Rotation \mathbf{R}_{Sp} im Rahmen konstitutiver Beziehungen für $\widehat{\mathbf{D}}_{Sp}$ (Fließregel) unbestimmt bleibt. \mathbf{R}_{Sp} kann nur bestimmt werden, wenn zusätzlich $\widehat{\mathbf{W}}_{Sp}$ als Funktion der Zeit bekannt ist, siehe auch *Haupt* [1985, Gl. 35]. Konstitutive Ansätze für $\widehat{\mathbf{W}}_{Sp}$ oder daraus abgeleitete Größen, vgl. z. B. *Dafalias* [1983], sind jedoch nur erforderlich und sinnvoll, wenn durch den plastischen Deformationsprozeß entstehende Vorzugsrichtungen im Material (anisotrope Effekte der Mikrostruktur) behandelt werden sollen. Das Problem der durch (5.4.40) eingeführten willkürlichen Rotation bleibt auch in diesem Fall erhalten, vgl. (5.4.46) und (5.4.47).

5.5 Isotropiegruppe für Materialien zweiten Grades

Die Isotropie- bzw. materiellen Symmetrieeigenschaften, die ein Material besitzt, werden durch die Menge aller Transformationen charakterisiert, durch die eine lokale bzw. ungestörte Referenzkonfiguration in der Weise in eine andere Referenzkonfiguration abgebildet wird, daß die Werte der Auswirkungsfunktionen \mathcal{R} durch diese Transformation ungeändert bleiben. Für Einkomponentenmaterialien wurden die materiellen Symmetrieeigenschaften z. B. von Truesdell & Noll [1965, Abschnitte 27, 28, 31] diskutiert. Im Rahmen der Mischungstheorie wurde von Bowen [1969b, Abschnitt 8], Bowen & Wiese [1969, Abschnitt 6] sowie Bowen & Garcia [1970, Abschnitt 5] ein für Materialien zweiten Grades allerdings unvollständiges Konzept materieller Symmetrie angegeben, siehe dazu auch Bowen [1976, Abschnitt 2.6]. Erst Cross [1973] stellte ein allgemeines Konzept der Symmetriegruppe \mathcal{S} für Mischungen zweiten Grades vor, indem er eine Menge von Paaren

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) \in \mathcal{S} \in \mathcal{L} \tag{5.5.1}$$

definierte – bezüglich der allgemeinen Definition der linearen Gruppe \mathcal{L} siehe Anhang B.1 –, in der **H** und $\overset{3}{\mathbf{C}}$ den Charakter nichtsingulärer erster und eigentlich zweiter Deformationsgradienten besitzen:

$$\overset{3}{\mathbf{C}} = \overset{3}{\mathbf{C}} \overset{23}{T}.$$
 (5.5.2)

Der Einfluß von (5.5.1) auf die Auswirkungsfunktionen \mathcal{R} ist bei Voraussetzung des allgemeinen Variablensatzes \mathfrak{s} aus (5.3.1) durch folgende Vorschrift gekennzeichnet (φ^c sei isotrop):

$$\mathcal{R}\left(\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{i}, \operatorname{grad} \rho^{i}, \mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i}, \mathbf{\dot{x}}_{i}, (\mathbf{F}_{i})_{i}^{\prime}\right) = \\ = \mathcal{R}\left(\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{i}, \operatorname{grad} \rho^{i}, \mathbf{F}_{1}, \dots, \check{\mathbf{H}}_{c}, \dots, \mathbf{F}_{k}, \right)$$

$$\operatorname{Grad}_{1} \mathbf{F}_{1}, \dots, \overset{3}{\check{\mathbf{G}}}_{c}, \dots, \operatorname{Grad}_{k} \mathbf{F}_{k}, \mathbf{\dot{x}}_{i}, (\mathbf{F}_{1})_{1}^{\prime}, \dots, (\mathbf{F}_{c})_{c}^{\prime} \mathbf{H}, \dots (\mathbf{F}_{k})_{k}^{\prime}\right).$$
(5.5.3)

Darin sind

$$(\check{\mathbf{H}}_{c}, \check{\mathbf{G}}_{c}) = (\mathbf{F}_{c}, \operatorname{Grad}_{c} \mathbf{F}_{c}) \circ (\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}})$$
 (5.5.4)

durch die Definition (B.1.4) und die Rechenvorschrift (B.1.5) im Sinne aufeinander folgender Paare in der Weise definiert, daß

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{H}}_{c} &= \mathbf{F}_{c} \mathbf{H}, \\
\overset{3}{\mathbf{G}}_{c} &= \{ [(\operatorname{Grad}_{c} \mathbf{F}_{c}) \mathbf{H}]^{\underline{3}} \overset{23}{T} \mathbf{H} \}^{\underline{3}} \overset{23}{T}^{\underline{3}} + (\mathbf{F}_{c} \overset{3}{\mathbf{C}})^{\underline{3}}.
\end{aligned}$$
(5.5.5)

Cross [1973] hat gezeigt, daß die Menge der Paare (**H**, $\overset{3}{\mathbf{C}}$) ein Fluid φ^F (isotropes Fluidkristall) beschreibt, wenn für φ^F ohne Massenzuwachs $\hat{\rho}^F$

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) \in \mathcal{S} \in \mathcal{U}_l \qquad (\text{für } \hat{\rho}^F = 0)$$
 (5.5.6)

 $(\mathcal{U}_l$: Gruppe der eigentlich unimodularen Transformationen, vgl. Anhang B.2).

Die Definition (5.5.6) entspricht der auch in der Theorie der Einkomponentenmaterialien bekannten Definition für Fluide, daß nämlich alle volumen- und damit dichteerhaltenden Transformationen von einem Fluid nicht spürbar sind. In der Mischungstheorie beinhaltet die Definition (5.5.6) Volumenerhaltung (in Bezug auf das Gesamtvolumen dv) und Erhaltung der Partialdichte von φ^F , vgl. (4.3.3).

Für Fluide φ^F mit Massenaustauschprozessen $\hat{\rho}^F$ ist das Dichtefeld ρ^F jedoch nicht durch die Beziehung (4.3.3) eingeschränkt, so daß anstelle von (5.5.6)

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) \in \mathcal{S} \in \mathcal{L}$$
 (für $\hat{\rho}^F \neq 0$) (5.5.7)

gesetzt werden kann, vgl. Cross [1973, Abschnitt 6].

Ein isotroper Festkörper φ^S ist in der Weise definiert, daß jede nichtorthogonale Transformation spürbar ist. Demzufolge muß

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \in \mathcal{S} \in \mathcal{O}_l \qquad (\text{für } \hat{\rho}^S = 0, \hat{\rho}^S \neq 0)$$
(5.5.8)

gefordert werden. Die Definition (5.5.8) entspricht wegen $\mathcal{O}_l \in \mathcal{U}_l$ einer volumenerhaltenden Transformation (in Bezug auf das Gesamtvolumenelement dv), die für $\hat{\rho}^S = 0$ gleichzeitig partialdichteerhaltend ist. Die Forderung nach einer orthogonalen Transformation bedingt, daß die Symmetriegruppe für isotrope Festkörper im Gegensatz zu derjenigen von Fluiden, vgl. (5.5.6) und (5.5.7), unabhängig davon ist, ob $\hat{\rho}^S = 0$ oder $\hat{\rho}^S \neq 0$.

Im folgenden sollen die Symmetrie- bzw. Isotropiegruppen der verschiedenen Materialtypen im Zusammenhang mit den daraus resultierenden Auswirkungen auf die konstitutiven Gleichungen untersucht werden.

Fluide φ^F zweiten Grades mit $\hat{\rho}^F \neq 0$:

Die Forderung (5.5.7) beinhaltet im Zusammenhang mit (5.5.4), daß ein Paar $(\mathbf{H}, \mathbf{C}) \in \mathcal{S} \in \mathcal{L}$ im Sinne einer dem Paar $(\mathbf{F}_c, \operatorname{Grad}_c \mathbf{F}_c) \in \mathcal{L}$ vorangehenden Transformation zu wählen ist. Die Wahl

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) = (\mathbf{F}_F^{-1}, \operatorname{grad} \mathbf{F}_F^{-1}) \in \mathcal{L}$$
 (5.5.9)

ist daher zulässig, und es folgt aus (5.5.4) und (5.5.5)

$$(\check{\mathbf{H}}_{F}, \check{\mathbf{G}}_{F}) = (\mathbf{F}_{F}, \operatorname{Grad}_{F} \mathbf{F}_{F}) \circ (\mathbf{F}_{F}^{-1}, \operatorname{grad} \mathbf{F}_{F}^{-1})$$

$$= (\mathbf{I}, \overset{3}{\mathbf{O}}), \qquad (5.5.10)$$

vgl. (B.1.22). Ebenso folgt

$$(\mathbf{F}_F)'_F \mathbf{H} = (\mathbf{F}_F)'_F \mathbf{F}_F^{-1}$$

$$= \mathbf{L}_F .$$

$$(5.5.11)$$

Ist φ^c ein isotropes Fluid φ^F mit $\hat{\rho}^F \neq 0$, dann reduziert sich mit (5.5.10) und (5.5.11)

die Abhängigkeit der Auswirkungsfunktionen \mathcal{R} aus (5.5.3) auf

$$\mathcal{R} \left(\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{i}, \operatorname{grad} \rho^{i}, \mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i}, \mathbf{x}_{i}, (\mathbf{F}_{i})_{i}^{\prime}\right) =$$

$$= \mathcal{R} \left(\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{i}, \operatorname{grad} \rho^{i}, \mathbf{F}_{1}, \dots, \mathbf{F}_{c-1}, \mathbf{F}_{c+1}, \dots, \mathbf{F}_{c+1}, \ldots, \mathbf{F}_{k}, \operatorname{Grad}_{1} \mathbf{F}_{1}, \dots, \operatorname{Grad}_{c-1} \mathbf{F}_{c-1}, \operatorname{Grad}_{c+1} \mathbf{F}_{c+1}, \dots, \operatorname{Grad}_{k} \mathbf{F}_{k}, \mathbf{x}_{i}^{\prime}, (\mathbf{F}_{1})_{1}^{\prime}, \dots, \mathbf{L}_{c}, \dots (\mathbf{F}_{k})_{k}^{\prime}\right).$$

$$(5.5.12)$$

Fluide φ^F zweiten Grades mit $\hat{\rho}^F = 0$:

Die Forderung (5.5.6) beinhaltet im Zusammenhang mit (5.5.4), daß ein Paar $(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) \in \mathcal{S} \in \mathcal{U}_l$ im Sinne einer dem Paar $(\mathbf{F}_c, \operatorname{Grad}_c \mathbf{F}_c) \in \mathcal{L}$ vorangehenden Transformation zu wählen ist. Die Wahl

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) = (\overline{\mathbf{F}}_{F}^{-1} \overset{3}{\overline{\mathbf{C}}}_{F}) \in \mathcal{U}_{l},$$

$$\overline{\mathbf{F}}_{F}^{-1} = (\det \mathbf{F}_{F})^{1/3} \mathbf{F}_{F}^{-1},$$

$$\overset{3}{\overline{\mathbf{C}}}_{F} = (\det \mathbf{F}_{F})^{2/3} \{\operatorname{grad} \mathbf{F}_{F}^{-1} - \frac{1}{4} [\mathbf{F}_{F}^{-1} \otimes (\mathbf{F}_{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}_{F}^{-1})^{\underline{1}}] - - \frac{1}{4} [\mathbf{F}_{F}^{-1} \otimes (\mathbf{F}_{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}_{F}^{-1})^{\underline{1}}]^{2^{3}}\}$$

$$(5.5.13)$$

erfüllt die Anforderungen der eigentlich unimodularen Gruppe, vgl. Anhang B.2, und ist daher zulässig. Es folgt aus (5.5.4) und $(5.5.5)_1$, daß

$$(\check{\mathbf{H}}, \overset{3}{\check{\mathbf{G}}}_{F}) = (\mathbf{F}_{F}, \operatorname{Grad} \mathbf{F}_{F}) \circ (\overline{\mathbf{F}}_{F}^{-1}, \overset{3}{\mathbf{C}}_{F}),$$

$$\check{\mathbf{H}}_{F} = (\det \mathbf{F}_{F})^{1/3} \mathbf{I}.$$
(5.5.14)

Die Beziehung $(5.5.5)_2$ führt zunächst auf

$$\overset{3}{\check{\mathbf{G}}}_{F} = (\det \mathbf{F})^{2/3} \left[\{ [(\operatorname{Grad}_{F} \mathbf{F}_{F}) \mathbf{F}_{F}^{-1}]^{\frac{3}{2}} \overset{2^{3}}{T} \mathbf{F}_{F}^{-1} \}^{\frac{3}{2}} \overset{2^{3}}{T}^{\frac{3}{T}} + (\mathbf{F}_{F} \operatorname{grad} \mathbf{F}_{F}^{-1})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \{ \mathbf{F}_{F} [\mathbf{F}_{F}^{-1} \otimes (\mathbf{F}_{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}_{F}^{-1})^{\frac{1}{2}}] \}^{\frac{3}{2}} - (5.5.15) - \frac{1}{4} \{ \mathbf{F}_{F} [\mathbf{F}_{F}^{-1} \otimes (\mathbf{F}_{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}_{F}^{-1})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{2^{3}}{T}} \}^{\frac{3}{2}} \right].$$

Mit (A.1.24) gilt

$$\{\mathbf{F}_F \left[\mathbf{F}_F^{-1} \otimes (\mathbf{F}_F^T \operatorname{grad} \mathbf{F}_F^{-1})^{\underline{1}}\right]\}^{\underline{3}} = \mathbf{I} \otimes (\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}}.$$
 (5.5.16)

Entsprechend liefern die Identitäten (A.1.24) und (A.1.33)

$$\{\mathbf{F}_F \left[\mathbf{F}_F^{-1} \otimes (\mathbf{F}_F^T \operatorname{grad} \mathbf{F}_F^{-1})^{\underline{1}}\right]^{\frac{23}{T}}\}^{\underline{3}} = \left[\mathbf{I} \otimes (\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}}\right]^{\frac{23}{T}}.$$
 (5.5.17)

Mit (5.5.16) und (5.5.17) erhält man bei Beachtung von (B.1.21)

$$\overset{3}{\check{\mathbf{G}}}_{F} = -\frac{1}{4} \left(\det \mathbf{F}_{F} \right)^{2/3} \left\{ \mathbf{I} \otimes (\mathbf{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} + \left[\mathbf{I} \otimes (\mathbf{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} \right]^{\frac{23}{T}} \right\}$$
(5.5.18)

und daraus mit der Identität (A.2.9)

$$\overset{3}{\check{\mathbf{G}}}_{F} = -\frac{1}{4} (\det \mathbf{F}_{F})^{5/3} \left\{ \mathbf{I} \otimes \operatorname{grad} (\det \mathbf{F}_{F}^{-1}) + \left[\mathbf{I} \otimes \operatorname{grad} (\det \mathbf{F}_{F}^{-1}) \right]^{\frac{23}{T}} \right\}.$$
(5.5.19)

Für ein Fluid ohne Massenzuwachs $\hat{\rho}^F$ gilt entsprechend (5.3.5) und (5.3.6)

det
$$\mathbf{F}_F = \frac{\rho_{0F}^F}{\rho^F}$$
,
grad (det \mathbf{F}^{-1}) $= \frac{1}{\rho_{0F}^F}$ grad ρ^F . (5.5.20)

Damit folgt aus $(5.5.14)_2$ und (5.5.19)

$$\begin{split}
\check{\mathbf{H}}_{F} &= \left(\frac{\rho_{0F}^{F}}{\rho^{F}}\right)^{1/3} \mathbf{I}, \\
\overset{3}{\mathbf{G}}_{F} &= -\frac{1}{4 \rho^{F}} \left(\frac{\rho_{0F}^{F}}{\rho^{F}}\right)^{2/3} \left[\mathbf{I} \otimes \operatorname{grad} \rho^{F} + \left(\mathbf{I} \otimes \operatorname{grad} \rho^{F}\right)^{23}\right].
\end{split}$$
(5.5.21)

Ebenso folgt

$$(\mathbf{F}_F)'_F \mathbf{H} = (\det \mathbf{F}_F)^{1/3} (\mathbf{F}_F)'_F \mathbf{F}_F^{-1} = (\frac{\rho_{0F}^F}{\rho^F})^{1/3} \mathbf{L}_F.$$
 (5.5.22)

Damit sind $\check{\mathbf{H}}_F$, $\check{\mathbf{G}}_F$ und $(\mathbf{F}_F)'_F \mathbf{H}$ eindeutig durch ρ^F , grad ρ^F und \mathbf{L}_F bestimmt; die Partialdichte ρ^F_{0F} ist entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 5.3 als bekannt und feldlich konstant vorauszusetzen.

Ist φ^C ein isotropes Fluid φ^F mit $\hat{\rho}^F = 0$, dann reduziert sich die linke Seite von (5.5.3) bei Beachtung von (5.3.10) zunächst auf

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}\left(\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{1}, \ldots, \rho^{c-1}, \rho^{c+1}, \ldots, \rho^{k}, \operatorname{grad} \rho^{1}, \ldots, \operatorname{grad} \rho^{c-1}, \operatorname{grad} \rho^{c+1}, \ldots, \operatorname{grad} \rho^{k}, \mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i}, \mathbf{x}_{i}, (\mathbf{F}_{i})_{i}^{\prime}\right),$$

$$(5.5.23)$$

so daß mit (5.5.21) und (5.5.22)

$$\mathcal{R}\left(\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{1}, \dots, \rho^{c-1}, \rho^{c+1}, \dots, \rho^{k}, \operatorname{grad} \rho^{1}, \dots, \operatorname{grad} \rho^{c-1}, \operatorname{grad} \rho^{c+1}, \dots, \operatorname{grad} \rho^{k}, \mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i}, \mathbf{x}_{i}^{\prime}, (\mathbf{F}_{i})_{i}^{\prime}\right) =$$

$$= \mathcal{R}\left(\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{i}, \operatorname{grad} \rho^{i}, \mathbf{F}_{1}, \dots, \mathbf{F}_{c-1}, \mathbf{F}_{c+1}, \dots, \operatorname{F}_{c+1}, \ldots, \operatorname{F}_{k}, \operatorname{Grad}_{1} \mathbf{F}_{1}, \dots, \operatorname{Grad}_{c-1} \mathbf{F}_{c-1}, \operatorname{Grad}_{c+1} \mathbf{F}_{c+1}, \dots, \operatorname{Grad}_{k} \mathbf{F}_{k}, \mathbf{x}_{i}, (\mathbf{F}_{1})_{1}^{\prime}, \dots, \mathbf{L}_{c}, \dots, (\mathbf{F}_{k})_{k}^{\prime}\right).$$

$$(5.5.24)$$

Ein Vergleich der rechten Seiten von (5.5.24) und (5.5.12) zeigt, daß der Einfluß der Isotropieeigenschaft eines Fluids auf die Menge der Prozeßvariablen unabhängig davon ist, ob $\hat{\rho}^C \neq 0$ oder $\hat{\rho}^C = 0$.

Isotrope Festkörper φ^S zweiten Grades:

Gemäß (5.5.8) ist die Symmetriegruppe $S \in O_l$ eines Festkörpers unabhängig davon, ob $\hat{\rho}^S = 0$ oder $\hat{\rho}^S \neq 0$. Die Forderung (5.5.8) beinhaltet im Zusammenhang mit (5.5.4), daß ein Paar $(\mathbf{H}, \mathbf{O}) \in S \in O_l$ im Sinne einer dem Paar $(\mathbf{F}_S, \operatorname{Grad}_S \mathbf{F}_S) \in \mathcal{L}$ vorangehenden Transformation zu wählen ist. Die Wahl

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{O}}) = (\mathbf{R}_{S}^{T}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \in O_{l}$$
(5.5.25)

erfüllt die Anforderungen der eigentlich orthogonalen Gruppe, vgl. Anhang B.3, und ist daher zulässig. Mit der polaren Zerlegung $\mathbf{F}_S = \mathbf{V}_S \mathbf{R}_S$ folgt aus (5.5.4) und (5.5.5)₁, daß

$$(\check{\mathbf{H}}_{S}, \check{\mathbf{G}}_{S}) = (\mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}) \circ (\mathbf{F}_{S}^{-1} \mathbf{V}_{S}, \overset{3}{\mathbf{O}}), \qquad (5.5.26)$$
$$\check{\mathbf{H}}_{S} = \mathbf{V}_{S}.$$

Die Beziehung $(5.5.5)_2$ führt zunächst auf

$$\overset{3}{\mathbf{G}}_{S} = \{ [(\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S})(\mathbf{F}_{S}^{-1} \mathbf{V}_{S})]^{\underline{3}} \overset{23}{T}^{T} (\mathbf{F}_{S}^{-1} \mathbf{V}_{S}) \}^{\underline{3}} \overset{23}{T}^{T}.$$
(5.5.27)

Durch zweimaliges Anwenden der Identität (A.1.28) entsteht daraus, wenn zusätzlich (A.1.30) benutzt wird:

$$\overset{3}{\check{\mathbf{G}}} = \left(\left[\{ [(\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}) \mathbf{F}_{S}^{-1}]^{\frac{2}{2}} \mathbf{F}_{S}^{-1} \}^{\frac{2}{2}} \mathbf{F}_{S}^{-1} \right]^{\frac{2}{2}} \mathbf{V}_{S}^{\frac{2}{2}} \mathbf{V}_{S}^{\frac{2}{2}} \right]^{\frac{2}{2}} \mathbf{V}_{S} \right)^{\frac{3}{2}} \mathbf{V}_{S}$$
(5.5.28)

Die weitere Umformung dieses Ausdrucks macht eine Zwischenrechnung erforderlich. Es gilt:

$$\operatorname{grad} \mathbf{B}_{S} = \operatorname{grad} \left(\mathbf{F}_{S} \mathbf{F}_{S}^{T} \right), \ \mathbf{B}_{S} = \mathbf{F}_{S} \mathbf{F}_{S}^{T}.$$

Daraus folgt mit (A.2.5) und den üblichen Rechenregeln, daß

grad
$$\mathbf{B}_{S} = \{ [\operatorname{Grad}_{S} (\mathbf{F}_{S} \mathbf{F}_{S}^{T})] \mathbf{F}_{S}^{-1} \}^{\underline{3}}$$

$$= \{ [(\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S})^{2^{3}} \mathbf{F}_{S}^{T}]^{\underline{3}^{2^{3}}} \mathbf{F}_{S}^{-1} \}^{\underline{3}} + [(\mathbf{F}_{S} \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}^{T})^{\underline{3}} \mathbf{F}_{S}^{-1}]^{\underline{3}}.$$
(5.5.29)

Bei Beachtung der Symmetrieeigenschaften des zweiten Deformationsgradienten,

$$\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S} = (\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S})^{T},$$

$$\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}^{T} = (\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S})^{T},$$
(5.5.30)

sowie der Identität

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{B}_S \, \mathbf{F}_S^{T-1} \,, \tag{5.5.31}$$

erhält (5.5.29) die Form

grad
$$\mathbf{B}_{S} = \{ [(\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}) (\mathbf{F}_{S}^{-1} \mathbf{B}_{S})]^{\frac{2}{2}T} \mathbf{F}_{S}^{-1} \}^{\frac{3}{2}} + \{ [(\mathbf{B}_{S} \mathbf{F}_{S}^{T-1}) (\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S})^{\frac{12}{T}}]^{\frac{3}{2}} \mathbf{F}_{S}^{-1} \}^{\frac{3}{2}}.$$

$$(5.5.32)$$

Der erste Summand von (5.5.32) kann mit (A.1.28) und (A.1.30) umgeformt werden:

$$\{ [(\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}) (\mathbf{F}_{S}^{-1} \mathbf{B}_{S})]^{\underline{3}T} \mathbf{F}_{S}^{-1} \}^{\underline{3}} = (\overset{3}{\mathbf{M}} \mathbf{B}_{S})^{\underline{3}T}.$$
(5.5.33)

Darin ist

$${}^{3}_{\mathbf{M}} = \{ [(\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}) \mathbf{F}_{S}^{-1}]^{\underline{3}}{}^{\underline{2}}{}^{2}_{T} \mathbf{F}_{S}^{-1} \}^{\underline{3}}{}^{\underline{2}}{}^{2}_{T}.$$
(5.5.34)

Für den zweiten Summanden erhält man mit (A.1.26), (A.1.30), (A.1.31), (A.1.34) und (A.1.35):

$$\{[(\mathbf{B}_{S} \mathbf{F}_{S}^{T-1}) (\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S})^{T}]^{\frac{3}{2}} \mathbf{F}_{S}^{-1}\}^{\frac{3}{2}} = (\mathbf{B}_{S} \mathbf{M}^{T})^{\frac{3}{2}}.$$
 (5.5.35)

Es folgt

grad
$$\mathbf{B}_{S} = (\overset{3}{\mathbf{M}} \mathbf{B}_{S})^{\underline{3}_{T}^{23}} + (\mathbf{B}_{S} \overset{3}{\mathbf{M}_{T}})^{\underline{3}}.$$
 (5.5.36)

Nach einigen Umformungen, die wegen ihres Umfangs nicht im Detail aufgeführt werden sollen, kann (5.5.36) nach $\stackrel{3}{\mathbf{M}}$ aufgelöst werden, so daß

$$\mathbf{\hat{M}} = \frac{1}{2} \left[\left[\left(\operatorname{grad} \mathbf{B}_{S} \right)^{2^{3}} \mathbf{B}_{S}^{-1} \right]^{\underline{3}} + \left(\mathbf{B}_{S}^{-1} \operatorname{grad} \mathbf{B}_{S} \right)^{\underline{3}^{12}} + \left\{ \left[\left(\operatorname{grad} \mathbf{B}_{S}^{-1} \right) \mathbf{B}_{S} \right]^{\underline{3}^{2^{3}}} \right\}^{\frac{12}{T}} \right] .$$

$$\left\{ \left[\left(\operatorname{grad} \mathbf{B}_{S}^{-1} \right) \mathbf{B}_{S} \right]^{\underline{3}^{2^{3}}} \right\}^{T} \right] .$$

$$(5.5.37)$$

Mit Hilfe der Identitäten (A.1.26) - (A.1.36) läßt sich (5.5.37) leicht nachvollziehen. Unter Ausnutzung der Symmetrie
eigenschaften

$$\mathbf{B}_{S}^{-1} = \mathbf{B}_{S}^{T-1} \quad , \quad \operatorname{grad} \mathbf{B}_{S} = (\operatorname{grad} \mathbf{B}_{S})^{T} \tag{5.5.38}$$

10

lautet (5.5.37) in einer einfachen Indexschreibweise

$$M_{ijk} = \frac{1}{2} [(B_S^{-1})_{kn} (\operatorname{grad} B_S)_{nji} + (B_S^{-1})_{in} (\operatorname{grad} B_S)_{njk} + (B_S)_{nj} (\operatorname{grad} B_S^{-1})_{ikn}].$$
(5.5.39)

Diese Beziehung ist identisch mit Cross [1973, Gl. (4.31)] und Bowen [1976, Gl. (2.6.27)]. Beachtet man, daß mit der polaren Zerlegung

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{V}_S \,\mathbf{R}_S \quad , \quad \mathbf{B}_S = \mathbf{V}_S \,\mathbf{V}_S \,, \tag{5.5.40}$$

so folgt aus $(5.5.26)_2$, (5.5.28) und (5.5.34):

$$\tilde{\mathbf{H}}_{S} = (\mathbf{B}_{S})^{1/2},
\overset{3}{\mathbf{G}}_{S} = \{ [\overset{3}{\mathbf{M}} (\mathbf{B}_{S})^{1/2}]^{3} \overset{23}{T} (\mathbf{B}_{S})^{1/2} \}^{\frac{23}{T}}.$$
(5.5.41)

Außerdem gilt

$$(\mathbf{F}_S)'_S \mathbf{H} = (\mathbf{F}_S)'_S \mathbf{F}_S^{-1} \mathbf{V}_S$$

= $\mathbf{L}_S (\mathbf{B}_S)^{1/2}$. (5.5.42)

Mit (5.5.37), (5.5.41) und (5.5.42) sind \check{H}_S , $\check{\mathbf{G}}_S$ und $(\mathbf{F}_S)'_S \mathbf{H}$ eindeutig durch \mathbf{B}_S , grad \mathbf{B}_S und \mathbf{L}_S bestimmt. Ist φ^C ein isotroper Festkörper φ^S , dann nimmt (5.5.3) folgende Form an:

$$\mathcal{R}\left(\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{i}, \operatorname{grad} \rho^{i}, \mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i}, \mathbf{x}_{i}^{\prime}, (\mathbf{F}_{i})_{i}^{\prime}\right) = \\ = \mathcal{R}\left(\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{i}, \operatorname{grad} \rho^{i}, \mathbf{F}_{1}, \dots, \mathbf{B}_{c}, \dots, \mathbf{F}_{k}, \operatorname{Grad}_{1} \mathbf{F}_{1}, \dots, (5.5.43)\right) \\ \dots, \operatorname{grad} \mathbf{B}_{c}, \dots, \operatorname{Grad}_{k} \mathbf{F}_{k}, \mathbf{x}_{i}^{\prime}, (\mathbf{F}_{1})_{1}^{\prime}, \dots, \mathbf{L}_{c}, \dots, (\mathbf{F}_{k})_{k}^{\prime}\right).$$

In (5.5.43) wurde $\hat{\rho}^C \neq 0$ vorausgesetzt. Für $\hat{\rho}^C = 0$ sind auf der linken und rechten Seite von (5.5.41) die Variablen ρ^C und grad ρ^C zu streichen, vgl. (5.3.10), so daß die rechte Seite von (5.5.41) im Gegensatz zu Fluiden, vgl. (5.5.12) und (5.5.24), abhängig davon ist, ob $\hat{\rho}^C \neq 0$ oder $\hat{\rho}^C = 0$.

Für den Fall, daß der isotrope Festkörper elastisch-plastische Deformationseigenschaften aufweist, können die vorangegangenen Überlegungen getrennt auf die elastischen und plastischen Deformationsanteile übertragen werden. Mit (5.4.8) und (5.4.9) ist die Vorschrift (5.5.3) zunächst folgendermaßen zu modifizieren:

$$\mathcal{R}(\dots, \mathbf{F}_{c}, \operatorname{Grad} \mathbf{F}_{c}, \dots) = \mathcal{R}(\dots, \check{\mathbf{H}}_{c}, \check{\mathbf{G}}_{c}, \dots) \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathcal{R}(\dots, \mathbf{F}_{ce}, \mathbf{F}_{cp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{ce}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{cp}, \dots) = \mathcal{R}(\dots, \check{\mathbf{H}}_{ce}, \check{\mathbf{H}}_{cp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{ce}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{cp}, \dots).$$
(5.5.44)

Entsprechend der multiplikativen Zerlegung (5.4.1) muß für φ^S gefordert werden, daß

$$(\check{\mathbf{H}}_{S}, \check{\mathbf{G}}_{S}) = (\check{\mathbf{H}}_{Se}, \check{\mathbf{G}}_{Se}) \circ (\check{\mathbf{H}}_{Sp}, \check{\mathbf{G}}_{Sp}).$$
(5.5.45)

And errseits gilt mit (5.4.1), (5.5.4) und (5.5.8)

$$(\check{\mathbf{H}}_{S}, \check{\mathbf{G}}_{S}) = (\mathbf{F}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}) \circ (\mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}) \circ (\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{O}}).$$
(5.5.46)

Im Abschnitt 5.4 wurde bereits bemerkt, daß die multiplikative Zerlegung der Deformationen nur bis auf ein Paar $(\widehat{\mathbf{Q}}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \in \mathcal{O}_l$ bestimmbar ist. Alternativ zu (5.5.46) kann daher gesetzt werden:

$$(\check{\mathbf{H}}_{S}, \check{\mathbf{G}}_{S}) = (\mathbf{F}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}) \circ (\widehat{\mathbf{Q}}^{T}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \circ (\widehat{\mathbf{Q}}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \circ (\mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}) \circ (\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{O}}).$$
(5.5.47)

Im Vergleich von (5.5.45) und (5.5.47) ist folgende Definition zulässig:

$$(\check{\mathbf{H}}_{Se}, \overset{3}{\check{\mathbf{G}}}_{Se}) = (\mathbf{F}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}) \circ (\widehat{\mathbf{H}}, \overset{3}{\mathbf{O}}),$$

$$(\check{\mathbf{H}}_{Sp}, \overset{3}{\check{\mathbf{G}}}_{Sp}) = (\widehat{\mathbf{H}}^{T}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \circ (\mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}) \circ (\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{O}}).$$

$$(5.5.48)$$

Wählt man in $(5.5.48)_1$ im Sinne aufeinander folgender Paare

$$(\widehat{\mathbf{H}}, \overset{3}{\mathbf{O}}) = (\mathbf{R}_{Se}^{T}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \in \mathcal{O}_{l}, \qquad (5.5.49)$$

so folgt entsprechend (5.5.41)

$$\dot{\mathbf{H}}_{Se} = (\mathbf{B}_{Se})^{1/2},
\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} = \{ [\overset{3}{\mathbf{M}}_{e} (\mathbf{B}_{Se})^{1/2}]^{\underline{3}}^{\underline{2}}^{T} (\mathbf{B}_{Se})^{1/2} \}^{\underline{3}}^{\underline{2}}^{T}.$$
(5.5.50)

Die Größe $\overset{3}{\mathbf{M}_{e}}$ ist darin analog zu (5.5.37) bestimmt. Damit sind die Variablen \mathbf{F}_{Se} und $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}$ durch die Variablen \mathbf{B}_{Se} und

$$\overset{3}{\mathbf{B}}_{Se} = \operatorname{grad} \mathbf{B}_{Se} \tag{5.5.51}$$

zu ersetzen, wobei $\overset{3}{\mathbf{B}}_{Se}$ nur im Falle homogener Deformationen als Gradientenfeld zu verstehen ist. Wählt man andererseits in $(5.5.48)_2$ im Sinne aufeinander folgender Paare

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{O}}) = (\mathbf{R}_{Sp}^{T}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \in \mathcal{O}_{l},$$

$$(\widehat{\mathbf{H}}, \overset{3}{\mathbf{O}}) = (\mathbf{I}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \in \mathcal{O}_{l},$$
(5.5.52)

so folgt

$$(\check{\mathbf{H}}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}) = (\widetilde{\mathbf{H}}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}),$$

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{Sp} = \widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{1/2},$$

$$\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} = \{ [\overset{3}{\widehat{\mathbf{M}}}_{p} (\widehat{\mathbf{B}}_{Sp})^{1/2}]^{\underline{3}^{23}} (\widehat{\mathbf{B}}_{Sp})^{1/2} \}^{\underline{3}^{23}}.$$

$$(5.5.53)$$

Die Größe $\widehat{\widehat{\mathbf{M}}}_{p}^{3}$ ist darin analog zu (5.5.37) durch

$$\widehat{\widehat{\mathbf{M}}}_{p} = \frac{1}{2} \{ (\widehat{\widehat{\mathbf{B}}}_{Sp}^{23} \, \widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{-1})^{\underline{3}} + (\widehat{\widehat{\mathbf{B}}}_{Sp}^{-1} \, \widehat{\widehat{\mathbf{B}}}_{Sp})^{\underline{3}T} + [(\widehat{\widehat{\mathbf{B}}}_{Sp}^{-1} \, \widehat{\mathbf{B}}_{Sp})^{\underline{3}T}]^{\underline{12}} \}$$
(5.5.54)

mit

$$\widehat{\widehat{\mathbf{B}}}_{Sp}^{3} = \operatorname{grad}_{Sz} \widehat{\mathbf{B}}_{Sp},$$

$$\widehat{\widehat{\mathbf{B}}}_{Sp}^{-1} = \operatorname{grad}_{Sz} \widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{-1}$$

$$(5.5.55)$$

bestimmt. Den Charakter von Gradientenfeldern besitzen die Ausdrücke (5.5.55) wiederum nur für den Fall homogener Deformationen. Daß $\hat{\mathbf{B}}_{Sp}^{-1}$ inverses Element zu $\hat{\mathbf{B}}_{Sp}$ ist, kann mit den üblichen Rechenregeln und der Identität (A.1.26) leicht festgestellt werden:

$$\widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{-1} = -\left[\widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{-1} \left(\widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{23} \, \widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{-1} \right)^{\underline{3}} \widehat{\mathbf{B}}_{Sp}^{-1}\right]^{\underline{3}}.$$
(5.5.56)

Die vorangegangenen Überlegungen zeigen, daß $\check{\mathbf{H}}_{Sp}$ und $\check{\mathbf{G}}_{Sp}$ eindeutig als Funktionen von $\widehat{\mathbf{B}}_{Sp}$ und $\overset{3}{\widehat{\mathbf{B}}}_{Sp}$ dargestellt werden können.

Alternativ zu (5.5.52) kann im Sinne aufeinander folgender Paare jedoch auch

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{O}}) = (\mathbf{R}_{S}^{T}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \in \mathcal{O}_{l},$$

$$(\widehat{\mathbf{H}}, \overset{3}{\mathbf{O}}) = (\mathbf{R}_{Se}^{T}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \in \mathcal{O}_{l}$$

$$(5.5.57)$$

gewählt werden, so daß mit $(5.5.48)_2$

$$(\check{\mathbf{H}}_{Sp}, \check{\mathbf{G}}_{Sp}) = (\mathbf{R}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \circ (\mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}) \circ (\mathbf{R}_{S}^{T}, \overset{3}{\mathbf{O}})$$
(5.5.58)

und daraus mit (5.5.53)

$$(\check{\mathbf{H}}_{Sp}, \check{\mathbf{G}}_{Sp}) = (\mathbf{R}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \circ (\widetilde{\mathbf{H}}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}) \circ (\mathbf{R}_{Se}^{T}, \overset{3}{\mathbf{O}}),$$

$$\check{\mathbf{H}}_{Sp} = \mathbf{R}_{Se} \widetilde{\mathbf{H}}_{Sp} \mathbf{R}_{Se}^{T},$$

$$\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} = \{\mathbf{R}_{Se}[(\overset{3}{\widetilde{\mathbf{G}}}_{Sp} \mathbf{R}_{Se}^{T})^{\underline{3}\overset{23}{T}} \mathbf{R}_{Se}^{T}]^{\underline{3}\overset{23}{T}}\}^{\underline{3}}.$$
(5.5.59)

Dieses Ergebnis entspricht einer Vorrotation von $\widetilde{\mathbf{H}}_{Sp}$ und $\widetilde{\mathbf{G}}_{Sp}$ aus der plastischen Zwischenkonfiguration in die aktuelle Konfiguration. Da die elastische Rotation jedoch letztendlich ohne Einfluß auf den plastischen Deformationsprozeß bleibt (die elastische Rotation kann mit Hilfe des Prinzips der materiellen Objektivität eliminiert werden, vgl. (5.6.7) und (5.6.11)), muß

$$(\check{\mathbf{H}}_{Sp}, \overset{3}{\check{\mathbf{G}}}_{Sp}) = (\widetilde{\mathbf{H}}_{Sp}, \overset{3}{\check{\mathbf{G}}}_{Sp}), \qquad (5.5.60)$$

vgl. (5.5.53), als Lösung des Problems verstanden werden, so daß (5.5.44) in

$$\mathcal{R}(\dots, \mathbf{F}_{ce}, \mathbf{F}_{cp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{ce}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{cp}, \dots) = \mathcal{R}(\dots, \mathbf{B}_{ce}, \widehat{\mathbf{B}}_{cp}, \overset{3}{\mathbf{B}}_{ce}, \overset{3}{\mathbf{B}}_{cp}, \dots)$$
(5.5.61)

übergeht.

Viskoelastische und viskoplastische Festkörperskelette sollen im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht untersucht werden. In diesem Fall entfällt die Größe

$$(\mathbf{F}_S)'_S = [(\mathbf{A}_{Se})^{\Delta} + (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} + \mathbf{W}_S] \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp}, \qquad (5.5.62)$$

vgl. (5.4.39), als konstituierende Variable, so daß an dieser Stelle auf eine Modifikation von (5.5.62) mit Hilfe der Symmetriegruppe S verzichtet werden kann.

5.6 Materielle Objektivität

Das Prinzip der materiellen Objektivität ist in der Literatur in zwei verschiedenen Formen bekannt, vgl. Truesdell & Toupin [1960, Abschnitt 293] sowie Truesdell & Noll [1965, Abschnitt 19A]. Bezüglich der ersten Form, auch als Hooke-Poisson-Cauchy-Form bekannt, wird verlangt, daß alle konstitutiven Gleichungen unabhängig sein müssen von einer der aktuellen Konfiguration des Körpers überlagerten Starrkörperrotation. In der zweiten Form, auch als Zaremba-Jaumann-Form bekannt, wird zugelassen, daß der Beobachter eines Phänomens seinen Standort wechselt. Die zweite Fassung des Prinzips der materiellen Objektivität ist etwas restriktiver als die erste, da in der ersten Form lediglich eine eigentlich orthogonale Transformation des Körpers zugelassen wird, während in der zweiten Form prinzipiell auch eine uneigentliche Transformation des Bezugssystems des Beobachters möglich ist. Damit erfüllt eine konstitutive Gleichung, die der Zaremba-Jaumann-Form genügt, automatisch auch die Hooke-Poisson-Cauchy-Form, jedoch nicht umgekehrt. Es läßt sich allerdings feststellen, daß die Unterschiede zwischen beiden Fassungen des Objektivitätsprinzips ohne Auswirkungen auf die Form konstitutiver Gleichungen bleiben. Daher soll im folgenden entsprechend dem Vorgehen von de Boer & Ehlers [1986b, Abschnitt 4.4] von der ersten Fassung des Objektivitätsprinzips ausgegangen werden.

Für eine Bewegungsfunktion $\chi_i^*(\mathbf{X}_i, t)$, die sich von einer Bewegung gemäß (4.2.1) durch eine überlagerte Starrkörperbewegung unterscheidet, gilt:

$${}^{*}_{\boldsymbol{\chi}_{i}}(\mathbf{X}_{i}, t) = {}^{*}_{\mathbf{c}}(t) + \mathbf{Q}(t) \left[\boldsymbol{\chi}_{i}(\mathbf{X}_{i}, t) - \mathbf{c}(t) \right].$$
(5.6.1)

Darin sind $\mathbf{Q}(t)$ ein feldunabhängiger, eigentlich orthogonaler Tensor und $\mathbf{c}(t)$ sowie $\mathbf{\hat{c}}(t)$ feldunabhängige Vektoren, die als Ortsvektoren körperfester Bezugspunkte der aktuellen Konfiguration bzw. der mit einer Starrköperrotation überlagerten aktuellen Konfiguration aufgefaßt werden können. Die Zeiten t und t sind durch eine Zeitschiftung miteinander verbunden:

$$\hat{t} = t + a, \qquad a = \text{konst.}$$
 (5.6.2)

Durch eine Starrkörperrotation bleibt der Wert einer skalaren Größe α unverändert, d. h.:

$$\stackrel{*}{\alpha} = \alpha \,. \tag{5.6.3}$$

Ist $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ein beliebiger körperfester Vektor, so gilt entsprechend (5.6.3)

$$\overset{*}{\mathbf{a}} \cdot (\overset{*}{\mathbf{x}} - \overset{*}{\mathbf{c}}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}), \qquad (5.6.4)$$

woraus mit (5.6.1) direkt auf

$$\overset{*}{\mathbf{a}} = \mathbf{Q}\mathbf{a} \tag{5.6.5}$$

geschlossen werden kann. Entsprechend gilt für einen beliebigen Tensor $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$

$$\overset{*}{\mathbf{A}}\overset{*}{\mathbf{a}} = \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{a}), \qquad (5.6.6)$$

so daß

$$\overset{*}{\mathbf{A}} = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T \,. \tag{5.6.7}$$

Größen der aktuellen Konfiguration, die bei überlagerter Starrkörperrotation ein Transformationsverhalten gemäß (5.6.3), (5.6.5) bzw. (5.6.7) aufweisen, werden als objektive Größen verstanden.

Mit den Beziehungen (5.6.6) und (5.6.7) können objektive Tensoren höherer Stufe definiert werden.

Ist $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ ein beliebiger Tensor 3. Stufe, so gilt

$$\overset{*}{\overset{3}{\mathbf{B}}} \overset{*}{\mathbf{A}} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \overset{3}{\mathbf{B}} \mathbf{A} \end{pmatrix}$$
 (5.6.8)

bzw.

$$\overset{*}{\overset{3}{\mathbf{B}}} (\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^{T}) = \mathbf{Q} (\overset{3}{\overset{3}{\mathbf{B}}} \mathbf{A}).$$
(5.6.9)

Mit den Identitäten (A.1.37) und (A.1.38) folgt daraus zunächst

$$[(\overset{3}{\mathbf{B}}\mathbf{Q})^{\underline{3}\overset{23}{T}}\mathbf{Q}]^{\underline{3}\overset{23}{T}} = (\mathbf{Q}\overset{3}{\mathbf{B}})^{\underline{3}}, \qquad (5.6.10)$$

woraus mit $\left(\mathrm{A.1.28}\right)$, $\left(\mathrm{A.1.30}\right)$ und $\left(\mathrm{A.1.36}\right)$ auf

$$\overset{*}{\mathbf{B}} = \{ [(\mathbf{Q} \overset{3}{\mathbf{B}})^{\underline{3}} \mathbf{Q}^{T}]^{\underline{3}} \overset{23}{T} \mathbf{Q}^{T} \}^{\underline{3}} \overset{23}{T}$$
 (5.6.11)

geschlossen werden kann.

Ist $\overset{4}{\mathbf{B}}(\mathbf{x},t)$ ein beliebiger Tensor 4. Stufe, so gilt

$$\overset{*}{\overset{4}{\mathbf{B}}}\overset{*}{\mathbf{A}} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \overset{4}{\mathbf{B}} \mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{T}.$$
(5.6.12)

Daraus folgt mit den Regeln (A.1.3) und (A.1.8):

$$\overset{*}{\overset{4}{\mathbf{B}}} = (\mathbf{Q}^T \otimes \mathbf{Q}^T)^T \overset{*}{\overset{4}{\mathbf{B}}} (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q})^T.$$
(5.6.13)

Mit (5.6.1) kann das Transformationsverhalten kinematischer Größen bei überlagerter Starrkörperrotation leicht bestimmt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{\ddot{x}} &= \mathbf{\ddot{c}} + \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) , \\ \mathbf{\ddot{x}}_{i} &= \mathbf{\ddot{c}} + \mathbf{Q}(\mathbf{\dot{x}}_{i} - \mathbf{\dot{c}}) + \mathbf{\dot{Q}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) , \\ \mathbf{\ddot{x}}_{i} &= \mathbf{\ddot{c}} + \mathbf{Q}(\mathbf{\ddot{x}}_{i} - \mathbf{\ddot{c}}) + 2 \mathbf{\dot{Q}}(\mathbf{\dot{x}}_{i} - \mathbf{\dot{c}}) + \mathbf{\ddot{Q}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) . \end{aligned}$$

$$(5.6.14)$$

Die Feldunabhängigkeit von \mathbf{Q} , $\overset{*}{\mathbf{c}}$ und \mathbf{c} bedingt, daß die Ableitungen $(\dots)_i'$ und $(\dots)^{\cdot}$ dieser Größen identisch sind, vgl. (4.2.8) - (4.2.10). Ferner gilt:

$$\hat{\mathbf{F}}_{i} = \mathbf{Q} \mathbf{F}_{i},$$

$$\hat{\mathbf{L}}_{i} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{T} + \mathbf{Q} \mathbf{L}_{i} \mathbf{Q}^{T}$$

$$(5.6.15)$$

und

$$\hat{\mathbf{D}}_i = \mathbf{Q} \mathbf{D}_i \mathbf{Q}^T$$
, $\hat{\mathbf{W}}_i = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \mathbf{W}_i \mathbf{Q}^T$. (5.6.16)

Für Gradienten von objektiven Skalar-, Vektor- und Tensorfeldern ergibt sich mit $(5.6.3),\,(5.6.5)$, (5.6.7) und (5.6.11):

$$(\operatorname{grad}^{*} \alpha)^{*} = \mathbf{Q} \operatorname{grad} \alpha,$$

$$(\operatorname{grad}^{*} \alpha)^{*} = \mathbf{Q} (\operatorname{grad} \mathbf{a}) \mathbf{Q}^{T},$$

$$(\operatorname{grad}^{*} A)^{*} = \{ [(\mathbf{Q} \operatorname{grad} \mathbf{A})^{\underline{3}} \mathbf{Q}^{T}]^{\underline{3}} \mathbf{Q}^{T} \}^{\underline{3}} \mathbf{Q}^{T} \}^{\underline{3}} \mathbf{Q}^{T}.$$
(5.6.17)

Die Beziehung $(5.6.17)_3$ kann einerseits direkt aus (5.6.11) geschlossen werden; andererseits läßt sie sich bei Ausnutzung von (A.1.9), (A.1.30), (A.2.4) und (A.3.6) leicht bestätigen.

Für die ersten und zweiten Deformationsgradienten von Materialien zweiten Grades kann das Transformationsverhalten bei überlagerter Starrkörperrotation auch mit Hilfe der linearen Gruppe \mathcal{L} , vgl. Anhang B.1, angegeben werden. Die Starrkörperrotation ist dabei als eine dem Paar (\mathbf{F}_i , Grad_i \mathbf{F}_i) nachgeschaltete Transformation ($\mathbf{Q}, \overset{3}{\mathbf{O}}$) $\in \mathcal{O}_l$ aufzufassen, d. h.:

$$(\overset{*}{\mathbf{F}}_{i}, \operatorname{Grad}_{i}\overset{*}{\mathbf{F}}_{i}) = (\mathbf{Q}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \circ (\mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i}\mathbf{F}_{i})$$
 (5.6.18)

mit

$$\hat{\mathbf{F}}_{i} = \mathbf{Q} \mathbf{F}_{i},$$

$$\operatorname{Grad}_{i} \overset{*}{\mathbf{F}}_{i} = (\mathbf{Q} \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i})^{\underline{3}}.$$
(5.6.19)

Für elastisch-plastische φ^S gilt mit (5.4.2):

$$(\mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}) = (\mathbf{Q}, \mathbf{O}) \circ (\mathbf{F}_{Se}, \mathbf{G}_{Se}) \circ (\mathbf{F}_{Sp}, \mathbf{G}_{Sp}).$$
 (5.6.20)

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 5.4, vgl. (5.4.40) - (5.4.43), können $\mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}$ durch $\overline{\mathbf{F}}_{Se}, \overline{\mathbf{F}}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}$ ersetzt werden, so daß auf

$$(\overset{*}{\mathbf{F}}_{S}, \operatorname{Grad}_{S}\overset{*}{\mathbf{F}}_{S}) = (\overset{*}{\mathbf{F}}_{Se}, \overset{*}{\mathbf{G}}_{Se}) \circ (\overset{*}{\mathbf{F}}_{Sp}, \overset{*}{\mathbf{G}}_{Sp})$$
(5.6.21)

mit

$$\overset{*}{\mathbf{F}}_{Se} = \mathbf{Q} \mathbf{F}_{Se} \widehat{\mathbf{Q}}^{T}, \qquad \overset{*}{\mathbf{F}}_{Sp} = \widehat{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{Sp},$$

$$\overset{*}{\mathbf{G}}_{Se} = \{ [(\mathbf{Q} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se})^{\underline{3}} \widehat{\mathbf{Q}}^{T}]^{\underline{3}} \overset{23}{T} \widehat{\mathbf{Q}}^{T} \}^{\underline{3}} \overset{23}{T}^{T}, \qquad (5.6.22)$$

$$\overset{*}{\mathbf{G}}_{Sp} = (\widehat{\mathbf{Q}} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp})^{\underline{3}}$$

geschlossen werden kann. Zur Herleitung von (5.6.22) sind die Definitionen (B.1.4) und (B.1.5) und die Identitäten (A.1.31) und (A.1.32) heranzuziehen. Die Transformation $(\hat{\mathbf{Q}}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \in \mathcal{O}_l$ kann als Starrkörperrotation der plastischen Zwischenkonfiguration verstanden werden.

Mit (5.6.15), (5.6.16) und (5.6.22) läßt sich das Transformationsverhalten der verschiedenen Verzerrungstensoren nach Tafel 5.1 und Deformationsgeschwindigkeiten nach Tafel 5.2 bei überlagerter Starrkörperrotation angeben, vgl. Tafel 5.3.



Tafel 5.3: Verzerrungstensoren und Deformationsgeschwindigkeiten bei überlagerter Starrkörperbewegung.

Für die Partialspannungen gilt mit (5.6.5)

$$(\mathbf{T}^{i} \,\mathrm{d}\mathbf{a})^{*} = \mathbf{Q} \,(\mathbf{T}^{i} \,\mathrm{d}\mathbf{a}) \quad , \quad \mathrm{d}^{*}_{\mathbf{a}} = \mathbf{Q} \,\mathrm{d}\mathbf{a} \,, \qquad (5.6.23)$$

so daß

$$\overset{*}{\mathbf{T}^{i}} = \mathbf{Q} \mathbf{T}^{i} \mathbf{Q}^{T} . \tag{5.6.24}$$

Entsprechend gilt für die Tensoren der chemischen Potentiale, vgl. z. B. $(5.2.11)_3$:

$$\mathbf{\overset{*}{K}}^{i} = \mathbf{Q}\mathbf{K}^{i}\mathbf{Q}^{T} \quad , \quad \mathbf{K}^{i} = \psi^{i}\mathbf{I} - \frac{1}{\rho^{i}}\mathbf{T}^{Ti} .$$
 (5.6.25)

Mit (5.6.24) kann auch das Transformationsverhalten des gewichteten partialen Spannungstensors (*Kirchhoff* scher Spannungstensor) angegeben werden. Der *Kirchhoff* sche Spannungstensor

$$\boldsymbol{\tau}^{i} = \det \mathbf{F}_{i} \mathbf{T}^{i} \qquad (5.6.26)$$

hat gegenüber den Cauchy-Spannungen den Vorteil, daß sein Transformationsverhalten mit demjenigen der verschiedenen Verzerrungstensoren entsprechend Tafel 5.1 vergleichbar ist. So gilt z. B. für elastisch-plastische φ^S :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} &= \mathbf{F}_{Sp} \, \mathbf{S}^{S} \, \mathbf{F}_{Sp}^{T}, \\ \mathbf{\tau}^{S} &= \mathbf{F}_{Se} \, \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} \, \mathbf{F}_{Se}^{T}. \end{aligned} (5.6.27)$$

Darin sind \mathbf{S}^{S} der 2. *Piola-Kirchhoff* sche Spannungstensor der Referenzkonfiguration von φ^{S} und $\hat{\boldsymbol{\tau}}^{S}$ der Kirchhoff sche Spannungstensor der Zwischenkonfiguration von φ^{S} . Im Gegensatz zum Transformationsverhalten der Verzerrungstensoren (kontravarianter Transport) ist das Transformationsverhalten der Spannungstensoren durch einen kovarianten Transport gekennzeichnet. Bei überlagerter Starrkörperrotation folgt mit $(5.6.22)_1$:

$$\hat{\mathbf{S}}^{s} = \mathbf{S}^{s},$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{s} = \hat{\mathbf{Q}} \, \hat{\boldsymbol{\tau}}^{s} \, \hat{\mathbf{Q}}^{T},$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{s} = \mathbf{Q} \, \boldsymbol{\tau}^{s} \mathbf{Q}^{T}.$$

$$(5.6.28)$$

Schließlich ist das Transformationsverhalten der Energiezuflußvektoren \mathbf{q}^i und \mathbf{h}^i sowie der Ausdrücke $\hat{\mathbf{p}}^i$ und $\hat{\mathbf{s}}^i$ für den Bewegungsgrößenzuwachs zu untersuchen. Es gilt

$$(\mathbf{q}^i \cdot \mathrm{d}\mathbf{a})^* = \mathbf{q}^i \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}, \qquad (5.6.29)$$

so daß

$$\overset{*}{\mathbf{q}}^{i} = \mathbf{Q} \, \mathbf{q}^{i} \tag{5.6.30}$$

und daraus mit (4.2.6), $(5.2.11)_4$ und $(5.6.14)_2$

$$\overset{*}{\mathbf{h}^{i}} = \mathbf{Q} \mathbf{h}^{i}. \tag{5.6.31}$$

Aus

$$\overset{*}{\hat{\mathbf{p}}^{i}} = \mathbf{Q}\,\hat{\mathbf{p}}^{i} \tag{5.6.32}$$

erhält man mit $(5.2.11)_6$ und $(5.6.14)_2$:

$$\hat{\hat{\mathbf{s}}}^{*} = \mathbf{Q}\,\hat{\mathbf{s}}^{i} + \hat{\rho}^{i}\left[\dot{\mathbf{c}} - \mathbf{Q}\,\dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}}\,(\mathbf{x} - \mathbf{c})\right].$$
(5.6.33)

Das Transformationsverhalten der verschiedenen Größen bei überlagerter Starrkörperrotation ist Grundlage zur Auswertung des Prinzips der materiellen Objektivität. Da sich der Wert der Auswirkungsfunktionen \mathcal{R} in Abhängigkeit des Variablensatzes \mathcal{A} durch eine überlagerte Starrkörperrotation nicht ändern soll, ist

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \mathcal{R}(\hat{\mathcal{S}}) \tag{5.6.34}$$

zu fordern. Die Beziehung (5.6.34) beinhaltet, daß es ohne Auswirkung bleiben muß, ob einerseits die in Abhängigkeit der Variablen s gebildeten Auswirkungsfunktionen mit einer Starrkörperrotation überlagert werden oder ob andererseits zunächst die aktuelle Konfiguration mit einer Starrkörperrotation überlagert wird, so daß die Variablen s in $\overset{*}{s}$ übergehen, und anschließend die Auswirkungsfunktionen in der überlagerten Konfiguration bestimmt werden.

Die Bedeutung des Prinzips, das natürlich in Abhängigkeit der jeweiligen Mengen \mathcal{R} und \mathfrak{s} zu Ergebnissen führt, die auf das jeweils untersuchte Modell eines porösen Mediums zugeschnitten sind, soll am Beispiel eines allgemeinen porösen Mediums mit \mathcal{R} entsprechend (5.2.9) und \mathfrak{s} entsprechend (5.3.1) veranschaulicht werden. Für die linke Seite von (5.6.34) gilt

$$(\psi^{*}_{i}, \eta^{*}_{i}, \mathbf{T}^{i}_{i}, \mathbf{q}^{*}_{i}, \hat{\rho}^{i}_{i}, \hat{\mathbf{p}}^{i}_{i}, \hat{\mathbf{e}}^{i}_{i}, \dot{n}^{*}_{i}) = \mathcal{R}(\mathcal{S}).$$
 (5.6.35)

Für die rechte Seite von (5.6.34) gilt entsprechend

$$(\psi^{*}, \eta^{i}, \mathbf{T}^{i}, \mathbf{q}^{i}, \hat{\rho}^{i}, \hat{p}^{i}, \hat{p}^{i}, \hat{e}^{i}, \dot{n}^{i}_{i}) = \mathcal{R}(\mathbf{s}),$$
 (5.6.36)

so daß mit den vorangegangenen Beziehungen auf

$$(\psi^{i}, \eta^{i}, \mathbf{Q} \mathbf{T}^{i} \mathbf{Q}^{T}, \mathbf{Q} \mathbf{q}^{i}, \hat{\rho}^{i}, \mathbf{Q} \hat{\mathbf{p}}^{i}, \hat{e}^{i}, n_{i}^{i}) =$$

$$= \mathcal{R} \left[\theta^{i}, \mathbf{Q} \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \mathbf{Q} \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{i}, \mathbf{Q} \operatorname{grad} \rho^{i}, \mathbf{Q} \mathbf{F}_{i}, (\mathbf{Q} \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i})^{\underline{3}}, \qquad (5.6.37) \right]$$

$$\overset{*}{\dot{\mathbf{c}}} + \mathbf{Q} \left(\mathbf{x}_{i} - \dot{\mathbf{c}} \right) + \dot{\mathbf{Q}} \left(\mathbf{x} - \mathbf{c} \right), \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{i} + \mathbf{Q} \left(\mathbf{F}_{i} \right)_{i}^{\prime} \right]$$

geschlossen werden kann. Dabei muß (5.6.37) für jede zulässige Wahl von $\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \dot{\mathbf{c}}, \dot{\mathbf{c}}$ und * $\dot{\mathbf{c}}$ erfüllt sein. Für andere Materialmodelle ist analog zu verfahren.

5.7 Zusammenstellung der Ergebnisse

In Kapitel 5, Grundlagen der konstitutiven Theorie, wurden alle Voraussetzungen behandelt, die zur Entwicklung thermodynamischer Restriktionen und zulässiger konstitutiver Gleichungen für poröse Medien erforderlich sind. Diese Voraussetzungen führen natürlich je nach zu beschreibendem Materialmodell zu unterschiedlichen Ergebnissen; und zwar sowohl für die Menge \mathcal{R} der zu bestimmenden Auswirkungsfunktionen als auch für die jeweilige Menge \mathcal{S} der unabhängigen thermodynamischen Prozeßvariablen. Da prinzipiell eine nahezu unendliche Kombinationsvielfalt bei der Definition spezieller poröser Medien besteht, muß die Zusammenstellung der Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels auf einige exemplarisch ausgewählte Beispiele beschränkt bleiben. Die Auswirkungen des Prinzips der materiellen Objektivität sollen dabei zunächst nicht berücksichtigt werden; die Einflüsse dieses Prinzips werden in Kapitel 6 bei der Beschreibung eines flüssigkeitsgesättigten, elastisch-plastisch deformierbaren, inkompressiblen porösen Körpers diskutiert.

Beispiel 1

Kompressibler Festkörper, k-1 kompressible, viskose Fluide:

In Beispiel 1 wird zunächst von einem nichtviskosen, elastischen Festkörper $\varphi^1 = \varphi^S$ ausgegangen, der mit k - 1 kompressiblen, viskosen Fluiden gesättigt ist. Zwischen den Fluiden werden Massenaustauschprozesse zugelassen. Zusätzlich seien k Temperaturfunktionen θ^i möglich. Die thermodynamischen Restriktionen dieses Modells sind auf der Basis der Entropieungleichung (5.2.4) zu bestimmen. Die Menge \mathcal{R} der erforderlichen Auswirkungsfunktionen folgt aus (5.2.9), so daß mit (5.2.11) und (5.2.15) auf

$$(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{Ti}, \mathbf{q}^{i}, \hat{\rho}^{a}, \hat{\mathbf{p}}^{i}, \hat{e}^{i}, \dot{n}_{i}^{i}) = \mathcal{R}(\mathfrak{s}_{1})$$

mit $i = 1, ..., k$,
 $a = 2, ..., k$ (5.7.1)

geschlossen werden kann. Die Zwangsbedingungen (5.2.3) und (5.2.10) sind zu beachten.

Der Grundvariablensatz (5.3.1) ist in Hinblick auf das vorliegende Beispiel zu modifizieren. Wegen $\hat{\rho}^S = 0$ folgt zunächst, vgl. (5.3.10):

$$s = \left\{ \theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{a}, \operatorname{grad} \rho^{a}, \mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i}, \mathbf{x}_{i}, (\mathbf{F}_{a})_{a}^{\prime} \right\}$$

mit $i = 1, \dots, k$,
 $a = 2, \dots, k$. (5.7.2)

Das nichtviskose Festkörperskelett bedingt, daß $(\mathbf{F}_S)'_S$ als Prozeßvariable entfällt. Mit Hilfe der Isotropiegruppe für Fluide zweiten Grades geht (5.7.2) bei Beachtung von (5.5.12) in

$$s \to s_1 = \{\theta^i, \operatorname{grad} \theta^i, n^a, \operatorname{grad} n^a, \rho^a, \operatorname{grad} \rho^a, \mathbf{F}_S, \operatorname{Grad}_S \mathbf{F}_S, \mathbf{x}_i, \mathbf{L}_a\}$$

mit $i = 1, \dots, k$,
 $a = 2, \dots, k$ (5.7.3)

über. Mit (5.7.1) und (5.7.3) sind die Grundlagen der konstitutiven Theorie für den allgemeinen Fall des Beispiels 1 festgelegt. Zum Vergleich von (5.7.1) und (5.7.3) mit in der Literatur dokumentierten Ergebnissen soll das diskutierte Beispiel modifiziert werden.

Modifikation 1: Fluide ohne Massenaustauschprozesse

Für diesen Fall reduziert sich (5.7.1) auf

$$(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{Ti}, \mathbf{q}^{i}, \hat{\mathbf{p}}^{i}, \hat{e}^{i}, \dot{n}_{i}^{i}) = \mathcal{R}(\mathfrak{z}_{3})$$

mit $i = 1, ..., k$. (5.7.4)

Anstelle von (5.7.2) folgt wegen $\hat{\rho}^i = 0$, vgl. (5.3.11),

$$s_{2} = \{\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i}, \mathbf{x}_{i}, (\mathbf{F}_{a})_{a}'\}$$

mit $i = 1, ..., k$,
 $a = 2, ..., k$,
(5.7.5)

so daß mit (5.5.24) auf

$$\begin{split}
\mathfrak{S}_{2} \to \mathfrak{S}_{3} &= \{\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{a}, \operatorname{grad} \rho^{a}, \mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}, \mathbf{x}_{i}, \mathbf{L}_{a}\} \\
\text{mit} \quad i = 1, \dots, k , \\
a = 2, \dots, k
\end{split}$$
(5.7.6)

geschlossen werden kann. Wie bereits in Abschnitt 5.5 bemerkt, zeigt ein Vergleich zwischen (5.7.3) und (5.7.6), daß der Einfluß der Isotropiegruppe der Fluidkonstituierenden auf die Menge der Prozeßvariablen unabhängig davon ist, ob $\hat{\rho}^a \neq 0$ oder $\hat{\rho}^a = 0$, siehe dazu auch Cross [1973, THEOREM 12].

Modifikation 2: $\theta^i = \theta$ füri = 1, ..., k

Wird das vorliegende Beispiel in dem Sinne weitermodifiziert, daß für alle Konstituierenden eine gemeinsame Temperatur $\theta^i = \theta$ gefordert wird, dann sind die thermodynamischen Restriktionen auf der Basis der Entropieungleichung (5.2.7) für $\hat{\rho}^i = 0$ zu entwickeln. Zusätzlich ist keine konstitutive Gleichung für \hat{e}^i erforderlich, so daß (5.7.4) mit (5.2.11)₄ in

$$(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{Ti}, \mathbf{h}^{i}, \hat{\mathbf{p}}^{i}, n_{i}^{i}) = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{4})$$

mit $i = 1, ..., k$. (5.7.7)

übergeht. Aus (5.7.6) folgt:

$$\mathfrak{S}_{4} = \{\theta, \operatorname{grad} \theta, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \rho^{a}, \operatorname{grad} \rho^{a}, \mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}, \mathbf{x}_{i}, \mathbf{L}_{a}\}$$
mit $i = 1, ..., k$,
$$a = 2, ..., k$$
.
$$(5.7.8)$$

Bis auf die Tatsache, daß in (5.7.8) durch Einbeziehung von L_a viskose Fluide zugelassen werden, ist der Variablensatz (5.7.8) mit *Bowen* [1984, Gl. (5A.4.2)] identisch und entspricht prinzipiell auch *Bowen* [1982, Gln. (3.1)]. Die Menge $R(\mathfrak{s}_4)$ wurde in den zitierten Arbeiten jedoch bereits in einer durch weitere Überlegungen vereinfachten Form angegeben.

Modifikation 3: "Leeres" Festkörperskelett

Für das leere Festkörperskelett, d.h. wenn entweder ein materiefreier Porenraum vorausgesetzt werden kann oder wenn die mechanische Wirkung der Poreninhaltsstoffe vernachlässigt werden soll, folgt formal aus (5.7.7) und (5.7.8):

$$(\Psi^{S}, \P^{S}, \rho^{S} \mathbf{K}^{TS}, \mathbf{h}^{S}, \boldsymbol{n}^{'S}_{S}) = \mathcal{R}(\mathfrak{A}_{5}),$$

$$\mathfrak{A}_{5} = \{\theta, \operatorname{grad} \theta, n, \operatorname{grad} n, \mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}, \mathbf{x}^{'}_{S}\},$$

$$(5.7.9)$$

worin

$$n = 1 - n^S \tag{5.7.10}$$

die Porosität des Festkörpermaterials angibt. Wegen $(5.2.3)_2$ ist bei Abwesenheit von Poreninhaltsstoffen keine konstitutive Gleichung für den Bewegungsgrößenzuwachs erforderlich.

Es ist trivial zu zeigen, daß die Variablen grad n, $\operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}$ und \mathbf{x}_{S} keinen Einfluß auf die thermodynamischen Restriktionen dieses Modells haben. Da die Entropieungleichung (5.2.7) für das leere Festkörpermaterial außerdem formal in die Entropieungleichung eines Einkomponentenmodells übergeht, vgl. auch (4.5.3) für $\mathbf{\hat{p}}^{S} = \mathbf{0}$, $\hat{\rho}^{S} = 0$ und $\hat{e}^{S} = 0$, kann (5.2.9) mit (5.2.11) und (5.7.10) durch

$$(\Psi^{S}, \eta^{S}, \mathbf{T}^{S}, \mathbf{q}^{S}, \dot{n}_{S}^{S}) = \mathcal{R}(\theta, \operatorname{grad} \theta, n^{S}, \mathbf{F}_{S})$$
(5.7.11)

ersetzt werden. Bei der makroskopischen Beschreibung eines kompressiblen porösen Festkörpers ist demzufolge der Volumenanteil n^S als thermodynamische Prozeßvariable zu berücksichtigen. Zusätzlich ist eine konstitutive Gleichung für die zeitliche Änderung der Volumenanteile erforderlich. Dies sind offensichtliche Unterschiede zum kompressiblen nichtporösen Festkörpermaterial.

Beispiel 2

Inkompressibler Festkörper, k - 1 inkompressible, viskose Flüssigkeiten:

In Analogie zu Beispiel 1 wird zunächst von einem nichtviskosen elastischen Festkörper $\varphi^1 = \varphi^S$ ausgegangen, der mit k - 1 viskosen Flüssigkeiten gesättigt ist. Zwischen den Flüssigkeiten werden Massenaustauschprozesse zugelassen. Zusätzlich seien k Temperaturfunktionen θ^i möglich. Die thermodynamischen Restriktionen dieses Modells sind auf der Basis der Entropieungleichung (5.2.5) zu bestimmen. Die Menge \mathcal{R} der erforderlichen

Auswirkungsfunktionen folgt aus (5.2.9), (5.2.11) und (5.2.15), wobei jedoch zu beachten ist, daß wegen des inkompressiblen Modells nur die sogenannten Extraspannungen \mathbf{T}_{C}^{i} und Extrazuwächse $\hat{\mathbf{p}}_{C}^{i}$ durch eine konstitutive Gleichung bestimmt sind, vgl. (5.2.13). Für das vorliegende Modell folgt mit (4.5.11):

$$(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{Ti} - \theta^{i} \lambda n^{i} \mathbf{I}, \mathbf{q}^{i}, \hat{\rho}^{a}, \hat{\mathbf{p}}^{i} - \theta^{i} \lambda \operatorname{grad} n^{i}, \hat{e}^{i}) = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{2})$$

mit $i = 1, ..., k$,
 $a = 2, ..., k$.
(5.7.12)

Die Zwangsbedingungen (5.2.3) sind zu beachten.

Der Grundvariablensatz (5.3.1) ist wegen $\hat{\rho}^{S} = 0$ und $\rho^{iR} = \text{konst. zu modifizieren. Die Inkompressibilitätseigenschaft der Mischung liefert zunächst, vgl. (5.3.14):$

$$s = \{\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i}, \mathbf{x}_{i}, (\mathbf{F}_{a})_{a}'\}$$

mit $i = 1, ..., k$,
 $a = 2, ..., k$. (5.7.13)

Ebenso wie in (5.7.2) bedingt das nichtviskose Festkörpermaterial auch hier, daß $(\mathbf{F}_S)'_S$ als Prozeßvariable entfällt. Mit Hilfe der Symmetriegruppe für Fluide zweiten Grades, vgl. (5.5.12), folgt aus (5.7.13):

$$s \to s_1 = \{ \theta^i, \operatorname{grad} \theta^i, n^a, \operatorname{grad} n^a, \mathbf{F}_S, \operatorname{Grad}_S \mathbf{F}_S, \mathbf{x}_i, \mathbf{L}_a \}$$
mit $i = 1, ..., k$,
 $a = 2, ..., k$.
$$(5.7.14)$$

Die Eigenschaft $\hat{\rho}^S = 0$ wurde in (5.7.14) jedoch noch nicht berücksichtigt. Diese Eigenschaft bedeutet für das inkompressible Festkörpermaterial, vgl. (5.3.15) und (5.3.16),

$$n^{S} = n_{0S}^{S} (\det \mathbf{F}_{S})^{-1},$$

grad $n^{S} = -n_{0S}^{S} (\det \mathbf{F}_{S})^{-1} \mathbf{F}_{S})^{T-1} (\mathbf{F}_{S}^{T-1} \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S})^{\underline{1}},$ (5.7.15)

so daß mit $(5.2.1)_2$ und $(5.2.10)_2$

$$n^{2} = 1 - n^{S} - \sum_{b=3}^{k} n^{b},$$

$$grad n^{2} = -grad n^{S} - \sum_{b=3}^{k} grad n^{b}.$$
(5.7.16)

Damit sind n^2 und grad n^2 eindeutig als Funktionen von n^b und grad n^b sowie \mathbf{F}_S und Grad_S \mathbf{F}_S bestimmbar und daher nicht als unabhängige Prozeßvariablen aufzufassen. Aus

(5.7.14) folgt:

$$\begin{split}
\mathfrak{S}_{1} \to \mathfrak{S}_{2} &= \{\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{b}, \operatorname{grad} n^{b}, \mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}, \mathbf{\dot{x}}_{i}, \mathbf{L}_{a}\}\\ \operatorname{mit} \quad i = 1, \dots, k, \\ a = 2, \dots, k, \\ b = 3, \dots, k. \end{split}$$
(5.7.17)

Mit (5.7.12) und (5.7.17) sind die Grundlagen der konstitutiven Theorie für den allgemeinen Fall des Beispiels 2 festgelegt.

Zum Vergleich mit in der Literatur dokumentierten Ergebnissen sollen wiederum einige Modifikationen des hier diskutierten Beispiels erfolgen.

Modifikation 1: Flüssigkeiten ohne Massenaustauschprozesse

Für diesen Fall folgt aus (5.7.12):

$$(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{Ti} - \theta^{i} \lambda n^{i} \mathbf{I}, \mathbf{q}^{i}, \hat{\mathbf{p}}^{i} - \theta^{i} \lambda \operatorname{grad} n^{i}, \hat{e}^{i}) = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{5})$$

mit $i = 1, ..., k$. (5.7.18)

Da für alle Konstituierenden $\hat{\rho}^i = 0$ vorausgesetzt wird, ist der Parametersatz (5.7.13) zunächst durch (5.3.21) zu ersetzen:

$$\mathfrak{S}_{3} = \{\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, \mathbf{F}_{i}, \operatorname{Grad}_{i} \mathbf{F}_{i}, \mathbf{x}_{i}, (\mathbf{F}_{a})_{a}^{\prime}\}$$
mit $i = 1, ..., k$,
$$a = 2, ..., k$$
.
$$(5.7.19)$$

Unter Berücksichtigung der Symmetriegruppe für Fluide zweiten Grades ergibt sich, vgl. (5.5.21) und (5.5.22) sowie (5.3.12):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_{3} \to \mathfrak{s}_{4} &= \{\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{a}, \operatorname{grad} n^{a}, \mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}, \mathbf{x}_{i}, \mathbf{L}_{a}\} \\
\text{mit} \quad i = 1, \dots, k , \\
a = 2, \dots, k .
\end{aligned}$$
(5.7.20)

Entsprechend den Bemerkungen in Abschnitt 5.3 fällt auch hier auf, daß die Variablensätze (5.7.19) und (5.7.20) nicht nur linear unabhängige Prozeßvariablen enthalten, da wegen der Inkompressibilitätseigenschaft des Festkörpermaterials z. B. n^2 und grad n^2 mit (5.7.15) und (5.7.16) als Funktionen von n^b , grad n^b , \mathbf{F}_S und $\operatorname{Grad}_S \mathbf{F}_S$ darstellbar sind, so daß anstelle von (5.7.20)

$$\mathfrak{L}_{4} \to \mathfrak{L}_{5} = \{\theta^{i}, \operatorname{grad} \theta^{i}, n^{b}, \operatorname{grad} n^{b}, \mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}, \mathbf{x}_{i}^{\prime}, \mathbf{L}_{a}\}$$
mit $i = 1, \dots, k$,
 $a = 2, \dots, k$,
 $b = 3, \dots, k$

$$(5.7.21)$$

gesetzt werden muß. Auch in diesem Fall zeigt ein Vergleich zwischen den Variablensätzen (5.7.17) und (5.7.21), daß der Einfluß der Isotropiegruppe der Flüssigkeiten auf die Menge der Prozeßvariablen unabhängig davon ist, ob $\hat{\rho}^a \neq 0$ oder $\hat{\rho}^a = 0$.

Modifikation 2: $\theta^i = \theta$ für i = 1, ..., k

Kann für das vorliegende Beispiel angenommen werden, daß alle φ^i eine gemeinsame Temperatur besitzen, dann sind die thermodynamischen Restriktionen aus der Entropieungleichung (5.2.8) für $\hat{\rho}^i = 0$ zu entwickeln. Konstitutive Gleichungen für die Energiekopplungsterme können entfallen. Darüber hinaus entfällt der Temperatureinfluß auf den Lagrangeschen Multiplikator, so daß (5.7.18) mit (5.2.11)₄ und (5.2.14) in

$$(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{Ti} - \lambda n^{i} \mathbf{I}, \mathbf{h}^{i}, \hat{\mathbf{p}}^{i} - \lambda \operatorname{grad} n^{i}) = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{6})$$

mit $i = 1, ..., k$ (5.7.22)

übergeht. Aus (5.7.21) folgt

$$\mathfrak{L}_{6} = \{\theta, \operatorname{grad} \theta, n^{b}, \operatorname{grad} n^{b}, \mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}, \mathbf{x}_{i}, \mathbf{L}_{a}\}$$
mit $i = 1, ..., k,$

$$a = 2, ..., k,$$

$$b = 3, ..., k.$$

$$(5.7.23)$$

Das durch (5.7.22) und (5.7.23) definierte Modell eines porösen Mediums wurde von Bowen [1980] ausführlich diskutiert, wobei Bowen jedoch nichtviskose Flüssigkeiten voraussetzte. Es fällt jedoch auf, daß Bowen [1980, Gl. (3.4)] anstelle der Prozeßvariablen n^b und grad n^b die Variablen n^a und grad n^a benutzt; d. h. der von Bowen benutzte Parametersatz enthält die abhängigen Variablen n^2 und grad n^2 , ohne daß Bowen diese Abhängigkeit durch die Einführung eines weiteren Lagrangeschen Multiplikators innerhalb der Entropieungleichung berücksichtigt. Geht man davon aus, daß nur unabhängige Prozeßvariablen zugelassen sind, so muß Bowens Vorgehen zumindest als Mißverständnis gewertet werden. In diesem Zusammenhang ist es interessant festzustellen, daß Bowen diesen Fehler in [1984, Gl. (5A.4.32)] korrigiert hat, jedoch ohne die Angabe irgendwelcher Begründungen. Vielmehr bezieht er sich auch in [1984] auf [1980]. Bowens Interpretation des mit den Variablen (5.7.23) beschriebenen Materialmodells,

In a practical application of this example, one might view the N^{th} fluid as oil imbedded in the incompressible solid. The remaining N-2 fluids could represent incompressible fluids injected into the oil reservoir,

hat eher spekulativen Charakter. Da (5.7.22) und (5.7.23) auf der Basis gesicherter mechanischer Prinzipe hergeleitet wurden, sind spezielle Interpretationen des durch diese Beziehungen beschriebenen Materialmodells überflüssig. Stattdessen sind im Rahmen der das Modell definierenden Voraussetzungen beliebige Porenflüssigkeiten zugelassen. Modifikation 3: "Leeres" Festkörperskelett

Entsprechend den am Beispiel 1 erläuterten Überlegungen folgt aus (5.7.22) und (5.7.23):

$$(\psi^{S}, \eta^{S}, \mathbf{T}^{S}, \mathbf{q}^{S}) = \mathcal{R}(\theta, \operatorname{grad} \theta, \mathbf{F}_{S}).$$
 (5.7.24)

Für das leere, inkompressible Festkörpermaterial entfällt der Einfluß des Lagrangeschen Multiplikators (der leere Porenraum ist kompressibel), d. h. die Extraspannungen sind mit den Partialspannungen identisch.

Ein Vergleich von (5.7.24) mit (5.7.11) zeigt, daß im inkompressiblen Modell keine konstitutive Gleichung für die zeitliche Änderung des Volumenanteils erforderlich ist, vgl. (4.5.11), und daß andererseits der Volumenanteil n^S als konstitutive Variable entfällt, da n^S als Funktion von \mathbf{F}_S dargestellt werden kann.

Einige Sonderfälle

Im folgenden sollen einige interessante Sonderfälle diskutiert werden; und zwar die verschiedenen Versionen eines mit einem einzelnen Fluid φ^F gesättigten porösen Festkörpers φ^S . Phasentransformationen seien ausgeschlossen, so daß $\hat{\rho}^S = \hat{\rho}^F = 0$. Außerdem wird von einer gemeinsamen Temperatur $\theta^S = \theta^F = \theta$ beider Partialkörper ausgegangen.

Kompressibler Festkörper, kompressibles Fluid:

Für dieses Modell folgt aus (5.7.7) und (5.7.8):

$$(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{Ti}, \mathbf{h}^{i}, \hat{\mathbf{p}}^{F}, n_{F}^{F}) = \mathcal{R}(\mathfrak{s}),$$

$$\mathfrak{s} = \{\theta, \operatorname{grad} \theta, n^{F}, \operatorname{grad} n^{F}, \rho^{F}, \operatorname{grad} \rho^{F}, \mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}, \mathbf{x}_{i}^{\prime}, \mathbf{L}_{F}\}$$
(5.7.25)
mit i = S, F.

Entsprechend den Bemerkungen zu (5.7.1) kann in $(5.7.25)_1$ auf Auswirkungsfunktionen für $\hat{\mathbf{p}}^S$ und n_S^S verzichtet werden, da wegen $(5.2.3)_2$ und (5.2.10)

$$\hat{\mathbf{p}}^{S} = -\hat{\mathbf{p}}^{F},$$

$$\dot{n}^{S}_{S} = -\dot{n}^{F}_{F} + \operatorname{grad} n^{F} \cdot (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S}).$$
(5.7.26)

Inkompressibler Festkörper, kompressibles Fluid:

Die Inkompressibilitätseigenschaft des Feskörpers bedingt, vgl. (5.2.12), daß

$$\dot{n}_F^F = n^S \operatorname{div} \mathbf{\dot{x}}_S + \operatorname{grad} n^S \cdot (\mathbf{\dot{x}}_S - \mathbf{\dot{x}}_F),$$
 (5.7.27)

d. h. eine konstitutive Gleichung für n_F^F kann entfallen. Außerdem folgt aus (5.7.15) und (5.7.16):

$$n^{F} = 1 - n_{0S}^{S} (\det \mathbf{F}_{S})^{-1},$$

grad $n^{F} = n_{0S}^{S} (\det \mathbf{F}_{S})^{-1} \mathbf{F}_{S}^{T-1} (\mathbf{F}_{S}^{T-1} \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S})^{\underline{1}}.$ (5.7.28)

Diese Ausführungen zeigen, daß sich (5.7.25) auf

$$(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{Ti}, \mathbf{h}^{i}, \hat{\mathbf{p}}^{F}) = \mathcal{R}(s),$$

$$s = \{\theta, \operatorname{grad} \theta, \rho^{F}, \operatorname{grad} \rho^{F}, \mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}, \mathbf{x}_{i}^{\prime}, \mathbf{L}_{F}\}$$
(5.7.29)
mit $i = S, F.$

reduziert.

Kompressibler Festkörper, inkompressible Flüssigkeit:

Entsprechend dem vorangegangenen Beispiel ist auch hier wegen

$$\dot{n}_F^F = -n^F \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_F \tag{5.7.30}$$

keine konstitutive Gleichung für n_F^F erforderlich. Außerdem können ρ^F und grad ρ^F wegen (5.3.12) als Prozeßvariablen entfallen, so daß das vorliegende Modell durch

$$(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{Ti}, \mathbf{h}^{i}, \hat{\mathbf{p}}^{F}) = \mathcal{R}(\mathcal{S}),$$

$$\mathcal{S} = \{\theta, \operatorname{grad} \theta, n^{F}, \operatorname{grad} n^{F}, \mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}, \mathbf{x}_{i}, \mathbf{L}_{F}\}$$
(5.7.31)
mit $i = S, F.$

bestimmt ist. Formal könnten in $(5.7.31)_2$ die Variablen n^F und grad n^F durch ρ^F und grad ρ^F ersetzt werden, so daß die durch (5.7.29) und (5.7.31) definierten Modelle in ihren äußeren Formen identisch sind.

Inkompressibler Festkörper, inkompressible Flüssigkeit:

Die Definition dieses Modells kann sofort aus (5.7.22) und (5.7.23) entnommen werden. Bei Beachtung von $(5.2.3)_2$ und $(5.2.10)_2$ folgt:

$$(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{Ti} - \lambda n^{i} \mathbf{I}, \mathbf{h}^{i}, \hat{\mathbf{p}}^{F} - \lambda \operatorname{grad} n^{F}) = \mathcal{R}(\mathcal{S}),$$

$$\mathcal{S} = \{\theta, \operatorname{grad} \theta, \mathbf{F}_{S}, \operatorname{Grad}_{S} \mathbf{F}_{S}, \mathbf{x}'_{i}, \mathbf{L}_{F}\}$$
(5.7.32)
mit $i = S, F.$

In der Literatur wurden häufig einfache Zweiphasenmodelle diskutiert, die einen fluidgesättigten Festkörper entweder als kompressibles oder als inkompressibles Modell beschreiben, so daß ein Vergleich von (5.7.25) und (5.7.32) mit den Ergebnissen anderer Autoren leicht möglich ist.

Ein Vergleich von (5.7.25) mit Atkin & Craine [1976a, Gln. (4.1), (4.2)] zeigt, daß diese Autoren einerseits keine konstitutive Gleichung für n_F^F , entwickeln und andererseits n^F und grad n^F als thermodynamische Prozeßvariablen unterdrücken. Der Parametersatz [1976a, Gl. (4.2)], den Atkin und Craine mit der Bemerkung motivated by the constitutive postulates which are used to describe an elastic solid and a viscous fluid when they are considered as single constituents we assume that ...

einführen, ist identisch mit $(5.7.29)_2$, d. h. obwohl Atkin und Craine ein kompressibles Modell beschreiben wollen, beschreiben sie im Sinne der in der vorliegenden Arbeit vertretenen Theorie poröser Medien, da im übrigen auch [1976a, Gl. (4.1)] prinzipiell mit $(5.7.29)_1$ übereinstimmt, das Modell eines mit einem kompressiblen Fluid gesättigten inkompressiblen Festkörpers.

Kenyon [1976b] beschreibt ebenfalls das kompressible Modell eines fluidgesättigten Festkörpers und wählt mit [1976b, Gln. (4.1)] einen Parametersatz, der prinzipiell mit der Wahl von Atkin und Craine übereinstimmt, so daß die oben angeführten Bemerkungen auch hier gelten. In [1976a] untersucht Kenyon außerdem das inkompressible Modell eines flüssigkeitsgesättigten porösen Festkörpers. Erst zur Beschreibung der Inkompressibilitätseigenschaft macht Kenyon Gebrauch vom Begriff der Volumenanteile. Durch ein sehr unkonventionelles Vorgehen - in [1976a] entwickelt Kenyon das inkompressible Modell aus den Ergebnissen des kompressiblen Modells - gelingen Kenyon prinzipiell richtige Ergebnisse, vgl. z. B. [1976a, Gl. (3.31)], indem er den Volumenanteil als eine versteckte Variable (hidden variable) begreift.

Elastisch-plastisches Festkörpermaterial:

Als letztes Beispiel des vorliegenden Abschnitts soll das Modell eines gesättigten, elastischplastisch deformierbaren porösen Festkörpermaterials behandelt werden. Die folgenden Bemerkungen gelten unabhängig davon, ob ein kompressibles oder ein inkompressibles Modell mit oder ohne Phasentransformation beschrieben werden soll; d. h. die folgenden Ausführungen können in jedes der im vorangegangenen diskutierten Modelle eingearbeitet werden.

Für das allgemeine Modell eines porösen Mediums gilt:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{s}) \quad , \quad \mathfrak{s} = \{\dots, \mathbf{F}_S, \operatorname{Grad}_S \mathbf{F}_S, \dots\}.$$
(5.7.33)

Da auch die geschwindigkeitsunabhängige Plastizitätstheorie grundsätzlich im Sinne einer "rate-type" Theorie aufzufassen ist - die Zeit wird hier als impliziter Parameter benutzt-, vgl. z. B. de Boer & Ehlers [1980], ist für elastisch-plastische Festkörperskelette zusätzlich zu (5.7.33) eine konstitutive Gleichung für die plastischen Deformationsgeschwindigkeiten erforderlich. Entsprechend den Bemerkungen zu (5.4.48) muß jedoch in der Regel nur für die symmetrischen Anteile von $\widehat{\mathbf{L}}_{Sp}$ eine konstitutive Gleichung entwickelt werden, so daß mit (5.4.9) anstelle von (5.7.33)

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{p}) ,$$

$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = \Lambda(\mathcal{S}_{p}, \overset{\circ}{\sigma}, \overset{\prime}{\theta}_{S}, \kappa, ...) \overline{\sigma} ,$$

$$\mathcal{S}_{p} = \{..., \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}, ...\}$$
(5.7.34)

gesetzt werden muß. In Analogie zu Ehlers [1989b, Gl. (4.13)] wird in $(5.7.34)_2$ angenom-

men, daß $\bar{\sigma}$ ein zunächst nicht näher spezifiziertes Spannungsmaß ist, $\overset{\circ}{\sigma}$ eine bezugsinvariante Spannungsableitung und κ ein Werkstoff- bzw. Verfestigungsparameter. Die Spezifizierung von $\bar{\sigma}$ und $\overset{\circ}{\sigma}$ hängt von der jeweils benutzten Fließ- oder Versagensbedingung und zusätzlich von den Belastungskriterien und der Fließregel (assoziiert oder nichtassoziiert) ab. In Abhängigkeit der benutzten Fließ- oder Versagensbedingung kann Λ auch von weiteren Parametern oder zusätzlich eingeführten internen Variablen abhängen.

5.8 Ergänzende Bemerkungen

Im vorliegenden Kapitel wurden die Grundlagen der konstitutiven Theorie beliebiger poröser Medien auf der Basis gesicherter mechanischer und thermodynamischer Prinzipe diskutiert. Dabei wurde im Rahmen der um das Konzept der Volumenanteile erweiterten Mischungstheorie ausnahmslos von Materialien zweiten Grades ausgegangen. Die hier gewählte Beschreibungsweise ist in vielerlei Hinsicht neu.

Soweit dem Verfasser bekannt ist, wurde das Konzept der Volumenanteile in konsequenter Weise nur von *Bowen* [1980, 1982, 1984] benutzt; in [1980] bei der Beschreibung eines inkompressiblen Modells jedoch mit einigen Mängeln behaftet, siehe Abschnitt 5.7. Die meisten anderen Autoren behandeln ein poröses Medium entweder in Analogie zu Mischungen aus Flüssigkeiten oder Gasen und vernachlässigen dabei völlig die innere Struktur des Mehrkomponentenkontinuums, oder sie benutzen das Konzept der Volumenanteile, gehen dann aber häufig von einer in vielen Punkten vereinfachten Mischungstheorie aus und vernachlässigen zudem die in der Mischungstheorie erforderliche Annahme von Materialien zweiten Grades, siehe dazu die Ausführungen in Kapitel 2.

Die multiplikative Zerlegung der ersten und zweiten Deformationsgradienten eines elastischplastischen Festkörpermaterials ist ein Novum und wurde vom Verfasser außer in der vorliegenden Arbeit nur in [1989b] diskutiert. Die Anwendung der Symmetriegruppe für Materialien zweiten Grades auf poröse Medien ist in der Literatur ebenso unbekannt zumal wenn elastisch-plastische Festkörperskelette behandelt werden - wie die für diese Materialien erforderlichen Beziehungen im Rahmen der Untersuchung der Objektivitätseigenschaft der verschiedenen kinematischen und mechanischen Größen.

Schließlich wurden durch die "Zusammenstellung der Ergebnisse" die Grundlagen zur Entwicklung thermodynamischer Restriktionen und konstitutiver Gleichungen vieler Materialmodelle angegeben; darüber hinaus wurde systematisch aufgezeigt - auch hinsichtlich der jeweils anzusetzenden unabhängigen Prozeßvariablen -, auf welchem Wege andere Materialmodelle behandelt werden können.

Die folgenden Kapitel sollen auf ein spezielles Materialmodell beschränkt bleiben.

Kapitel 6: Das Modell eines flüssigkeitsgesättigten, elastisch-plastisch deformierbaren porösen Körpers

6.1 Einleitung

Auf der Basis der im vorangegangenen diskutierten allgemeinen Theorie poröser Medien soll im folgenden das spezielle Materialmodell eines flüssigkeitsgesättigten, elastsichplastisch deformierbaren porösen Körpers mit gemeinsamer Temperatur beider Konstituierenden behandelt werden. Die folgenden Untersuchungen sind zunächst unabhängig davon, ob die poröse Festkörpermatrix eine granulare bzw. körnige Struktur aufweist oder ob der Festkörper aus duktilem bzw. bildsamem Material besteht. Grundsätzlich kann die Kompressibiltät des Festkörpermaterials jedoch als wesentlich geringer angesehen werden als die des entsprechenden Makrokörpers, so daß es gerechtfertigt erscheint, inkompressibles Festkörpermaterial vorauszusetzen. Dennoch sind große Volumendehnungen des Festkörpers als Folge lokaler Porositätsveränderungen möglich. Die Porenflüssigkeit wird als inkompressible, viskose Flüssigkeit verstanden, so daß das vorliegende Modell im Rahmen der um das Konzept der Volumenanteile erweiterten Mischungstheorie als binäres, inkompressibles Kontinuum zu behandeln ist.

Ausgehend von den grundlegenden Beziehungen dieses Modells werden zunächst die allgemeinen thermodynamischen Restriktionen diskutiert und in der Nähe des sogenannten Mischungsgleichgewichts linearisiert. Für das vorliegende Modell bedeutet dies eine Linearisierung in der Nähe verschwindender Temperaturgradienten, Differenzgeschwindigkeiten zwischen Festkörperskelett und Flüssigkeit sowie Deformationsgeschwindigkeiten der Flüssigkeit. Weitere Linearisierungen, speziell bezüglich der Festkörperdeformation, werden nicht eingeführt. Um möglichst universell zu verwendende Beziehungen zu erhalten, wird im vorliegenden Kapitel auf die Forderung isotropen Festkörpermaterials verzichtet.

Im Rahmen der Mischungstheorie führt die Voraussetzung von Materialien zweiten Grades grundsätzlich auf eine Kopplung der spezifischen freien Energien von Festkörper und Flüssigkeit, was in der Anwendung des Modells auf praxisrelevante Probleme in der Regel zu gewissen Schwierigkeiten führt; häufig bereits bei der Konstituierung der freien Energiefunktionen selbst. Daher soll in Abschnitt 6.5 ein vereinfachtes konstitutives Modell eingeführt werden, das eine relativ einfache, praxisorientierte Beschreibung speziell des elastischen bzw. elastisch-plastischen Materialverhaltens der Festkörpermatrix gestattet. Einige ergänzende Bemerkungen zur anwendungsbezogenen Relevanz des hier diskutierten Modells und verwandter Modelle beschließen das vorliegende Kapitel.

6.2 Grundlegende Beziehungen

Für das im folgenden zu beschreibende binäre Modell eines porösen Mediums – elastischplastisch deformierbarer Festkörper φ^S mit viskoser Flüssigkeit φ^F – gelten die folgenden Voraussetzungen; i = F, S:

- In den Referenzkonfigurationen der Teilkörper sind die Volumenanteile und die effektiven Dichten beider Konstituierenden im Sinne einer homogenen Mischung gegeben und homogen, vgl. (5.3.2):

$$\operatorname{Grad}_{i} n_{0i}^{i} = \mathbf{0} ,$$

$$\operatorname{Grad}_{i} \rho_{0i}^{iR} = \mathbf{0} .$$
(6.2.1)

- Massenaustauschprozesse zwischen φ^S und φ^F seien ausgeschlossen, so daß

$$\hat{\rho}^i = 0.$$
 (6.2.2)

- Die Partialspannungen des betrachteten Modells seien symmetrisch, so daß mit (4.3.11)

$$\hat{\mathbf{M}}^{i} = \mathbf{0}. \tag{6.2.3}$$

- Beide Konstituierenden besitzen eine gemeinsame Temperaturfunktion

$$\theta^S = \theta^F = \theta \,. \tag{6.2.4}$$

- Beide Konstituierenden sind inkompressibel, d. h.:

$$\rho^{iR} = \rho^{iR}_{0i} = \text{konst.}$$
(6.2.5)

Die Forderung (6.2.3) ist zur Beschreibung des vorliegenden Modells nicht zwingend erforderlich, dient aber dazu, viele zusätzliche Argumentationen zu vermeiden, die dann letztlich zur Bestätigung von (6.2.3) führen.

Mit den Voraussetzungen (6.2.1) - (6.2.5) lassen sich die stoffunabhängigen Grundgleichungen des Modells, vgl. Abschnitt 5.2, in vereinfachter Form angeben. Die Voraussetzungen (6.2.2) und (6.2.5) bewirken zunächst, daß die lokalen Massenbilanzen der φ^i in Bilanzen für die Partialvolumina übergehen, vgl. (4.5.11), (4.5.12), (4.5.13), (4.5.15) sowie (5.2.2)₁:

$$n^{i} = n_{0i}^{i} \,(\det \mathbf{F}_{i})^{-1},$$

$$n_{i}^{i} + n^{i} \,\operatorname{div} \mathbf{x}_{i}^{\prime} = 0.$$
(6.2.6)

Die lokalen Bewegungsgrößen und Drallbilanzen lauten, vgl. (5.2.2), (5.2.3) und $(5.2.11)_3$:

div
$$\mathbf{T}^{i} + \rho^{i} \left(\mathbf{b} - \overset{"}{\mathbf{x}_{i}} \right) + \hat{\mathbf{p}}^{i} = \mathbf{0},$$

mit $\hat{\mathbf{p}}^{S} + \hat{\mathbf{p}}^{F} = \mathbf{0},$ (6.2.7)

$$\mathbf{T}^{i} = \mathbf{T}^{Ti}, \quad \mathbf{K}^{i} = \mathbf{K}^{Ti}. \tag{6.2.8}$$

In $(6.2.7)_1$ wurde vorausgesetzt, daß beide Konstituierenden dieselbe eingeprägte Beschleunigung

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^S = \mathbf{b}^F \tag{6.2.9}$$

besitzen.

Die Voraussetzung (6.2.4) bedingt, daß zur Bestimmung der Temperaturänderung $\dot{\theta}$ nur die Energiebilanz der Mischung benötigt wird. Entsprechend (5.2.6) gilt mit (4.3.22)₂, (6.2.2) und (6.2.8)₂:

$$- \stackrel{\prime}{\Psi}{}^{S}_{S} - \stackrel{\prime}{\Psi}{}^{F}_{F} - \theta \stackrel{\dot{\mathbf{q}}}{=} - \P \left(\dot{\theta} + \theta \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} \right) - \hat{\mathbf{p}}^{F} \cdot \left(\stackrel{\prime}{\mathbf{x}}_{F} - \stackrel{\prime}{\mathbf{x}}_{S} \right) - -\rho^{S} \mathbf{K}^{S} \cdot \mathbf{L}_{S} - \rho^{F} \mathbf{K}^{F} \cdot \mathbf{L}_{F} + \rho r^{I} - \operatorname{div} \mathbf{h} = 0.$$

$$(6.2.10)$$

In (6.2.10) wurde $\hat{\mathbf{p}}^{S}$ mit $(6.2.6)_{2}$ eliminiert. Die Größe

$$\P = \P^S + \P^F \tag{6.2.11}$$

repräsentiert die mischungsvolumenbezogene Entropiesumme von Festkörperskelett und Flüssigkeit;

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^S + \mathbf{h}^F \tag{6.2.12}$$

ist als Summe der Energiezuflußvektoren \mathbf{h}^i aus (4.4.10) definiert. Für den Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L}_S des elastisch-plastischen Festkörperskeletts ist entsprechend (5.4.39)

$$\mathbf{L}_S = (\mathbf{A}_{Se})^{\vartriangle} + (\mathbf{A}_{Sp})^{\circlearrowright} + \mathbf{W}_S$$
(6.2.13)

einzusetzen.

Die für das inkompressible Modell maßgebende Entropieungleichung kann (5.2.8) entrommen werden, so daß mit $(5.2.10)_2$, $(5.2.11)_5$, $(6.2.7)_2$, $(6.2.8)_2$ und (6.2.11) - (6.2.13) auf

$$- \stackrel{\prime}{\Psi}{}^{S}_{S} - \stackrel{\prime}{\Psi}{}^{F}_{F} - \dot{\theta} \P - (\hat{\mathbf{p}}^{F} - \lambda \operatorname{grad} n^{F}) \cdot (\stackrel{\prime}{\mathbf{x}}{}^{F}_{F} - \stackrel{\prime}{\mathbf{x}}{}^{S}_{S}) - \\ - (\rho^{S} \mathbf{K}^{S} - \lambda n^{S} \mathbf{I}) \cdot [(\mathbf{A}_{Se})^{\Delta} + (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} + \mathbf{W}_{S}] - \\ - (\rho^{F} \mathbf{K}^{F} - \lambda n^{F} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{L}_{F} - \frac{1}{\theta} \mathbf{h} \cdot \operatorname{grad} \theta \ge 0$$

$$(6.2.14)$$

geschlossen werden kann.

In Abschnitt 5.7 wurden die jeweils erforderlichen Mengen der zu bestimmenden Auswirkungsfunktionen und der zugehörigen unabhängigen Prozeßvariablen für verschiedene Materialmodelle zusammengestellt. Demzufolge ist für das vorliegende inkompressible Modell eines elastisch-plastisch deformierbaren nichtviskosen Festkörperskeletts, gesättigt mit einer viskosen Porenflüssigkeit, entsprechend (5.7.32) und (5.7.34) anzusetzen:

$$(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{i} - \lambda n^{i} \mathbf{I}, \mathbf{h}^{i}, \hat{\mathbf{p}}^{F} - \lambda \operatorname{grad} n^{F}) = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{p}),$$
$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = \Lambda(\mathcal{S}_{p}, \overset{\circ}{\sigma}, \overset{\prime}{\theta}_{S}, \kappa, \ldots) \bar{\sigma},$$
$$\mathcal{S}_{p} = \{\theta, \operatorname{grad} \theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}, \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{i}, \mathbf{L}_{F}\}.$$

$$(6.2.15)$$

In (6.2.15) ist das Prinzip der materiellen Objektivität bisher unberücksichtigt geblieben. Mit den Ausführungen des Abschnitts 5.6 ist daher zu verlangen, daß

$$\begin{bmatrix} \Psi^{i}, \Psi^{i}, \mathbf{Q} \left(\rho^{i} \mathbf{K}^{i} - \lambda n^{i} \mathbf{I}\right) \mathbf{Q}^{T}, \mathbf{Q} \mathbf{h}^{i}, \mathbf{Q} \left(\hat{\mathbf{p}}^{F} - \lambda \operatorname{grad} n^{F}\right) \end{bmatrix} = \mathcal{R}(\hat{\mathbf{a}}_{p}),$$

$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = \Lambda \left(\overset{*}{\mathbf{a}}_{p}, \overset{*}{\boldsymbol{\sigma}}, \overset{*}{\boldsymbol{\theta}}_{S}, \kappa, \ldots\right) \widehat{\mathbf{Q}}^{T} \overset{*}{\boldsymbol{\sigma}} \widehat{\mathbf{Q}},$$

$$\overset{*}{\mathbf{b}}_{p} = \left[\theta, \mathbf{Q} \operatorname{grad} \theta, \mathbf{Q} \mathbf{F}_{Se} \widehat{\mathbf{Q}}^{T}, \widehat{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{Sp}, \overset{*}{\mathbf{d}}_{Se}, \overset{*}{\mathbf{d}}_{Sp}, \overset{*}{\mathbf{d}}_$$

mit

für jede zulässige Wahl von \mathbf{Q} , $\hat{\mathbf{Q}}$, $\dot{\mathbf{Q}}$ sowie \mathbf{c} , $\dot{\mathbf{c}}$ erfüllt sein muß. Durch verschiedene spezielle Wahlen dieser Größen kann die Abhängigkeit der Auswirkungsfunktionen von den Variablen s_p in eine Abhängigkeit von Prozeßvariablen ϕ überführt werden:

Wahl 1:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \ \widehat{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}, \ \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}, \ \dot{\mathbf{c}} - \overset{*}{\mathbf{c}} = \overset{\prime}{\mathbf{x}_{\mathbf{S}}}, \ \mathbf{c} \text{ beliebig.}$$
 (6.2.18)

Mit (6.2.18) folgt aus (6.2.16):

$$(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{i} - \lambda \ n^{i} \mathbf{I}, \mathbf{h}^{i}, \hat{\mathbf{p}}^{F} - \lambda \operatorname{grad} n^{F}) = \mathcal{R}(\bar{\phi}),$$

$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = \Lambda(\bar{\phi}, \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}, \overset{\prime}{\theta}_{S}, \kappa, \ldots) \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \qquad (6.2.19)$$

$$\bar{\phi} = (\theta, \operatorname{grad} \theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}, \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{F} - \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{S}, \mathbf{L}_{F}).$$

Da (6.2.18) eine zulässige Wahl darstellt, zeigt das Prinzip der materiellen Objektivität im Vergleich von (6.2.15) und (6.2.19) zunächst, daß die Variablen $\mathbf{\dot{x}}_{S}$ und $\mathbf{\dot{x}}_{F}$ durch die
objektive Differenzgeschwindigkeit $\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S}$ zu ersetzen sind.

Eine erneute Anwendung des Prinzips der materiellen Objektivität auf (6.2.19) führt auf

$$\begin{bmatrix} \Psi^{i}, \mathbf{q}^{i}, \mathbf{Q} \left(\rho^{i} \mathbf{K}^{i} - \lambda n^{i} \mathbf{I}\right) \mathbf{Q}^{T}, \mathbf{Q} \mathbf{h}^{i}, \mathbf{Q} \left(\hat{\mathbf{p}}^{F} - \lambda \operatorname{grad} n^{F}\right) \end{bmatrix} = \mathcal{R}(\tilde{\phi})$$

$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = \Lambda \left(\overset{*}{\phi}, \overset{*}{\sigma}, \theta'_{S}, \kappa, \ldots\right) \widehat{\mathbf{Q}}^{T} \overset{*}{\sigma} \widehat{\mathbf{Q}},$$

$$\overset{*}{\phi} = \left[\theta, \mathbf{Q} \operatorname{grad} \theta, \mathbf{Q} \mathbf{F}_{Se} \widehat{\mathbf{Q}}^{T}, \widehat{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{Sp}, \overset{*}{\mathbf{G}}_{Se}^{3}, \overset{*}{\mathbf{G}}_{Sp}, \right]$$

$$\mathbf{Q} \left(\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S}\right), \mathbf{Q} \mathbf{D}_{F} \mathbf{Q}^{T} + \mathbf{Q} \mathbf{W}_{F} \mathbf{Q}^{T} + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{T}, \right],$$

$$(6.2.20)$$

wobei der Geschwindigkeitsgradient $\overset{*}{\mathbf{L}}_{F}$ gemäß (5.6.16) in seine symmetrischen und antimetrischen Anteile zerlegt wurde. Durch eine erneute spezielle Wahl von \mathbf{Q} , $\widehat{\mathbf{Q}}$, und $\dot{\mathbf{Q}}$ folgt:

Wahl 2:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \ \widehat{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}, \ \dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{W}_F.$$
(6.2.21)

Mit (6.2.21) ergibt sich aus (6.2.20)

$$\left(\Psi^{i}, \P^{i}, \rho^{i} \mathbf{K}^{i} - \lambda n^{i} \mathbf{I}, \mathbf{h}^{i}, \hat{\mathbf{p}}^{F} - \lambda \operatorname{grad} n^{F} \right) = \mathcal{R}(\phi),$$

$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = \Lambda \left(\phi, \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}, \overset{\prime}{\theta_{S}}, \kappa, \ldots \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}},$$

$$\phi = \left(\theta, \operatorname{grad} \theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}, \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{F} - \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{S}, \mathbf{D}_{F} \right).$$

$$(6.2.22)$$

Da (6.2.21) eine zulässige Wahl darstellt, zeigt die erneute Anwendung des Prinzips der materiellen Objektivität im Vergleich von (6.2.19) und (6.2.22), daß die Variable \mathbf{L}_F durch die Variable \mathbf{D}_F zu ersetzen ist. Schließlich müssen auch die Beziehungen (6.2.22) dem Prinzip der materiellen Objektivität genügen, so daß

$$\begin{bmatrix} \Psi^{i}, \P^{i}, \mathbf{Q} \left(\rho^{i} \mathbf{K}^{i} - \lambda n^{i} \mathbf{I}\right) \mathbf{Q}^{T}, \mathbf{Q} \mathbf{h}^{i}, \mathbf{Q} \left(\hat{\mathbf{p}}^{F} - \lambda \operatorname{grad} n^{F}\right) \end{bmatrix} = \mathcal{R}(\overset{*}{\phi}),$$

$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = \Lambda(\overset{*}{\phi}, \overset{*}{\sigma}, \overset{*}{\theta}'_{S}, \kappa, \ldots) \widehat{\mathbf{Q}}^{T} \overset{*}{\sigma} \widehat{\mathbf{Q}},$$

$$\overset{*}{\phi} = \begin{bmatrix} \theta, \mathbf{Q} \operatorname{grad} \theta, \mathbf{Q} \mathbf{F}_{Se} \widehat{\mathbf{Q}}^{T}, \widehat{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{Sp}, \overset{*}{\mathbf{G}}_{Se}, \overset{*}{\mathbf{G}}_{Sp}, \mathbf{Q} \left(\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S} \right), \mathbf{Q} \mathbf{D}_{F} \mathbf{Q}^{T} \end{bmatrix}$$

$$(6.2.23)$$

zu fordern ist.

Es bleibt festzustellen, daß (6.2.23) unabhängig von $\dot{\mathbf{Q}}$, \mathbf{c} , $\dot{\mathbf{c}}$, und $\overset{*}{\mathbf{c}}$ ist. Ein Vergleich von (6.2.15) mit (6.2.22) zeigt unmittelbar, daß die Benutzung der Variablen ϕ anstelle von \mathcal{A}_p notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß alle Auswirkungsfunktionen für beliebige, zulässige $\dot{\mathbf{Q}}$, \mathbf{c} , $\dot{\mathbf{c}}$, und $\overset{*}{\mathbf{c}}$ gelten. Demzufolge erfüllen Lösungen für (6.2.22), die für beliebige \mathbf{Q} und $\widehat{\mathbf{Q}}$ gleichzeitig (6.2.23) genügen, alle aus dem Prinzip der materiellen Objektivität resultierenden Forderungen.

Weitere spezielle Forderungen, die aus dem Prinzip der materiellen Objektivität gewonnen werden können, sollen zunächst unberücksichtigt bleiben. Diese Forderungen werden an späterer Stelle behandelt.

6.3 Thermodynamische Restriktionen

Zur Entwicklung thermodynamischer Restriktionen aus der Entropieungleichung (6.2.14) – Prinzip der Dissipation – sind zunächst die materiellen Zeitableitungen der Funktionen

$$\Psi^S(\phi), \quad \Psi^F(\phi) \tag{6.3.1}$$

zu bilden.

Mit $(6.2.22)_3$ gilt formal:

$$\begin{split} \dot{\Psi}_{i}^{i} &= \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \theta} \left[\dot{\theta} + \operatorname{grad} \theta \cdot \mathbf{u}_{i} \right] + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial (\operatorname{grad} \theta)} \cdot \left[(\operatorname{grad} \theta)^{\cdot} + (\operatorname{grad} \operatorname{grad} \theta) \mathbf{u}_{i} \right] + \\ &+ \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \cdot \left[(\mathbf{F}_{Se})_{S}^{\prime} + (\operatorname{grad} \mathbf{F}_{Se}) \left(\mathbf{x}_{i}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right) \right] + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \cdot \left[(\mathbf{F}_{Sp})_{S}^{\prime} + \\ &+ (\operatorname{grad} \mathbf{F}_{Sp}) \left(\mathbf{x}_{i}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right) \right] + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{G}_{Se}} \cdot \left[(\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se})_{S}^{\prime} + (\operatorname{grad} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}) \left(\mathbf{x}_{i}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{G}_{Sp}} \cdot \left[(\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp})_{S}^{\prime} + (\operatorname{grad} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}) \left(\mathbf{x}_{i}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right) \right] + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial (\mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime})} \cdot \left[(\overset{*}{\mathbf{x}}_{F} - \overset{*}{\mathbf{x}}_{S}) - \\ &- (\operatorname{grad} \mathbf{x}_{S}) \left(\mathbf{x}_{i}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right) - (\operatorname{grad} \mathbf{x}_{F}) \left(\mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{i}^{\prime} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}_{F}} \cdot \left[(\mathbf{D}_{F})_{F}^{\prime} - (\operatorname{grad} \mathbf{D}_{F}) \left(\mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{i}^{\prime} \right) \right]. \end{split}$$

In (6.3.2) sind die Funktionen grad \mathbf{F}_{Se} , grad \mathbf{F}_{Sp} sowie grad \mathbf{G}_{Se} und grad \mathbf{G}_{Sp} entsprechend den Ausführungen des Abschnitts 5.4 im allgemeinen nicht als feldlich definierte Gradienten sondern als Punktfunktionen aufzufassen. Den Charakter von Gradientenfeldern besitzen diese Ausdrücke wiederum nur für den Fall homogener Deformationen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit soll jedoch darauf verzichtet werden, für diese Größen weitere Symbole einzuführen. In (6.3.2) sind die Beziehungen

grad
$$\mathbf{F}_{Se} = (\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{-1})^{\underline{3}},$$

grad $\mathbf{F}_{Sp} = [\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} (\mathbf{F}_{Sp}^{-1} \mathbf{F}_{Se}^{-1})]^{\underline{3}},$
grad $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} = [(\operatorname{grad}_{Sz} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}) \mathbf{F}_{Se}^{-1}]^{\underline{4}},$
grad $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} = [(\operatorname{Grad}_{S} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}) (\mathbf{F}_{Sp}^{-1} \mathbf{F}_{Se}^{-1})]^{\underline{4}}$
(6.3.3)

einzuarbeiten, wobei auch hier die Funktionen $\operatorname{grad}_{Sz} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}$ und $\operatorname{Grad}_{S} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}$ im allgemeinen als Punkt- und nicht als Feldfunktionen zu verstehen sind. Formal können die Beziehungen (6.3.3) entsprechend (A.2.5) entwickelt werden.

Mit (6.3.3) sowie den Identitäten (A.1.39) und (A.1.41) können einige Einzelausdrücke aus (6.3.2) umgeformt werden. Es gilt:

$$\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{F}_{Se}) \left(\mathbf{x}_{i}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right) = \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \left(\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{G}_{Se}^{3} \right)^{\underline{1}} \cdot \left(\mathbf{x}_{i}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right),$$

$$\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{F}_{Sp}) \left(\mathbf{x}_{i}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right) = \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \left(\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{G}_{Sp}^{3} \right)^{\underline{1}} \cdot \left(\mathbf{x}_{i}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right)$$
(6.3.4)

sowie

$$\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{G}_{Se}} \cdot (\operatorname{grad} \overset{3}{\mathbf{G}_{Se}}) (\mathbf{x}_{i}' - \mathbf{x}_{S}') = \operatorname{grad}_{Sz} \overset{3}{\mathbf{G}_{Se}} \cdot [\frac{\partial \Psi^{i}}{\overset{3}{\partial \mathbf{G}_{Se}}} \otimes \mathbf{F}_{Se}^{-1} (\mathbf{x}_{i}' - \mathbf{x}_{S}')],$$

$$\frac{\partial \Psi^{i}}{\overset{3}{\partial \mathbf{G}_{Sp}}} \cdot (\operatorname{grad} \overset{3}{\mathbf{G}_{Sp}}) (\mathbf{x}_{i}' - \mathbf{x}_{S}') = \operatorname{Grad}_{S} \overset{3}{\mathbf{G}_{Sp}} \cdot [\frac{\partial \Psi^{i}}{\overset{3}{\partial \mathbf{G}_{Sp}}} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{-1} \mathbf{F}_{Se}^{-1} (\mathbf{x}_{i}' - \mathbf{x}_{S}')].$$

$$(6.3.5)$$

Die materiellen Zeitableitungen der elastischen und plastischen Anteile des Festkörperdeformationsgradienten \mathbf{F}_{S} erhalten mit $(5.4.2)_{1}$, (5.4.18) und (5.4.24) folgende Form:

$$(\mathbf{F}_{Se})'_{S} = \mathbf{L}_{S} \mathbf{F}_{Se} - \mathbf{F}_{Se} \mathbf{L}_{Sp},$$

$$(\mathbf{F}_{Sp})'_{S} = \widehat{\mathbf{L}}_{Sp} \mathbf{F}_{Sp}.$$

$$(6.3.6)$$

Diese Beziehungen können mit (5.4.25), (5.4.39) sowie den Transformationsbeziehungen

nach Tafel 5.2 weiter umgeformt werden. Man erhält:

$$(\mathbf{F}_{Se})'_{S} = (\mathbf{A}_{Se})^{\vartriangle} \mathbf{F}_{Se} + (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{T}) (\mathbf{A}_{Sp})^{\vartriangle} \mathbf{F}_{Se} + \mathbf{W}_{S} \mathbf{F}_{Se} - \mathbf{F}_{Se} \widehat{\mathbf{W}}_{Sp},$$

$$(\mathbf{F}_{Sp})'_{S} = \mathbf{F}_{Se}^{T} (\mathbf{A}_{Sp})^{\vartriangle} \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} + \widehat{\mathbf{W}}_{Sp} \mathbf{F}_{Sp}.$$
(6.3.7)

Mit (6.3.7) gilt:

$$\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \cdot (\mathbf{F}_{Se})'_{S} + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \cdot (\mathbf{F}_{Sp})'_{S} =$$

$$= \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T} \cdot (\mathbf{A}_{Se})^{\Delta} + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T} \cdot \mathbf{W}_{S} + [\mathbf{F}_{Se} \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T} - (\mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \mathbf{I}) \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T}] \cdot (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} + [\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} - \mathbf{F}_{Se}^{T} \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}}] \cdot \widehat{\mathbf{W}}_{Sp}.$$
(6.3.8)

Die Beziehungen (6.3.4), (6.3.5) und (6.3.8) sind in die materiellen Zeitableitungen der freien Energiefunktionen aus (6.3.2) einzuarbeiten, so daß mit (6.2.13)

$$\begin{split} \stackrel{\mathbf{\dot{\Psi}}_{i}^{i}}{\overset{i}{=}} & \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \theta} \left[\dot{\theta} + \operatorname{grad} \theta \cdot \mathbf{u}_{i} \right] + \\ & + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial (\operatorname{grad} \theta)} \cdot \left[(\operatorname{grad} \theta)^{\cdot} + (\operatorname{grad} \operatorname{grad} \theta) \mathbf{u}_{i} \right] + \\ & + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T} \cdot (\mathbf{A}_{Se})^{\Delta} + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T} \cdot \mathbf{W}_{S} + \\ & + \left[\mathbf{F}_{Se} \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T} - (\mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \mathbf{I}) \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T} \right] \cdot (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} + \\ & + \left[\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} - \mathbf{F}_{Se}^{T} \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \right] \cdot \widehat{\mathbf{W}}_{Sp} + \\ & + \left[\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{G}_{Se} \right]^{1} \cdot (\mathbf{\dot{x}}_{i} - \mathbf{\dot{x}}_{S}) + \\ & + \mathbf{F}_{Se}^{T-1} (\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{G}_{Sp})^{1} \cdot (\mathbf{\dot{x}}_{i} - \mathbf{\dot{x}}_{S}) + \\ & + \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} (\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{G}_{Sp})^{1} \cdot (\mathbf{\dot{x}}_{i} - \mathbf{\dot{x}}_{S}) + \\ & + \left[\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{G}_{Se}} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{G}_{Sp}} \right]^{1} \cdot (\mathbf{\dot{x}}_{i} - \mathbf{\dot{x}}_{S}) + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{G}_{Sp}} \mathbf{G}_{Sp} \right]^{1} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} + \left[\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{G}_{Se}} \mathbf{G}_{Se} \right]^{1} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} + \left[\frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{G}_{Se}} \mathbf{G}_{Se} \right]^{1} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} \right]^{2} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} \right]^{2} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} \right]^{2} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} \right]^{2} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} \right]^{2} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} \right]^{2} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} \right]^{2} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} \right]^{2} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} \right]^{2} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} \cdot (\mathbf{G}_{Se})'_{S} \right]^{2} + \\ & + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{Se}^{3} + \left[\operatorname{grad}_{Sz} \mathbf{G}_{SE}^{3} +$$

$$+ \operatorname{Grad}_{S} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} \cdot \left[\frac{\partial \Psi^{i}}{\overset{3}{\partial \mathbf{G}}_{Sp}} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{-1} \mathbf{F}_{Se}^{-1} \left(\mathbf{x}_{i}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right) \right] + \\ + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial (\mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime})} \cdot \left\{ \left(\mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right) - \mathbf{L}_{F} \left(\mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{i}^{\prime} \right) - \right. \\ - \left. \left[(\mathbf{A}_{Se})^{\Delta} + (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} + \mathbf{W}_{S} \right] \left(\mathbf{x}_{i}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right) \right\} + \\ + \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial \mathbf{D}_{F}} \cdot \left[(\mathbf{D}_{F})_{F}^{\prime} - \left(\operatorname{grad} \mathbf{D}_{F} \right) \left(\mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{i}^{\prime} \right) \right].$$

Durch Einsetzen von (6.3.9) in (6.2.14) erhält man die Entropieungleichung in der Form

$$\begin{split} &-\dot{\theta}\left[\P + \frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\theta}\right] - (\operatorname{grad}\theta)^{*} \cdot \frac{\partial\Psi^{I}}{\partial(\operatorname{grad}\theta)} - \\ &-\operatorname{grad}\operatorname{grad}\theta \cdot \left[\frac{\partial\Psi^{S}}{\partial(\operatorname{grad}\theta)} \otimes \mathbf{u}_{S} + \frac{\partial\Psi^{F}}{\partial(\operatorname{grad}\theta)} \otimes \mathbf{u}_{F}\right] - \\ &- \frac{1}{\theta}\operatorname{grad}\theta \cdot \left[\mathbf{h} + \theta \frac{\partial\Psi^{S}}{\partial\theta} \mathbf{u}_{S} + \theta \frac{\partial\Psi^{F}}{\partial\theta} \mathbf{u}_{F}\right] - \\ &- (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S}) \cdot \left[\hat{\mathbf{p}}^{F} - \lambda \operatorname{grad} n^{F} + \mathbf{F}_{Se}^{T-1} (\frac{\partial\Psi^{F}}{\partial\mathbf{F}_{Se}} \overset{3}{\mathbf{G}_{Se}})^{1} + \\ &+ \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} (\frac{\partial\Psi^{F}}{\partial\mathbf{F}_{Sp}} \overset{3}{\mathbf{G}_{Sp}})^{1}\right] - \\ &- (\mathbf{A}_{Se})^{\Delta} \cdot \left[\rho^{S} \mathbf{K}^{S} - \lambda n^{S} \mathbf{I} + \frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \frac{\partial\Psi^{F}}{\partial(\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} \otimes (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})\right] - \\ &- (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} \cdot \left[\rho^{S} \mathbf{K}^{S} - \lambda n^{S} \mathbf{I} + \mathbf{F}_{Se} \frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \\ &- (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} \cdot \left[\rho^{S} \mathbf{K}^{S} - \lambda n^{S} \mathbf{I} + \mathbf{F}_{Se} \frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \\ &- (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} \cdot \left[\rho^{S} \mathbf{K}^{S} - \lambda n^{S} \mathbf{I} + \mathbf{F}_{Se} \frac{\partial\Psi^{F}}{\partial(\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} \otimes (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})\right] - \\ &- (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} \cdot \left[\rho^{S} \mathbf{K}^{S} - \lambda n^{S} \mathbf{I} + \mathbf{F}_{Se} \frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Sp}^{T} - \\ &- (\mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \mathbf{I}) \frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \frac{\partial\Psi^{F}}{\partial(\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} \otimes (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})\right] - \\ &- \mathbf{W}_{S} \cdot \left[\frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \frac{\partial\Psi^{F}}{\partial(\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} \otimes (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})\right] - \\ &- \widehat{\mathbf{W}}_{Sp} \cdot \left[\frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} - \mathbf{F}_{Se}^{T} \frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\mathbf{F}_{Se}}\right] - \\ &- \mathbf{D}_{F} \cdot \left[\rho^{F} \mathbf{K}^{F} - \lambda n^{F} \mathbf{I} - \frac{\partial\Psi^{S}}{\partial(\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} \otimes (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})\right] + \end{aligned}$$

$$+ \mathbf{W}_{F} \cdot \left[\frac{\partial \Psi^{S}}{\partial (\mathbf{x}_{F}^{'} - \mathbf{x}_{S}^{'})} \otimes (\mathbf{x}_{F}^{'} - \mathbf{x}_{S}^{'})\right] - (\mathbf{G}_{Se}^{3})_{S}^{'} \cdot \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{G}_{Se}^{'}} - \\ - (\mathbf{G}_{Sp}^{3})_{S}^{'} \cdot \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{G}_{Sp}^{'}} - \operatorname{grad}_{Sz}^{3} \mathbf{G}_{Se}^{'} \cdot \left[\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{G}_{Se}^{'}} \otimes \mathbf{F}_{Se}^{-1} (\mathbf{x}_{F}^{'} - \mathbf{x}_{S}^{'})\right] - \\ - \operatorname{Grad}_{S}^{3} \mathbf{G}_{Sp}^{'} \cdot \left[\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{G}_{Sp}^{'}} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{-1} \mathbf{F}_{Se}^{-1} (\mathbf{x}_{F}^{'} - \mathbf{x}_{S}^{'})\right] - (\mathbf{D}_{F})_{F}^{'} \cdot \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{D}_{F}^{'}} + \\ + \operatorname{grad} \mathbf{D}_{F}^{'} \cdot \left[\frac{\partial \Psi^{S}}{\partial \mathbf{D}_{F}^{'}} \otimes (\mathbf{x}_{F}^{'} - \mathbf{x}_{S}^{'})\right] - (\mathbf{x}_{F}^{''} - \mathbf{x}_{S}^{''}) \cdot \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial (\mathbf{x}_{F}^{'} - \mathbf{x}_{S}^{'})} \geq 0 \,.$$

In (6.3.10) wurde die Aufspaltung des Geschwindigkeitsgradienten L_F in D_F und W_F vorgenommen. Die Größe

$$\Psi^I = \Psi^S + \Psi^F \tag{6.3.11}$$

repräsentiert den sogenannten inneren Anteil der auf ein aktuelles Volumenelement bezogenen freien Energie des betrachteten porösen Mediums.

Die Entropieungleichung (6.3.10) kann in Analogie zu *Coleman & Noll* [1963] ausgewertet werden, wobei auch etliche Argumente von *Bowen* [1976] sowie *de Boer & Ehlers* [1986b] zum Tragen kommen.

Ordnet man den thermodynamischen Prozeßvariablen ϕ gemäß (6.2.22)₃ feste Werte zu, so muß die Dissipationsungleichung (6.3.10) für beliebige Werte der freien Parameter $\dot{\theta}$, (grad θ), grad grad θ , (\mathbf{A}_{Se})^{\triangle}, \mathbf{W}_{S} , $\widehat{\mathbf{W}}_{Sp}$, \mathbf{W}_{F} , ($\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}$)'_S, grad_{Sz} $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}$, Grad_S $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}$, (\mathbf{D}_{F})'_F, grad \mathbf{D}_{F} sowie $\mathbf{x}'_{F} - \overset{"}{\mathbf{x}}_{S}$ zu erfüllen sein. Es ist jedoch zu beachten, daß

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\vartriangle} = \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \left(\widehat{\Gamma}_{Sp}\right)_p^{\vartriangle} \mathbf{F}_{Se}^{-1}; \qquad (\widehat{\Gamma}_{Sp})_p^{\vartriangle} = \widehat{\mathbf{D}}_{Sp}$$
(6.3.12)

nicht als freier Parameter aufgefaßt werden darf, da die plastische Deformationsgeschwindigkeit der Zwischenkonfiguration selbst eine Funktion des Variablensatzes ϕ und anderer Variablen ist.

Die folgenden Beziehungen sind notwendige und hinreichende Bedingung für die ständige Gültigkeit der Dissipationsungleichung:

$$\P = -\frac{\partial \Psi^I}{\partial \theta}, \qquad (6.3.13)$$

$$\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial (\operatorname{grad} \theta)} = \mathbf{0} \quad \to \quad \frac{\partial \Psi^{S}}{\partial (\operatorname{grad} \theta)} = -\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial (\operatorname{grad} \theta)}, \quad (6.3.14)$$

$$\frac{\partial \Psi^F}{\partial (\operatorname{grad} \theta)} \otimes (\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S) = -(\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S) \otimes \frac{\partial \Psi^F}{\partial (\operatorname{grad} \theta)}, \qquad (6.3.15)$$

$$\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Psi^{S}}{\partial (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} = -\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})}, \quad (6.3.16)$$

$$\frac{\partial \Psi^I}{\partial \mathbf{D}_F} = -\left(\frac{\partial \Psi^I}{\partial \mathbf{D}_F}\right)^T,\tag{6.3.17}$$

so daß

$$\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{D}_{F}} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Psi^{S}}{\partial \mathbf{D}_{F}} = -\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{D}_{F}}, \qquad (6.3.18)$$

$$\frac{\partial \Psi^S}{\partial \mathbf{D}_F} \otimes (\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S) = -(\frac{\partial \Psi^S}{\partial \mathbf{D}_F})^T \otimes (\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S), \qquad (6.3.19)$$

so daß mit (6.3.18)

$$\frac{\partial \Psi^S}{\partial \mathbf{D}_F} = \frac{\partial \Psi^F}{\partial \mathbf{D}_F} = \mathbf{0}, \qquad (6.3.20)$$

$$\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{G}_{Se}^{3}} \stackrel{3}{=} \stackrel{0}{\mathbf{0}} \rightarrow \frac{\partial \Psi^{S}}{\partial \mathbf{G}_{Se}^{3}} = -\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{G}_{Se}^{3}}, \qquad (6.3.21)$$

$$\frac{\partial \Psi^F}{\partial \mathbf{G}_{Se}} \otimes \mathbf{F}_{Se}^{-1} \left(\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S \right) = -\left[\frac{\partial \Psi^F}{\partial \mathbf{G}_{Se}} \otimes \mathbf{F}_{Se}^{-1} \left(\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S \right) \right]^{\frac{34}{T}}, \tag{6.3.22}$$

so daß mit (6.3.21)

$$\frac{\partial \Psi^F}{\overset{3}{\partial \mathbf{G}_{Se}}} = \frac{\partial \Psi^S}{\overset{3}{\partial \mathbf{G}_{Se}}} = \overset{3}{\mathbf{0}}, \qquad (6.3.23)$$

$$\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{G}_{Sp}} = \overset{3}{\mathbf{0}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Psi^{S}}{\partial \mathbf{G}_{Sp}} = -\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{G}_{Sp}}, \tag{6.3.24}$$

$$\frac{\partial \Psi^F}{\partial \mathbf{G}_{Sp}} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{-1} \mathbf{F}_{Se}^{-1} \left(\mathbf{x}_F' - \mathbf{x}_S' \right) = -\left[\frac{\partial \Psi^F}{\partial \mathbf{G}_{Sp}} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{-1} \mathbf{F}_{Se}^{-1} \left(\mathbf{x}_F' - \mathbf{x}_S' \right) \right]^{\frac{34}{T}}, \quad (6.3.25)$$

so daß mit (6.3.24)

$$\frac{\partial \Psi^F}{\partial \mathbf{G}_{Sp}} = -\frac{\partial \Psi^S}{\partial \mathbf{G}_{Sp}} = \overset{3}{\mathbf{0}}, \qquad (6.3.26)$$

$$\rho^{S} \mathbf{K}^{S} - \lambda \, n^{S} \mathbf{I} = -\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \, \mathbf{F}_{Se}^{T} + \frac{\partial \Psi^{F}}{\partial (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S})} \otimes (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S}) \tag{6.3.27}$$

sowie

$$\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}{}^{T} - \frac{\partial \Psi^{F}}{\partial (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S})} \otimes (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S}) =$$

$$\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S}} = 0$$

$$(6.3.28)$$

$$= \left[\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \frac{\partial \Psi^{F}}{\partial (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S})} \otimes (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S})\right]^{T},$$

$$\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}{}^{T} - \mathbf{F}_{Se}^{T} \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = \left[\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}{}^{T} - \mathbf{F}_{Se}^{T} \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}}\right]^{T}, \qquad (6.3.29)$$

$$\frac{\partial \Psi^S}{\partial (\mathbf{x}_F' - \mathbf{x}_S)} \otimes (\mathbf{x}_F' - \mathbf{x}_S) = (\mathbf{x}_F' - \mathbf{x}_S) \otimes \frac{\partial \Psi^S}{\partial (\mathbf{x}_F' - \mathbf{x}_S)}.$$
 (6.3.30)

Es verbleibt die Restungleichung

$$- \frac{1}{\theta} \operatorname{grad} \theta \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S}) \cdot \hat{\mathbf{f}}^{F} - (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} \cdot [\rho^{S} \mathbf{K}^{S} - \lambda n^{S} \mathbf{I} + \mathbf{F}_{Se} \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T} - (\mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \mathbf{I}) \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \frac{\partial \Psi^{F}}{\partial (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} \otimes (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S}) - \mathbf{D}_{F} \cdot [\rho^{F} \mathbf{K}^{F} - \lambda n^{F} \mathbf{I} - \frac{\partial \Psi^{S}}{\partial (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} \otimes (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})] \ge 0$$

$$(6.3.31)$$

mit

$$\mathbf{m} = \mathbf{h} + \theta \frac{\partial \Psi^{S}}{\partial \theta} \mathbf{u}_{S} + \theta \frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \theta} \mathbf{u}_{F},$$

$$\hat{\mathbf{f}}^{F} = \hat{\mathbf{p}}^{F} - \lambda \operatorname{grad} n^{F} + \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \left(\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \stackrel{3}{\mathbf{G}}_{Se} \right)^{\underline{1}} + \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \left(\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \stackrel{3}{\mathbf{G}}_{Sp} \right)^{\underline{1}}.$$

$$(6.3.32)$$

Die Beziehungen (6.3.13) - (6.3.32) sind als thermodynamische Restriktionen bei der Entwicklung konstitutiver Gleichungen zu beachten. Die Restriktionen (6.3.13), (6.3.14),

(6.3.16), (6.3.21), (6.3.24), (6.3.27) und (6.3.31) können im Zusammenhang mit (6.3.11) direkt aus (6.3.10) geschlossen werden. Für die übrigen Restriktionen ist die Ausnutzung von Symmetrie- und Antimetrieeigenschaften erforderlich.

Die Beziehung (6.3.15) ist mit

grad grad
$$\theta = (\operatorname{grad} \operatorname{grad} \theta)^T$$
, (6.3.33)

(6.3.14) sowie

$$\mathbf{u}_F - \mathbf{u}_S = \mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S, \qquad (6.3.34)$$

vgl. (4.2.6), offensichtlich. (6.3.17) kann direkt aus der Symmetrie von $(\mathbf{D}_F)'_F$ geschlossen werden. Die Beziehung (6.3.19) folgt entsprechend aus der Symmetrieeigenschaft

$$\operatorname{grad} \mathbf{D}_F = \left(\operatorname{grad} \mathbf{D}_F\right)^{\frac{12}{T}}.$$
 (6.3.35)

Die Restriktionen (6.3.22) und (6.3.25) setzen die Symmetrieeigenschaften

$$\operatorname{grad}_{Sz} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} = (\operatorname{grad}_{Sz} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se})^{\overset{34}{T}},$$

$$\operatorname{Grad}_{S} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} = (\operatorname{Grad}_{S} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp})^{\overset{34}{T}}$$

$$(6.3.36)$$

voraus. Schließlich sind (6.3.28) - (6.3.30) mit

$$\mathbf{W}_{S} = -\mathbf{W}_{S}^{T}, \quad \widehat{\mathbf{W}}_{Sp} = -\widehat{\mathbf{W}}_{Sp}^{T}, \quad \mathbf{W}_{F} = -\mathbf{W}_{F}^{T}$$
(6.3.37)

begründet.

Die Beziehungen (6.3.18), (6.3.20), (6.3.23) und (6.3.26) sind direkte Konsequenzen aus den übrigen thermodynamischen Restriktionen.

Die Restriktionen (6.3.13) - (6.3.26) zeigen, daß die Funktionen Ψ^I , Ψ^S , Ψ^F und ¶ nicht vom vollständigen Parametersatz ϕ aus $(6.2.22)_3$ abhängen, sondern daß nur die folgenden Abhängigkeiten zugelassen sind:

$$\Psi^{I}, \P = f(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}),$$

$$\Psi^{S} = \Psi^{S}(\theta, \operatorname{grad} \theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}, \mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S}),$$

$$\Psi^{F} = \Psi^{F}(\theta, \operatorname{grad} \theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}, \mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S}).$$
(6.3.38)

Aus einzelnen Restriktionen können weitere spezielle Rückschlüsse gewonnen werden, vgl. auch de Boer & Ehlers [1986b, Gln. (4.5.27) - (4.5.29)]. So folgt aus (6.3.15) durch

Differentiation nach der Differenzgeschwindigkeit $\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S}$

$$\frac{\partial^{2}\Psi^{F}}{\partial(\operatorname{grad}\theta)\otimes\partial(\mathbf{x}_{F}^{\prime}-\mathbf{x}_{S}^{\prime})}\otimes(\mathbf{x}_{F}^{\prime}-\mathbf{x}_{S}^{\prime})+\frac{\partial\Psi^{F}}{\partial(\operatorname{grad}\theta)}\otimes\mathbf{I}=$$

$$=-(\mathbf{x}_{F}^{\prime}-\mathbf{x}_{S}^{\prime})\otimes\frac{\partial^{2}\Psi^{F}}{\partial(\operatorname{grad}\theta)\otimes\partial(\mathbf{x}_{F}^{\prime}-\mathbf{x}_{S}^{\prime})}-\mathbf{I}\otimes\frac{\partial\Psi^{F}}{\partial(\operatorname{grad}\theta)},$$
(6.3.39)

so daß mit (6.3.14) an der Stelle $\mathbf{\dot{x}}_{F}-\mathbf{\dot{x}}_{S}=\mathbf{0}$ direkt auf

$$\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial (\operatorname{grad} \theta)}\Big|_{\mathbf{\dot{x}}_{F}-\mathbf{\dot{x}}_{S}=\mathbf{0}} = \frac{\partial \Psi^{S}}{\partial (\operatorname{grad} \theta)}\Big|_{\mathbf{\dot{x}}_{F}-\mathbf{\dot{x}}_{S}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$$
(6.3.40)

geschlossen werden kann.

Entsprechend folgt aus (6.3.30)

$$\frac{\partial^2 \Psi^S}{\partial (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S) \otimes \partial (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S)} \otimes (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S) + \frac{\partial \Psi^S}{\partial (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S)} \otimes \mathbf{I} =$$

$$= (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S) \otimes \frac{\partial^2 \Psi^S}{\partial (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S) \otimes \partial (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S)} + \mathbf{I} \otimes \frac{\partial \Psi^S}{\partial (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S)},$$
(6.3.41)

so daß mit (6.3.16)

$$\frac{\partial \Psi^{S}}{\partial (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} \bigg|_{\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S} = \mathbf{0}} = \frac{\partial \Psi^{F}}{\partial (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} \bigg|_{\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S} = \mathbf{0}} = \mathbf{0}.$$
(6.3.42)

Für den Sonderfall $\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S} = \mathbf{0}$, also wenn keine Relativgeschwindigkeit zwischen Festkörperskelett und Flüssigkeit existiert, zeigen die Beziehungen (6.3.40) und (6.4.42), daß die Abhängigkeiten der freien Energien Ψ^{S} und Ψ^{F} von grad θ und $\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S}$ entfallen.

Aus der Restungleichung (6.3.31) können weitere interessante Ergebnisse gewonnen werden, vgl. auch *Bowen* [1976, Abschnitt 2.3] sowie *de Boer & Ehlers* [1986b, Abschnitt 4.5].

Mit (6.3.16) erhält (6.3.31) folgende Form:

$$\mathcal{D}(\phi, \ldots) = -\frac{1}{\theta} \operatorname{grad} \theta \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S}) \cdot \hat{\mathbf{f}}^{F} - \\ -(\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} \cdot [\rho^{S} \mathbf{K}^{S} - \lambda n^{S} \mathbf{I} + \mathbf{F}_{Se} \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \\ -(\mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \mathbf{I}) \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T} + \frac{\partial \Psi^{S}}{\partial (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} \otimes (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})] - \\ -\mathbf{D}_{F} \cdot [\rho^{F} \mathbf{K}^{F} - \lambda n^{F} \mathbf{I} + \frac{\partial \Psi^{F}}{\partial (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} \otimes (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})] \ge 0.$$

$$(6.3.43)$$

Diese Ungleichung repräsentiert den irreversiblen bzw. dissipativen Anteil der Entropieungleichung des betrachteten Modells.

Im folgenden soll die Dissipationsungleichung für den Fall des thermodynamischen Gleichgewichts bzw. des Mischungsgleichgewichts ausgewertet werden; bezüglich des Begriffs Mischungsgleichgewicht (equilibrium state for the mixture) vgl. z. B. *Bowen* [1976, S. 50]. Das vorliegende Modell eines porösen Mediums befindet sich im Mischungsgleichgewicht, wenn (6.3.43) minimal wird. Dieser Zustand wird erreicht, wenn die Prozeßvariablen aus (6.2.22)₃ die spezielle Form

$$\phi_0 = \{\theta, \text{grad}\,\theta = \mathbf{0}, \,\mathbf{F}_{Se}, \,\mathbf{F}_{Sp}, \,\mathbf{\ddot{G}}_{Se}, \,\mathbf{\ddot{G}}_{Sp}, \,\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S = \mathbf{0}, \,\mathbf{D}_F = \mathbf{0}\}$$
(6.3.44)

annehmen und zusätzlich

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} = \mathbf{0} \tag{6.3.45}$$

gesetzt werden kann, so daß

$$\mathcal{D}(\phi_0, \ldots) = 0. \tag{6.3.46}$$

Sofern sich das Festkörperskelett im elastischen Bereich befindet, ist (6.3.45) identisch erfüllt. Im plastischen Bereich gilt (6.3.45) dagegen nur für den Fall neutraler Spannungsänderungen verfestigender Materialien.

Das sogenannte strenge Minimum der Dissipationsungleichung (strong equilibrium state) kann im Zusammenhang mit (6.3.45) auf der Basis der Ansätze

grad
$$\theta = \gamma \mathbf{a}$$
,
 $\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S = \gamma \mathbf{v}$, (6.3.47)
 $\mathbf{D}_F = \gamma \mathbf{N}$

näher untersucht werden. In (6.3.47) sind N ein beliebiger Tensor, a und v beliebige Vektoren und γ ein beliebiger Skalar.

Als Kriterium für die Existenz eines lokalen Minimums gelten die Forderungen, vgl. *de Boer & Ehlers* [1986b, (4.5.36) und (4.5.37)]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma} \mathcal{D}(\zeta) \Big|_{\gamma=0} = 0, \qquad (6.3.48)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\gamma^2} \mathcal{D}(\zeta) \Big|_{\gamma=0} > 0.$$

Der Parametersatz ζ ist darin durch Einsetzen der Ansätze (6.3.47) in ϕ gemäß (6.2.22)₃ definiert:

$$\zeta = \{\theta, \gamma \mathbf{a}, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}, \gamma \mathbf{v}, \gamma \mathbf{N}\}.$$
(6.3.49)

Es ist jedoch zu beachten, daß die für die Existenz des strengen Minimums eingeführte Forderung $(\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} = \mathbf{0}$ nicht damit gleichzusetzen ist, daß auch $\mathbf{F}_{Sp} = \mathbf{0}$ sowie $\mathbf{G}_{Sp} = \overset{3}{\mathbf{0}}$. Vielmehr kennzeichnen $\mathbf{F}_{Sp} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{G}_{Sp} \neq \overset{3}{\mathbf{0}}$ eine infolge der Belastungsgeschichte mögliche, zur Zeit t bereits bestehende plastische Deformation des Festkörperskeletts.

Mit (6.3.47) und (6.3.49) folgt aus (6.3.43):

$$\mathcal{D}(\zeta) = -\frac{1}{\theta} \gamma \mathbf{a} \cdot \mathbf{m}(\zeta) - \gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{f}}^{F}(\zeta) -$$

$$-\gamma \mathbf{N} \cdot \left[(\rho^{F} \mathbf{K}^{F} - \lambda n^{F} \mathbf{I})(\zeta) + \frac{\partial \Psi^{F}}{\partial (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S})}(\zeta) \otimes \gamma \mathbf{v} \right] \ge 0.$$

$$(6.3.50)$$

Damit lautet die notwendige Bedingung $(6.3.48)_1$ für die Existenz eines lokalen Minimums

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma} \mathcal{D}(\zeta) \Big|_{\gamma=0} = \left[-\frac{1}{\theta} \,\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}(\zeta) - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{f}}^{F}(\zeta) - \mathbf{N} \cdot (\rho^{F} \,\mathbf{K}^{F} - \lambda \, n^{F} \,\mathbf{I})(\zeta) \right] \Big|_{\gamma=0} = 0, \quad (6.3.51)$$

so daß im Vergleich der Parametersätze ϕ_0 aus (6.3.44) und ζ aus (6.3.49) auf

$$\mathbf{m}(\phi_0) = \mathbf{m}_0 = \mathbf{0},$$

$$\hat{\mathbf{f}}^F(\phi_0) = \hat{\mathbf{f}}_0^F = \mathbf{0},$$

$$(\rho^F \mathbf{K}^F - \lambda n^F \mathbf{I})(\phi_0) = (\rho^F \mathbf{K}^F - \lambda n^F \mathbf{I})_0 = \mathbf{0}$$

(6.3.52)

geschlossen werden kann. Die Beziehungen (6.3.52) zeigen, daß die Funktionen \mathbf{m} , $\hat{\mathbf{f}}^F$ und $\rho^F \mathbf{K}^F - \lambda n^F \mathbf{I}$ im Mischungsgleichgewicht verschwinden; unabhängig davon, welcher Wert den Variablen ϕ_0 zugeordnet wird.

Die Untersuchung der hinreichenden Bedingung $(6.3.48)_2$ kann an dieser Stelle unterbleiben, da die Existenz eines Minimums für (6.3.43) mit (6.3.44), (6.3.45) und (6.3.52) offensichtlich ist.

Im folgenden sollen die Resultate der vorangegangenen Untersuchungen für den Fall des thermodynamischen Gleichgewichts des betrachteten Zweikomponentenmodells aufgelistet werden. Entsprechend (6.3.52) werden die verschiedenen Funktionen im Mischungsgleichgewicht durch den Index 0 gekennzeichnet.

Mit (6.3.38), (6.3.40), (6.3.42) und (6.3.44) gilt

$$\Psi^{I}, \P = \Psi_{0}^{I}, \P_{0} = f_{0}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}),$$

$$\Psi_{0}^{S} = \Psi_{0}^{S}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}),$$

$$\Psi_{0}^{F} = \Psi_{0}^{F}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}),$$
(6.3.53)

so daß mit (6.3.27)

$$\left(\rho^{S} \mathbf{K}^{S} - \lambda \, n^{S} \mathbf{I}\right)_{0} = -\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \, \mathbf{F}_{Se}^{T} \,. \tag{6.3.54}$$

 $Mit (5.2.11)_3, (6.2.8), (6.3.52)_3 und (6.3.54)$ folgt für die Partialspannungen von Festkörperskelett und Flüssigkeit

$$\mathbf{T}_{0}^{S} = (\Psi^{S} - \lambda \, n^{S})_{0} \,\mathbf{I} + \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \,\mathbf{F}_{Se}^{T} ,$$

$$\mathbf{T}_{0}^{F} = (\Psi^{F} - \lambda \, n^{F})_{0} \,\mathbf{I} .$$
(6.3.55)

Entsprechend folgt aus $(6.3.52)_1$ und $(6.3.52)_2$ bei Beachtung von (6.3.32)

$$\mathbf{h}_{0} = \mathbf{0},$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{0}^{F} = \lambda \operatorname{grad} n^{F} - \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \left(\frac{\partial \Psi_{0}^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} \right)^{\underline{1}} - \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \left(\frac{\partial \Psi_{0}^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} \right)^{\underline{1}},$$

$$(6.3.56)$$

wobei in $(6.3.56)_1$ beachtet wurde, daß wegen $\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S = \mathbf{0}$

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{u}_F = \mathbf{0}\,,\tag{6.3.57}$$

vgl. (4.2.5) und (4.2.6).

Bei Verzicht auf die Forderung (6.3.45) liefert die Dissipationsungleichung (6.3.43) für $\phi=\phi_0$

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\vartriangle} \cdot [\mathbf{T}_{0}^{S} - (\Psi^{S} - \lambda n^{S})_{0} \mathbf{I} - \mathbf{F}_{Se} \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T} + (\mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \mathbf{I}) \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T}] \ge 0, \quad (6.3.58)$$

wobei $(5.2.11)_3$, (6.2.8) und $(6.3.53)_1$ beachtet wurden. Diese Ungleichung kennzeichnet die auch für $\phi = \phi_0$ auftretende Abweichung vom Mischungsgleichgewicht infolge anwachsender plastischer Deformationen; mit anderen Worten: Wenn $(\mathbf{A}_{Sp})^{\triangle} \neq \mathbf{0}$, dann ist das Minimum für die Dissipationsungleichung durch (6.3.58) gegeben.

Unter den genannten Voraussetzungen kann (6.3.58) daher als Restriktion für den Zuwachs der plastischen Arbeit verstanden werden.

6.4 Konstitutive Gleichungen und thermodynamische Restriktionen in der Nähe des Mischungsgleichgewichts

Entsprechend dem Vorgehen von *de Boer & Ehlers* [1986b] können alle Auswirkungsfunktionen sowie die Dissipationsungleichung additiv in Gleichgewichtsgrößen (Index 0) und Zusatz- bzw. Nichtgleichgewichtsgrößen (Index n) zerlegt werden, so daß

$$f(\phi) = f_0(\phi_0) + f_n(\phi), \qquad (6.4.1)$$

wobei für die Zusatzgrößen

$$f_n(\phi_0) = 0, \qquad (6.4.2)$$

gefordert wird. Der infolge eines Anwachsens der plastischen Arbeit auftretende dissipative Mechanismus soll dabei zunächst wiederum unberücksichtigt bleiben, d. h. man fordert entsprechend (6.3.45)

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} = \mathbf{0}.\tag{6.4.3}$$

Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht sind demnach zunächst nur durch Abweichungen von grad $\theta = \mathbf{0}$, $\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S = \mathbf{0}$ und $\mathbf{D}_F = \mathbf{0}$ definiert.

Bei Voraussetzung von (6.4.3) folgt mit (6.3.44) aus der Dissipationsungleichung (6.3.43), daß für die Gleichgewichtsgrößen

$$\mathcal{D}_0(\phi_0) = 0, \qquad (6.4.4)$$

so daß wegen

$$\mathcal{D}_n(\phi_0) = 0 \tag{6.4.5}$$

nur der Nichtgleichgewichtsanteil $\mathcal{D}_n(\phi)$ Werte größer als Null annehmen kann. Daher gilt:

$$\mathcal{D}_{n}(\phi) = -\frac{1}{\theta} \operatorname{grad} \theta \cdot \mathbf{m}_{n} - (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S}) \cdot \hat{\mathbf{f}}_{n}^{F} - - \mathbf{D}_{F} \cdot [(\rho^{F} \mathbf{K}^{F} - \lambda n^{F} \mathbf{I})_{n} + \frac{\partial \Psi_{n}^{F}}{\partial (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})} \otimes (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})] \ge 0.$$

$$(6.4.6)$$

Diese Ungleichung kann benutzt werden, um Restriktionen für die Auswirkungsfunktionen \mathbf{m}_n , $\hat{\mathbf{f}}_n^F$ und $(\rho^F \mathbf{K}^F - \lambda n^F \mathbf{I})_n$ zu bestimmen.

Da bei porösen Medien in der Regel nur kleine Temperaturgradienten, Differenzgeschwindigkeiten zwischen Festkörperskelett und Flüssigkeit sowie Deformationsgeschwindigkeiten der Flüssigkeit zu erwarten sind, werden nur solche thermodynamischen Prozesse betrachtet, die sich in der Nähe des Mischungsgleichgewichts befinden. Dazu werden die Nichtgleichgewichtsanteile der jeweiligen Auswirkungsfunktionen in der Nähe von $\phi = \phi_0$ linearisiert; d. h. man entwickelt die Funktionen $f_n(\phi)$ nach den Anfangswerten der Parameter grad θ , $\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S$ und \mathbf{D}_F in eine Taylorreihe, die man jeweils nach dem linearen Glied abbricht.

Unter Berücksichtigung von (6.3.38) folgt für die Nichtgleichgewichtsanteile der freien Energien von Festkörperskelett und Flüssigkeit

$$\Psi_{n}^{i} = \Psi_{n}^{i}(\phi_{0}) + \frac{\partial \Psi_{n}^{i}}{\partial (\operatorname{grad} \theta)} \Big|_{\phi=\phi_{0}} \cdot \operatorname{grad} \theta + \frac{\partial \Psi_{n}^{i}}{\partial (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S})} \Big|_{\phi=\phi_{0}} \cdot (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S}), \quad (6.4.7)$$

so daß mit (6.3.40), (6.3.42) und (6.4.2) auf

$$\Psi_n^S = \Psi_n^F = 0 \tag{6.4.8}$$

geschlossen werden kann.

Damit folgt aus (6.3.38), (6.3.53), (6.4.1) und (6.4.8):

$$\Psi^{I}, \P = \Psi_{0}^{I}, \P_{0} = f(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}),$$

$$\Psi^{S} = \Psi_{0}^{S} = \Psi^{S}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}),$$

$$\Psi^{F} = \Psi_{0}^{F} = \Psi^{F}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}).$$
(6.4.9)

Mit $(6.4.9)_3$ reduziert sich der Nichtgleichgewichtsanteil der Dissipationsungleichung auf

$$\mathcal{D}_{n}(\phi) = -\frac{1}{\theta} \operatorname{grad} \theta \cdot \mathbf{m}_{n} - (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S}) \cdot \hat{\mathbf{f}}_{n}^{F} - \\ - \mathbf{D}_{F} \cdot (\rho^{F} \mathbf{K}^{F} - \lambda \, n^{F} \, \mathbf{I})_{n} \ge 0.$$
(6.4.10)

In Analogie zu (6.4.7) gilt für den Nichtgleichgewichtsanteil des Zuflußvektors m:

$$\mathbf{m}_{n}(\phi) = \mathbf{m}_{n}(\phi_{0}) + \frac{\partial \mathbf{m}_{n}}{\partial (\operatorname{grad} \theta)} \Big|_{\phi=\phi_{0}} \operatorname{grad} \theta +$$

$$+ \frac{\partial \mathbf{m}_{n}}{\partial (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S})} \Big|_{\phi=\phi_{0}} (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S}) + \frac{\partial \mathbf{m}_{n}}{\partial \mathbf{D}_{F}} \Big|_{\phi=\phi_{0}} \mathbf{D}_{F}.$$

$$(6.4.11)$$

Mit (6.4.2) und den Definitionen

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\theta}(\phi_{0}) &= -\frac{\partial \mathbf{m}_{n}}{\partial (\operatorname{grad} \theta)} \Big|_{\phi=\phi_{0}}, \\ \mathbf{M}_{V}(\phi_{0}) &= -\frac{\partial \mathbf{m}_{n}}{\partial (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S})} \Big|_{\phi=\phi_{0}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{D}(\phi_{0}) &= -\frac{\partial \mathbf{m}_{n}}{\partial \mathbf{D}_{F}} \Big|_{\phi=\phi_{0}} \end{aligned}$$

$$(6.4.12)$$

folgt daraus

$$\mathbf{m}_{n}(\phi) = -\mathbf{M}_{\theta}(\phi_{0}) \operatorname{grad} \theta - \mathbf{M}_{V}(\phi_{0}) \left(\mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime}\right) - \mathbf{M}_{D}^{3}(\phi_{0}) \mathbf{D}_{F}.$$
(6.4.13)

Die Beziehung (6.4.13) muß wie die übrigen konstitutiven Beziehungen dem Prinzip der materiellen Objektivität genügen, so daß in Analogie zu (6.3.23)

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{m}_n(\phi) = \mathbf{m}_n(\phi) \tag{6.4.14}$$

bzw. mit (6.4.13)

$$\mathbf{Q} \left[-\mathbf{M}_{\theta}(\phi_{0}) \operatorname{grad} \theta - \mathbf{M}_{V}(\phi_{0}) \left(\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S} \right) - \mathbf{\overset{3}{M}}_{D}(\phi_{0}) \mathbf{D}_{F} \right] =$$

$$= -\mathbf{M}_{\theta}(\overset{*}{\phi}_{0}) \mathbf{Q} \operatorname{grad} \theta - \mathbf{M}_{V}(\overset{*}{\phi}_{0}) \mathbf{Q} \left(\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S} \right) - \mathbf{\overset{3}{M}}_{D}(\overset{*}{\phi}_{0}) \left(\mathbf{Q} \mathbf{D}_{F} \mathbf{Q}^{T} \right)$$

$$(6.4.15)$$

zu verlangen ist. Daraus resultieren die Forderungen

$$\mathbf{M}_{\theta}(\overset{*}{\phi}_{0}) = \mathbf{Q} \,\mathbf{M}_{\theta}(\phi_{0}) \,\mathbf{Q}^{T},$$

$$\mathbf{M}_{V}(\overset{*}{\phi}_{0}) = \mathbf{Q} \,\mathbf{M}_{V}(\phi_{0}) \,\mathbf{Q}^{T},$$

$$\overset{3}{\mathbf{M}}_{D}(\overset{*}{\phi}_{0}) = \left[\left\{ \left[\mathbf{Q} \,\overset{3}{\mathbf{M}}_{D}(\phi_{0}) \,\right]^{\underline{3}} \,\mathbf{Q}^{T} \right\}^{\underline{3}\overset{23}{T}} \,\mathbf{Q}^{T} \right]^{\underline{3}\overset{23}{T}}.$$
(6.4.16)

Die Beziehungen $(6.4.16)_1$ und $(6.4.16)_2$ sind offensichtlich, $(6.4.16)_3$ kann mit den Identitäten (A.1.28), (A.1.30) und (A.1.36) – (A.1.38) in Analogie zu (5.6.9) – (5.6.11) geschlossen werden.

Im Rahmen einfacher isotroper Ansätze kann (6.4.16) mit

$$\mathbf{M}_{\theta}(\phi_{0}) = \beta_{\theta}(\phi_{0}) \mathbf{I},$$

$$\mathbf{M}_{V}(\phi_{0}) = \beta_{V}(\phi_{0}) \mathbf{I},$$

$$\overset{3}{\mathbf{M}}_{D}(\phi_{0}) = \beta_{D}(\phi_{0}) \overset{3}{\mathbf{E}}$$
(6.4.17)

erfüllt werden, worin $\stackrel{3}{\mathbf{E}}$ den dreistufigen Fundamentaltensor kennzeichnet, vgl. z. B. de Boer [1982, Abschnitt 4.10].

Im Zusammenhang mit der Beziehung

$$\overset{3}{\mathbf{E}}\mathbf{D}_{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{D}_{F} = 2 \overset{A}{\mathbf{d}}_{F} = \mathbf{0}, \qquad (6.4.18)$$

die anzeigt, daß der dem symmetrischen Tensor \mathbf{D}_F zugeordnete axiale Vektor \mathbf{d}_F verschwindet, erhält man aus (6.4.13) und (6.4.17) für beliebige β_D :

$$\mathbf{m}_{n}(\phi) = -\beta_{\theta}(\phi_{0}) \operatorname{grad} \theta - \beta_{V}(\phi_{0}) \left(\mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right).$$
(6.4.19)

Entsprechend den vorangegangenen Überlegungen gilt für den Nichtgleichgewichtsanteil von $\hat{\mathbf{f}}^F$:

$$\hat{\mathbf{f}}_{n}^{F}(\phi) = -\mathbf{S}_{\theta}(\phi_{0}) \operatorname{grad} \theta - \mathbf{S}_{V}(\phi_{0}) \left(\mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime}\right) - \mathbf{S}_{D}^{3}(\phi_{0}) \mathbf{D}_{f}, \qquad (6.4.20)$$

so daß mit

$$\mathbf{S}_{\theta}(\phi_{0}) = \alpha_{\theta}(\phi_{0}) \mathbf{I},$$

$$\mathbf{S}_{D}(\phi_{0}) = \alpha_{D}(\phi_{0}) \mathbf{E}$$
(6.4.21)

auf

$$\hat{\mathbf{f}}_{n}^{F}(\phi) = -\alpha_{\theta}(\phi_{0}) \operatorname{grad} \theta - \mathbf{S}_{V}(\phi_{0}) \left(\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S} \right)$$
(6.4.22)

geschlossen werden kann.

Unter Voraussetzung isotroper Permeabilitätseigenschaften kann zusätzlich

$$\mathbf{S}_{V}(\phi_{0}) = \alpha_{V}(\phi_{0}) \mathbf{I}$$
(6.4.23)

gesetzt werden; d. h. im allgemeinen können mit (6.4.22) auch anisotrope Permeabilitätseigenschaften des Festkörperskeletts beschrieben werden, siehe auch *Heinrich & Desoyer*

[1955].

Für den Nichtgleichgewichtsanteil von

$$\bar{\mathbf{K}}_{n}^{F} = (\rho^{F} \, \mathbf{K}^{F} - \lambda \, n^{F} \mathbf{I})_{n} \tag{6.4.24}$$

gilt

$$\begin{split} \bar{\mathbf{K}}_{n}^{F}(\phi) &= \left. \bar{\mathbf{K}}_{n}^{F}(\phi_{0}) + \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_{n}^{F}}{\partial \left(\operatorname{grad} \theta \right)} \right|_{\phi=\phi_{0}} \operatorname{grad} \theta + \\ &+ \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_{n}^{F}}{\partial \left(\mathbf{x}_{F}^{} - \mathbf{x}_{S}^{'} \right)} \right|_{\phi=\phi_{0}} \left(\mathbf{x}_{F}^{'} - \mathbf{x}_{S}^{'} \right) + \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_{n}^{F}}{\partial \mathbf{D}_{F}} \right|_{\phi=\phi_{0}} \mathbf{D}_{F} \end{split}$$
(6.4.25)

bzw. mit (6.4.2)

$$\bar{\mathbf{K}}_{n}^{F}(\phi) =: -\overset{3}{\mathbf{K}}_{\theta}(\phi_{0}) \operatorname{grad} \theta - \overset{3}{\mathbf{K}}_{V}(\phi_{0}) \left(\overset{\prime}{\mathbf{x}}_{F} - \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{S} \right) - \overset{4}{\mathbf{K}}_{D}(\phi_{0}) \mathbf{D}_{F}.$$
(6.4.26)

Die Forderung, daß (6.4.26) dem Prinzip der materiellen Objektivität genügen muß, führt auf

$$\mathbf{Q}\left[-\overset{3}{\mathbf{K}}_{\theta}(\phi_{0})\operatorname{grad}\theta - \overset{3}{\mathbf{K}}_{V}(\phi_{0})\left(\overset{\prime}{\mathbf{x}}_{F} - \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{S}\right) - \overset{4}{\mathbf{K}}_{D}(\phi_{0})\mathbf{D}_{F}\right]\mathbf{Q}^{T} = = -\overset{3}{\mathbf{K}}_{\theta}\overset{*}{(\phi_{0})}\mathbf{Q}\operatorname{grad}\theta - \overset{3}{\mathbf{K}}_{V}\overset{*}{(\phi_{0})}\mathbf{Q}\left(\overset{\prime}{\mathbf{x}}_{F} - \overset{\prime}{\mathbf{x}}_{S}\right) - \overset{4}{\mathbf{K}}_{D}\overset{*}{(\phi_{0})}\left(\mathbf{Q}\mathbf{D}_{F}\mathbf{Q}^{T}\right),$$

$$(6.4.27)$$

so daß

$$\overset{3}{\mathbf{K}} \overset{*}{\boldsymbol{\phi}}_{0} \overset{*}{\boldsymbol{\phi}}_{0} = \left[\{ [\mathbf{Q} \overset{3}{\mathbf{K}}_{\theta}(\phi_{0})]^{\underline{3}} \mathbf{Q}^{T} \}^{\underline{3}} \overset{23}{T} \mathbf{Q}^{T} \right]^{\underline{3}} \overset{23}{T}^{\underline{7}},$$

$$\overset{3}{\mathbf{K}}_{V} \overset{*}{\boldsymbol{\phi}}_{0} = \left[\{ [\mathbf{Q} \overset{3}{\mathbf{K}}_{V}(\phi_{0})]^{\underline{3}} \mathbf{Q}^{T} \}^{\underline{3}} \overset{23}{T} \mathbf{Q}^{T} \right]^{\underline{3}} \overset{23}{T},$$

$$\overset{4}{\mathbf{K}}_{D} \overset{*}{\boldsymbol{\phi}}_{0} = (\mathbf{Q}^{T} \otimes \mathbf{Q}^{T})^{\underline{14}} \overset{4}{\mathbf{K}}_{D}(\phi_{0}) (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q})^{\underline{14}}$$

$$(6.4.28)$$

zu fordern ist. Die Beziehungen $(6.4.28)_1$ und $(6.4.28)_2$ können im Zusammenhang mit den Identitäten (A.1.28), (A.1.30), (A.1.32), (A.1.36) und (A.1.40) entwickelt werden, $(6.4.28)_3$ ergibt sich mit (A.1.3) und (A.1.8).

Im Rahmen einfacher isotroper Ansätze kann (6.4.28) mit

$$\overset{3}{\mathbf{K}}_{\theta}(\phi_{0}) = \delta_{\theta}(\phi_{0}) \overset{3}{\mathbf{E}},$$

$$\overset{3}{\mathbf{K}}_{V}(\phi_{0}) = \delta_{V}(\phi_{0}) \overset{3}{\mathbf{E}},$$

$$\overset{4}{\mathbf{K}}_{D}(\phi_{0}) = \delta_{D}(\phi_{0}) \overset{4}{\mathbf{I}} + \delta_{\bar{D}}(\phi_{0}) \overset{4}{\mathbf{I}} + \delta_{\bar{D}}(\phi_{0}) \overset{4}{\mathbf{I}}$$

$$(6.4.29)$$

erfüllt werden; bezüglich der vierstufigen Fundamentaltensoren $\overset{4}{\mathbf{I}}$, $\overset{4}{\overline{\mathbf{I}}}$, $\overset{4}{\overline{\mathbf{I}}}$, vgl. (A.1.19) - (A.1.21). Es läßt sich zeigen, daß

$$\overset{3}{\mathbf{E}}\mathbf{v} = -\left(\overset{3}{\mathbf{E}}\mathbf{v}\right)^{T} \tag{6.4.30}$$

ein schiefsymmetrischer Tensor ist, d. h. **v** ist axialer Vektor. Da jedoch einerseits $\bar{\mathbf{K}}_n^F = (\bar{\mathbf{K}}_n^F)^T$ vorausgesetzt wurde und andererseits grad θ und $\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S$ im allgemeinen keine axialen Vektoren sind, muß

$$\delta_{\theta}(\phi_0) = \delta_V(\phi_0) = 0 \tag{6.4.31}$$

gesetzt werden. Schließlich bedingt die Symmetrie von D_F , daß anstelle von $(6.4.29)_3$

$$\overset{4}{\mathbf{K}}_{D}(\phi_{0}) = 2 \,\mu^{F}(\phi_{0}) \overset{4}{\mathbf{I}} + \lambda^{F}(\phi_{0}) \,\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$
mit
$$\begin{cases}
\mu^{F}(\phi_{0}) = \frac{1}{2} \left[\,\delta_{D}(\phi_{0}) + \delta_{\bar{D}}(\phi_{0}) \right], \\
\lambda^{F}(\phi_{0}) = \delta_{\bar{D}}(\phi_{0}).
\end{cases}$$
(6.4.32)

Mit (6.4.29), (6.4.31) und (6.4.32) folgt aus (6.4.26)

$$\bar{\mathbf{K}}_{n}^{F}(\phi) = -2\,\mu^{F}(\phi_{0})\,\mathbf{D}_{F} - \lambda^{F}(\phi_{0})\,(\,\mathbf{D}_{F}\,\cdot\,\mathbf{I}\,)\,\mathbf{I}\,.$$
(6.4.33)

Aus dem Nichtgleichgewichtsanteil \mathcal{D}_n der Dissipationsungleichung können Restriktionen für α_{θ} , \mathbf{S}_V , β_{θ} , β_V , μ^F und λ^F gewonnen werden. Durch Einsetzen von (6.4.19), (6.4.22) und (6.4.33) in (6.4.10) folgt

$$\mathcal{D}_{n}(\phi) = \frac{1}{\theta} \beta_{\theta}(\phi_{0}) \operatorname{grad} \theta \cdot \operatorname{grad} \theta + \mathbf{S}_{V}(\phi_{0}) \cdot \left[\left(\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S} \right) \otimes \left(\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S} \right) \right] + \left[\frac{1}{\theta} \beta_{V}(\phi_{0}) + \alpha_{\theta}(\phi_{0}) \right] \operatorname{grad} \theta \cdot \left(\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S} \right) + 2 \mu^{F}(\phi_{0}) \mathbf{D}_{F}^{D} \cdot \mathbf{D}_{F}^{D} + \left[\lambda^{F}(\phi_{0}) + \frac{2}{3} \mu^{F}(\phi_{0}) \right] (\mathbf{D}_{F} \cdot \mathbf{I})^{2} \geq 0,$$

$$(6.4.34)$$

so daß für beliebige grad θ , $\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S}$, \mathbf{D}_{F}^{D} und $\mathbf{D}_{F} \cdot \mathbf{I}$ auf

$$\beta_{\theta} \ge 0, \quad \mu^{F} \ge 0, \quad \lambda^{F} + \frac{2}{3} \, \mu^{F} \ge 0, \quad \beta_{V} = -\theta \, \alpha_{\theta} \,, \tag{6.4.35}$$

 \mathbf{S}_V : positiv definit

geschlossen werden kann. In (6.4.34) kennzeichnet

$$\mathbf{D}_{F}^{D} = \mathbf{D}_{F} - \frac{1}{3} \left(\mathbf{D}_{F} \cdot \mathbf{I} \right) \mathbf{I}$$
(6.4.36)

den deviatorischen Anteil der Deformationsgeschwindigkeit der Flüssigkeit.

Grundsätzlich ist zu beachten, daß, obwohl eine inkompressible Porenflüssigkeit vorausgesetzt wurde, im allgemeinen

$$\mathbf{D}_F \cdot \mathbf{I} = \operatorname{div} \mathbf{x}_F \neq 0, \qquad (6.4.37)$$

da sich auch die inkompressible Flüssigkeit im makroskopischen Sinne kompressibel verhält.

Mit den bisherigen Ergebnissen können die thermodynamischen Restriktionen und konstitutiven Gleichungen in der Nähe des Mischungsgleichgewichts zusammengestellt werden. Mit $(6.3.52)_3$, (6.4.1), (6.4.24) und (6.4.33) gilt zunächst

$$\rho^{F} \mathbf{K}^{F} - \lambda \, n^{F} \mathbf{I} = -2 \, \mu^{F} \left(\phi_{0} \right) \mathbf{D}_{F} - \lambda^{F} \left(\phi_{0} \right) \left(\, \mathbf{D}_{F} \, \cdot \, \mathbf{I} \, \right) \mathbf{I} \,, \tag{6.4.38}$$

so daß man schließlich mit $(5.2.11)_3$, (6.2.8), (6.3.32), (6.3.52), $(6.3.55)_1$, (6.4.1), (6.4.19), (6.4.22) und (6.4.38) zusätzlich zu (6.4.9) die folgenden Ergebnisse erhält:

$$\mathbf{T}^{S} = (\Psi^{S} - \lambda n^{S}) \mathbf{I} + \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T},$$

$$\mathbf{T}^{F} = (\Psi^{F} - \lambda n^{F}) \mathbf{I} + 2 \mu^{F} \mathbf{D}_{F} + \lambda^{F} (\mathbf{D}_{F} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I},$$

$$\mathbf{h} = -\beta_{\theta} \operatorname{grad} \theta + \theta \alpha_{\theta} (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S}) - \theta \frac{\partial \Psi^{S}}{\partial \theta} \mathbf{u}_{S} - \theta \frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \theta} \mathbf{u}_{F}, \qquad (6.4.39)$$

$$\hat{\mathbf{p}}^{F} = -\alpha_{\theta} \operatorname{grad} \theta - \mathbf{S}_{V} (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S}) + \lambda \operatorname{grad} n^{F} - - \mathbf{F}_{Se}^{T-1} (\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{a}_{Se}^{S})^{1} - \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} (\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{a}_{Sp}^{S})^{1}.$$

Im Zusammenhang mit $(6.4.39)_3$ lassen sich weitere Ergebnisse für die partialen Entropiefunktionen \P^S und \P^F gewinnen. Mit (4.4.10), $(4.5.2)_2$, (6.2.4), (6.2.12) und $(6.3.32)_1$ sind zwei unterschiedliche Gleichungen für den Zuflußvektor **h** gegeben, nämlich

$$\mathbf{h} = \mathbf{q}^{S} + \mathbf{q}^{F} + \theta \P^{S} \mathbf{u}_{S} + \theta \P^{F} \mathbf{u}_{F},$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{m} - \theta \frac{\partial \Psi^{S}}{\partial \theta} \mathbf{u}_{S} + \theta \frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \theta} \mathbf{u}_{F}.$$
(6.4.40)

Setzt man voraus, daß

$$\mathbf{q}^{S} + \mathbf{q}^{F} = -\beta_{\theta} \operatorname{grad} \theta + \theta \,\alpha_{\theta} \left(\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S} \right), \qquad (6.4.41)$$

so folgt mit (4.2.6), (6.2.11), (6.3.11) und (6.3.13) aus (6.4.40):

$$\P^{S} = -\left(\frac{\partial\Psi^{S}}{\partial\theta}\right),$$

$$\P^{F} = -\left(\frac{\partial\Psi^{F}}{\partial\theta}\right).$$
(6.4.42)

Mit (6.4.42) kann $\alpha_{\theta}(\phi_0)$ als Entropiekopplungsparameter des betrachteten binären Modells mit gemeinsamer Temperatur der Konstituierenden verstanden werden, β_{θ} ist der Wärmeleitfähigkeitskoeffizient des gesamten Mehrkomponentenmodells, der in der Form

$$\beta_{\theta}\left(\phi_{0}\right) = \beta_{\theta}^{S}\left(\phi_{0}\right) + \beta_{\theta}^{F}\left(\phi_{0}\right) \tag{6.4.43}$$

mit den partialen Wärmeleitfähigkeiten β_{θ}^{S} und β_{θ}^{F} von Feststoff und Flüssigkeit angenommen werden kann, siehe auch *de Boer & Ehlers* [1986b, Gl. (4.5.84)]. Für den Fall, daß $\mathbf{\dot{x}}_{S} = \mathbf{\dot{x}}_{F} = \mathbf{\dot{x}}$ und daher $\mathbf{u}_{S} = \mathbf{u}_{F} = \mathbf{0}$, so daß $\mathbf{h} = \mathbf{m} = \mathbf{q}^{S} + \mathbf{q}^{F}$, repräsentiert (6.4.41) gleichzeitig die konstitutive Gleichung für den Wärmefluß des Modells ohne Diffusion.

Die Materialparameter $\mu^{F}(\phi_{0})$ und

$$\nu^{F}(\phi_{0}) = \lambda^{F}(\phi_{0}) + \frac{2}{3}\mu^{F}(\phi_{0}) \tag{6.4.44}$$

sind als makroskopische Scher- und Volumenviskositätsparameter der Porenflüssigkeit zu verstehen.

Können isotrope Permeabilitätseigenschaften des Festkörperskeletts vorausgesetzt werden, so daß $\mathbf{S}_V(\phi_0) = \alpha_V(\phi_0) \mathbf{I}$ mit $\alpha_V \ge 0$, vgl. (6.4.23) und (6.4.35)₅, so kann α_V mit Hilfe des Durchlässigkeitskoeffizienten $k(\phi_0)$ angegeben werden, vgl. de Boer & Ehlers [1986b, Gl. (5.2.41)]:

$$\alpha_V(\phi_0) = \frac{\rho^F}{k(\phi_0)} |\mathbf{b}| . \qquad (6.4.45)$$

Der Durchlässigkeitskoeffizient ist darin ein Materialparameter, der gleichermaßen von der Permeabilitätseigenschaft des Festkörperskeletts (Porosität, Porenstruktur) und den Viskositätseigenschaften der Porenflüssigkeit abhängt.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß mit $k(\phi_0)$ entsprechend (6.4.45) der Durchlässigkeitskoeffizient in Bezug auf die Differenzgeschwindigkeit $\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S$ definiert ist. In der Bodenmechanik – hier geht man in der Regel (z. B. bei der Beschreibung von Grundwasserströmungen) von einem starren Festkörperskelett aus, so daß $\mathbf{\dot{x}}_S = \mathbf{0}$ – geht diese Differenzgeschwindigkeit in die sogenannte Sickergeschwindigkeit $\mathbf{\dot{x}}_F$ über, während man die sogenannte Filtergeschwindigkeit (Volumenstrom) mit $\mathbf{v}_F = n^F \mathbf{x}_F$ definiert. In Analogie zu Kenyon [1976a, Abschnitt 6] kann für deformierbare Festkörperskelette

$$\mathbf{w}^{F} = n^{F} \left(\mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right), \quad \mathbf{w}_{F} = \mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime}$$
(6.4.46)

als Filtergeschwindigkeit angesetzt werden, so daß mit

$$k^{F}(\phi_{0}) = n^{F} k(\phi_{0}) \tag{6.4.47}$$

ein Durchlässigkeitskoeffizient im Sinne der in der Bodenmechanik üblichen Definition gegeben ist, vgl. auch von Terzaghi & Peck [1961, S. 47/48].

Für den Fall fortschreitender plastischer Deformationen, also wenn anstelle von (6.4.3) $\mathbf{A}_{Sp}^{\scriptscriptstyle \Delta} \neq \mathbf{0}$, muß zusätzlich zu den vorangegangenen Ergebnissen entsprechend (6.3.58)

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\vartriangle} \cdot [\mathbf{T}^{S} - (\Psi^{S} - \lambda n^{S}) \mathbf{I} - \mathbf{F}_{Se} \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T} + (\mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \mathbf{I}) \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T}] \ge 0 \quad (6.4.48)$$

gefordert werden. Für $\phi = \phi_0$ gilt (6.4.48) exakt; für Abweichungen von $\phi = \phi_0$ ist (6.4.48) im Sinne einer hinreichenden Bedingung als Restriktion für den Zuwachs der plastischen Arbeit zu verstehen.

Durch Umformung der auf ein aktuelles Volumenelement der Mischung bezogenen freien Energiefunktionen gemäß $(4.5.2)_1$ sind weitere Formen der Beziehungen $(6.4.39)_1$, $(6.4.39)_2$, $(6.4.39)_4$ und (6.4.48) möglich. Es gilt mit (6.3.11):

$$\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \left(\rho^{S} \psi^{S} + \rho^{F} \psi^{F} \right) \,. \tag{6.4.49}$$

Bei Beachtung der Inkompressibilitätseigenschaft von Festkörperskelett und Flüssigkeit, vgl. (6.2.5), folgt

$$\frac{\partial \rho^{S}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = \rho^{SR} \frac{\partial n^{S}}{\partial \mathbf{F}_{Se}},$$

$$\frac{\partial n^{S}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = n_{0S}^{S} \left(\det \mathbf{F}_{Sp}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \left(\det \mathbf{F}_{Se}\right)^{-1}$$

$$= -n^{S} \mathbf{F}_{Se}^{T-1},$$
(6.4.50)

worin (4.5.15), (5.2.1), $(5.4.2)_1$ und (6.2.1) beachtet wurden. Entsprechend gilt

$$\frac{\partial \rho^F}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = \rho^{FR} \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}_{Se}} (1 - n^S) , \qquad (6.4.51)$$

so daß

$$\frac{\partial \rho^S}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = -\rho^S \, \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \,, \quad \frac{\partial \rho^F}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = -\frac{n^S}{n^F} \, \rho^F \, \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \,. \tag{6.4.52}$$

Damit erhält (6.4.49) folgende Form:

$$\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = -\left(\Psi^{S} - n^{S} \frac{\Psi^{F}}{n^{F}}\right) \mathbf{F}_{Se}^{T-1} + \rho^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} + \rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Se}}.$$
(6.4.53)

Definiert man

$$p = \lambda - \frac{\Psi^F}{n^F} \tag{6.4.54}$$

im Sinne eines neuen Lagrangeschen Multiplikators als unbestimmten hydrostatischen Druck der inkompressiblen Mischung, so folgt für die Partialspannungen von Festkörperskelett und Flüssigkeit, vgl. $(6.4.39)_1$ und $(6.4.39)_2$:

$$\mathbf{T}^{S} = -n^{S} p \mathbf{I} + \left(\rho^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} + \rho^{F} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{F}_{Se}}\right) \mathbf{F}_{Se}^{T},$$

$$\mathbf{T}^{F} = -n^{F} p \mathbf{I} + 2 \mu^{F} \mathbf{D}_{F} + \lambda^{F} (\mathbf{D}_{F} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}.$$
(6.4.55)

In Analogie zu den Ausführungen (6.4.49) - (6.4.53) gilt:

$$\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} (\rho^{S} \psi^{S} + \rho^{F} \psi^{F})$$

$$= -(\Psi^{S} - n^{S} \frac{\Psi^{F}}{n^{F}}) \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} + \rho^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} + \rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}}$$
(6.4.56)

mit

$$\frac{\partial n^S}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} = -n^S \, \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \tag{6.4.57}$$

und

$$\frac{\partial \rho^S}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} = -\rho^S \, \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \,, \qquad \frac{\partial \rho^F}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} = \frac{n^S}{n^F} \, \rho^F \, \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \,. \tag{6.4.58}$$

Außerdem gilt

$$\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = n^{S} \frac{\Psi^{F}}{n^{F}} \mathbf{F}_{Se}^{T-1} + \rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Se}},$$

$$\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} = n^{S} \frac{\Psi^{F}}{n^{F}} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} + \rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}},$$
(6.4.59)

worin $(6.4.52)_2$ und $(6.4.58)_2$ benutzt wurden.

Mit (6.4.59) erhält man

$$\mathbf{F}_{Se}^{T-1} \left(\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} \right)^{\underline{1}} + \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \left(\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} \right)^{\underline{1}} = \\ = n^{S} \frac{\Psi^{F}}{n^{F}} \left[\mathbf{F}_{Se}^{T-1} \left(\mathbf{F}_{Se}^{T-1} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} \right)^{\underline{1}} + \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \left(\mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} \right)^{\underline{1}} \right] +$$
(6.4.60)
$$+ \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \left(\rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} \right)^{\underline{1}} + \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \left(\rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} \right)^{\underline{1}} \right].$$

Zur weiteren Auswertung von (6.4.60) ist eine Zwischenrechnung erforderlich. Es gilt mit $(5.4.2)_1$ und $(6.2.6)_1$

grad
$$n^{S} = n_{0S}^{S} \operatorname{grad} \left[(\det \mathbf{F}_{Se})^{-1} (\det \mathbf{F}_{Sp})^{-1} \right]$$

$$= -n_{0S}^{S} \left[(\det \mathbf{F}_{Se})^{-2} (\det \mathbf{F}_{Sp})^{-1} \operatorname{grad} (\det \mathbf{F}_{Se}) + (\det \mathbf{F}_{Se})^{-1} (\det \mathbf{F}_{Sp})^{-2} \operatorname{grad} (\det \mathbf{F}_{Sp}) \right] .$$
(6.4.61)

Darin sind bei Beachtung von (A.2.8)

$$grad (\det \mathbf{F}_{Se}) = \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \operatorname{grad}_{Sz} (\det \mathbf{F}_{Se})$$

$$= \det \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{T-1} (\mathbf{F}_{Se}^{T-1} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se})^{\underline{1}},$$

$$(6.4.62)$$

$$grad (\det \mathbf{F}_{Sp}) = \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \operatorname{Grad}_{S} (\det \mathbf{F}_{Sp})$$

$$= \det \mathbf{F}_{Sp} \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} (\mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp})^{\underline{1}},$$

so daß im Zusammenhang mit $(5.2.10)_2$ auf

grad
$$n^{F} = n^{S} \left[\mathbf{F}_{Se}^{T-1} \left(\mathbf{F}_{Se}^{T-1} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} \right)^{\underline{1}} + \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \left(\mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} \right)^{\underline{1}} \right]$$
 (6.4.63)

geschlossen werden kann.

Durch Einsetzen von (6.4.60) mit (6.4.63) in $(6.4.39)_4$ erhält man den Bewegungsgrößenzuwachs bzw. die volumenbezogene Interaktionskraft zwischen Festkörperskelett und Flüssig-

keit in der Form

$$\hat{\mathbf{p}}^{F} = p \operatorname{grad} n^{F} - \alpha_{\theta} \operatorname{grad} \theta - \mathbf{S}_{V} \left(\mathbf{x}_{F}^{\prime} - \mathbf{x}_{S}^{\prime} \right) - \\ - \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \left(\rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se} \right)^{\underline{1}} - \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \left(\rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp} \right)^{\underline{1}}.$$

$$(6.4.64)$$

Darin ist die Größe p durch (6.4.54) definiert.

Schließlich folgt mit (6.4.53) und (6.4.56) für den Zuwachs der plastischen Arbeit aus (6.4.48):

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\vartriangle} \cdot [\mathbf{T}^{S} + n^{S} p \mathbf{I} - \mathbf{F}_{Se} (\rho^{S} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} + \rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}}) \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T} + (\mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \mathbf{I}) (\rho^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} + \rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Se}}) \mathbf{F}_{Se}^{T}] \geq 0.$$

$$(6.4.65)$$

Die Beziehungen (6.4.55), (6.4.64) und (6.4.65) können alternativ zu $(6.4.39)_1$, $(6.4.39)_2$, $(6.4.39)_4$ und (6.4.48) benutzt werden.

Für den Fall der ruhenden Flüssigkeit ($\mathbf{D}_F = \mathbf{0}$) folgt aus (6.4.55)₂

$$p = -\frac{1}{n^F} \frac{1}{3} \left(\mathbf{T}^F \cdot \mathbf{I} \right), \qquad (6.4.66)$$

d. h. der unbestimmte hydrostatische Druck pentspricht dem effektiven bzw. realistischen Ruhedruck der Porenflüssigkeit. Damit kann

$$\mathbf{T}_E^S = \mathbf{T}^S + n^S \, p \, \mathbf{I} \tag{6.4.67}$$

als Extraspannung des Festkörpermaterials definiert werden. In der Bodenmechanik ist es üblich, \mathbf{T}_E^S nach *Terzaghi* als wirksame Spannung zu bezeichnen.

Mit Hilfe des Prinzips der materiellen Objektivität können weitere Formen für die Partialspannung des Festkörperskeletts gemäß $(6.4.55)_1$ und die Restriktion für die plastische Arbeit gemäß (6.4.65) angegeben werden. Entsprechend dem Prinzip der materiellen Objektivität, vgl. (5.6.34), ist für die partialen freien Energien

$$\psi^{S}, \,\psi^{F} = \psi^{i}\left(\,\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}\,\right) \tag{6.4.68}$$

zu verlangen, daß mit $(5.6.22)_1$

$$\psi^{i}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) = \psi^{i}(\theta, \mathbf{Q} \, \mathbf{F}_{Se} \, \widehat{\mathbf{Q}}^{T}, \, \widehat{\mathbf{Q}} \, \mathbf{F}_{Sp})$$
(6.4.69)

für jede zulässige Wahl von \mathbf{Q} und $\widehat{\mathbf{Q}}$ erfüllt sein muß. Durch spezielle Wahlen folgt:

Wahl 1:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_{Se}^T, \qquad \widehat{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}. \tag{6.4.70}$$

Mit (6.4.70) erhält man im Zusammenhang mit der polaren Zerlegung $\mathbf{F}_{Se} = \mathbf{R}_{Se} \mathbf{U}_{Se}$:

$$\psi^{i}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) = \psi^{i}(\theta, \mathbf{U}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp})$$
(6.4.71)

Wegen

$$\mathbf{U}_{Se} = (\,\widehat{\mathbf{C}}_{Se})^{1/2} \,, \qquad \widehat{\mathbf{C}}_{Se} = \mathbf{F}_{Se}^T \,\mathbf{F}_{Se} \tag{6.4.72}$$

kann aus (6.4.71) geschlossen werden, daß ψ^i in spezieller Form von \mathbf{F}_{Se} abhängen muß, nämlich:

$$\psi^{i} = \psi^{i}(\theta, \widehat{\mathbf{C}}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}). \qquad (6.4.73)$$

Alternativen zu (6.4.73) ergeben sich mit Tafel 5.1:

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se} = \frac{1}{2} \left(\widehat{\mathbf{C}}_{Se} - \mathbf{I} \right),$$

$$\mathbf{E}_{Se} = \mathbf{F}_{Sp}^{T} \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se} \mathbf{F}_{Sp}.$$
(6.4.74)

Daraus folgt

$$\widehat{\mathbf{C}}_{Se} = \widehat{\mathbf{C}}_{Se}(\mathbf{E}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) = 2 \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \mathbf{E}_{Se} \mathbf{F}_{Sp}^{-1} + \mathbf{I}, \qquad (6.4.75)$$

so daß die Variable $\widehat{\mathbf{C}}_{Se}$ eindeutig als Funktion von \mathbf{E}_{Se} und \mathbf{F}_{Sp} angegeben werden kann. Daher kann anstelle von (6.4.73) gesetzt werden:

$$\psi^{i} = \psi^{i}(\theta, \mathbf{E}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}). \qquad (6.4.76)$$

Eine erneute Anwendung des Prinzips der materiellen Objektivität auf (6.4.76) liefert mit Tafel 5.3:

$$\psi^{i}(\theta, \mathbf{E}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) = \psi^{i}(\theta, \mathbf{E}_{Se}, \widehat{\mathbf{Q}} \mathbf{F}_{Sp}). \qquad (6.4.77)$$

Durch spezielle Wahl von $\widehat{\mathbf{Q}}$ folgt:

Wahl 2:

$$\widehat{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}_{Sp}^T \,. \tag{6.4.78}$$

Im Zusammenhang mit der polaren Zerlegung $\mathbf{F}_{Sp} = \mathbf{R}_{Sp} \mathbf{U}_{Sp}$ ergibt sich daraus

$$\psi^{i}(\theta, \mathbf{E}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) = \psi^{i}(\theta, \mathbf{E}_{Se}, \mathbf{U}_{Sp}), \qquad (6.4.79)$$

so daß mit

$$\mathbf{U}_{Sp} = (\mathbf{C}_{Sp})^{1/2}, \qquad \mathbf{C}_{Sp} = \mathbf{F}_{Sp}^T \mathbf{F}_{Sp},$$

$$\mathbf{E}_{Sp} = \mathbf{E}_{Sp}(\mathbf{F}_{Sp}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{Sp} - \mathbf{I})$$
(6.4.80)

auf

$$\psi^{i} = \psi^{i}(\theta, \mathbf{E}_{Se}, \mathbf{E}_{Sp}) \tag{6.4.81}$$

geschlossen werden kann, d.h. die freien Energiefunktionen ψ^i sind unabhängig von \mathbf{Q} und $\widehat{\mathbf{Q}}$.

Mit (6.4.81) können die partiellen Ableitungen von ψ^i nach \mathbf{F}_{Se} und \mathbf{F}_{Sp} gebildet werden. Wegen $\mathbf{E}_{Se} = \mathbf{E}_{Se}(\mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp})$ und $\mathbf{E}_{Sp} = \mathbf{E}_{Sp}(\mathbf{F}_{Sp})$, vgl. Tafel 5.1, folgt bei Beachtung der Kettenregel, daß

$$\frac{\partial \psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = \left(\frac{\partial \mathbf{E}_{Se}}{\partial \mathbf{F}_{Se}}\right)^{T} \frac{\partial \psi^{i}}{\partial \mathbf{E}_{Se}},$$

$$\frac{\partial \psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} = \left(\frac{\partial \mathbf{E}_{Se}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}}\right)^{T} \frac{\partial \psi^{i}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} + \left(\frac{\partial \mathbf{E}_{Sp}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}}\right)^{T} \frac{\partial \psi^{i}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}}.$$
(6.4.82)

Die Ableitungen von \mathbf{E}_{Se} und \mathbf{E}_{Sp} nach den elastischen und plastischen Deformationsgradienten können mit den Ableitungsregeln nach Anhang A.3 leicht gebildet werden. Es gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{Se}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = \frac{\partial \mathbf{E}_{Se}}{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se}} \frac{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se}}{\partial \mathbf{F}_{Se}}, \qquad (6.4.83)$$

worin mit (A.3.4) und (A.3.6)

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{Se}}{\partial \widehat{\Gamma}_{Se}} = \frac{\partial}{\partial \widehat{\Gamma}_{Se}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \widehat{\Gamma}_{Se} \mathbf{F}_{Sp}$$

$$= (\mathbf{F}_{Sp} \otimes \mathbf{F}_{Sp})^{14},$$

$$\frac{\partial \widehat{\Gamma}_{Se}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}_{Se}} (\mathbf{F}_{Se}^{T} \mathbf{F}_{Se} - \mathbf{I})$$

$$= \frac{1}{2} [(\mathbf{F}_{Se} \otimes \mathbf{I})^{13} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_{Se})^{14}],$$
(6.4.84)

so daß mit (A.1.2), (A.1.5), (A.1.11) und (A.1.14)

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{Se}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_{Sp} \otimes \mathbf{F}_{Sp} \right)^{T} \left[\left(\mathbf{F}_{Se} \otimes \mathbf{I} \right)^{T} + \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_{Se} \right)^{T} \right] \\
= \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{T} \right)^{T} + \left(\mathbf{F}_{Sp} \otimes \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} \right)^{T} \right], \qquad (6.4.85)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{E}_{Se}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \right)^{T} = \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{F}_{Sp}^{T} \otimes \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} \right)^{T} + \left(\mathbf{F}_{Sp}^{T} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \right)^{T} \right].$$

Entsprechend erhält man mit der Substitution

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_{Sp}^{T} \, \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se} \quad : \qquad (6.4.86)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{Se}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} (\mathbf{F}_{Sp}^{T} \, \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se} \, \mathbf{F}_{Sp})$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} (\mathbf{A} \, \mathbf{F}_{Sp}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} (\mathbf{A} \, \mathbf{F}_{Sp}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}^{T}} \frac{\partial \mathbf{F}_{Sp}^{T}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \,. \qquad (6.4.87)$$

Mit (A.1.2), (A.1.5), (A.1.11), (A.1.14), (A.3.1), (A.3.2) und (A.3.10) folgt daraus

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{Se}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} = (\mathbf{I} \otimes \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se} \, \mathbf{F}_{Sp})^{T} + (\mathbf{F}_{Sp} \otimes \mathbf{I})^{T} (\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se} \otimes \mathbf{I})^{T} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{T} \\
= (\mathbf{I} \otimes \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se} \, \mathbf{F}_{Sp})^{T} + (\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se} \, \mathbf{F}_{Sp} \otimes \mathbf{I})^{T}, \qquad (6.4.88) \\
(\frac{\partial \mathbf{E}_{Se}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}})^{T} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{T} \, \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se})^{T} + (\mathbf{I} \otimes \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se} \, \mathbf{F}_{Sp})^{T}.$$

Schließlich gilt mit (A.1.2) und (A.1.11) analog zu $(6.4.88)_2$:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{E}_{Sp}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}}\right)^T = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \left(\mathbf{F}_{Sp}^T \mathbf{F}_{Sp} - \mathbf{I}\right)\right]^T = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_{Sp}\right)^{\frac{13}{T}} + \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^T\right)^{\frac{14}{T}}\right].$$
(6.4.89)

Mit $(6.4.85)_2$, $(6.4.88)_2$ und (6.4.89) erhalten die Ableitungen der freien Energiefunktionen aus (6.4.82) bei Beachtung von (A.1.8) und (A.1.18) folgende Form:

$$\frac{\partial \psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} = \mathbf{F}_{Se} \, \mathbf{F}_{Sp} \, \frac{\partial \psi^{i}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \, \mathbf{F}_{Sp}^{T},$$

$$\frac{\partial \psi^{i}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} = 2 \, \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se} \, \mathbf{F}_{Sp} \, \frac{\partial \psi^{i}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} + \mathbf{F}_{Sp} \, \frac{\partial \psi^{i}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}}$$

$$= (\mathbf{F}_{Se}^{T} \, \mathbf{F}_{Se} - \mathbf{I}) \, \mathbf{F}_{Sp} \, \frac{\partial \psi^{i}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} + \mathbf{F}_{Sp} \, \frac{\partial \psi^{i}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}}.$$
(6.4.90)

Mit (6.4.67) und $(6.4.90)_1$ folgt für die Partialspannung des Festkörperskeletts aus $(6.4.55)_1$:

$$\mathbf{T}^{S} = -n^{S} p \mathbf{I} + \mathbf{T}^{S}_{E},$$

$$\mathbf{T}^{S}_{E} = \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} \left(\rho^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} + \rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \right) \mathbf{F}^{T}_{Sp} \mathbf{E}^{T}_{Se}.$$
(6.4.91)

Entsprechend lautet die Restriktion für den Zuwachs der plastischen Arbeit, wenn $(6.4.90)_2$ in (6.4.65) eingesetzt wird:

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\vartriangle} \cdot [\mathbf{T}_{E}^{S} - \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} (\rho^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}} + \rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}}) \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T}] \geq 0.$$
(6.4.92)

Der zweite Summand in eckigen Klammern kann darin als Translationstensor (back-stress tensor) interpretiert werden, so daß mit (6.4.92) für den Fall verfestigender Materialien nicht nur eine Restriktion für die isotrope Verfestigung sondern auch eine Restriktion für die kinematische Verfestigung sowie für gemischte Formen aus isotroper und kinematischer Verfestigung gegeben ist.

Die thermodynamischen Restriktionen (6.3.28) und (6.3.29) sind in den vorangegangenen Überlegungen unberücksichtigt geblieben. Daher soll zum Abschluß des vorliegenden Abschnitts gezeigt werden, daß auch diese Restriktionen erfüllt sind. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Beziehungen (6.4.90) auch auf die partiellen Ableitungen von Ψ^{I} nach \mathbf{F}_{Se} und \mathbf{F}_{Sp} übertragen werden können. Im Zusammenhang mit (6.4.9)₁ ist (6.3.28) offensichtlich. Für (6.3.29) erhält man mit (6.3.90):

$$\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} - \mathbf{F}_{Se}^{T} \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} =$$

$$= (\mathbf{F}_{Se}^{T} \mathbf{F}_{Se} - \mathbf{I}) \mathbf{F}_{Sp} \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} + \mathbf{F}_{Sp} \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} - \mathbf{F}_{Se}^{T} \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \qquad (6.4.93)$$

$$= \mathbf{F}_{Sp} \left(\frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}} - \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \right) \mathbf{F}_{Sp}^{T}.$$

Damit ist die Symmetrieforderung (6.3.29) erfüllt.

6.5 Vereinfachtes konstitutives Modell

Bei der Anwendung der im vorangegangenen diskutierten Theorie eines inkompressiblen porösen Mediums auf praxisrelevante Probleme sind zusätzlich zu den bisherigen Ausführungen neben einer geeigneten Beschreibung des plastischen Materialverhaltens der porösen Festkörpermatrix vor allem konstitutive Gleichungen für die freien Energiefunktionen Ψ^S und Ψ^F bzw. ψ^S und ψ^F in Abhängigkeit der Temperatur sowie der elastischen und plastischen Deformationsgradienten zu bestimmen. Die Konstituierung der freien Energiefunktionen führt allerdings zu gewissen Problemen, da z. B. keinerlei Erfahrung darüber vorliegt, in welcher Form die freie Energie ψ^F der Porenflüssigkeit von \mathbf{F}_{Se} und \mathbf{F}_{Sp} abhängt. Da bei porösen Medien eine Vermengung der Konstituierenden nur im makroskopischen Bereich, nicht aber wie bei Mischungen aus Flüssigkeiten oder Gasen im mikroskopischen Bereich existiert, soll im Rahmen des vereinfachten konstitutiven Modells davon ausgegangen werden, daß entweder keine oder nur eine sehr geringe Abhängigkeit der freien Energie ψ^F von \mathbf{F}_{Se} und \mathbf{F}_{Sp} existiert.

Zur Beschreibung praxisorientierter Probleme erscheint es daher gerechtfertigt zu sein, das vorliegende Modell mit Hilfe eines "Prinzips der konstitutiven Trennung der Teilkörper" dahingehend zu vereinfachen, daß man annimmt, jede dichtebezogene freie Energiefunktion möge nur von den konstituierenden Variablen des zugehörenden Teilkörpers abhängen, so daß bei Beachtung von $(4.5.2)_1$, (5.2.1), (6.2.5) und $(6.2.6)_1$ anstelle von $(6.4.9)_2$ und $(6.4.9)_3$

$$\Psi^{S}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) = \rho^{SR} n^{S} (\mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) \psi^{S}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}),$$

$$\Psi^{F}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) = \rho^{FR} n^{F} (\mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) \psi^{F}(\theta)$$
(6.5.1)

gesetzt werden kann. Da n^S und n^F als kinematische Variablen zwingend von den Festkörperdeformationen abhängen, ist es offensichtlich, daß $\Psi^F = \Psi^F(\theta)$ eine unzulässige Annahmen darstellen würde.

An dieser Stelle erscheinen einige erläuternde Bemerkungen angebracht zu sein: In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie poröser Medien auf der Basis von Materialien zweiten Grades entwickelt. Die Voraussetzung von Materialien ersten Grades - hier wären $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}$ und $\overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}$ nicht als thermodynamische Prozeßvariablen sondern als freie Parameter aufzufassen gewesen – hätte im Rahmen der gewählten Vorgehensweise (bei Benutzung der Entropiefunktionen Ψ^i) nach Umstrukturierung der Entropieungleichung (6.3.10) zwangsläufig dazu geführt, daß sich Ψ^F als unabhängig von \mathbf{F}_{Se} und \mathbf{F}_{Sp} erwiesen hätte ein unzulässiges Ergebnis –. Es kann daher festgestellt werden, daß mit (6.5.1) ein im Sinne von Materialien zweiten Grades kompatibles Konzept zur sinnvollen Vereinfachung der konstitutiven Gleichungen des betrachteten porösen Mediums gegeben ist.

Mit (6.5.1) können die Auswirkungsfunktionen des vereinfachten Modells direkt angegeben werden. Es folgt aus $(6.4.39)_3$, (6.4.42), $(6.4.55)_2$, (6.4.64) und (6.4.91):

$$\eta^{S} = -\left(\frac{\partial\psi^{S}}{\partial\theta} + \frac{\alpha_{\theta}}{\rho^{S}}\right) ,$$

$$\eta^{F} = -\left(\frac{\partial\psi^{F}}{\partial\theta} - \frac{\alpha_{\theta}}{\rho^{F}}\right) ,$$

$$\mathbf{T}^{S} = -n^{S}p\mathbf{I} + \rho^{S}\mathbf{F}_{Se}\mathbf{F}_{Sp}\frac{\partial\psi^{S}}{\partial\mathbf{E}_{Se}}\mathbf{F}_{Sp}^{T}\mathbf{F}_{Se}^{T} ,$$
(6.5.2)

$$\mathbf{T}^{F} = -n^{F} p \mathbf{I} + 2 \mu^{F} \mathbf{D}_{F} + \lambda^{F} (\mathbf{D}_{F} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} ,$$

$$\mathbf{h} = -\beta_{\theta} \operatorname{grad} \theta + \theta \alpha_{\theta} (\mathbf{x}_{F}' - \mathbf{x}_{S}') - \theta \rho^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \theta} \mathbf{u}_{S} - \theta \rho^{F} \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \theta} \mathbf{u}_{F} ,$$

$$\hat{\mathbf{p}}^{F} = p \operatorname{grad} n^{F} - \alpha_{\theta} \operatorname{grad} \theta - \mathbf{S}_{v} (\mathbf{x}_{F}' - \mathbf{x}_{S}') .$$

Die Restriktion für die plastische Arbeit aus (6.4.92) geht in

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\vartriangle} \cdot [\mathbf{T}_{E}^{S} - \rho^{S} \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T}] \ge 0$$
(6.5.3)

mit \mathbf{T}_{E}^{S} nach (6.4.67) über. In (6.5.2)₃ und (6.5.3) wurde darüber hinaus beachtet, daß entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 6.4:

$$\psi^{S}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) \to \psi^{S}(\theta, \mathbf{E}_{Se}, \mathbf{E}_{Sp}).$$
 (6.5.4)

Es ist zu erwähnen, daß ein Ansatz für die freie Energie in der Form $\psi^S = \psi^S(\theta, \mathbf{E}_{Se}, \mathbf{E}_{Sp})$ erstmals von *Green & Naghdi* [1965b, 1966] vorgeschlagen wurde; und zwar zur Beschreibung nichtporöser, elastisch-plastischer Festkörper. In diesen Arbeiten gingen *Green* und *Naghdi* im Gegensatz zu den Ausführungen in Abschnitt 5.4 der vorliegenden Arbeit allerdings davon aus, daß \mathbf{E}_{Se} und \mathbf{E}_{Sp} auch schiefsymmetrische Anteile enthalten können, vgl. z. B. [1966, Gln. (3.1) - (3.3)]. Ein anderer Aspekt der Arbeiten [1965b] und [1966] erscheint jedoch von besonderer Relevanz zu sein: Da während eines Entlastungsvorgangs sowie rein elastischer Belastungsprozesse die Änderung der Partialspannungen unabhängig von einer bereits bestehenden plastischen Verzerrung \mathbf{E}_{Sp} sein sollen, folgern *Green* und *Naghdi*, daß die Abhängigkeit der freien Energie von \mathbf{E}_{Se} und \mathbf{E}_{Sp} in Bezug auf (6.5.4) in folgender entkoppelter Form angesetzt werden kann:

$$\psi^{S}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) \to \psi^{Se}(\theta, \mathbf{E}_{Se}) + \psi^{Sp}(\theta, \mathbf{E}_{Sp}),$$
 (6.5.5)

vgl. z. B. [1966, Gl. (4.7)]. Bei Beachtung von (6.5.5) ist eine vereinfachte Beschreibung des elastischen und plastischen Materialverhaltens der Festkörpermatrix möglich.

Alternativ zu $(6.5.2)_3$ und (6.5.3) kann die Benutzung verschiedener anderer Versionen dieser Beziehungen sinnvoll sein. So gilt zunächst für die partiale Extraspannung des Festkörpermaterials

$$\mathbf{T}_{E}^{S} = \rho^{S} \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T}$$
(6.5.6)

und daraus mit (5.6.26), (6.2.5) und $(6.2.6)_1$ für die Kirchhoffsche Extraspannung

$$\boldsymbol{\tau}_{E}^{S} = \rho_{0S}^{S} \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T}.$$
(6.5.7)

Beachtet man, daß mit Tafel 5.1, den Ausführungen des Anhangs A.1 und den Ableitungsregeln gemäß Anhang A.3

$$\frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} = \left(\frac{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se}}{\partial \mathbf{E}_{Se}}\right)^{T} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se}} = \left(\mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{T-1}\right)^{T} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se}} = \mathbf{F}_{Sp}^{-1} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se}} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1},$$

$$\frac{\partial \psi^{S}}{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se}} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}_{Se}}{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se}}\right)^{T} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{A}_{Se}} = \left(\mathbf{F}_{Se}^{T-1} \otimes \mathbf{F}_{Se}^{T-1}\right)^{T} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{A}_{Se}} = \mathbf{F}_{Se}^{-1} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{A}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T-1},$$

$$(6.5.8)$$

so gilt alternativ zu (6.5.7) im Zusammenhang mit dem Transformationsverhalten von $\boldsymbol{\tau}_{E}^{S}$ gemäß (5.6.27):

$$\mathbf{S}_{E}^{S} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{E}_{Se}},$$

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}}_{E}^{S} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se}},$$

$$\boldsymbol{\tau}_{E}^{S} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{A}_{Se}}.$$
(6.5.9)

Mit den Beziehungen (6.5.9) können die Extraspannungen des Festkörperskeletts in allen drei Konfigurationen von φ^S (Referenzkonfiguration, plastische Zwischenkonfiguration und aktuelle Konfiguration) als Gradient der freien Energie in Richtung des jeweils zugehörigen elastischen Verzerrungstensors dargestellt werden.

Analog zu (6.5.8) gilt mit Tafel 5.1:

$$\frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}} = \mathbf{F}_{Sp}^{-1} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1},$$

$$\frac{\partial \psi^{S}}{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Sp}} = \mathbf{F}_{Se}^{-1} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{A}_{Sp}} \mathbf{F}_{Se}^{T-1}.$$
(6.5.10)

Mit (6.5.10), Tafel 5.2 sowie (5.6.26) und (5.6.27) kann für die Restriktion (6.5.3) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{Sp} \cdot (\mathbf{S}_{E}^{S} - \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}}) &\geq 0, \\ (\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Sp})_{p}^{\Delta} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\tau}}_{E}^{S} - \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Sp}}) &\geq 0, \\ (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} \cdot (\boldsymbol{\tau}_{E}^{S} - \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{A}_{Sp}}) &\geq 0. \end{aligned}$$

$$(6.5.11)$$

Diese äquivalenten Ungleichungen zeigen, daß die Restriktion für den Zuwachs der plastischen Arbeit in Bezug auf alle drei Konfigurationen des Festkörperskeletts als invarianter Skalar dargestellt werden kann. Die Größen

$$\mathbf{Z}^{S} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}},$$

$$\widehat{\mathbf{Y}}^{S} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Sp}},$$

$$\mathbf{Y}^{S} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{A}_{Sp}}$$
(6.5.12)

werden als Translationstensoren der kinematischen Verfestigung aufgefaßt. Ein Vergleich von (6.5.12) mit (6.5.10) zeigt außerdem, daß die Translationstensoren ein Transformationsverhalten wie die Spannungstensoren besitzen, d. h.:

$$\widehat{\mathbf{Y}}^{S} = \mathbf{F}_{Sp} \mathbf{Z}^{S} \mathbf{F}_{Sp}^{T} , \quad \widehat{\boldsymbol{\tau}}_{E}^{S} = \mathbf{F}_{Sp} \mathbf{S}_{E}^{S} \mathbf{F}_{Sp}^{T} ,$$

$$\mathbf{Y}^{S} = \mathbf{F}_{Se} \widehat{\mathbf{Y}}^{S} \mathbf{F}_{Se}^{T} , \quad \boldsymbol{\tau}_{E}^{S} = \mathbf{F}_{Se} \widehat{\boldsymbol{\tau}}_{E}^{S} \mathbf{F}_{Se}^{T} .$$

$$(6.5.13)$$

Für den Fall, daß die Festkörpermatrix elastisch-idealplastisches Materialverhalten aufweist, kann angenommen werden, daß

$$\psi^{S}(\theta, \mathbf{E}_{Se}, \mathbf{E}_{Sp}) \to \psi^{S}(\theta, \mathbf{E}_{Se}),$$
(6.5.14)

d. h. die gesamte plastische Dissipationsleistung wird in Temperatur umgewandelt und die Translationstensoren aus (6.5.12) ergeben sich zu Null. Mit (6.5.14) geht die Restriktion für den Zuwachs der plastischen Arbeit aus $(6.5.11)_3$ in

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\vartriangle} \cdot \boldsymbol{\tau}_E^S \ge 0 \tag{6.5.15}$$

über. Eine Restriktion der Form (6.5.15) wurde z. B. von *de Boer & Kowalski* [1983] sowie von *de Boer & Ehlers* [1986a] benutzt. In beiden genannten Arbeiten wird elastischidealplastisches Verhalten des Festkörperskeletts vorausgesetzt.

6.6 Ergänzende Bemerkungen

Im vorliegenden Kapitel wurde ein binäres poröses Medium, bestehend aus einer inkompressiblen, elastisch-plastisch deformierbaren Festkörpermatrix und einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit, auf der Basis der um das Konzept der Volumenanteile erweiterten Mischungstheorie diskutiert. Speziell das vereinfachte konstitutive Modell muß als geeignete Beschreibungsmöglichkeit für praxisrelevante Probleme verstanden werden. Durch Berücksichtigung eines Lagrangeschen Multiplikators p (statischer Ruhedruck der Flüssigkeit) konnte gezeigt werden, daß nur die Extraspannungen des Festkörperskeletts in Abhängigkeit der elastischen Festkörperdeformationen anzugeben sind. Konsequenterweise beeinflussen auch nur die Extraspannungen die Restriktion für den Zuwachs der plastischen Arbeit. Diese Extraspannungen enthalten für die inkompressible Festkörpermatrix natürlich nicht nur deviatorische Anteile sondern auch hydrostatische Anteile; und zwar als Folge lokaler Porositätsveränderungen. Das elastische und plastische Materialverhalten der Festkörpermatrix wird in den beiden folgenden Kapiteln eingehend zu untersuchen sein.

Alternativ zu dem hier vorgestellten Modell sind natürlich auch viele andere Modelle poröser Medien für praxisorientierte Probleme von großer Relevanz, so daß im folgenden zumindest die Ergebnisse von zwei weiteren Modellen vorgestellt werden sollen. Alle anderen Modelle können, falls erwünscht, auf der Basis der Ergebnisse des Kapitels 5 behandelt werden.

Die erste Variante des vorliegenden Modells besteht darin, daß der Porenraum der inkompressiblen Festkörpermatrix nicht mit einer inkompressiblen Flüssigkeit sondern mit Gas (kompressibles Fluid) gesättigt ist. Dieses Modell ist auf der Basis von (5.7.29) im Zusammenhang mit (5.7.32) zu entwickeln. Die Inkompressibilitätsbedingung entfällt. Stattdessen ist der Variablensatz ϕ aus (6.2.22)₃ um die Prozeßvariablen ρ^F und grad ρ^F zu erweitern:

$$\phi = \{\theta, \operatorname{grad} \theta, \rho^F, \operatorname{grad} \rho^F, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Se}, \overset{3}{\mathbf{G}}_{Sp}, \overset{3}{\mathbf{x}}_F - \overset{\prime}{\mathbf{x}}_S, \mathbf{D}_F\}.$$
(6.6.1)

In Analogie zu den Ausführungen der Abschnitte 6.3 und 6.4 folgt, wenn die Funktionen der freien Energien zusätzlich zu den Linearisierungen gemäß (6.4.7) in grad ρ^F linearisiert werden:

$$\Psi^{I}, \Psi^{S}, \Psi^{F}, \P = f(\theta, \rho^{F}, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp})$$

mit $\left. \frac{\partial \Psi^{i}}{\partial (\operatorname{grad} \rho^{F})} \right|_{\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S} = \mathbf{0}} = \mathbf{0}.$ (6.6.2)

Für die Partialspannungen von Festkörperskelett und Flüssigkeit sowie die Interaktionskraft zwischen beiden Konstituierenden erhält man

$$\mathbf{T}^{S} = \Psi^{S} \mathbf{I} + \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T},$$

$$\mathbf{T}^{F} = (\Psi^{F} - \rho^{F} \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \rho^{F}}) \mathbf{I} + 2 \mu^{F} \mathbf{D}_{F} + \lambda^{F} (\mathbf{D}_{F} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I},$$

$$\hat{\mathbf{p}}^{F} = -\alpha_{\theta} \operatorname{grad} \theta - \mathbf{S}_{v} (\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S}) + \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \rho^{F}} \operatorname{grad} \rho^{F} - \mathbf{F}_{Se}^{T-1} (\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{G}_{Se}^{3})^{\underline{1}} - \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} (\frac{\partial \Psi^{F}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{G}_{Sp})^{\underline{1}}.$$
(6.6.3)

Die Restriktion für den Zuwachs der plastischen Arbeit lautet:

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\vartriangle} \cdot [\mathbf{T}^{S} - \Psi^{S}\mathbf{I} - \mathbf{F}_{Se}\frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\mathbf{F}_{Sp}}\mathbf{F}_{Sp}^{T}\mathbf{F}_{Se}^{T} + (\mathbf{F}_{Se}\mathbf{F}_{Se}^{T} - \mathbf{I})\frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\mathbf{F}_{Se}}\mathbf{F}_{Se}^{T}] \ge 0. \quad (6.6.4)$$

Die Beziehungen (6.6.2) - (6.6.4) gelten anstelle der entsprechenden Ausdrücke aus (6.4.9), (6.4.39) und (6.4.48). Die Ergebnisse für die Entropiefunktionen ¶ⁱ und den Zuflußvektor **h** können unverändert übernommen werden. Weitere Umformungen von (6.6.2) - (6.6.4) sind in Analogie zu (6.4.49) folgende vorzunehmen.

Die zweite Variante des in Kapitel 6 diskutierten inkompressiblen Kontinuums ist das sogenannte leere Festkörperskelett. Für dieses Modell wird ein inkompressibles, elastischplastisch deformierbares Festkörpermaterial vorausgesetzt, dessen Porenräume entweder materiefrei sind oder bei dem man die mechanische Wirkung der Poreninhaltsstoffe vernachlässigen kann. Die Ergebnisse dieses Modells, das auf der Basis von (5.7.24) und (5.7.32) zu entwickeln ist, können den Abschnitten 6.3 - 6.5 direkt entnommen werden, wenn man beachtet, daß hier die Inkompressibilitätsbedingung sowie sämtliche Kopplungsmechanismen entfallen. Es gilt:

$$\Psi^{S}, \eta^{S} = f(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) , \qquad \eta^{S} = \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \theta} ,$$

$$\mathbf{T}^{S} = \rho^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T} ,$$

$$\mathbf{q}^{S} = -\beta_{\theta}^{S} \operatorname{grad} \theta$$
(6.6.5)

sowie

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\vartriangle} \cdot [\mathbf{T}^{S} - \rho^{S} \mathbf{F}_{Se} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{F}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T} + (\mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{T} - \mathbf{I}) \rho^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{F}_{Se}} \mathbf{F}_{Se}^{T}] \ge 0.$$
(6.6.6)

Diese Beziehungen zeigen eine formale Übereinstimmung mit den entsprechenden Ergebnissen eines kompressiblen, nichtporösen Festkörpers. Bei der Beschreibung des elastischen und plastischen Materialverhaltens treten hier jedoch wesentliche Unterschiede auf, vgl. Kapitel 7 und 8.

Durch Wechsel der Prozeßvariablen gemäß

$$\psi^{S}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) \to \psi^{S}(\theta, \mathbf{E}_{Se}, \mathbf{E}_{Sp})$$
 (6.6.7)

kann alternativ zu $(6.6.5)_2$ und (6.6.6) geschrieben werden:

$$\mathbf{T}^{S} = \rho^{S} \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T},$$

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} \cdot (\mathbf{T}^{S} - \rho^{S} \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^{T} \mathbf{F}_{Se}^{T}) \geq 0.$$

$$(6.6.8)$$

Ein Vergleich von (6.6.8) mit $(6.5.2)_3$ und (6.5.3) zeigt die Identität dieser Beziehungen, da für das leere Festkörperskelett der Ruhedruck p der Flüssigkeit entfällt, so daß

$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}^S_E. \tag{6.6.9}$$

Darüber hinaus gilt für beide Modelle $\psi^S = \psi^S(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp})$, vgl. $(6.5.1)_1$ und $(6.6.5)_1$.

Es kann daher davon ausgegangen werden, daß die Beschreibung des elastischen und plastischen Materialverhaltens des im vorangegangenen diskutierten inkompressiblen porösen Mediums bis auf den Einfluß des Druckes p auf das inkompressible, leere Festkörperskelett übertragbar ist.
Kapitel 7: Ein Elastizitätsgesetz für isotrope poröse Körper

7.1 Einleitung

Das elastische Verhalten poröser Festkörper wird in erster Linie durch die Struktur des Materials bestimmt. Bei granularen und spröden Werkstoffen, wie Erdstoffen, Steinen, Betonen etc. ist der elastische Bereich sehr klein, zum Teil sogar vernachlässigbar. So ist z. B. aus der Bodenmechanik bekannt, daß Werkstoffe wie Sand, Lehm oder Kies nur bei Schwingungserregungen ausgeprägte reversible Deformationen zeigen, vgl. z. B. Gassmann [1951], während bei statischer Belastung ein nahezu starr-plastisches Werkstoffverhalten beobachtet werden kann. Ein völlig anderes Verhalten zeigen duktile bzw. bildsame Materialien wie porige Metalle oder poröse Werkstoffe der Kunststofftechnologie. Diese Materialien besitzen einen ausgeprägten elastischen Bereich, wobei vor allem den infolge der Porosität auftretenden Volumendehnungen große Aufmerksamkeit geschenkt werden muß. Zur Verdeutlichung dieses Effekts wurde in der Einleitung zu vorliegender Arbeit bereits das Beispiel eines Schwamms erwähnt, bei dem je nach Porosität Volumendehnungen von 80% und mehr auftreten können. Die Entwicklung eines Elastizitätsgesetzes für poröse Medien muß daher den Bereich großer Volumendehnungen einschließen, der bekanntlich nicht durch Elastizitätsgesetze Hookeschen Typs abgedeckt ist. Der Bereich kleiner und kleinster elastischer Deformationen ist dann automatisch mitbeschrieben.

Die meisten in der Literatur dokumentierten Elastizitätsgesetze sind Varianten eines Hookeschen Materialmodells. Nichtlineare Elastizitätsgesetze wurden dagegen z. B. von Mooney [1940], Rivlin & Saunders [1951] sowie Murnaghan [1951] entwickelt, wobei in [1940] und [1951] nur große elastische Formänderungen inkompressibler Materialien behandelt wurden (Mooney-Rivlin-Theorie für Gummi). Auch das Neo-Hookesche Materialmodell, Rivlin [1948], ist auf inkompressible Werkstoffe beschränkt. Die Theorie von Murnaghan behandelt dagegen auch große elastische Volumendehnungen, jedoch um den Preis einer Vielzahl von Materialparametern, die versuchstechnisch bestimmt werden müssen. Grundsätzliche Überlegungen bezüglich des elastischen Verhaltens fester Körper können den Arbeiten von Doyle & Ericksen [1956], Truesdell & Toupin [1960], Bernstein [1960], Truesdell & Noll [1965], Wang & Truesdell [1973] oder Marsden & Hughes [1983] entnommen werden.

Simo & Pister [1984] entwickelten in Erweiterung des Neo-Hookeschen Materialmodells auf den Bereich großer Volumendehnungen ein neues, auch numerisch effizientes Elastizitätsgesetz, siehe auch Bluhm & Ehlers [1989], das mit nur zwei Materialparametern - den Laméschen Konstanten - auskommt. Marotzke [1985] hat gezeigt, daß das Neo-Hookesche Materialmodell im Gegensatz zu anderen nichtlinearen Elastizitätsgesetzen relativ unempfindlich auf Änderungen des Meßwertebereichs bei der Bestimmung von Materialparametern aus einachsigen Versuchen reagiert, so daß nicht nur das Neo-Hookesche Materialgesetz selbst sondern auch das erweiterte Neo-Hookesche Gesetz, das Elastizitätsgesetz von Simo und Pister, in besonderem Maße geeignet erscheinen, nichtlineare Elastizitätsprobleme nichtporöser Werkstoffe zu beschreiben.

Die Übertragung der bisher genannten Elastizitätsgesetze auf poröse Medien ist jedoch nur mit großen Einschränkungen möglich. Daher soll im folgenden ein neues Elastizitätsgesetz entwickelt werden, mit dem sich auch die im geometrisch nichtlinearen Bereich auftretenden Charakteristika poröser Körper (große Verzerrungen und große Volumendehnungen) beschreiben lassen. Um dieses Stoffgesetz gleichermaßen auf leere sowie gesättigte Festkörperskelette anwenden zu können, wird im Rahmen des in Kapitel 6 diskutierten porösen Mediums von den Ergebnissen des mit Hilfe des "Prinzips der konstitutiven Trennung der Teilkörper" entwickelten vereinfachten Modells ausgegangen. Zusätzlich wird vorausgesetzt, daß der inkompressible poröse Festkörper aus isotropem Material mit isotroper Porosität besteht.

Zur Beschreibung praxisorientierter Probleme ist es erforderlich, ein möglichst einfaches Elastizitätsgesetz zu entwickeln, d.h. die Anzahl der erforderlichen Werkstoffparameter soll auf ein Minimum beschränkt werden. Zusätzlich sollen nur solche Werkstoffparameter benutzt werden, die sich für den Fall rein elastischer Deformationsprozesse als Funktion der Anfangsporosität angeben lassen, so daß diese Werkstoffparameter dann in Bezug auf den Deformationsprozeß als konstant angesehen werden können. Für elastisch-plastische Deformationsprozesse muß allerdings eine prinzipielle Abhängigkeit dieser Werkstoffparameter von der plastischen Deformation der Zwischenkonfiguration zugelassen werden. Eine weitere Anforderung an ein nichtlineares Elastizitätsgesetz besteht in der Übertragbarkeit des Gesetzes auf poröse Festkörper mit uneingeschränkt elastischem Verhalten. Hier ist besonders der Bereich reiner Volumendehnungen zu untersuchen, die für das inkompressible Festkörpermaterial allein aus lokalen Porositätsveränderungen resultieren. So ist im Extensionsbereich zumindest rein theoretisch eine beliebige Aufweitung der Porenzüge denkbar; im Kompressionsbereich kann dagegen ein völliger Verlust der Porosität eintreten. Dieser Zustand wird als Kompressionspunkt des Materials bezeichnet. Über den Kompressionspunkt hinaus sind für das inkompressible Material keine weiteren Volumenverringerungen möglich, da sich der Werkstoff dann wie ein nichtporöser, inkompressibler Festkörper verhält. Schließlich soll das zu entwickelnde Elastizitätsgesetz auch den Übergang zur linearen Elastizitätstheorie gestatten.

Es wird sich zeigen, daß die genannten Forderungen im Zusammenhang mit der zusätzlichen Forderung einer isotropen Tangente an das Materialgesetz auf ein dreiparametriges, nichtlineares Elastizitätsgesetz führen, das als Erweiterung des Gesetzes von Simo und Pister aufgefaßt werden kann, vgl. Ehlers [1989a].

7.2 Voraussetzungen und Annahmen

In Abschnitt 6.6, vgl. (6.6.7) - (6.6.9), wurde gezeigt, daß die Partialspannungen \mathbf{T}^{S} des leeren, inkompressiblen Festkörperskeletts in gleicher Weise durch die Festkörperdeformation bestimmt sind wie die Extraspannung \mathbf{T}_{E}^{S} des vereinfachten, flüssigkeitsgesättigten, inkompressiblen Modells. Zur Vereinheitlichung der Schreibweise soll daher im folgenden eine zusätzliche Kennzeichnung der Extraspannung durch den Index $(...)_{E}$ unterbleiben: und zwar mit der Vorgabe, daß die folgenden Beziehungen gleichzeitig für die oben genannten \mathbf{T}^{S} und \mathbf{T}_{E}^{S} gelten.

Mit Hilfe des Prinzips der materiellen Objektivität konnte gezeigt werden, daß

$$\psi^{S}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) \rightarrow \psi^{S}(\theta, \mathbf{E}_{Se}, \mathbf{E}_{Sp}), \qquad (7.2.1)$$

vgl. (6.4.68) - (6.4.81). Außerdem sei vorausgesetzt, daß die elastischen und plastischen Verzerrungstensoren gemäß (6.5.5) entkoppelt sind, d. h.:

$$\psi^{S}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) \rightarrow \psi^{Se}(\theta, \mathbf{E}_{Se}) + \psi^{Sp}(\mathbf{E}_{Sp}) .$$
 (7.2.2)

Um das Folgende nicht mit vielen Argumenten zu belasten, die für die meisten praxisrelevanten Problemstellungen entbehrlich sind, soll zusätzlich von einer Entkopplung der Argumente θ und \mathbf{E}_{Se} ausgegangen werden, so daß im Sinne eines hyperelastischen Ansatzes für ψ^{Se}

$$\psi^{S}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) \rightarrow \tilde{\psi}^{Se}(\theta) + \tilde{\psi}^{Se}(\mathbf{E}_{Se}) + \psi^{Sp}(\mathbf{E}_{Sp})$$
 (7.2.3)

gesetzt werden kann. Darin ist $\tilde{\psi}^{Se}(\mathbf{E}_{Se})$ als gespeicherte elastische Energie (stored-energy function) des porösen Festkörpermaterials zu verstehen.

Mit (6.5.9) sind die Kirchhoffschen bzw. zweiten Piola-Kirchhoffschen Partial- bzw. Extraspannungen gegeben, so daß mit (7.2.3)

$$\mathbf{S}^{S} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial \mathbf{E}_{Se}},$$

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se}},$$
(7.2.4)

$$\boldsymbol{\tau}^{S} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial \mathbf{A}_{Se}}.$$

Die Darstellung der Spannungen als Gradient der gespeicherten elastischen Energie in Richtung des zur jeweiligen Spannung gehörenden (dualen^I) elastischen Verzerrungsmaßes,

^Ider Begriff "dual" schließt im allgemeinen eine bestimmte Eigenschaft in Bezug auf zeitliche Ableitungen ein, vgl. *Tsakmakis* [1987, S. 128]

vgl. *Macvean* [1968], ermöglicht eine einfache Definition 4-stufiger Elastizitätstensoren, z. B.:

$$(\mathbf{S}^{S})'_{S} = \mathbf{B}_{e} (\mathbf{E}_{Se})'_{S} ,$$

$$\mathbf{B}_{e} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial \mathbf{E}_{Se} \otimes \partial \mathbf{E}_{Se}} .$$

$$(7.2.5)$$

Mit Hilfe der Definition einer unteren plastischen Lie-Ableitung der Kirchhoffschen Partialspannung $\hat{\tau}^{s}$ der Zwischenkonfiguration von φ^{s} und einer unteren Lie-Ableitung der Kirchhoffschen Partialspannung $\boldsymbol{\tau}^{s}$,

$$(\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} = (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{S}^{\prime} - \widehat{\mathbf{L}}_{Sp} \,\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} \,\widehat{\mathbf{L}}_{Sp}^{T} ,$$

$$(\boldsymbol{\tau}^{S})^{\nabla} = (\boldsymbol{\tau}^{S})_{S}^{\prime} - \mathbf{L}_{S} \,\boldsymbol{\tau}^{S} - \boldsymbol{\tau}^{S} \,\mathbf{L}_{S}^{T} ,$$

$$(7.2.6)$$

läßt sich zeigen, daß das Transformationsverhalten der Spannungsgeschwindigkeiten mit demjenigen der Spannungstensoren, vgl. (5.6.27), identisch ist:

$$(\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} = \mathbf{F}_{Sp} (\mathbf{S}^{S})_{S}^{\prime} \mathbf{F}_{Sp}^{T} ,$$

$$(\boldsymbol{\tau}^{S})^{\nabla} = \mathbf{F}_{Se} (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} \mathbf{F}_{Se}^{T} .$$

$$(7.2.7)$$

Im Gegensatz zum Transformationsverhalten der Verzerrungstensoren nach Tafel 5.1 und Verzerrungsgeschwindigkeiten nach Tafel 5.2, das durch einen kontravarianten Transport gekennzeichnet ist, zeigen die Spannungstensoren aus (5.6.27) und Spannungsgeschwindigkeiten aus (7.2.7) ein kovariantes Transformationsverhalten. Der Begriff "untere" Lie-Ableitung deutet an, daß für den Fall einer Darstellung in einer kovarianten natürlichen Basis nur die kontravarianten Koeffizienten abzuleiten sind. Die kovariante Basis ist konstant zu halten.

Durch Vorwärtstransformation von (7.2.5) folgt mit $(7.2.7)_1$ und Tafel 5.2

$$(\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} = \mathbf{F}_{Sp} \left\{ \mathbf{B}_{e} \left[\mathbf{F}_{Sp}^{T} \left(\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se} \right)_{p}^{\vartriangle} \mathbf{F}_{Sp} \right] \right\} \mathbf{F}_{Sp}^{T} , \qquad (7.2.8)$$

so daß durch zweimaliges Anwenden von (A.1.8) auf

$$(\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} = \widehat{\mathbf{C}}_{e} (\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se})_{p}^{\Delta} ,$$

$$\stackrel{4}{\widehat{\mathbf{C}}_{e}} = (\mathbf{F}_{Sp}^{T} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{T})^{\frac{14}{T}} \stackrel{4}{\mathbf{B}}_{e} (\mathbf{F}_{Sp} \otimes \mathbf{F}_{Sp})^{\frac{14}{T}}$$

$$(7.2.9)$$

geschlossen werden kann. Mit $(7.2.9)_2$ kann der Elastizitätstensor $\widehat{\mathbf{C}}_e$ der Zwischenkonfiguration von φ^S als Vorwärtstransformation (kovarianter Transport) des Elastizitätstensors ⁴ **B** der Referenzkonfiguration von φ^S dargestellt werden. Es gilt mit $(6.5.8)_1$

$$\frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial \mathbf{E}_{Se} \otimes \partial \mathbf{E}_{Se}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \left[\left(\frac{\partial \widehat{\Gamma}_{Se}}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \right)^{T} \frac{\partial \widetilde{\psi}^{Se}}{\partial \widehat{\Gamma}_{Se}} \right]
= \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \left[\left(\mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \right)^{14} \frac{\partial \widetilde{\psi}^{Se}}{\partial \widehat{\Gamma}_{Se}} \right],$$
(7.2.10)

so daß mit (A.3.6) und Tafel 5.2

$$\frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial \mathbf{E}_{Se} \otimes \partial \mathbf{E}_{Se}} = (\mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{T-1})^{T} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial \widehat{\Gamma}_{Se} \otimes \partial \widehat{\Gamma}_{Se}} \frac{\partial \widehat{\Gamma}_{Se}}{\partial \mathbf{E}_{Se}}
= (\mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{T-1})^{T} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial \widehat{\Gamma}_{Se} \otimes \partial \widehat{\Gamma}_{Se}} (\mathbf{F}_{Sp}^{-1} \otimes \mathbf{F}_{Sp}^{-1})^{T}.$$
(7.2.11)

Ein Vergleich von $(7.2.5)_2$, $(7.2.9)_2$ und (7.2.11) zeigt bei Beachtung der Rechenregel (A.1.5) sowie der Identität $\stackrel{4}{\mathbf{I}}\stackrel{4}{\mathbf{A}} = \stackrel{4}{\mathbf{A}} : (\stackrel{4}{\mathbf{A}} : \text{beliebig}):$

$$(\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} = \widehat{\widehat{\mathbf{C}}}_{e} (\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se})_{p}^{\Delta} ,$$

$$\stackrel{4}{\widehat{\mathbf{C}}}_{e} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial^{2} \widetilde{\psi}^{Se}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se} \otimes \partial \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se}} .$$

$$(7.2.12)$$

In Analogie zu (7.2.9) - (7.2.12) läßt sich ebenfalls zeigen, daß

$$(\boldsymbol{\tau}^{S})^{\nabla} = \overset{4}{\mathbf{C}_{e}} (\mathbf{A}_{Se})^{\Delta},$$

$$\overset{4}{\mathbf{C}_{e}} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial \mathbf{A}_{Se} \otimes \partial \mathbf{A}_{Se}}$$
(7.2.13)

mit

$$\overset{4}{\mathbf{C}_{e}} = (\mathbf{F}_{Se}^{T} \otimes \mathbf{F}_{Se}^{T})^{14} \overset{4}{\widehat{\mathbf{C}}_{e}} (\mathbf{F}_{Se} \otimes \mathbf{F}_{Se})^{14} .$$
 (7.2.14)

Mit (7.2.5), (7.2.12) und (7.2.13) stehen drei äquivalente Ausdrücke für die Spannungsgeschwindigkeiten und Elastizitätstensoren zur Verfügung, die per Vorwärts- oder Rückwärtstransformation ineinander überführt werden können. Alle Elastizitätstensoren können als Gradient der Spannung in Richtung des jeweils zugehörigen Verzerrungsmaßes bzw. als zweiter Gradient der gespeicherten Energie in Richtung der jeweiligen Verzerrung ausgedrückt werden.

Alternativ zu (7.2.12) und (7.2.13) können noch zwei weitere Versionen dieser Beziehungen bei der Entwicklung von Elastizitätsgesetzen benutzt werden. Mit $(6.4.74)_1$ gilt

$$\widehat{\mathbf{C}}_{Se} = 2\,\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se} + \mathbf{I} \,, \qquad (7.2.15)$$

so daß anstelle von $(7.2.4)_2$

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} = \rho_{0S}^{S} \left(\frac{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{Se}}{\partial \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se}}\right)^{T} \frac{\partial \widetilde{\psi}^{Se}}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{Se}} \\
= 2 \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \widetilde{\psi}^{Se}}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{Se}}$$
(7.2.16)

geschrieben werden kann. Daraus folgt für $\hat{\hat{\mathbf{C}}}_e$ aus $(7.2.12)_2$:

$$\hat{\widehat{\mathbf{C}}}_{e} = 4 \rho_{0S}^{S} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{Se} \otimes \partial \widehat{\mathbf{C}}_{Se}} .$$
(7.2.17)

Beachtet man, daß die Vorwärtstransformation von $\widehat{\mathbf{C}}_{Se}$ durch

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}_{Se}^{T-1} \, \widehat{\mathbf{C}}_{Se} \, \mathbf{F}_{Se}^{-1} \tag{7.2.18}$$

definiert ist, so folgt

$$\boldsymbol{\tau}^{S} = \mathbf{F}_{Se} \left[2 \rho_{0S}^{S} \left(\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{Se}} \right)^{T} \frac{\partial \widetilde{\psi}^{Se}}{\partial \mathbf{I}} \right] \mathbf{F}_{Se}^{T}$$
(7.2.19)

und daraus mit (7.2.18), (A.1.5), (A.1.8) und (A.3.6)

$$\boldsymbol{\tau}^{S} = 2\,\rho_{0S}^{S} \,\frac{\partial\tilde{\psi}^{Se}}{\partial\mathbf{I}}\,. \tag{7.2.20}$$

Diese Beziehung ist in der Literatur als Doyle-Ericksen-Formel bekannt, vgl. Marsden und Hughes [1983, S. 166] sowie Doyle und Ericksen [1956, Gl. (5.7) und S. 77]. Mit (7.2.20) läßt sich für $\stackrel{4}{\mathbf{C}}_{e}$ aus (7.2.13)₂ schreiben:

$$\overset{4}{\mathbf{C}_{e}} = 4\,\rho_{0S}^{S}\,\frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial\mathbf{I}\otimes\partial\mathbf{I}}\,. \tag{7.2.21}$$

Darin ist I ebenfalls im Sinne von (7.2.18) als Vorwärtstransformation von $\widehat{\mathbf{C}}_{Se}$ aufzufassen.

In den bisherigen Überlegungen ist die im vorliegenden Kapitel geforderte Isotropieeigenschaft des Festkörpermaterials unberücksichtigt geblieben. Diese Eigenschaft bedingt jedoch, vgl. (5.5.61), daß die allgemeine Abhängigkeit der freien Energie von \mathbf{F}_{Se} und \mathbf{F}_{Sp} durch eine spezielle Abhängigkeit von \mathbf{B}_{Se} und $\hat{\mathbf{B}}_{Sp}$ zu ersetzen ist, d. h.:

$$\psi^{S}(\theta, \mathbf{F}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) \rightarrow \psi^{S}(\theta, \mathbf{B}_{Se}, \mathbf{\widehat{B}}_{Sp}) .$$
 (7.2.22)

Faßt man θ , \mathbf{E}_{Se} und \mathbf{E}_{Sp} entsprechend (7.2.3) als entkoppelte Parameter auf, so kann für $\tilde{\psi}^{Se}$ isotroper φ^{S} gesetzt werden:

$$\tilde{\psi}^{Se}(\mathbf{E}_{Se}) = \tilde{\psi}^{Se}(\widehat{\mathbf{C}}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) \rightarrow \tilde{\psi}^{Se}(\mathbf{B}_{Se}, \widehat{\mathbf{B}}_{Sp}).$$
(7.2.23)

Die Forderung, daß die Funktion $\tilde{\psi}^{Se}$ dem Prinzip der materiellen Objektivität genügen muß, liefert mit $(5.6.22)_1$ und Tafel 5.3

$$\widetilde{\psi}^{Se}(\widehat{\mathbf{C}}_{Se}, \mathbf{F}_{Sp}) = \widetilde{\psi}^{Se}(\widehat{\mathbf{Q}} \, \widehat{\mathbf{C}}_{Se} \, \widehat{\mathbf{Q}}^{T}, \, \widehat{\mathbf{Q}} \, \mathbf{F}_{Sp}) \rightarrow
\rightarrow \widetilde{\psi}^{Se}(\mathbf{B}_{Se}, \, \widehat{\mathbf{B}}_{Sp}) = \widetilde{\psi}^{Se}(\mathbf{Q} \, \mathbf{B}_{Se} \, \mathbf{Q}^{T}, \, \widehat{\mathbf{Q}} \, \widehat{\mathbf{B}}_{Sp} \, \widehat{\mathbf{Q}}^{T}),$$
(7.2.24)

so daß $\tilde{\psi}^{Se}$ als Funktion der Invarianten I_e , II_e und III_e von \mathbf{B}_{Se} bzw. $\widehat{\mathbf{C}}_{Se}$ und der Invarianten I_p , II_p und III_p von $\widehat{\mathbf{B}}_{Sp}$ bzw. \mathbf{C}_{Sp} dargestellt werden kann. Im Vergleich von (7.2.23) und (7.2.24) folgt

$$\tilde{\psi}^{Se}(\mathbf{E}_{Se}) \rightarrow \tilde{\psi}^{Se}(I_e, II_e, III_e; I_p, II_p, III_p).$$
 (7.2.25)

Daß die gespeicherte elastische Energie im Rahmen elastisch-plastischer Deformationsprozesse nicht allein eine Funktion der elastischen Deformationsanteile sein kann, ist offensichtlich, da $\tilde{\psi}^{Se}$ durch den momentanen "Abstand" zwischen der aktuellen Konfiguration und der plastischen Zwischenkonfiguration von φ^S gegeben ist. Die Zwischenkonfiguration wird jedoch bei allgemeinen Belastungsprozessen während des Deformationsvorgangs mitbewegt. Bei der Definition eines endlichen Elastizitätsgesetzes für poröse Medien soll im folgenden so vorgegangen werden, daß man die bestehende plastische Deformation als "momentan eingefroren" betrachtet. Im Rahmen der Elastoplastizitätstheorie mit Fallunterscheidung bewirkt dieses Vorgehen, daß das Stoffgesetz für die Spannungsgeschwindigkeiten (4-stufiger Elastizitätstensor) als elastische Tangente an das Materialgesetz zu verstehen ist. Dadurch wird es möglich, die momentanen Spannungsgeschwindigkeiten innerhalb numerischer Berechnungsverfahren mit Hilfe von Materialparametern zu beschreiben, die zwar von der plastischen Deformation abhängen, jedoch momentan konstant sind, vgl. Abschnitt 7.3.

Die vorangegangenen Überlegungen zeigen, daß (7.2.25) in der Weise aufzufassen ist, daß

$$\tilde{\psi}^{Se}(\mathbf{E}_{Se}) \rightarrow \tilde{\psi}^{Se}(I_e, II_e, J_e; I_p, II_p, J_p) \Big|_{\mathbf{C}_{Sp}=\text{konst.}}$$
(7.2.26)

Darin sind

$$J_{e} = \det \mathbf{F}_{Se} = (III_{e})^{\frac{1}{2}},$$

$$J_{p} = \det \mathbf{F}_{Sp} = (III_{p})^{\frac{1}{2}}.$$
(7.2.27)

Damit folgt unter Voraussetzung von (7.2.26) für isotrop elastische φ^S gemäß (7.2.16):

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} = 2 \rho_{0S}^{S} \left(\varphi_{0} \mathbf{I} + \varphi_{1} \widehat{\mathbf{C}}_{Se} + \varphi_{-1} \widehat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \right) \Big|_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}}$$
(7.2.28)

mit

$$\begin{split} \varphi_{0} &= \left. \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}} + I_{e} \frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}} \right) \right|_{\mathbf{C}_{Sp=konst.}}, \\ \varphi_{1} &= \left. - \frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}} \right|_{\mathbf{C}_{Sp=konst.}}, \\ \varphi_{-1} &= \left. \frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial J_{e}} \right|_{\mathbf{C}_{Sp=konst.}}. \end{split}$$
(7.2.29)

Durch Vorwärtstransformation von (7.2.28) mit $\mathbf{F}_{Se}(...) \mathbf{F}_{Se}^{T}$ entsteht für (7.2.20):

$$\boldsymbol{\tau}^{S} = 2 \rho_{0S}^{S} \left(\varphi_{0} \mathbf{B}_{Se} + \varphi_{1} \mathbf{B}_{Se} \mathbf{B}_{Se} + \varphi_{-1} \mathbf{I} \right) |_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}}$$
(7.2.30)

Mit (7.2.28) und (7.2.30) können $\hat{\tau}^{S}$ und τ^{S} als isotrope Tensorfunktionen der Zwischenkonfiguration und der aktuellen Konfiguration dargestellt werden.

Bei Beachtung der Ableitungsregeln (A.3.7) und (A.3.8) kann der Elastizitätstensor $\hat{\widehat{\mathbf{C}}}_{e}$ aus (7.2.17) durch Differentiation von (7.2.28) nach $\hat{\mathbf{C}}_{Se}$ gewonnen werden. Man erhält:

$$\begin{split} \frac{4}{\hat{\mathbf{C}}_{e}} &= \left[\left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \left(\frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}^{2}} + \frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}} + 2 I_{e} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e} \partial I_{e}} + I_{e}^{2} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}^{2}} \right) - \\ &- \left(\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se} \right) \left(\frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e} \partial I_{e}} + I_{e} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}^{2}} \right) + \\ &+ \left(\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \right) \left(\frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e} \partial J_{e}} + \frac{1}{2} J_{e} I_{e} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e} \partial J_{e}} \right) - \\ &- \left(\hat{\mathbf{C}}_{Se} \otimes \mathbf{I} \right) \left(\frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e} \partial I_{e}} + I_{e} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}^{2}} \right) + \left(\hat{\mathbf{C}}_{Se} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se} \right) \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}^{2}} - \\ &- \left(\hat{\mathbf{C}}_{Se} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \right) \frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e} \partial J_{e}} + \\ &+ \left(\hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se} \right) \frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e} \partial J_{e}} + \\ &+ \left(\hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se} \right) \frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e} \partial J_{e}} + \\ &+ \left(\hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se} \right) \frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e} \partial J_{e}} + \\ &+ \left(\hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se} \right) \frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e} \partial J_{e}} + \\ &+ \left(\hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se} \right) \left(\frac{1}{4} J_{e} \frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial J_{e}} + \frac{1}{4} J_{e}^{2} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial J_{e}^{2}} \right) - \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)^{T} \frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}} - \\ &- \left(\hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se} \right) \left(\frac{1}{4} J_{e} \frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial J_{e}} + \frac{1}{4} J_{e}^{2} \frac{\partial^{2} \tilde{\psi}^{Se}}{\partial J_{e}^{2}} \right) - \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)^{T} \frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}} - \\ &- \left(\hat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{Se} \right)^{T} \frac{1}{4} J_{e} \frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial J_{e}} \right] \right|_{\mathbf{C}_{Sp=\text{konst.}}$$

Durch Vorwärtstransformation von (7.2.31) entsprechend (7.2.14) folgt mit den Regeln (A.1.5) - (A.1.7):

$$\begin{aligned} \frac{{}^{4}\mathbf{C}_{e}}{4\rho_{0S}^{0S}} &= \left[\left(\mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{B}_{Se} \right) \left(\frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}^{2}} + \frac{\partial\tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}} + 2I_{e} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}\partial II_{e}} + I_{e}^{2} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}^{2}} \right) - \\ &- \left(\mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{B}_{Se} \mathbf{B}_{Se} \right) \left(\frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}\partial II_{e}} + I_{e} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}^{2}} \right) + \\ &+ \left(\mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{I} \right) \left(\frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}\partial J_{e}} + \frac{1}{2} J_{e} I_{e} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}\partial J_{e}} \right) - \\ &- \left(\mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{B}_{Se} \right) \left(\frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}\partial J_{e}} + I_{e} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}^{2}} \right) + \\ &+ \left(\mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{B}_{Se} \right) \left(\frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}\partial II_{e}} + I_{e} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}^{2}} \right) + \\ &+ \left(\mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{B}_{Se} \right) \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}\partial J_{e}} - \\ &- \left(\mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{I} \right) \frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}\partial J_{e}} + \\ &+ \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_{Se} \right) \left(\frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}\partial J_{e}} + \frac{1}{2} J_{e} I_{e} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}\partial J_{e}} \right) - \\ &- \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{B}_{Se} \right) \frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_{e}\partial J_{e}} + \\ &+ \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \left(\frac{1}{4} J_{e} \frac{\partial\tilde{\psi}^{Se}}{\partial J_{e}} + \frac{1}{4} J_{e}^{2} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial J_{e}^{2}} \right) - \left(\mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{B}_{Se} \right)^{\frac{14}{14}} \frac{\partial\tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}} - \\ &- \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)^{\frac{14}{14}} \frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial\tilde{\psi}^{Se}}{\partial J_{e}} + \frac{1}{4} J_{e}^{2} \frac{\partial^{2}\tilde{\psi}^{Se}}{\partial J_{e}^{2}} \right) - \left(\mathbf{B}_{Se} \otimes \mathbf{B}_{Se} \right)^{\frac{14}{14}} \frac{\partial\tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_{e}}} - \\ &- \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)^{\frac{14}{14}} \frac{1}{2} J_{e} \frac{\partial\tilde{\psi}^{Se}}{\partial J_{e}} \right] \bigg|_{\mathbf{C}_{Sp} = \mathrm{konst.}} \right\}$$

Beide Elastizitätstensoren, $\hat{\mathbf{C}}_e$ und \mathbf{C}_e , sind Tensoren 4. Stufe mit den Symmetrieeigenschaften

Die Eigenschaft $\binom{4}{\ldots} = \binom{4}{\ldots}^T$ ist im Zusammenhang mit (A.1.2) offensichtlich; die Eigenschaft $\binom{4}{\ldots} = [\binom{4}{\ldots}^T]^T$ setzt zusätzlich

$$\{[(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\frac{14}{T}}]^{\frac{12}{T}}\}^{\frac{34}{T}} = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})^{\frac{14}{T}}$$
(7.2.34)

voraus (A, B: beliebige 2-stufige Tensoren).

Es läßt sich außerdem zeigen, daß die Elastizitätstensoren bei überlagerter Starrkörperbewegung ein Transformationsverhalten gemäß (5.6.13) aufweisen, wobei der orthogonale Tensor \mathbf{Q} in (7.2.33)₂ durch $\widehat{\mathbf{Q}}$ zu ersetzen ist.

Damit sind sämtliche Voraussetzungen angelegt, die zur Entwicklung von Elastizitätsgesetzen für isotrop hyperelastische Materialien erforderlich sind.

7.3 Nichtlineare Elastizität

Die allgemeinen Formen eines nichtlinearen Elastizitätsgesetzes für isotrop poröse Körper, vgl. (7.2.30) für $\boldsymbol{\tau}^{S}$ und (7.2.32) für $\overset{4}{\mathbf{C}_{e}}$, zeigen vielfältige Möglichkeiten zur Einführung von in der Regel deformationsabhängigen Materialparametern. So kann der Elastizitätstensor $\overset{4}{\mathbf{C}_{e}}$ bis zu neun veränderliche skalare Parameter besitzen – gekoppelt an die Ableitungen von $\tilde{\psi}^{Se}$ –, wenn alle auftretenden Ableitungen von $\tilde{\psi}^{Se}$ existieren. Diese Vielzahl von Parametern versuchstechnisch zu bestimmen, erscheint jedoch völlig aussichtslos. Selbst wenn dies gelänge, ist es fraglich, ob mit einem solchen Stoffgesetz auch andere Probleme als die durchgeführten Versuche beschrieben werden können. Darüber hinaus müßte mit erheblichen Schwierigkeiten bei der Behandlung numerischer Probleme gerechnet werden. Es kann daher nicht das Ziel sein, ein Elastizitätsgesetz zur Behandlung praxisorientierter Probleme auf der Basis der vollständigen Ausdrücke für $\boldsymbol{\tau}^{S}$ und $\overset{4}{\mathbf{C}_{e}}$ anzugeben. Speziell die Berechnung geometrisch-nichtlinearer Probleme, und hier vor allem bei der Beschrei-

bung poröser Medien, für die gekoppelte Differentialgleichungen zu behandeln sind, verlangt nach einfachen, numerisch effizienten Stoffgesetzen, mit denen das Materialverhalten poröser Festkörper mit hinreichender Genauigkeit wiedergegeben werden kann.

In Anlehnung an das nichtlineare Elastizitätsgesetz von Simo & Pister [1984] – die Effizienz dieses Gesetzes bei der Berechnung großer elastischer Deformationen von Stäben wurde von Bluhm & Ehlers [1989] gezeigt –, soll im folgenden ein Stoffgesetz mit einer isotropen räumlichen Tangente entwickelt werden; indem man fordert, daß der Elastizitätstensor ${}^{4}_{C_{e}}$ (elastische Tangente) die Form

$$\begin{array}{ll}
\overset{4}{\mathbf{C}_{e}} &= & 2 \,\alpha^{S} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{14}{T}} + \beta^{S} \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \\
& \text{mit} & & \alpha^{S}, \, \beta^{S} = f(\widehat{\mathbf{C}}_{Se}, \, \mathbf{C}_{Sp}) \Big|_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}}
\end{array}$$
(7.3.1)

besitzt. Mit (7.3.1) wird der einfachste Ansatz gewählt, der zur sinnvollen Beschreibung nichtlinearer elastischer Deformationen poröser Medien möglich ist.

Durch Rückwärtstransformation von $\stackrel{4}{\mathbf{C}_{e}}$ mit $(\mathbf{F}_{Se}^{T-1} \otimes \mathbf{F}_{Se}^{T-1})^{\stackrel{14}{T}} (\dots) (\mathbf{F}_{Se}^{-1} \otimes \mathbf{F}_{Se}^{-1})^{\stackrel{14}{T}}$ erhält man für den Elastizitätstensor $\stackrel{4}{\mathbf{C}_{e}}$ der Zwischenkonfiguration bei Beachtung von (A.1.5) - (A.1.7):

$$\widehat{\widehat{\mathbf{C}}}_{e}^{4} = 2 \alpha^{S} (\widehat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \otimes \widehat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1})^{14} + \beta^{S} (\widehat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \otimes \widehat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1})$$

$$\text{mit} \qquad \alpha^{S}, \ \beta^{S} = f(\widehat{\mathbf{C}}_{Se}, \ \mathbf{C}_{Sp}) \Big|_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}} .$$

$$(7.3.2)$$

Ein Vergleich von (7.3.1) mit (7.2.32) zeigt, daß die Forderung einer isotropen Tangente an das Elastizitätsgesetz nur möglich ist, wenn

$$\frac{\partial \tilde{\psi}^{Se}}{\partial II_e} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_e^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\psi}^{Se}}{\partial I_e \partial J_e} = 0, \quad (7.3.3)$$

d.h. die Funktion $\tilde{\psi}^{Se}$ muß in der Weise konstituiert werden, daß sie unabhängig ist von der zweiten Invarianten II_e , die erste Invariante I_e nur linear enthalten ist und daß zusätzlich die erste und dritte Invariante I_e und III_e (bzw. J_e) entkoppelt sind. Damit kann direkt auf

$$\tilde{\psi}^{Se} = \left[W(I_e, \mathbf{C}_{Sp}) + U(J_e, \mathbf{C}_{Sp}) \right] \Big|_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}}$$
(7.3.4)

geschlossen werden, so daß für $\boldsymbol{\tau}^{S}$ aus (7.2.30) und $\overset{4}{\mathbf{C}_{e}}$ aus (7.2.32) und (7.3.1):

$$\boldsymbol{\tau}^{S} = \left[2 \rho_{0S}^{S} \frac{\partial W(I_{e}, \mathbf{C}_{Sp})}{\partial I_{e}} \mathbf{B}_{Se} + \rho_{0S}^{S} J_{e} \frac{\partial U(J_{e}, \mathbf{C}_{Sp})}{\partial J_{e}} \mathbf{I}\right] \Big|_{\mathbf{C}_{Sp=konst.}},$$

$$\overset{4}{\mathbf{C}_{e}} = 2 \alpha^{S} \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}\right)^{\frac{14}{T}} + \beta^{S} \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}\right)$$
mit
$$\alpha^{S} = -\rho_{0S}^{S} J_{e} \frac{\partial U(J_{e}, \mathbf{C}_{Sp})}{\partial J_{e}} \Big|_{\mathbf{C}_{Sp=konst.}},$$
(7.3.5)

$$\beta^{S} = \rho_{0S}^{S} \left[J_{e} \frac{\partial U(J_{e}, \mathbf{C}_{Sp})}{\partial J_{e}} + J_{e}^{2} \frac{\partial^{2} U(J_{e}, \mathbf{C}_{Sp})}{\partial J_{e}^{2}} \right] \Big|_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}}$$

Um den Grenzübergang zu linearen Elastizitätsgesetzen zu gewährleisten, muß außerdem sichergestellt sein, daß

$$\alpha^{S}|_{J_{e}=1, \mathbf{C}_{Sp}=\text{konst.}} = \mu^{S}(\mathbf{C}_{Sp})|_{\mathbf{C}_{Sp}=\text{konst.}},$$

$$\beta^{S}|_{J_{e}=1, \mathbf{C}_{Sp}=\text{konst.}} = \lambda^{S}(\mathbf{C}_{Sp})|_{\mathbf{C}_{Sp}=\text{konst.}}.$$
(7.3.6)

Darin sind μ^S und λ^S die Lamé-Parameter des porösen Festkörpermaterials. Diese Materialparameter sind für rein elastische Deformationsprozesse ($\mathbf{C}_{Sp} = \mathbf{I}$) als Funktionen der Anfangsporosität anzugeben und somit konstant in Bezug auf den Deformationsprozeß. Bei einer bereits bestehenden plastischen Deformation können μ^S und λ^S als Funktionen der Porosität der plastischen Zwischenkonfiguration bzw. der plastischen Volumendehnung verstanden werden. In diesem Fall sind die Werkstoffparameter bei anwachsenden plastischen Deformationen im Sinne der Definition einer elastischen Tangente, vgl. Abschnitt 7.2, nur "momentan konstant".

An der Darstellung der Elastizitätskoeffizienten α^S und β^S erkennt man, daß $U(J_e, \mathbf{C}_{Sp})$ nichtlinear von J_e abhängen muß, da man ansonsten bei entfallendem zweiten Summanden in β^S aus $(7.3.5)_4$ mit $\alpha^S + \beta^S = 0$ ein Ergebnis erhalten würde, das bereits in der linearen Elastizitätstheorie inkompatibel ist mit der gleichzeitigen Existenz eines positiven Gleitmoduls und eines positiven Kompressionsmoduls. Daß die Elastizitätskoeffizienten deformationsabhängig sein müssen, kann im übrigen auch aus den Integrabilitätsbedingungen für 4-stufige Elastizitätstensoren geschlossen werden, *Bernstein* [1960].

Die Forderung, daß $W(I_e, \mathbf{C}_{Sp})$ linear von der ersten Invarianten abhängen soll, macht einen Vergleich mit dem Neo-Hookeschen Materialmodell nichtporöser Körper, Index N, möglich:

$$\boldsymbol{\tau}^{N} = 2 \rho_{0} \frac{W^{N}(I_{\mathbf{B}})}{\partial I_{\mathbf{B}}} \mathbf{B} - p \mathbf{I} ,$$

$$\rho_{0} W^{N} = \frac{1}{2} \mu \left(I_{\mathbf{B}} - 3 \right) .$$
(7.3.7)

Da das Neo-Hookesche Materialmodell relativ unempfindlich auf Änderungen des Meßwertebereichs bei der Bestimmung des Gleitmoduls μ reagiert und darüber hinaus eine Verallgemeinerung der aus einachsigen Versuchen gewonnenen Materialparameter auf dreidimensionale Spannungszustände zuläßt, *Marotzke* [1985], erscheint es sinnvoll, die Funktion $W(I_e, \mathbf{C}_{Sp})$ im direkten Vergleich mit (7.3.7)₂ zu bestimmen, indem man setzt:

$$\rho_{0S}^{S} W \big|_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}} = \frac{1}{2} \mu^{S} \big|_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}} (I_{e} - 3) .$$

$$(7.3.8)$$

Damit folgt für $(7.3.5)_1$

$$\boldsymbol{\tau}^{S} = \mu^{S} \mathbf{B}_{Se} + \rho_{0S}^{S} J_{e} \left(\left. \frac{\partial U}{\partial J_{e}} \right|_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}} \right) \mathbf{I} .$$
(7.3.9)

Diese Beziehung kann als Erweiterung des Neo-Hookeschen Materialmodells auf den Bereich großer Volumendehnungen verstanden werden.

Zur Bestimmung der Funktion $U(J_e, \mathbf{C}_{Sp})$ soll der Bereich der reinen Volumendehnung herangezogen werden. Entsprechend (B.2.9) kann für den elastischen Anteil des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_{Se} = (J_e)^{\frac{1}{3}} \bar{\mathbf{F}}_{Se}$$
 mit det $\bar{\mathbf{F}}_{Se} = 1$ (7.3.10)

gesetzt werden, so daß für den Fall der reinen Volumendehnung

$$\mathbf{F}_{Se} = (J_e)^{\frac{1}{3}} \mathbf{I} . (7.3.11)$$

Damit folgt aus (7.3.9):

$$\boldsymbol{\tau}^{S} = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{S} \mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{S} = \mu^{S} (J_{e})^{\frac{2}{3}} + \rho_{0S}^{S} J_{e} \left. \frac{\partial U}{\partial J_{e}} \right|_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}}$$
(7.3.12)

Die weiteren Überlegungen sollen unter Voraussetzung uneingeschränkt elastischen Verhaltens eines leeren inkompressiblen porösen Festkörpers erfolgen, d. h.:

$$J_e \to J = \det \mathbf{F}_S = \frac{n_{0S}^S}{n^S}, \qquad (7.3.13)$$

vgl. $(6.2.6)_1$. Der Bereich der möglichen Volumendehnungen sei nur durch den Kompressionspunkt eingeschränkt. Wie bereits in der Einleitung zu vorliegendem Kapitel bemerkt, bedeutet dies, daß im Extensionsbereich beliebige Volumenaufweitungen zugelassen sind, die für das inkompressible Festkörpermaterial allein aus einer Vergrößerung des Porenraums resultieren; das mit (3.2) definierte Partialvolumen bleibt konstant. Der Grenzfall der Extension ist daher durch $n^S \to 0$ festgelegt. Entsprechend gilt für den Grenzfall der Kompression (Kompressionspunkt) $n^S = 1$; d. h. es kann ein völliger Porositätsverlust eintreten. Beachtet man, daß der in Abhängigkeit der Festkörperdeformation auftretende hydrostatische Spannungszustand \mathcal{P}^S im undeformierten Ausgangszustand ($n^S = n_{0S}^S$) verschwindet, im Grenzfall der Extension gegen unendlich geht und im Grenzfall der Kompression einem bestimmten materialabhängigen Grenzdruck $\overset{*}{\mathcal{P}}$ entsprechen muß, dann gelten die Forderungen

$$n^{S} = n_{0S}^{S} \rightarrow J_{e} = 1 : \mathcal{P} = 0 ,$$

$$n^{S} \rightarrow 0 \rightarrow J_{e} \rightarrow \infty : \mathcal{P} \rightarrow \infty , \qquad (7.3.14)$$

$$n^{S} = 1 \rightarrow J_{e} = n_{0S}^{S} : \mathcal{P} = -\overset{*}{\mathcal{P}} .$$

Die Konstituierung der Funktion $U(J_e)$ läßt viele Möglichkeiten zu, die gleichzeitig (7.3.6) und (7.3.14) erfüllen. In Erweiterung des Elastizitätsgesetzes von Simo & Pister [1984, Gln. (4.1) - (4.3)] wird an dieser Stelle vorgeschlagen, für inkompressible poröse Medien

$$\rho_{0S}^{S} J_{e} \frac{\partial U(J_{e})}{\partial J_{e}} = \lambda^{S} J_{e}^{c} \ln J_{e} - \mu^{S}$$

$$(7.3.15)$$

zu setzen, so daß durch Integration für $c \neq 0$

$$\rho_{0S}^{S} U(J_{e}) = \lambda^{S} J_{e}^{c} \frac{c \ln J_{e} - 1}{c^{2}} - \mu^{S} \ln J_{e} + \frac{\lambda^{S}}{c^{2}} .$$
(7.3.16)

Die Größe c ist als dritter, von der elastischen Deformation unabhängiger Werkstoffparameter aufzufassen. Mit (7.3.15) folgt für \mathcal{P}^S aus (7.3.12)₂:

$$\mathcal{P}^{S} = \mu^{S} \left[\left(J_{e} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] + \lambda^{S} J_{e}^{c} \ln J_{e} .$$
(7.3.17)

Damit erhält man für die Grenzfälle der Volumendehnung aus (7.3.14)

$$\mathcal{P}^{S}(J_{e} = 1) = 0,$$

$$\mathcal{P}^{S}(J_{e} \to \infty) \to \infty,$$

$$\mathcal{P}^{S}(J_{e} = n_{0S}^{S}) = -\overset{*}{\mathcal{P}}^{S}$$
(7.3.18)

mit

$$\mathcal{P}^{S} = \mu^{S} \left[1 - (n_{0S}^{S})^{\frac{2}{3}} \right] - \lambda^{S} (n_{0S}^{S})^{c} \ln n_{0S}^{S} .$$
(7.3.19)

In (7.3.19) sind die Größen μ^S , λ^S und n_{0S}^S als Größen der Referenzkonfiguration vorgegeben und in Bezug auf den Deformationsprozeß konstant. Demzufolge würde der Grenzdruck $\overset{*}{\mathcal{P}}^S$ für c = 0 eine durch die Lamé-Konstanten fest vorgegebene Größe darstellen, so daß der Parameter c als eine Steuergröße für den Wert von $\overset{*}{\mathcal{P}}^S$ aufgefaßt werden kann, siehe auch Abschnitt 7.5.

Mit (7.3.8) und (7.3.16) kann die Funktion $\tilde{\psi}^{Se}$ aus (7.3.4) angegeben werden. Man erhält, wenn μ^{S} und λ^{S} für allgemeine, elastisch-plastische Deformationsprozesse als Funktionen der Invarianten von \mathbf{C}_{Sp} angesehen werden:

$$\rho_{0S}^{S} \tilde{\psi}^{Se} = \frac{1}{2} \mu^{S} (I_{e} - 3) + \lambda^{S} J_{e}^{c} \frac{c \ln J_{e} - 1}{c^{2}} - \mu^{S} \ln J_{e} + \frac{\lambda^{S}}{c^{2}}$$
(7.3.20)
mit $\mu^{S}, \lambda^{S}, c = f(\mathbf{C}_{Sp}) |_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}}$

Damit sind das gesuchte Elastizitätsgesetz für $\boldsymbol{\tau}^{S}$ und der Elastizitätstensor $\overset{4}{\mathbf{C}_{e}}$ bestimmt, so daß mit (7.2.13), (7.3.5), (7.3.8) und (7.3.16):

$$\boldsymbol{\tau}^{S} = 2 \mu^{S} \mathbf{K}_{Se} + \lambda^{S} J_{e}^{c} \ln J_{e} \mathbf{I} ,$$

$$\overset{4}{\mathbf{C}_{e}} = 2 \alpha^{S} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{T} + \beta^{S} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$$
mit
$$(\boldsymbol{\tau}^{S})^{\nabla} = \overset{4}{\mathbf{C}_{e}} (\mathbf{A}_{Se})^{\Delta} ,$$

$$\alpha^{S} = [\mu^{S} - \lambda^{S} J_{e}^{c} \ln J_{e}] |_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}} ,$$

$$\beta^{S} = [\lambda^{S} J_{e}^{c} (c \ln J_{e} + 1)] |_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}} .$$
(7.3.21)

Die Erfüllung der Forderung (7.3.6) ist offensichtlich. In $(7.3.21)_1$ repräsentiert die Größe

$$\mathbf{K}_{Se} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}_{Se} - \mathbf{I} \right) \tag{7.3.22}$$

den elastischen Karni-Reiner-Verzerrungstensor^{II} der aktuellen Konfiguration. In der Darstellung einer natürlichen Basis verfügen die Karni-Reiner-Verzerrungstensoren über eine kovariante Basis, so daß das Transformationsverhalten dieser Größen mit demjenigen der Spannungstensoren identisch ist, vgl. (5.6.27). Entsprechend erhält man durch Rückwärtstransformation von (7.3.22) in die Zwischenkonfiguration von φ^S

$$\widehat{\mathbf{K}}_{Se} = \mathbf{F}_{Se}^{-1} \mathbf{K}_{Se} \mathbf{F}_{Se}^{T-1}
= \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \right).$$
(7.3.23)

Durch Rückwärtstransformation von $\boldsymbol{\tau}^{S}$ aus $(7.3.21)_{1}$ mit $\mathbf{F}_{Se}^{-1}(...)\mathbf{F}_{Se}^{T-1}$ und $\overset{4}{\mathbf{C}}_{e}$ aus $(7.3.21)_{2}$, vgl. (7.2.12) und $(7.3.2)_{1}$, folgt

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} &= 2\,\mu^{S}\,\widehat{\mathbf{K}}_{Se} + \lambda^{S}\,J_{e}^{c}\,\ln J_{e}\,\widehat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1} \\ &\stackrel{4}{\widehat{\mathbf{C}}_{e}} &= 2\,\alpha^{S}\,(\widehat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1}\otimes\widehat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1})^{T} + \beta^{S}\,(\widehat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1}\otimes\widehat{\mathbf{C}}_{Se}^{-1}) \\ &\text{mit} \qquad (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} = \widehat{\mathbf{C}}_{e}\,(\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se})_{p}^{\Delta} , \\ &\alpha^{S} = [\,\mu^{S} - \lambda^{S}\,J_{e}^{c}\,\ln J_{e}\,]\big|_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}} , \\ &\beta^{S} = [\,\lambda^{S}\,J_{e}^{c}\,(\,c\ln J_{e}\,+1)]\big|_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}} . \end{aligned}$$
(7.3.24)

Definiert man mit

$$\mathbf{\widetilde{K}}_{Se} = \mathbf{F}_{Sp}^{-1} \, \widehat{\mathbf{K}}_{Se} \, \mathbf{F}_{Sp}^{T-1}
= \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{Sp}^{-1} - \mathbf{C}_{S}^{-1} \right)$$
(7.3.25)

einen elastischen Karni-Reiner-Verzerrungstensor der Referenzkonfiguration von φ^S , so erhält man schließlich durch Rückwärtstransformation von (7.3.24), vgl. auch (7.2.5):

$$\mathbf{S}^{S} = 2 \mu^{S} \mathbf{K}^{R}_{Se} + \lambda^{S} J^{c}_{e} \ln J_{e} \mathbf{C}^{-1}_{S},$$

$$\overset{4}{\mathbf{B}_{e}} = 2 \alpha^{S} (\mathbf{C}^{-1}_{S} \otimes \mathbf{C}^{-1}_{S})^{\frac{14}{T}} + \beta^{S} (\mathbf{C}^{-1}_{S} \otimes \mathbf{C}^{-1}_{S})$$
mit
$$(\mathbf{S}^{S})'_{S} = \overset{4}{\mathbf{B}_{e}} (\mathbf{E}_{Se})'_{S},$$

$$\alpha^{S} = [\mu^{S} - \lambda^{S} J^{c}_{e} \ln J_{e}] |_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}},$$

$$\beta^{S} = [\lambda^{S} J^{c}_{e} (c \ln J_{e} + 1)] |_{\mathbf{C}_{Sp} = \text{konst.}}.$$
(7.3.26)

 $^{^{\}rm II} {\rm Eine}$ Zusammenstellung der Karni-Reiner-Verzerrungstensoren kann Tafel 8.1 bzw. Anhang C entnommen werden.

Mit (7.3.21), (7.3.24) und (7.3.26) können in allen drei Konfigurationen von φ^S ein einfaches, nichlineares Elastizitätsgesetz und eine elastische Tangente für inkompressible, isotrope poröse Festkörper angegeben werden.

Es bleibt zu erwähnen, daß das Elastizitätsgesetz in der Form (7.3.21) für c = 0 in das bekannte Gesetz von Simo und Pister übergeht. In diesem Fall ist die gespeicherte Energie jedoch nicht mit (7.3.20) identisch, da die Integration von (7.3.15) in der Form (7.3.16) nur für $c \neq 0$ gilt. Linearisierungsvarianten des im vorangegangenen diskutierten Materialgesetzes sollen im folgenden Abschnitt erörtert werden.

7.4 Linearisierte Elastizitätsgesetze

In vielen Fällen, wenn entweder nur mit kleinen elastischen Volumendehnungen gerechnet werden muß oder wenn überhaupt von kleinen elastischen Verzerrungen ausgegangen werden kann - wie z. B. bei granularen Stoffen -, ist es ausreichend, linearisierte Elastizitätsgesetze zu benutzen. Gegenüber dem in Abschnitt 7.3 angegebenen nichtlinearen Elastizitätsgesetz besteht der wesentliche Anwendungsvorteil der linearisierten Elastizitätsgesetze darin, daß die dreiparametrige Form hier in eine zweiparametrige Form übergeht. Darüber hinaus ist es nicht erforderlich, kleine Volumendehnungen über $J_e = \det \mathbf{F}_{Se}$ zu beschreiben, sondern es genügt eine Erfassung über die erste Invariante eines elastischen Verzerrungstensors. Für elastisch-plastische φ^S sollen zwei Linearisierungsvarianten des nichtlinearen Elastizitätsgesetzes angegeben werden, die durch Linearisierung in der Zwischenkonfiguration bzw. in der aktuellen Konfiguration entstehen. Beide Linearisierungsvarianten können direkt aus den vorangegangenen Beziehungen abgeleitet werden.

Bei Linearisierung in der Zwischenkonfiguration folgt aus $(7.2.4)_2$ im Zusammenhang mit $(7.2.12)_2$ durch Taylorreihenentwicklung nach dem Anfangswert des Verzerrungstensors $\widehat{\Gamma}_{Se}$:

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{lin.}}^{S} = \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} \Big|_{\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se}=\boldsymbol{0}} + \left(\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se}}\Big|_{\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se}=\boldsymbol{0}}\right) \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se}$$

$$= \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} \Big|_{\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se}=\boldsymbol{0}} + \left(\frac{4}{\widehat{\boldsymbol{C}}_{e}}\Big|_{\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se}=\boldsymbol{0}}\right) \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se} .$$

$$(7.4.1)$$

Beachtet man, daß $\widehat{\Gamma}_{Se}$ verschwindet, wenn $\mathbf{F}_{Se} = \mathbf{I}$ bzw. $\mathbf{U}_{Se} = \mathbf{I}$ und somit $\widehat{\mathbf{C}}_{Se} = \mathbf{I}$ und

det $\mathbf{F}_{Se} = 1$, so kann aus (7.3.24) direkt auf

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{lin.}}^{S} = \widehat{\mathbf{C}}_{e \text{ lin.}} \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se} ,$$

$$\stackrel{4}{\widehat{\mathbf{C}}}_{e \text{ lin.}} = 2 \mu^{S} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\frac{14}{T}} + \lambda^{S} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$$

$$\text{und} \qquad (\widehat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{lin.}}^{S})_{p}^{\nabla} = \widehat{\mathbf{C}}_{e \text{ lin.}} (\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se})_{p}^{\Delta}$$

$$(7.4.2)$$

geschlossen werden. Der linearisierte Elastizitätstensor $\widehat{\mathbf{C}}_{e \text{ lin.}}$ ist unabhängig von der elastischen Deformation.

Eine Linearisierung in der aktuellen Konfiguration liefert mit $(7.2.4)_2$ und $(7.2.13)_2$ bei Taylorreihenentwicklung nach dem Anfangswert von \mathbf{A}_{Se}

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{lin.}}^{S} = \boldsymbol{\tau}^{S} \Big|_{\mathbf{A}_{Se}=\mathbf{0}} + \left(\begin{array}{c} 4 \\ \mathbf{C}_{e} \\ \mathbf{A}_{Se}=\mathbf{0} \end{array} \right) \mathbf{A}_{Se} .$$
 (7.4.3)

Da \mathbf{A}_{Se} unter denselben Voraussetzungen verschwindet wie $\widehat{\Gamma}_{Se}$, folgt aus (7.4.3) im Zusammenhang mit (7.3.21):

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{lin.}}^{S} = \overset{4}{\mathbf{C}}_{e \text{lin.}} \mathbf{A}_{Se} ,$$

$$\overset{4}{\mathbf{C}}_{e \text{lin.}} = 2 \, \mu^{S} \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)^{\frac{14}{T}} + \lambda^{S} \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)$$

$$\text{und} \qquad (\boldsymbol{\tau}_{\text{lin.}}^{S})^{\nabla} = \overset{4}{\mathbf{C}}_{e \text{lin.}} \left(\mathbf{A}_{Se} \right)^{\Delta} .$$

$$(7.4.4)$$

Die linearisierten Elastizitätsgesetze (7.4.2) und (7.4.4) - Elastizitätsgesetze Hookeschen Typs - können im Gegensatz zu dem in Abschnitt 7.3 vorgeschlagenen nichtlinearen Elastizitätsgesetz jedoch nicht mehr durch Vorwärts- oder Rückwärtstransformation ineinander überführt werden, so daß numerische Berechnungen zwangsläufig zu anderen Ergebnissen führen, wenn (7.4.4) anstelle von (7.4.2) benutzt wird oder umgekehrt. Identisch sind beide Linearisierungsvarianten nur dann, wenn entweder für den Fall infinitesimaler elastischer Deformationen, $\mathbf{F}_{Se} \to \mathbf{I}$, der Transportmechanismus zwischen der aktuellen Konfiguration und der plastischen Zwischenkonfiguration näherungsweise verschwindet, so daß

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{lin.}}^{S} \simeq \widehat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{lin.}}^{S}, \quad \mathbf{A}_{Se} \simeq \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se}, \quad (7.4.5)$$

oder wenn die Transportmechanismen der Spannungs- und elastischen Verzerrungstensoren identisch sind, d.h. wenn bei beliebigen elastischen Rotationen die elastischen Streckungen näherungsweise verschwinden, $\mathbf{F}_{Se} \to \mathbf{R}_{Se}$ und $\mathbf{U}_{Se} \to \mathbf{I}$:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{lin.}}^{S} \simeq \mathbf{R}_{Se} \, \widehat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{lin.}}^{S} \mathbf{R}_{Se}^{T} , \quad \mathbf{A}_{Se} \simeq \mathbf{R}_{Se} \, \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se} \mathbf{R}_{Se}^{T} .$$
 (7.4.6)

Es bleibt festzustellen, daß eine zusätzliche Linearisierung des nichtlinearen Elastizitätsgesetzes in der Referenzkonfiguration, da \mathbf{E}_{Se} unter denselben Voraussetzungen verschwindet wie $\widehat{\Gamma}_{Se}$ oder \mathbf{A}_{Se} , einer Rückwärtstransformation von (7.4.2) entspricht, vgl. (7.3.26). Diese Linearisierungsvariante ist mit den beiden zuvor genannten nur im Rahmen der geometrisch linearisierten bzw. infinitesimalen Theorie identisch, also wenn sämtliche Transportmechanismen zwischen allen drei Konfigurationen von φ^S näherungsweise vernachlässigt werden können, so daß

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{lin.}}^{S} \simeq \widehat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{lin.}}^{S} \simeq \mathbf{S}_{\text{lin.}}^{S} ,$$

$$\mathbf{A}_{Se} \simeq \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se} \simeq \mathbf{E}_{Se} .$$

$$(7.4.7)$$

Im Rahmen der infinitesimalen Theorie entfällt jedoch auch die Abhängigkeit der gespeicherten elastischen Energie von \mathbf{F}_{Sp} , so daß die Materialparameter μ^{S} und λ^{S} hier auch für elastisch-plastische Deformationsprozesse Konstanten darstellen.

7.5 Ein Vergleich verschiedener Elastizitätsgesetze

Die im vorangegangenen diskutierten Elastizitätsgesetze für inkompressible poröse Festkörper führen in der Anwendung auf praxisorientierte Probleme zwangsläufig zu gewissen Unterschieden in den Ergebnissen numerischer Berechnungen. Dies ist einerseits eine Folge der unterschiedlichen Varianz der jeweiligen Materialgesetze bei natürlicher Basisdarstellung und andererseits eine Folge der unterschiedlichen Betonung der auftretenden Volumendehnungen. Da speziell der Bereich großer Volumendehnungen bei porösen Medien von außerordentlicher Wichtigkeit ist, soll im folgenden ein Vergleich der verschiedenen Elastizitätsgesetze am Beispiel reiner Volumendehnungen vorgenommen werden. Darüber hinaus sei uneingeschränkt elastisches Verhalten des porösen Festkörpers vorausgesetzt, so daß die Referenzkonfiguration und die plastische Zwischenkonfiguration wegen $\mathbf{F}_{Sp} = \mathbf{I}$ deckungsgleich sind.

Bezogen auf die aktuelle Geometrie gelten die Stoffgesetze für $\boldsymbol{\tau}^{S}$ aus $(7.3.21)_{1}$ (nichtlineares Elastizitätsgesetz), für $\boldsymbol{\tau}_{\text{lin.}}^{S}$ aus (7.4.4) (in der aktuellen Konfiguration linearisiertes Gesetz) und für $\boldsymbol{\tau}_{\text{Rlin.}}^{S}$ als Vorwärtstransformation von (7.4.2) (in der Zwischenkonfiguration - hier Referenzkonfiguration - linearisiertes Gesetz):

$$\boldsymbol{\tau}^{S} = 2 \,\mu^{S} \,\mathbf{K}_{Se} + \lambda^{S} \,(\det \mathbf{F}_{Se})^{c} \ln \left(\det \mathbf{F}_{Se}\right) \mathbf{I} ,$$

$$\boldsymbol{\tau}^{S}_{\text{lin.}} = 2 \,\mu^{S} \,\mathbf{A}_{Se} + \lambda^{S} \,(\mathbf{A}_{Se} \cdot \mathbf{I}) \,\mathbf{I} ,$$

$$\boldsymbol{\tau}^{S}_{\text{Rlin.}} = \mathbf{F}_{Se} \left[2 \,\mu^{S} \,\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se} + \lambda^{S} \,(\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Se} \cdot \mathbf{I}) \,\mathbf{I} \right] \mathbf{F}^{T}_{Se} .$$

(7.5.1)

Für den Fall rein elastischer Volumendehnungen gilt mit (7.3.10) und (7.3.13)

$$\mathbf{F}_{Se} = (\det \mathbf{F}_{Se})^{\frac{1}{3}} \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{F}_{Se} = \frac{n_{0S}^{5}}{n^{S}}, \qquad (7.5.2)$$

so daß (7.5.1) in

$$\boldsymbol{\tau}^{S} = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{S} \mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\tau}^{S}_{\text{lin.}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{S}_{\text{lin.}} \mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\tau}^{S}_{\text{Rlin.}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{S}_{\text{Rlin.}} \mathbf{I}$$
(7.5.3)

mit

$$\mathcal{P}^{S} = \mu^{S} \left[\left(\det \mathbf{F}_{Se} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] + \lambda^{S} \left(\det \mathbf{F}_{Se} \right)^{c} \ln \left(\det \mathbf{F}_{Se} \right),$$

$$\mathcal{P}^{S}_{\text{lin.}} = \left(\mu^{S} + \frac{3}{2} \lambda^{S} \right) \left[1 - \left(\det \mathbf{F}_{Se} \right)^{\frac{2}{3}} \right],$$

$$\mathcal{P}^{S}_{\text{R lin.}} = \left(\mu^{S} + \frac{3}{2} \lambda^{S} \right) \left[\left(\det \mathbf{F}_{Se} \right)^{\frac{4}{3}} - \left(\det \mathbf{F}_{Se} \right)^{\frac{2}{3}} \right]$$
(7.5.4)

übergeht.

Um die hydrostatischen Spannungszustände aus $(7.5.4)_1$ auf den makroskopischen Kompressionsmodul

$$k^{S} = \lambda^{S} + \frac{2}{3}\mu^{S} \tag{7.5.5}$$

des Festkörperskeletts beziehen zu können, vgl. Abb. 7.1, soll zwischen den Laméschen Konstanten ein festes Verhältnis angenommen werden, so daß z. B. für $\lambda^S = 1.5 \,\mu^S$:

$$\mathcal{P}^{S} = \frac{3}{2} k^{S} \left\{ \left[(\det \mathbf{F}_{Se})^{\frac{2}{3}} - 1 \right] + 1, 5 \left(\det \mathbf{F}_{Se} \right)^{c} \ln \left(\det \mathbf{F}_{Se} \right) \right\} \frac{4}{13},$$

$$\mathcal{P}^{S}_{\text{lin.}} = \frac{3}{2} k^{S} \left[1 - \left(\det \mathbf{F}_{Se} \right)^{-\frac{2}{3}} \right],$$
(7.5.6)

$$\mathcal{P}^{S}_{\text{R lin.}} = \frac{3}{2} k^{S} \left[\left(\det \mathbf{F}_{Se} \right)^{\frac{4}{3}} - \left(\det \mathbf{F}_{Se} \right)^{\frac{2}{3}} \right].$$

Die hydrostatischen Spannungszustände (7.5.6) sind in Bild 7.1 als Funktion der Volumendehnung

$$e = \det \mathbf{F}_{Se} - 1 \tag{7.5.7}$$

dargestellt. Dabei wurde ein leeres Festkörpermaterial mit einem Referenzvolumenanteil von $n_{0S}^S = 0.2$ (80 %-ige Anfangsporosität) angesetzt, d. h. der Kompressionspunkt des gewählten Beispiels liegt bei e = -0.8.



Abb. 7.1: Hydrostatischer Spannungszustand eines leeren, inkompressiblen Festkörperskeletts $(n_{0S}^S = 0,2)$ bezogen auf den 1,5-fachen Kompressionsmodul als Funktion der Volumendehnung e bei Annahme uneingeschränkter Elastizität; Kompressionspunkt: e = -0.8Stoffgesetze : aus (7.5.6)

Abbildung 7.1 zeigt, daß das in der Zwischenkonfiguration (hier Referenzkonfiguration) linearisierte Gesetz $(7.5.6)_3$ im Extensionsbereich sehr schnell gegen Unendlich und im Kompressionsbereich gegen einen festen Wert läuft (Grenzdruck $\mathcal{P}_{Rlin.}^S/1,5 k^S = 0,23$). Dieses Materialgesetz besitzt im Kompressionsbereich jedoch für $\bar{e} = -0,646447$ eine horizontale Tangente, d. h. man erhält für $e < \bar{e}$ das unrealistische Ergebnis, daß offensichtlich zur weiteren Verringerung des Volumens ein kleinerer hydrostatischer Druck erforderlich ist. Ein völlig anderes Verhalten zeigt das in der aktuellen Konfiguration linearisierte Gesetz (7.5.6)₂, indem dieses Gesetz im Extensionsbereich asymptotisch gegen $\mathcal{P}_{\text{lin.}}^S/1.5 \, k^S = 1.0$ läuft; im Kompressionsbereich wird der Grenzdruck $\stackrel{*}{\mathcal{P}}_{\text{lin.}}^S/1.5 \, k^S = 1.92$ erreicht. Es ist offensichtlich, daß beide linearisierten Elastizitätsgesetze nicht den in (7.3.14) definierten Anforderungen genügen.

Von den im vorangegangenen diskutierten, bekannten Stoffgesetzen zeigt allein das Gesetz von Simo und Pister, Gl. $(7.5.6)_1$ für c = 0, ein akzeptables Verhalten. Dieses Gesetz läuft im Extensionsbereich gegen Unendlich und im Kompressionsbereich gegen ${}^*\mathcal{P}^S(c=0)/1.5 \, k^S = 0.95$. Allerdings läßt sich dieses Gesetz nicht steuern, d. h. sowohl die Neigung der Materialkennlinie als auch der Grenzdruck \mathcal{P}^S sind in Abhängigkeit der Lamé-Konstanten vorgegebene Größen. Damit wird die Bedeutung des Steuerparameters c klar; in Abb. 7.1 ist die Funktion (7.5.6) exemplarisch für $c = \pm 0.4$ dargestellt. Der Steuerparameter c des in Abschnitt 7.3 vorgeschlagenen nichtlinearen Elastiziätsgesetzes bewirkt gegenüber dem Gesetz von Simo und Pister eine Neigungsänderung der Materialkennlinie und ermöglicht so eine weitere Anpassung des Elastizitätsgesetzes an Versuchsergebnisse. Da sich in Abhängigkeit von c auch der Grenzdruck \mathcal{P}^S ändert, kann der Werkstoffparameter c als Steuergröße für den Wert von \mathcal{P}^S aufgefaßt werden.

In der Nähe von e = 0 liefern alle Gesetze in etwa gleiche Ergebnisse, so daß in diesem Bereich alle Elastizitätsgesetze als prinzipiell gleichwertig anzusehen sind.

In Abb. 7.1 wurde der deformationsabhängige hydrostatische Spannungszustand eines leeren Festkörperskeletts als Funktion der Volumendehnung e dargestellt. Für das flüssigkeitsgesättigte Festkörperskelett können die Ergebnisse aus Abb. 7.1 insofern übernommen werden, als \mathcal{P}^S dann die hydrostatischen Extraspannungen kennzeichnet. In diesem Fall ist jedoch zu beachten, daß für das aus Festkörperskelett und Flüssigkeit gebildete inkompressible poröse Medium, da die Partialvolumina der inkompressiblen Konstituierenden erhalten bleiben, z. B. eine lokale Kompression zwangsläufig zu einer lokalen Extension an anderer Stelle führt. Wird das inkompressible poröse Medium dagegen allein durch einen allseits gleichen hydrostatischen Spannungszustand beansprucht, so daß für die Bewegungsfunktionen aus (4.2.1) eine Zwangsbedingung der Form $\chi_S = \chi_F$ eintritt, dann verhält sich das gesamte poröse Medium inkompressibel, die Volumendehnungen eund Extraspannungen \mathcal{P}^S des Festkörperskeletts verschwinden und die Partialspannungen von Festkörper und Flüssigkeit sind allein durch den effektiven Ruhedruck der Flüssigkeit gemäß (6.4.66) bestimmt.

7.6 Ergänzende Bemerkungen

In der Praxis wird zur Beschreibung elastischer Deformationen poröser Festkörper fast ausnahmslos von Elastizitätsgesetzen Hookeschen Typs ausgegangen. Dies ist im Rahmen

der infinitesimalen Theorie oder bei der Beschreibung kleiner bis kleinster elastischer Deformationen, wie z. B. bei der Behandlung der elastischen Deformationsanteile granularer Stoffe, sicherlich ausreichend und vertretbar. Wenn jedoch mit größeren elastischen Volumendehnungen duktiler Materialien gerechnet werden muß, ist der Gültigkeitsbereich der linearisierten Elastizitätsgesetze schnell überschritten. Hier sollte ein nichtlineares Gesetz in einer der in Abschnitt 7.3 vorgeschlagenen Versionen benutzt werden. Es bleibt anzumerken, daß eine Erweiterung dieses unter Voraussetzung hyperelastischen Verhaltens entwickelten Gesetzes auf thermoelastische Problemstellungen ohne weiteres möglich ist, wenn für das endliche Stoffgesetz eine Temperaturabhängigkeit der Werkstoffparameter μ^S , λ^S und c zugelassen wird. Für besonders weiche poröse Medien, wie z.B. poröses Gummi, ist es darüber hinaus möglich, anstelle einer "Erweiterung eines Neo-Hookeschen Materials auf den Bereich großer Volumendehnungen" eine "Erweiterung des Mooney-Rivlin-Gesetzes auf den Bereich großer Volumendehnungen" vorzunehmen, allerdings unter Verlust des numerischen Vorteils einer isotropen räumlichen Tangente an das Materialgesetz. Zusätzlich geht das dreiparametrige Elastizitätsgesetz aus Abschnitt 7.3 dann in ein vierparametriges Gesetz über; das Mooney-Rivlin-Gesetz ist selbst bereits zweiparametrig, vgl. z. B. Truesdell & Noll [1965, Gl. 95.1]. Es ist außerdem zu beachten, daß die Anwendung des Mooney-Rivlin-Gesetzes bereits bei der Berechnung komplexer Randwertprobleme nichtporöser Körper - Marotzke [1985] berechnete stahlbewehrte Elastomerlager-, zu größeren Abweichungen von den gemessenen Ergebnissen führt als das Neo-Hookesche Materialgesetz. Schließlich können einachsige Zugversuche im Mooney-Rivlin-Gesetz sogar zu physikalisch unsinnigen Werksoffparametern führen, so daß das nichtlineare Elastizitätsgesetz aus Abschnitt 7.3 prinzipiell einer Erweiterung des Mooney-Rivlin-Gesetzes vorzuziehen ist.

Kapitel 8: Elastisch-plastisches Materialverhalten poröser Körper

8.1 Einleitung

Im Rahmen der konstitutiven Theorie poröser Medien ist unter anderem (im Sinne der Kontinuumsmechanik) der vollständige Bewegungszustand des Festkörperskeletts als thermodynamische Prozeßvariable vorzugeben. Für elastisch-plastisch deformierbare Festkörperskelette ist damit eine getrennte Vorgabe der elastischen und plastischen Deformationsanteile verbunden. Dabei sind die plastischen Deformationen als interne Variablen des thermodynamischen Prozesses aufzufassen; d. h. es ist eine konstitutive Gleichung für die zeitliche Änderung der plastischen Deformationsanteile (Fließregel) erforderlich.

Die Beschreibung des plastischen Materialverhaltens, im folgenden soll nur die geschwindigkeitsunabhängige Plastizität behandelt werden, basiert bekanntlich auf einer Fließbedingung¹ zur Bestimmung der momentanen Fließgrenze, einer Konsistenzbedingung, mit der die zeitliche Änderung der Fließbedingung angeben wird, geeigneten Belastungskriterien zwecks Fallunterscheidung, ob plastisches Fließen andauert oder nicht, sowie einer Fließregel (assoziiert bzw. nichtassoziiert). Es ist zu beachten, daß die in der Plastizitätstheorie für nichtporöse metallische Werkstoffe geltenden Forderung nach plastischer Inkompressibilität grundsätzlich nicht auf poröse Medien übertragen werden kann. Im Gegensatz zu nichtporösen Metallen zeigen poröse Metalle auch im plastischen Bereich große Volumendehnungen, die im Rahmen einer makroskopischen Betrachtungsweise ebenso wie die elastischen Volumendehnungen inkompressibler poröser Stoffe eine Folge lokaler Porositätsänderungen sind. Wie bei der Beschreibung des elastischen Materialverhaltens ist auch das plastische Materialverhalten poröser Körper in starkem Maße von der Struktur des Materials abhängig. So zeigen granulare und spröde Stoffe bei Extensions- bzw. Kompressionsversuchen^{II} ein stark unterschiedliches Verhalten; vgl. z. B. die experimentellen Untersuchungen an Ton oder Sand von Yong & McKyes [1971], Lade & Duncan [1973], Vaid & Campanella [1974] sowie Ergun [1981] bzw. die Versuche an Betonen von Mills & Zimmermann [1970]; bzgl. weiterer Literaturangaben vgl. Eibl & Iványi [1976]. Dieses Materialverhalten muß von der für diese Werkstoffe benutzten Fließbedingung reflektiert werden. Für spröde und granulare Stoffe - leere poröse Festkörper - sind in der Literatur

^IIn der Literatur wird der Begriff Fließbedingung häufig allein zur Kennzeichnung des erstmaligen Fließbeginns benutzt; die verfestigungsabhängige Änderung der Fließbedingung wird Verfestigungsgesetz genannt, im Versagensbereich spricht man von Versagens- oder Bruchbedingung. In Übereinstimmung mit der jüngeren englischsprachigen Literatur soll der Begriff Fließbedingung hier im erweiterten Sinne verwendet werden; und zwar als Sammelbegriff für die zuvor genannten Begriffsdefinitionen Fließbedingung, Verfestigungsgesetz und Versagensbedingung.

^{II}Extensions- und Kompressionsversuch sind Dreiaxialversuche. Im Extensionsversuch ist der Axialdruck größer als der Längsdruck ($\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$); im Kompressionsversuch ist der Längsdruck größer als der Axialdruck ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) (Druckspannungen positiv).

sehr viele verschiedene Fließbedingungen angegeben worden, vgl. z. B. Gudehus [1973], Willam & Warnke [1975], Lade [1977, 1982], Ottosen [1977], Winselmann [1984] sowie de Boer [1988a], deren Geltungsbereich zum Teil allein im Sinne einer Versagens- oder Bruchbedingung auf die geometrisch lineare Theorie ohne elastischen Bereich beschränkt bleibt. Verfestigendes Materialverhalten - im Sinne der isotropen Verfestigung - ist in de Boer [1988a] enthalten; ein Ansatz zur Beschreibung des prinzipiellen Materialverhaltens spröder und granularer Stoffe - hier wird auch der Einfluß der kinematischen Verfestigungseigenschaft berücksichtigt - wurde von de Boer [1988b] veröffentlicht. Im Rahmen einer geometrischen Interpretation im Hauptspannungsraum können die oben genannten Fließbedingungen (Fließflächen) als "abgerundete Kegel" mit hyperbolisch gekrümmten Meridianen dargestellt werden. Die Höhe der Kegel liegt auf der hydrostatischen Achse. Senkrecht zur hydrostatischen Achse, in der Deviatorebene, wird ein "Dreieck" mit abgerundeten Ecken und gekrümmten Seiten gebildet; vgl. auch Abb. 8.1.

Ein gänzlich anderes Verhalten als spröde und granulare Stoffe zeigen duktile Materialien wie poröse Metalle. Für diese Werkstoffe kann prinzipiell die von *Green* [1972] im Rahmen der infinitesimalen Theorie für leere Festkörperskelette entwickelte Fließbedingung benutzt werden - bzgl. weiterer Literaturangaben vgl. Kapitel 2 -, die im Hauptspannungsraum als Raumellipsoid mit der Hauptnormalspannungsachse als Rotationsachse interpretiert werden kann, vgl. auch Abb. 8.2.

In allen bisher genannten Arbeiten wurde das plastische Materialverhalten leerer poröser Festkörper untersucht. Im Rahmen der Theorie poröser Medien benutzten *de Boer & Kowalski* [1983] die Fließbedingung von *Green* zur Beschreibung idealplastischen Materialverhaltens flüssigkeitsgesättigter, duktiler poröser Körper; *de Boer & Ehlers* [1986a] gaben eine Versagensbedingung für flüssigkeits- und gasgefüllte poröse Körper an.

Im vorliegenden Kapitel soll das plastische Materialverhalten poröser Medien auf der Basis der Fließbedingung von *de Boer* [1988a] beschrieben werden. Diese Fließbedingung hat den einfachsten Aufbau, der möglich ist, um die oben genannten Charakteristika spröder und granularer Stoffe wiederzugeben, und kann in vereinfachter Form durch Nullsetzen einzelner Parameter auch für duktile Materialien verwendet werden. Im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie sind jedoch einige Modifikationen dieser Fließbedingung erforderlich, die im folgenden angesprochen werden sollen:

Ebenso wie bei der Beschreibung des elastischen Materialverhaltens soll auch hier das in Kapitel 6 diskutierte Modell eines aus Flüssigkeit und Festkörper konstituierten inkompressiblen porösen Mediums in der in Abschnitt 6.5 angegebenen vereinfachten Form zugrunde gelegt werden, so daß die Extraspannungen des flüssigkeitsgesättigten Modells durch dasselbe Elastizitätsgesetz beschrieben werden können wie die Partialspannungen des leeren Festkörpermaterials, vgl. Kapitel 7. Diese Extra- bzw. Partialspannungen sind als Eingangsgrößen in der Fließbedingung zu berücksichtigen, so daß die Fließbedingung gleichermaßen geeignet ist, das plastische Materialverhalten flüssigkeitsgesättigter und leerer Festkörperskelette zu beschreiben. Weiterhin ist zu klären, in welcher Konfiguration - Referenzkonfiguration, plastische Zwischenkonfiguration oder aktuelle Konfiguration - die Fließbedingung anzusetzen ist. Diese Frage läßt sich leicht über die zeitliche Änderung bzw. die materielle Zeitableitung der plastischen Volumendehnung e_p beantworten:

$$e_{p} = \det \mathbf{F}_{Sp} - 1,$$

$$(e_{p})'_{S} = \det \mathbf{F}_{Sp} \left(\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} \cdot \mathbf{I} \right), \quad \widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = \left(\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Sp} \right)_{p}^{\vartriangle}.$$
(8.1.1)

Man erkennt, daß die zeitliche Änderung der plastischen Volumendehnung nur dann korrekt wiedergegeben werden kann, wenn die Fließbedingung und die Fließregel in der plastischen Zwischenkonfiguration konstituiert werden. Eine Übertragung der so entstehenden Ansätze auf die übrigen Konfigurationen ist per Vorwärts- oder Rückwärtstransformation selbstverständlich möglich. Diese Überlegungen lassen sich direkt auf nichtporöse metallische Werkstoffe anwenden, indem hier die Bedingung $\mathbf{D}_{Sp} \cdot \mathbf{I} = 0$ (plastische Inkompressibilität) nur dann zu jeder Zeit t erfüllt werden kann, wenn die Fließbedingung und die Fließregel für \mathbf{D}_{Sp} (assoziierte Fließregel) in der Zwischenkonfiguration angesetzt werden, vgl. auch Paulun [1980]. Da alle Materialien im Verfestigungsbereich mehr oder weniger ausgeprägte anisotrope Effekte (im Sinne der kinematischen Verfestigung) aufweisen, muß die oben genannte Fließbedingung von de Boer zur Beschreibung der kinematischen Verfestigungseigenschaft außerdem um den Einfluß des Translationstensors (backstress tensor) erweitert werden, vgl. dazu auch de Boer [1988b]. Hier liegen jedoch zur Zeit noch keine konkreten Versuchsergebnisse vor, so daß die Einbeziehung der kinematischen Verfestigung zunächst lediglich als eine prinzipielle Erweiterungsmöglichkeit verstanden werden muß.

Die Entwicklung spezieller Materialgleichungen soll im folgenden auf die Beschreibung isotroper, duktiler Materialien beschränkt bleiben. Eine ausführliche Diskussion des plastischen Materialverhaltens spröder und granularer Stoffe im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie poröser Medien sei einem geplanten Forschungsbericht vorbehalten, de Boer & Ehlers [1990].

8.2 Fließbedingung

Gestützt durch experimentelle Untersuchungen gab *de Boer* [1988a, Gl.(15)] zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens spröder und granularer Stoffe im Rahmen der infinitesimalen Theorie folgende Fließbedingung an^{III}, vgl. auch Abb. 8.1.

$$F = \sqrt{\phi} \sqrt[3]{1 - \gamma \bar{\vartheta}} + \beta I_{\mathbf{S}} - \kappa = 0,$$

mit $\phi = II_{\mathbf{S}^D} + \frac{1}{2}\alpha^2 (I_{\mathbf{S}})^2,$
 $\bar{\vartheta} = -\frac{III_{\mathbf{S}^D}}{\phi^{3/2}}.$ (8.2.1)

^{III}Dresenkamp [1987] erweiterte diese Fließbedingung zur Beschreibung nichtlinearer Effekte im Bereich großer hydrostatischer Drücke um den Summanden $\varepsilon(I_{\mathbf{S}})^2$.

Darin sind

$$I_{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{S} \cdot \mathbf{I} ,$$

$$II_{\mathbf{S}^{D}} = \frac{1}{2} \mathbf{S}^{SD} \cdot \mathbf{S}^{SD} , \quad \mathbf{S}^{SD} = \mathbf{S}^{S} - \frac{1}{3} (\mathbf{S}^{S} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} , \quad (8.2.2)$$

$$III_{\mathbf{S}^{D}} = \frac{1}{3} \mathbf{S}^{SD} \cdot \mathbf{S}^{SD} \mathbf{S}^{SD}$$

die erste Invariante der 2. Piola-Kirchhoffschen Partialspannungen des leeren Festkörperskeletts, die (negative) zweite Invariante des entsprechenden Spannungsdeviators sowie die dritte Invariante dieses Spannungsdeviators. Die Materialparameter α , β , γ und κ wurden von *de Boer* im Verfestigungsbereich als Funktion der plastischen Arbeit dargestellt. Die Anfangswerte^{IV} dieser Materialparameter wurden bei der Beschreibung bodenmechanischer Problemstellungen allein in Abhängigkeit des Winkels der inneren Reibung und der Kohäsion angegeben.



Abb. 8.1: Fließbedingung von de Boer im Hauptspannungsraum

- a) Deviatorebene (Hauptspannungen S_1, S_2, S_3)
- b) hydrostatische Ebene. $(a_1 = \sqrt{2} \kappa / [1 (2/\sqrt{27})\gamma]^{1/3};$ $a_2 = \sqrt{2} \kappa / [1 + (2/\sqrt{27})\gamma]^{1/3}; \ b = \sqrt{2} \kappa / (\alpha + \sqrt{2} \beta))$

^{IV}im Sinne der infinitesimalen Theorie

In (8.2.1) bewirkt der Term $\frac{1}{2}\alpha^2 (I_{\mathbf{S}})^2$ eine Krümmung der Kompressions- und Extensionsmeridiane, der Term $\sqrt[3]{1-\gamma\bar{\vartheta}}$ steuert die Form der Fließkurve (Abweichung vom Kreis) in der Deviatorebene, der Term $\beta I_{\mathbf{S}}$ bewirkt die hyperbolische Form der Fließkurve in der hydrostatischen Ebene, κ ist der bekannte plastische Vergleichswert, vgl. (Abb. 8.1 b).

Die Fließbedingung (8.2.1) enthält einige Sonderfälle:

Für $\gamma = 0$ entsteht die von de Boer & Ehlers [1986a] benutzte Fließ- bzw. Versagensbedingung, die in der Deviatorebene einen Kreis bildet (gestrichelt in Abb. 8.1a eingetragen). Für $\alpha = \gamma = 0$ geht (8.2.1) in die bekannte Bedingung von Drucker & Prager [1952] über, die im Hauptspannungsraum als Kegel dargestellt werden kann. Wird $\alpha = \gamma = 0$ gesetzt, dann erhält man die Fließbedingung von Green [1972], vgl. Abb. 8.2. Schließlich liefert (8.2.1) für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ auch die klassische Fließbedingung von von Mises [1913].



Abb. 8.2: Fließbedingung von *Green* (Raumellipsoid), dargestellt in der hydrostatischen Ebene des Hauptspannungsraumes

Im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie muß die allgemeine Fließbedingung (8.2.1) entsprechend den Überlegungen aus Abschnitt 8.1 in Größen der plastischen Zwischenkonfiguration formuliert werden, d. h. der 2. *Piola-Kirchhoff* sche Spannungstensor \mathbf{S}^{S} ist durch $\hat{\boldsymbol{\tau}}^{S}$, vgl. (5.6.27)₁, zu ersetzen. Die Einbeziehung kinematischer Verfestigungseffekte, vgl. *de Boer* [1988b], bedingt darüber hinaus eine Berücksichtigung des Translationstensors $\hat{\boldsymbol{Y}}^{S}$ aus (6.5.12)₂, so daß (8.2.1) in

$$\widehat{F} = \sqrt{\widehat{\phi}} \sqrt[3]{1 - \gamma \widehat{\vartheta}} + \beta \widehat{I} - \kappa = 0,$$
mit $\phi = \widehat{II}_D + \frac{1}{2} \alpha^2 \widehat{I}^2,$

$$\widehat{\vartheta} = -\frac{\widehat{III}_D}{\widehat{\phi}^{3/2}}.$$
(8.2.3)

übergeht. Die Invarianten \widehat{I} , \widehat{II}_D , \widehat{III}_D , sind darin für das leere Festkörperskelett durch

$$\widehat{I} = (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S}) \cdot \mathbf{I},$$

$$\widehat{II}_{D} = \frac{1}{2} (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S})^{D} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S})^{D},$$

$$\widehat{III}_{D} = \frac{1}{3} (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S})^{D} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S})^{D} (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S})^{D}$$
(8.2.4)

definiert. Für das flüssigkeitsgesättigte Festkörperskelett sind die Partialspannungen $\hat{\tau}^{s}$ durch die Extraspannungen $\hat{\tau}^{s}_{E}$ zu ersetzen. Entsprechend dem Vorgehen in Kapitel 7 soll auch hier bei den anschließenden Überlegungen auf eine zusätzliche Kennzeichnung durch den Index $(...)_{E}$ verzichtet werden, so daß die folgenden Beziehungen gleichzeitig für $\hat{\tau}^{s}$ und $\hat{\tau}^{s}_{E}$ gelten.

Bezüglich einer geometrischen Darstellung bewirkt die Einbeziehung des Translationstensors $\widehat{\mathbf{Y}}^{S}$ eine Translation der Fließfläche im Hauptspannungsraum. Im Gegensatz zur klassischen Plastizitätstheorie für nichtporöse Metalle können die Materialparameter α , β , γ und κ jedoch im kinematischen Verfestigungsmodell für poröse Medien nicht als konstant in Bezug auf den Deformationsprozeß angesehen werden, so daß die Translation der Fließfläche im Verfestigungsbereich bei gleichzeitiger Formänderung erfolgt. Durch den plastischen Deformationsprozeß wird eine plastische Volumendehnung erzeugt, die für inkompressible poröse Festkörper allein eine Funktion des plastischen Volumenanteils n_p^S ist:

$$n_p^S = n_{0S}^S J_p^{-1} \quad \text{mit} \quad J_p = \det \mathbf{F}_{Sp} \,.$$
 (8.2.5)

Die plastische Volumendehnung bewirkt eine Änderung der makroskopischen Materialeigenschaften, so daß

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \kappa = f(J_p)^{\mathsf{V}}. \tag{8.2.6}$$

Eine allgemeine Parameterstudie für α , β , γ und κ (im Verfestigungsbereich) im Vergleich mit Versuchen, die an granularen Medien vorgenommen wurden, wurde von *Brauns* [1989] durchgeführt. Für den Bruchzustand spröder Stoffe wie Beton wurden die Materialparameter im Rahmen der geometrisch linearen Theorie ohne elastischen Bereich von *Dresenkamp* [1987] bestimmt.

Wie bereits in der Einleitung zu vorliegendem Kapitel erwähnt, soll das Folgende auf die Beschreibung isotroper, duktiler Materialien im geometrisch nichtlinearen Bereich be-

^VEine weitere Abhängigkeit von der plastischen Deformationsgeschichte durch den volumenerhaltenden Anteil der plastischen Deformation ist prinzipiell ebenfalls möglich, bleibt im folgenden jedoch unberücksichtigt.

schränkt bleiben. Für diese Materialien folgt aus (8.2.3) durch Nullsetzen der Parameter β und γ :

$$\widehat{F} = \widehat{\Pi}_D + \frac{1}{2}\alpha^2 \widehat{I}^2 - \frac{1}{3}k^2 = 0$$
(8.2.7)

Die Größe κ wurde durch $\sqrt{\frac{1}{3}} k$ substituiert. Die Materialparameter α und k müssen in der Weise von J_p abhängen, daß die Funktion \hat{F} aus (8.2.7) den Grenzfällen $n_p^S = 1$ und $n_p^S = 0$ genügt. Für $n_p^S = 1$, also wenn die Porosität der plastischen Zwischenkonfiguration verschwindet - Kompressionspunkt der plastischen Zwischenkonfiguration -, soll α zu Null werden und k der Fließspannung σ_F eines nichtporösen Vergleichsmaterials entsprechen, so daß \hat{F} in eine Fließbedingung von Misesschen Typs übergeht. Für den Grenzfall der Extension, $n_p^S \to 0$, soll die Fließfläche im Hauptspannungsraum identisch verschwinden. Es läßt sich zeigen, daß die geforderten Grenzübergänge mit

$$k = \varphi_1(J_p)\sigma_F, \qquad \text{VI} \alpha = -\varphi_2(J_p)\varphi_1(J_p)/\ln(1-n_n^S)$$
(8.2.8)

erfüllt werden, wenn die Funktion $\varphi_1(J_p)$ den Randbedingungen

$$n_p^S = 1 \rightarrow J_p = n_{0S}^S : \varphi_1 = 1,$$

$$n_p^S \rightarrow 0 \rightarrow J_p \rightarrow \infty : \varphi_1 = 0$$
(8.2.9)

genügt. Dies wird z. B. durch einen einfachen Potentialansatz der Form $\varphi_1 = (n_p^S)^a$ erreicht. Die Funktionen $\varphi_1(J_p)$ und $\varphi_2(J_p)$ sind den Versuchsergebnissen des zu beschreibenden Materials anzupassen. Es soll jedoch erwähnt werden, daß sowohl Green [1972] als auch de Boer & Kowalski [1983] die Funktionen φ_1 und α auf Grund von Überlegungen an einem einfachen theoretischen Modell bestimmten. Die so bestimmten Materialparameter sind häufig ungeeignet zur Beschreibung von Versuchsergebnissen, vgl. Shima & Oyane [1976], so daß die Ansätze (8.2.8) und (8.2.9) zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens beliebiger duktiler Stoffe geeigneter erscheinen. Die prinzipielle Darstellung der Fließfläche (8.2.7) als Funktion von n_p^S bzw. J_p kann Abb. 8.3 entnommen werden.

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung des kinematischen Verfestigungsverhaltens duktiler Materialien besteht in der Einführung sogenannter "Mehr-Flächen-Modelle". Auf diese Möglichkeit soll im Rahmen der vorliegenden Arbeit lediglich hingewiesen werden; bezüglich der Einführung verschiedener "Mehr-Flächen-Modelle" im Rahmen der klassischen Plastizitätstheorie nichtporöser Metalle vgl. z. B. *Tsakmakis* [1987]. Schließlich bleibt zu erwähnen, daß (8.2.7) auch zur Beschreibung idealplastischen Materialverhaltens benutzt werden kann, wenn der Translationstensor $\widehat{\mathbf{Y}}^{S}$ zu Null gesetzt wird. Das prinzipielle Vorgehen bei der Behandlung der idealen Plastizität flüssigkeitsgesättigter duktiler Festkörperskelette kann *de Boer & Kowalski* [1983] entnommen werden.

^{VI} $n_p^S = n_p^S(J_p)$, vgl. (8.2.5)



Abb. 8.3: Fließfläche (8.2.7) als Funktion von n_p^S , dargestellt in der hydrostatischen Ebene des Hauptspannungsraumes von $\hat{\boldsymbol{\tau}}^S - \hat{\boldsymbol{Y}}^S$ für das leere bzw. $\hat{\boldsymbol{\tau}}^S_E - \hat{\boldsymbol{Y}}^S_E$ für das flüssigkeitsgesättigte Festkörperskelett

8.3 Fließregel

In der Plastizitätstheorie mit Fallunterscheidung ist das Anwachsen plastischer Deformationen an die Existenz bestimmter Belastungskriterien gebunden:

$$\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} \begin{cases} < 0 : \text{ Entlastung} & (\widehat{\boldsymbol{D}}_{Sp} = \mathbf{0}), \\ = 0 : \text{ neutr.Spann.änd.} & (\widehat{\boldsymbol{D}}_{Sp} = \mathbf{0}), \\ > 0 : \text{ Belastung} & (\widehat{\boldsymbol{D}}_{Sp} \neq \mathbf{0}). \end{cases}$$
(8.3.1)

Im Rahmen einer geometrischen Interpretation im Hauptspannungsraum stellt $\partial \hat{F} / \partial \hat{\tau}^{S}$ die Normale an die Fließfläche dar; die plastische Lie -Ableitung von $\hat{\tau}^{S}$ gibt den Spannungszuwachs bei festgehaltener Basis an, d. h. $\partial \hat{F} / \partial \hat{\tau}^{S}$ und $(\hat{\tau}^{S})_{p}^{\nabla}$ sind Größen derselben Hauptspannungskoordinaten. Die Belastungskriterien (8.3.1) sind objektiv und invariant gegenüber Koordinatentransformationen, so daß

$$\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \mathbf{S}^{S}} \cdot (\mathbf{S}^{S})_{S}' = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}^{S}} \cdot (\boldsymbol{\tau}^{S})^{\nabla}.$$
(8.3.2)

Die Gültigkeit von (8.3.2) kann mit den Transformationsbeziehungen (6.5.13) und (7.2.7) sowie den Ableitungsregeln nach Anhang A.3 leicht bestätigt werden. In der Literatur sind neben (8.3.1) auch andere objektive Belastungskriterien angegeben worden, die häufig mit Hilfe der *Jaumann*schen Ableitung definiert wurden, vgl. z. B. *Dafalias* [1983], *Ehlers* [1983] oder *Haupt* [1983, 1985]. Der Nachteil der *Jaumann*schen Ableitung liegt jedoch einerseits in der fehlenden geometrischen Interpretationsmöglichkeit; andererseits ist ein mit der *Jaumann*schen Ableitung definiertes Belastungskriterium nicht im Sinne von (8.3.2) invariant gegenüber Koordinatentransformationen. Darüber hinaus zeigt ein mit der *Jau*

mannschen Ableitung definierter kinematischer Verfestigungsansatz (Evolutionsgleichung für den Translationstensor) für den Fall der einfachen Scherung einen oszillierenden Verlauf der Scherspannung in Abhängigkeit vom Scherwinkel, gekennzeichnet durch eine konstante, materialunabhängige Wellenlänge 2π , siehe dazu Lehmann [1972], Lee et al. [1983], Dafalias [1983] und Tsakmakis [1987].

Für den Belastungsfall verfestigender Materialien ist eine Fließregel für die plastische Deformationsgeschwindigkeit $\hat{D}_{Sp} = (\hat{\Gamma}_{Sp})_p^{\wedge}$ der Zwischenkonfiguration anzugeben. Es hat sich jedoch gezeigt, daß für poröse Festkörpermaterialien nicht in jedem Fall eine assoziierte Fließregel sinnvoll sein muß. Für spröde und granulare Materialien führt eine assoziierte Fließregel zu unrealistischen Ergebnissen, vgl. de Boer [1988a], während sich duktile Materialien durchaus auch mit assoziierten Fließregeln beschreiben lassen, vgl. Shima & Oyane [1976] oder Mielniczuk [1982]^{VII}. Als allgemeine Form einer nichtassoziierten Fließregel kann der Ansatz von de Boer [1988a, Gl.(30)] auf die geometrisch nichtlineare Plastizitätstheorie mit kinematischer Verfestigung übertragen werden:

$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = \Lambda \widehat{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S})^{D} + \eta \mathbf{I} \end{bmatrix}$$
mit
$$\widehat{\mathbf{Q}} = (\widehat{\mathbf{Q}}^{T} \otimes \widehat{\mathbf{Q}}^{T})^{14}, \quad \widehat{\mathbf{Q}} \in \mathcal{O}_{e}.$$
(8.3.3)

Darin ist $\mathbf{\hat{Q}}$ ein materialabhängiger, eigentlich orthogonaler Tensor, der eine Beschreibung der in der Bodenmechanik häufig anzutreffenden Nichtkoaxialität zwischen Spannung und plastischer Deformationsänderung im Bruchzustand zuläßt. ^{VIII} Für duktile Materialien geht (8.3.3) in die assoziierte Fließregel

$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = \Lambda \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^S}$$
(8.3.4)

über, indem man setzt:

$$\overset{\star}{\mathbf{Q}} = \mathbf{I} \quad , \qquad (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S})^{D} + \eta \mathbf{I} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}}.$$
 (8.3.5)

In (8.3.4) ist der Wertebereich des Λ -Faktors durch die Restriktion für den Zuwachs der plastischen Arbeit eingeschränkt. Entsprechend $(6.5.11)_2$ und (6.5.12) gilt

$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S}) \geq 0, \qquad (8.3.6)$$

^{VII}Die assoziierte Fließregel wurde von von Mises [1928] zur Beschreibung plastischer Formänderungen von Kristallen eingeführt. In dieser Arbeit knüpft von Mises die Existenz der assoziierten Fließregel (die plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten sind proportional zur Ableitung der Fließbedingung nach den Spannungen) ausdrücklich an die Forderung, daß die Fließbedingung unabhängig ist vom hydrostatischen Druck [1928, S. 163 und S. 181]. Insofern ist die assoziierte Fließregel für duktile Materialien als Arbeitshypothese zu verstehen.

^{VIII}Eine ausführliche Diskussion der Fließregel (8.3.3) sei de Boer & Ehlers [1990] vorbehalten.

so daß bei Voraussetzung der Fließbedingung (8.2.7) mit

$$\frac{\partial F}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} = (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S})^{D} + \alpha^{2} [(\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S}) \cdot \mathbf{I}] \mathbf{I}$$
(8.3.7)

auf

$$\Lambda \{ (\hat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \hat{\mathbf{Y}}^{S})^{D} \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \hat{\mathbf{Y}}^{S})^{D} + \alpha^{2} [(\hat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \hat{\mathbf{Y}}^{S}) \cdot \mathbf{I}]^{2} \} =$$

$$= \frac{2}{3} \Lambda k^{2} \ge 0 \quad \rightarrow \quad \Lambda \ge 0$$
(8.3.8)

geschlossen werden kann.

Die Bestimmung des Λ -Faktors aus der Konsistenzbedingung^{IX} setzt eine Evolutionsgleichung für den Translationstensor voraus. Mit $(6.5.12)_2$ und (7.2.2) gilt

$$\widehat{\mathbf{Y}}^{S} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \psi^{Sp}}{\partial \widehat{\Gamma}_{Sp}} \quad , \quad \psi^{Sp} = \psi^{Sp}(\mathbf{E}_{Sp}) \quad , \tag{8.3.9}$$

so daß durch Rückwärtstransformation von $(8.3.9)_1$ entsprechend $(6.5.12)_1$ und $(6.5.13)_1$

$$\mathbf{Z}^{S} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \psi^{Sp}}{\partial \mathbf{E}_{Sp}}$$

$$= 2 \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \psi^{Sp}}{\partial \mathbf{C}_{Sp}}.$$
(8.3.10)

Die Voraussetzung materieller Symmetrie bedingt in Analogie zu den Ausführungen in Abschnitt 7.2:

$$\psi^{Sp}(\mathbf{E}_{Sp}) = \psi^{Sp}(\mathbf{C}_{Sp}) \to \psi^{Sp}(\widehat{\mathbf{B}}_{Sp}),$$

$$\psi^{Sp}(\widehat{\mathbf{B}}_{Sp}) = \psi^{Sp}(I_p, II_p, J_p).$$
(8.3.11)

Damit kann der referentielle Translationstensor \mathbf{Z}^{S} als isotrope Tensorfunktion der Invarianten I_p , II_p und III_p (bzw. J_p) der plastischen Deformationstensoren \mathbf{C}_{Sp} bzw. $\hat{\mathbf{B}}_{Sp}$ dargestellt werden:

$$\mathbf{Z}^{S} = 2\,\rho_{0S}^{S}\left(\bar{\varphi}_{0}\mathbf{I} + \bar{\varphi}_{1}\mathbf{C}_{Sp} + \bar{\varphi}_{-1}\mathbf{C}_{Sp}^{-1}\right) \tag{8.3.12}$$

^{IX}Im Rahmen iterativer Berechnungsverfahren kann der Λ-Faktor auch durch eine schrittweise Approximation der Fließbedingung (Return-Algorithmus) bestimmt werden; bzgl. dieses Vorgehens bei der Beschreibung des plastischen Verhaltens nichtporöser metallischer Werkstoffe vgl. z. B. Simo & Taylor [1985] oder Gruttmann & Stein [1988].

 mit

$$\bar{\varphi}_{0} = \frac{\partial \psi^{Sp}}{\partial I_{p}} + I_{p} \frac{\partial \psi^{Sp}}{\partial I_{p}},$$

$$\bar{\varphi}_{1} = -\frac{\partial \psi^{Sp}}{\partial I_{p}},$$

$$\bar{\varphi}_{-1} = \frac{1}{2} J_{p} \frac{\partial \psi^{Sp}}{\partial J_{p}}.$$
(8.3.13)

Da im Umgang mit der kinematischen Verfestigung poröser Materialien noch in vielen Punkten die Erfahrung fehlt (auch hinsichtlich signifikanter Versuchsergebnisse), kann z.B. im Rahmen eines einfachen Ansatzes für duktile Materialien

$$\psi^{Sp} = \psi^{Sp}(I_p, J_p)$$

mit $2\rho_{0S}^S \frac{\partial \psi^{Sp}}{\partial I_p} = \frac{1}{2}c_p(I_p, J_p),$ (8.3.14)
 $\rho_{0S}^S J_p \frac{\partial \psi^{Sp}}{\partial J_p} = -\frac{1}{2}c_p(I_p, J_p)$

gesetzt werden. Darin wird der plastische Materialbeiwert c_p als eine Funktion von I_p und J_p aufgefaßt. Es folgt:

$$\mathbf{Z}^{S} = c_{p} \left(I_{p}, J_{p} \right) \overset{R}{\mathbf{K}} \overset{\mathbf{X}}{\underset{Sp}{\overset{S}{\mathbf{F}}}} .$$

$$(8.3.15)$$

Die Größe

$${}^{R}_{Sp} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}_{Sp}^{-1} \right)$$
(8.3.16)

kennzeichnet den referentiellen plastischen Karni-Reiner-Verzerrungstensor, vgl. Tafel 8.1.

Aus (8.3.15) erhält man als Evolutionsgleichung für die zeitliche Änderung des Translati-

$$\mathbf{Z}^S = \frac{1}{2} c_p(I_p) \mathbf{I} - \lambda_p \mathbf{C}_{Sp}^{-1}.$$

Der Lagrangesche Multiplikator λ_p ist aus den üblichen Randbedingungen zu bestimmen.

^X Dieser Ansatz steht nicht im Widerspruch zur klassischen Plastizitätstheorie nichtporöser Metalle. Hier muß zur Gewährleistung der plastischen Inkompressibilität zu jeder Zeit $t \det \mathbf{F}_{Sp} = 1$ gelten, d. h. (8.3.14)₃ verschwindet und anstelle von (8.3.15) ist zu setzen:

onstensors

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}^{S})'_{S} &= \mathbf{B}_{p} (\mathbf{E}_{Sp})'_{S}, \\ \mathbf{B}_{p} &= 2 \frac{\partial \mathbf{Z}^{S}}{\partial \mathbf{C}_{Sp}} \\ &= 2 \left(\mathbf{K}_{Sp}^{R} \otimes \frac{\partial c_{p}}{\partial \mathbf{C}_{Sp}} + c_{p} \frac{\partial \mathbf{K}_{Sp}^{R}}{\partial \mathbf{C}_{Sp}} \right). \end{aligned}$$
(8.3.17)

Mit (8.3.16) und der Ableitungsregel (A.3.7) gilt

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{Sp}}{\partial \mathbf{C}_{Sp}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{Sp}^{-1} \otimes \mathbf{C}_{Sp}^{-1} \right)^{\frac{14}{T}}, \qquad (8.3.18)$$

so daß

$$\overset{4}{\mathbf{B}}_{p} = 2 \overset{R}{\mathbf{K}}_{Sp} \otimes \frac{\partial c_{p}}{\partial \mathbf{C}_{Sp}} + c_{p} \left(\mathbf{C}_{Sp}^{-1} \otimes \mathbf{C}_{Sp}^{-1} \right)^{\frac{14}{T}}$$
(8.3.19)

und damit bei Beachtung von (A.1.8):

$$(\mathbf{Z}^{S})'_{S} = (c_{p})'_{S} \overset{R}{\mathbf{K}}_{Sp} + c_{p} \mathbf{C}_{Sp}^{-1} (\mathbf{E}_{Sp})'_{S} \mathbf{C}_{Sp}^{-1}$$
mit $(c_{p})'_{S} = \frac{\partial c_{p}(I_{p}, J_{p})}{\partial \mathbf{C}_{Sp}} \cdot (\mathbf{C}_{Sp})'_{S}.$

$$(8.3.20)$$

Durch Vorwärtstransformation von \mathbf{Z}^{S} aus (8.3.15) und $(\mathbf{Z}^{S})'_{S}$ aus (8.3.20) mit $\mathbf{F}_{Sp}(...)\mathbf{F}_{Sp}^{T}$ folgt mit (8.3.15) sowie Tafel 5.2 und Tafel 8.1:

$$\widehat{\mathbf{Y}}^{S} = c_{p} \left(I_{p}, J_{p} \right) \widehat{\mathbf{K}}_{Sp},$$

$$(\widehat{\mathbf{Y}}^{S})_{p}^{\nabla} = (c_{p})_{S}^{\prime} \widehat{\mathbf{K}}_{Sp} + c_{p} \widehat{\mathbf{D}}_{Sp}.$$

$$(8.3.21)$$

Damit steht in der Zwischenkonfiguration ein geeignetes Evolutionsgesetz für den Translationstensor und seine zeitliche Änderung zur Verfügung.

Zum Vergleich des Materialparameters c_p mit Ergebnissen, die aus einachsigen Versuchen gewonnen wurden, kann es vorteilhaft sein, c_p als Funktion der plastischen Bogenlänge s_p (plastische Vergleichsdehnung) darzustellen,

$$c_p(I_p, J_p) \rightarrow c_p(s_p),$$
 (8.3.22)



Tafel 8.1: Karni-Reiner-Verzerrungstensoren.

so daß anstelle von (8.3.21)

$$\widehat{\mathbf{Y}}^{S} = c_{p} (s_{p}) \widehat{\mathbf{K}}_{Sp},$$

$$(\widehat{\mathbf{Y}}^{S})_{p}^{\nabla} = c_{p} (s_{p}) \widehat{\mathbf{D}}_{Sp} - b (s_{p}) (s_{p})_{S}^{\prime} \widehat{\mathbf{Y}}^{S}$$
(8.3.23)
mit $b (s_{p}) = -\frac{1}{c_{p} (s_{p})} \frac{\partial c_{p} (s_{p})}{\partial s_{p}}$

gesetzt werden kann. In der Literatur werden die Summanden von (8.3.23) häufig als Erzeugungs- (1. Summand) und Begrenzungsterm (2. Summand) interpretiert, vgl. *Tsak-makis* [1987].

Die Formulierung von Evolutionsgesetzen für den Translationstensor bei der Beschreibung des Verfestigungsverhaltens nichtporöser Metalle geht auf Melan [1938, Gl.(5)] zurück, wenngleich in der Literatur meistens spätere Arbeiten zitiert werden, nämlich Prager [1955, 1956], Shield & Ziegler [1958] sowie Ziegler [1959]. In den ursprünglichen Arbeiten zur kinematischen Verfestigung wurde lineares Verfestigungsverhalten ($c_p = \text{konst.}$) vorausgesetzt. Nichtlineares Verfestigungsverhalten wurde erst später untersucht, vgl. z. B. Armstrong & Frederick [1966] sowie Mróz et al. [1976]. Die linearen Verfestigungsansätze sind durch Konstantsetzen von c_p in (8.3.15) bzw. (8.3.21)₁ enthalten. Ein entsprechender Ansatz für die geometrisch lineare Theorie kann direkt aus (8.3.15) im Zusammenhang mit (8.3.19) geschlossen werden:

$$\mathbf{Z}_{\text{lin.}}^{S} = \left(\left. \frac{\partial \, \mathbf{Z}^{S}}{\partial \, \mathbf{E}_{Sp}} \right|_{\mathbf{E}_{Sp}=\mathbf{0}} \right) \, \mathbf{E}_{Sp} = c_{p} \, \mathbf{E}_{Sp} \quad . \tag{8.3.24}$$

Darin ist c_p konstant.

Zur Bestimmung des Λ -Faktors ist die Konsistenzbedingung

$$[\widehat{F}(\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S},\widehat{\mathbf{Y}}^{S},J_{p})]_{S}^{\prime} = 0 \qquad (8.3.25)$$

auszuwerten. Es gilt

$$0 = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})'_{S} + \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\mathbf{Y}}^{S}} \cdot (\widehat{\mathbf{Y}}^{S})'_{S} + \frac{\partial \widehat{F}}{\partial J_{p}} (J_{p})'_{S}. \qquad (8.3.26)$$

Daraus folgt mit der Definition der unteren plastischen Lie-Ableitung, vgl. (7.2.6)₁, sowie der Beziehung $\partial \hat{F} / \partial \hat{\tau}^{s} = -\partial \hat{F} / \partial \hat{Y}^{s}$, daß für symmetrische $\partial \hat{F} / \partial \hat{\tau}^{s}$:

$$0 = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} - \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \cdot (\widehat{\mathbf{Y}}^{S})_{p}^{\nabla} + \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S}) \cdot 2\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} + J_{p} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial J_{p}} (\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} \cdot \mathbf{I}).$$

$$(8.3.27)$$

Unter Voraussetzung der Fließbedingung (8.2.7) ist die materielle Zeitableitung der plastischen Vergleichsdehnung durch

$$(s_p)'_S = \frac{2}{3} \Lambda k \sqrt{1 + 3/2 \alpha^2}$$
 (8.3.28)
definiert, so daß der Λ -Faktor bei Beachtung von (8.2.7), (8.3.4) und (8.3.23)₂ aus (8.3.27) ermittelt werden kann:

$$\Lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla}$$
(8.3.29)

 mit

$$h = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \cdot \left[c_{p} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} - \frac{2}{3} b k \sqrt{1 + 3/2 \alpha^{2}} \, \widehat{\mathbf{Y}}^{S} - 2 \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S} - \widehat{\mathbf{Y}}^{S}) - J_{p} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial J_{p}} \mathbf{I} \right].$$

$$(8.3.30)$$

Die Größe h ist eine stets positive Materialfunktion, vgl. (8.3.8) im Zusammenhang mit der Belastungsbedingung (8.3.1)₃. Alternativ kann für h aus (8.3.30) geschrieben werden:

$$h = \frac{2}{3} \left[k \left[c_p k - b \sqrt{1 + 3/2 \alpha^2} \left(\widehat{\boldsymbol{\tau}}^S - \widehat{\mathbf{Y}}^S \right)^D \cdot \widehat{\mathbf{Y}}^S \right] - \right. \\ \left. - 9 \widehat{III}_D - \frac{2}{3} k^2 \widehat{I} - \left\{ k \left[4 k + b \sqrt{1 + 3/2 \alpha^2} \left(\widehat{\mathbf{Y}}^S \cdot \mathbf{I} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \left(3 \alpha^2 - 1 \right) c_p \widehat{I} - \left(3 \alpha^2 + 1 \right) \widehat{I}^2 + \frac{9}{2} J_p \frac{\partial \widehat{F}}{\partial J_p} \right\} \alpha^2 \widehat{I} \right]$$

$$\left. \text{mit} \quad \frac{\partial \widehat{F}}{\partial J_p} = \alpha \widehat{I}^2 \frac{\partial \alpha}{\partial J_p} - \frac{2}{3} k \frac{\partial k}{\partial J_p} . \right.$$

$$\left. \left. \left. \right. \right\}$$

Damit folgt für die assoziierte Fließregel duktiler Materialien

$$\widehat{\mathbf{D}}_{Sp} = (\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{Sp})_p^{\vartriangle} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^S} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^S)_p^{\heartsuit} \right] \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^S}$$
(8.3.32)

mit h entsprechend (8.3.30) bzw. (8.3.31). Diese Beziehung kann durch Vorwärts- oder Rückwärtstransformation in der aktuellen bzw. Referenzkonfiguration dargestellt werden. Mit (5.6.27), der Ableitungsregel (A.3.6) und der Assoziationsvorschrift (A.1.8) gilt

$$\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\tau}^{S}} = \left(\frac{\partial \tau^{S}}{\partial \widehat{\tau}^{S}}\right)^{T} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \tau^{S}} = \mathbf{F}_{Se}^{T} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \tau^{S}} \mathbf{F}_{Se},$$

$$\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\tau}^{S}} = \left(\frac{\partial \mathbf{S}^{S}}{\partial \widehat{\tau}^{S}}\right)^{T} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \mathbf{S}^{S}} = \mathbf{F}_{Sp}^{T-1} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \mathbf{S}^{S}} \mathbf{F}_{Sp}^{-1},$$
(8.3.33)

so daß mit (8.3.2) und Tafel 5.2 direkt auf

$$(\mathbf{A}_{Sp})^{\nabla} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}^{S}} \cdot (\boldsymbol{\tau}^{S})^{\nabla} \right] \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} ,$$

$$(\mathbf{E}_{Sp})'_{S} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \mathbf{S}^{S}} \cdot (\mathbf{S}^{S})'_{S} \right] \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \mathbf{S}^{S}}$$

$$(8.3.34)$$

geschlossen werden kann. Bei Anwendung von (8.3.34) ist es vorteilhaft, auch die Fließbedingung \hat{F} sowie die Größe *h* entsprechend dem Transformationsverhalten der Spannungsund Translationstensoren umzuformen.

8.4 Inkrementelle Materialgleichungen

Mit Hilfe des Elastizitätsgesetzes für die Spannungsänderungen und der Fließregel können die inkrementellen Materialgleichungen elastisch-plastischen Materialverhaltens angegeben werden, indem man die Spannungsänderungen über einen Gesamtstofftensor aus den Gesamtverzerrungsänderungen herleitet. Dazu soll im folgenden eine Darstellung in Größen der Zwischenkonfiguration gewählt werden. Das Ergebnis läßt sich durch Vorwärts bzw. Rückwärtstransformation problemlos in die übrigen Konfigurationen übertragen.

Entsprechend $(7.2.12)_1$ gilt

$$(\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} = \widehat{\mathbf{C}}_{e} (\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{Se})_{p}^{\Delta}.$$
(8.4.1)

Bei Beachtung von Tafel 5.2 sowie der Fließregel (8.3.32) folgt daraus

$$(\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} = \widehat{\mathbf{C}}_{e} \left\{ (\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{S})_{p}^{\vartriangle} - \frac{1}{h} \left[\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} \right] \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \right\}, \qquad (8.4.2)$$

so daß mit Hilfe der üblichen Manipulationen auf

$$(\widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S})_{p}^{\nabla} = \widehat{\widehat{\mathbf{C}}}(\widehat{\Gamma}_{S})_{p}^{\Delta},$$

$$\stackrel{4}{\widehat{\mathbf{C}}} = \widehat{\widehat{\mathbf{C}}}_{e} - \frac{\widehat{\widehat{\mathbf{C}}}_{e} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \otimes \widehat{\widehat{\mathbf{C}}}_{e} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}}}{h + \widehat{\widehat{\mathbf{C}}}_{e} \cdot (\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \otimes \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}})}$$

$$(8.4.3)$$

geschlossen werden kann. Darin ist $\widehat{\mathbf{C}}$ als Gesamtstofftensor der Zwischenkonfiguration definiert.

Durch Vorwärtstransformation von $(8.4.3)_1$ erhält man mit $(7.2.7)_2$ und Tafel 5.2

$$(\boldsymbol{\tau}^{S})^{\nabla} = \mathbf{F}_{Se} \, \widehat{\mathbf{C}}_{e} \left[\mathbf{F}_{Se}^{T} (\mathbf{A}_{S})^{\vartriangle} \, \mathbf{F}_{Se} \right] \mathbf{F}_{Se}^{T}$$
(8.4.4)

und daraus durch zweimaliges Anwenden der Vorschrift (A.1.8):

$$(\boldsymbol{\tau}^{S})^{\nabla} = \overset{4}{\mathbf{C}} (\mathbf{A}_{S})^{\Delta},$$

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = (\mathbf{F}_{Se}^{T} \otimes \mathbf{F}_{Se}^{T})^{\frac{14}{T}} \overset{4}{\mathbf{\widehat{C}}} (\mathbf{F}_{Se} \otimes \mathbf{F}_{Se})^{\frac{14}{T}}.$$

$$(8.4.5)$$

Das Transformationsverhalten des Gesamtstofftensors $\overset{4}{\mathbf{C}_{e}}$ der aktuellen Konfiguration ist identisch mit demjenigen des Elastizitätstensors $\overset{4}{\mathbf{C}_{e}}$ (kovarianter Transport), vgl. (7.2.14). Um das Endergebnis der Transformation aufzuzeigen, soll eine Zwischenrechnung eingefügt werden. Mit (7.2.14), (8.3.33)₁ und (A.1.8) gilt:

$$(\mathbf{F}_{Se}^{T} \otimes \mathbf{F}_{Se}^{T})^{T} (\hat{\mathbf{C}}_{e} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \otimes \hat{\mathbf{C}}_{e} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}}) (\mathbf{F}_{Se} \otimes \mathbf{F}_{Se})^{T} =$$

$$= \overset{4}{\mathbf{C}}_{e} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}^{S}} \otimes \overset{4}{\mathbf{C}}_{e} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}^{S}}$$

$$(8.4.6)$$

und

$$\hat{\widehat{\mathbf{C}}}_{e} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \otimes \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{S}} \right) = \hat{\mathbf{C}}_{e} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}^{S}} \otimes \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}^{S}} \right).$$

$$(8.4.7)$$

Damit folgt für (8.4.5):

$$(\boldsymbol{\tau}^{S})^{\nabla} = \overset{4}{\mathbf{C}} (\mathbf{A}_{S})^{\Delta},$$

$$\overset{4}{\mathbf{C}} = \overset{4}{\mathbf{C}_{e}} - \frac{\overset{4}{\mathbf{C}_{e}} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}^{S}} \otimes \overset{4}{\mathbf{C}_{e}} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}^{S}}}{h + \overset{4}{\mathbf{C}_{e}} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}^{S}} \otimes \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}^{S}}\right)}.$$
(8.4.8)

Analog zu (8.4.4) - (8.4.8) erhält man durch Rückwärtstransformation von (8.4.3)

$$(\mathbf{S}^{S})'_{S} = \mathbf{B}^{4}(\mathbf{E}_{S})'_{S} ,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{4}_{e} - \frac{\mathbf{B}^{4}_{e}\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \mathbf{S}^{S}} \otimes \mathbf{B}^{4}_{e}\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \mathbf{S}^{S}}}{h + \mathbf{B}^{4}_{e} \cdot \left(\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \mathbf{S}^{S}} \otimes \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \mathbf{S}^{S}}\right)}, \qquad (8.4.9)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{F}^{T-1}_{Sp} \otimes \mathbf{F}^{T-1}_{Sp})^{\frac{14}{T}} \mathbf{\widehat{C}} (\mathbf{F}^{-1}_{Sp} \otimes \mathbf{F}^{-1}_{Sp})^{\frac{14}{T}}$$

mit $\overset{4}{\mathbf{B}}_{e}$ aus $(7.2.5)_{2}$.

Mit (8.4.3), (8.4.8) und (8.4.9) stehen in allen drei Konfigurationen von φ^S formal identische Ausdrücke für die inkrementellen Materialgleichungen elastisch-plastischen Mate-

rialverhaltens zur Verfügung. Die Elastizitätstensoren \mathbf{B}_e , $\hat{\mathbf{C}}_e$ und $\hat{\mathbf{C}}_e$ sind entsprechend Abschnitt 7.3 bzw. in linearisierter Form entsprechend Abschnitt 7.4 einzusetzen.

Als Beispiel soll an dieser Stelle der Gesamtstofftensor $\widehat{\mathbf{C}}$ der Zwischenkonfiguration vervollständigt werden. Sollen große elastisch-plastische Deformationen duktiler Materialien erfaßt werden können, so ist das nichtlineare Elastizitätsgesetz in der Form (7.3.24) zu benutzen. Man erhält:

4

Das Einsetzen der einzelnen Ausdrücke in $\widehat{\mathbf{C}}$ ist trivial und soll hier nicht weiter diskutiert werden. Der Verfestigungsparameter h ist mit (8.3.31) gegeben, die Materialparameter α und k können (8.2.8) entnommen werden. Es gilt die Fließbedingung (8.2.7) mit Belastungsbedingungen entsprechend (8.3.1).

8.5 Ergänzende Bemerkungen

Im vorliegenden Kapitel wurden das prinzipielle Vorgehen bei der Beschreibung des plastischen Materialverhaltens poröser Medien aufgezeigt und spezielle Materialgleichungen für duktiles Material angegeben. Wie bereits erwähnt, soll die Behandlung spröder und granularer Stoffe auf der Basis der für die geometrisch nichtlineare Theorie erweiterten Fließbedingung von *de Boer*, Gl. (8.2.3), einem in Kürze erscheinenden Bericht, *de Boer* & Ehlers [1990] vorbehalten bleiben.

Ebenso wie bei der Beschreibung des elastischen Materialverhaltens poröser Medien wurde auch hier das vereinfachte konstitutive Modell eines inkompressiblen, flüssigkeitsgesättigten, elastisch-plastisch deformierbaren Festkörpers vorausgesetzt, vgl. Abschnitt 6.5, so daß alle angegebenen Beziehungen gleichermaßen für das leere und das flüssigkeitsgesättigte Festkörperskelett gelten. Für das flüssigkeitsgesättigte Skelett sind lediglich die Partialspannungen $\boldsymbol{\tau}^{S}$ durch die Extraspannungen $\boldsymbol{\tau}^{S}_{E}$ zu ersetzen.

Die hier gewählte Behandlung des plastischen Materialverhaltens entspricht einer Formulierung im Spannungsraum. In numerischen Algorithmen ist häufig eine Formulierung im Dehnungsraum vorzuziehen, d. h. die Spannungsgrößen $\boldsymbol{\tau}^{S}$ bzw. $\boldsymbol{\tau}_{E}^{S}$ sind formal mit Hilfe des geltenden Elastizitätsgesetzes zu ersetzen. Der so entstehende Formalismus kann z. B. direkt aus (8.4.10) geschlossen werden.

Kapitel 9: Einige Ergänzungen zum Modell eines flüssigkeitsgesättigten, elastischplastisch deformierbaren porösen Körpers

9.1 Einleitung

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die thermodynamischen Restriktionen und konstitutiven Gleichungen eines flüssigkeitsgesättigten, elastisch-plastisch deformierbaren porösen Körpers mit inkompressiblen Konstituierenden diskutiert. Im Rahmen der makroskopischen Betrachtungsweise wurden für kleine Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht eine linear viskose Porenflüssigkeit vorausgesetzt und lineare konstitutive Beziehungen für den Wärmefluß und die volumenbezogene Interaktionskraft bzw. den lokalen Bewegungsgrößenzuwachs angegeben (Abschnitt 6.4). Zur Konstituierung eines anwendungsbezogenen Modells wurden die thermodynamischen Restriktionen und konstitutiven Gleichungen mit Hilfe des "Prinzips der konstitutiven Trennung der Teilkörper" (Abschnitt 6.5) vereinfacht. Dadurch wurde es möglich, das elastisch-plastische Materialverhalten der Festkörpermatrix in der Weise zu beschreiben, daß die angegebenen Beziehungen gleichermaßen für das flüssigkeitsgesättigte sowie das leere Festkörperskelett gelten. Im letzteren Fall sind lediglich die Extraspannungen durch die Partialspannungen des Festkörpermaterials zu ersetzen. Zur Vervollständigung des Modells sollen im folgenden die aus der Energiebilanz resultierende Wärmeleitungsgleichung und die Bewegungsgleichungen für Flüssigkeit und Festkörperskelett angegeben werden. Darüber hinaus sollen die Grundlagen zur numerischen Behandlung von Randwertaufgaben (FEM) an einem einfachen Beispiel aufgezeigt werden.

Für das betrachtete Modell gilt, vgl. (6.4.41), (6.5.1), (6.5.2) und (7.2.3):

$$\begin{split} \psi^{S} &= \bar{\psi}^{Se}(\theta) + \tilde{\psi}^{Se}(\mathbf{E}_{Se}) + \psi^{Sp}(\mathbf{E}_{Sp}), \\ \psi^{F} &= \psi^{F}(\theta) , \\ \eta^{S} &= -\left(\frac{\partial\psi^{S}}{\partial\theta} + \frac{\alpha_{\theta}}{\rho^{S}}\right) , \\ \eta^{F} &= -\left(\frac{\partial\psi^{F}}{\partial\theta} - \frac{\alpha_{\theta}}{\rho^{F}}\right) , \\ \mathbf{T}^{S} &= -n^{S}p\,\mathbf{I} + \mathbf{T}^{S}_{E} , \\ \mathbf{T}^{F} &= -n^{F}p\,\mathbf{I} + \mathbf{T}^{F}_{E} , \\ \hat{\mathbf{p}}^{F} &= p\,\operatorname{grad} n^{F} + \hat{\mathbf{p}}^{F}_{E} , \\ \mathbf{q}^{S} + \mathbf{q}^{F} &= -\beta_{\theta}\,\operatorname{grad} \theta . \end{split}$$

$$(9.1.1)$$

Darin sind, vgl. (5.6.26):

$$\mathbf{T}_{E}^{S} = (\det \mathbf{F}_{S})^{-1} \boldsymbol{\tau}_{E}^{S},$$

$$\mathbf{T}_{E}^{F} = 2 \,\mu^{F} \,\mathbf{D}_{F} + \lambda^{F} \left(\mathbf{D}_{F} \cdot \mathbf{I}\right) \mathbf{I},$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{E}^{F} = -\alpha_{\theta} \operatorname{grad} \theta - \mathbf{S}_{V} \left(\mathbf{x}_{F} - \mathbf{x}_{S}\right).$$
(9.1.2)

Für die Extraspannung des Festkörperskeletts gilt formal, vgl. (7.2.4):

$$\boldsymbol{\tau}_{E}^{S} = \rho_{0S}^{S} \frac{\partial \hat{\psi}^{Se}}{\partial \mathbf{A}_{Se}}.$$
(9.1.3)

Diese Beziehung kann durch das jeweils gültige Elastizitätsgesetz, vgl. Kapitel 7, ersetzt werden.

9.2 Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung des Modells basiert auf der Energiebilanz (6.2.10), die sich mit Hilfe der geltenden Beziehungen auf folgende Form bringen läßt:

$$-\rho^{S} \psi_{S}^{'S} - \rho^{F} \psi_{F}^{'F} - \theta \left(\rho^{S} \eta_{S}^{'S} + \rho^{F} \eta_{F}^{'F} \right) - \hat{\mathbf{p}}^{F} \cdot \left(\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S} \right) +$$

$$+ \mathbf{T}^{S} \cdot \mathbf{D}_{S} + \mathbf{T}^{F} \cdot \mathbf{D}_{F} - \rho^{S} \eta^{S} \dot{\theta}_{S} - \rho^{F} \eta^{F} \dot{\theta}_{F} +$$

$$+ \rho r^{I} - \operatorname{div} \left(\mathbf{q}^{S} + \mathbf{q}^{F} \right) = 0.$$

$$(9.2.1)$$

Es gilt

$$\dot{\psi}_{S}^{S} = \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \theta} \dot{\theta}_{S} + \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{A}_{Se}} \cdot (\mathbf{A}_{Se})^{\Delta} + \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{A}_{Sp}} \cdot (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta},$$

$$\dot{\psi}_{F}^{F} = \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \theta} \dot{\theta}_{F},$$
(9.2.2)

wobei in $(9.2.2)_1$ das Transformationsverhalten der Verzerrungstensoren und Verzerrungsgeschwindigkeiten gemäß Tafel 5.1 und Tafel 5.2 beachtet wurde, vgl. auch (6.5.10). Mit

(9.2.2) folgt formal für (9.2.1)

$$-\theta\left(\rho^{S} \dot{\eta}_{S}^{S} + \rho^{F} \dot{\eta}_{F}^{F}\right) - \hat{\mathbf{p}}^{F} \cdot \left(\dot{\mathbf{x}}_{F} - \dot{\mathbf{x}}_{S}\right) + \left(\mathbf{T}^{S} - \rho^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{A}_{Se}}\right) \cdot (\mathbf{A}_{Se})^{\Delta} + \left(\mathbf{T}^{S} - \rho^{S} \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \mathbf{A}_{Sp}}\right) \cdot (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta} + \mathbf{T}^{F} \cdot \mathbf{D}_{F} - \rho^{S} \left(\eta^{S} + \frac{\partial \psi^{S}}{\partial \theta}\right) \dot{\theta}_{S} -$$

$$-\rho^{F} \left(\eta^{F} + \frac{\partial \psi^{F}}{\partial \theta}\right) \dot{\theta}_{F} + \rho r^{I} - \operatorname{div}\left(\mathbf{q}^{S} + \mathbf{q}^{F}\right) = 0,$$
(9.2.3)

woraus mit der Inkompressibilitätsbedingung (4.5.13) (für $\hat{n}^i = 0$) sowie den Beziehungen $(6.5.12)_3$ und (9.1.1) - (9.1.3) auf

$$-\theta\left(\rho^{S}\eta_{S}^{'S}+\rho^{F}\eta_{F}^{'F}\right)+\Phi_{D}^{S}+\Phi_{D}^{F}+\rho r^{I}-\operatorname{div}\left(\mathbf{q}^{S}+\mathbf{q}^{F}\right)=0$$
(9.2.4)

geschlossen werden kann. Die Dissipationsfunktionen Φ_D^S und Φ_D^F von Festkörperskelett und Flüssigkeit sind darin durch

$$\Phi_D^S = \det \mathbf{F}_S(\boldsymbol{\tau}_E^S - \mathbf{Y}^S) \cdot (\mathbf{A}_{Sp})^{\Delta},$$

$$\Phi_D^F = \mathbf{S}_V(\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S) \cdot (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S) + \mathbf{T}_E^F \cdot \mathbf{D}_F$$
(9.2.5)

bestimmt. Beide Dissipationsfunktionen sind stets positiv, vgl. (6.4.35), $(6.5.11)_3$, $(6.5.12)_3$ und $(9.1.2)_2$. Mit (6.5.11), (6.5.12) sowie (8.3.6) - (8.3.8) kann für Φ_D^S alternativ geschrieben werden:

$$\Phi_D^S = \frac{2}{3} \det \mathbf{F}_S \Lambda k^2 \,. \tag{9.2.6}$$

Unter Voraussetzung isotroper Permeabilitätseigenschaften des Festkörpermaterials folgt für Φ_D^F mit (6.4.23), (6.4.45) und (6.4.47):

$$\Phi_D^F = \frac{\rho^F}{k^F} \left| \mathbf{b} \right| n^F \left(\mathbf{x}_F' - \mathbf{x}_S' \right) \cdot \left(\mathbf{x}_F' - \mathbf{x}_S' \right) + 2 \mu^F \mathbf{D}_F \cdot \mathbf{D}_F + \lambda^F (\mathbf{D}_F \cdot \mathbf{I})^2.$$
(9.2.7)

Zur weiteren Umformung von (9.2.4) sind die materiellen Zeitableitungen der partialen Entropiefunktionen η^S und η^F zu bilden. Da Phasentransformationen ausgeschlossen wurden ($\hat{\rho}^i = 0$), gilt mit (4.3.1) und (9.1.1)₁ – (9.1.1)₄:

$$\dot{\eta}_{S}^{S} = -\frac{\partial^{2} \psi^{Se}}{\partial \theta^{2}} \dot{\theta}_{S} - \frac{1}{\rho^{S}} \left[(\alpha_{\theta})_{S}' + \alpha_{\theta} \operatorname{div} \mathbf{\dot{x}}_{S} \right],$$

$$\dot{\eta}_{F}^{F} = -\frac{\partial^{2} \psi^{F}}{\partial \theta^{2}} \dot{\theta}_{F} + \frac{1}{\rho^{F}} \left[(\alpha_{\theta})_{F}' + \alpha_{\theta} \operatorname{div} \mathbf{\dot{x}}_{F} \right].$$

$$(9.2.8)$$

Damit geht (9.2.4) in

$$\theta \left(\rho^{S} \frac{\partial^{2} \bar{\psi}^{Se}}{\partial \theta^{2}} + \rho^{F} \frac{\partial^{2} \psi^{F}}{\partial \theta^{2}}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \Phi_{D}^{S} + \Phi_{D}^{F} + \theta \rho^{S} \frac{\partial^{2} \bar{\psi}^{Se}}{\partial \theta^{2}} \operatorname{grad} \theta \cdot \mathbf{\dot{x}}_{S} + \theta \rho^{F} \frac{\partial^{2} \psi^{F}}{\partial \theta^{2}} \operatorname{grad} \theta \cdot \mathbf{\dot{x}}_{F} - \theta \operatorname{div} \left[\alpha_{\theta} (\mathbf{\dot{x}}_{F} - \mathbf{\dot{x}}_{S})\right] + \rho r^{I} - \operatorname{div} \left(\mathbf{q}^{S} + \mathbf{q}^{F}\right) = 0$$

$$(9.2.9)$$

über. Führt man schließlich in Analogie zur klassischen Kontinuumsmechanik der Einkomponentenmedien

$$C_{V}^{S} = -\theta \frac{\partial^{2} \bar{\psi}^{Se}}{\partial \theta^{2}},$$

$$C_{V}^{F} = -\theta \frac{\partial^{2} \psi^{F}}{\partial \theta^{2}},$$

$$C_{V} = \frac{1}{\rho} \left(\rho^{S} C_{V}^{S} + \rho^{F} C_{V}^{F} \right)$$
(9.2.10)

als spezifische Wärmefunktionen bei konstantem Volumen ein, so folgt

$$-\rho C_V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho^S C_V^S \operatorname{grad} \theta \cdot \mathbf{\dot{x}}_S - \rho^F C_V^F \operatorname{grad} \theta \cdot \mathbf{\dot{x}}_F -$$

$$-\theta \operatorname{div} \left[\alpha_\theta (\mathbf{\dot{x}}_F - \mathbf{\dot{x}}_S) \right] + \Phi_D^S + \Phi_D^F + \rho r^{\mathrm{I}} - \operatorname{div} (\mathbf{q}^S + \mathbf{q}^F) = 0.$$
(9.2.11)

Diese Beziehung repräsentiert die Wärmeleitungsgleichung des untersuchten Modells. Die Größe α_{θ} kennzeichnet den Entropiekopplungsparameter. Über α_{θ} liegen zur Zeit jedoch keinerlei Erfahrungen vor. Man kann lediglich feststellen, daß der Nichtgleichgewichtsanteil \mathcal{D}_n der Dissipationsungleichung nach (6.4.6) auch für $\alpha_{\theta} = 0$ stets größer bzw. gleich Null ist, vgl. Abschnitt 6.4, so daß auch $\alpha_{\theta} = 0$ eine zulässige – wenngleich entkoppelte – Lösung des allgemeinen Problems darstellt. Kann $\alpha_{\theta} = 0$ zumindest im vereinfachten konstitutiven Modell angenommen werden, dann ist mit (9.2.11) eine zur Lösung praxisrelevanter Probleme geeignete Wärmeleitungsgleichung gegeben. Die Grenzfälle der klassischen Einkomponentenmedien, inkompressibler, elastisch-plastischer Festkörper und inkompressible, viskose Flüssigkeit, sind in (9.2.11) enthalten.

9.3 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen von Festkörperskelett und Flüssigkeit stellen eine wesentliche Grundlage zur Entwicklung numerischer Berechnungsverfahren für poröse Medien dar. Für die Porenflüssigkeit gilt mit (6.2.7)

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^{F} + \rho^{F}(\mathbf{b} - \mathbf{x}_{F}'') + \hat{\mathbf{p}}^{F} = \mathbf{0}, \qquad (9.3.1)$$

so daß mit $(9.1.1)_6$ und $(9.1.1)_7$

$$\mathbf{z}^{F} - n^{F} \operatorname{grad} p + \rho^{F} (\mathbf{b} - \mathbf{x}_{F}'') + \hat{\mathbf{p}}_{E}^{F} = \mathbf{0}.$$
(9.3.2)

Darin gibt

$$\mathbf{z}^F = \operatorname{div} \mathbf{T}^F_E \tag{9.3.3}$$

die durch die Viskosität der Flüssigkeit verursachte Zähigkeitskraft an. Mit $(9.1.2)_2$ kann für \mathbf{z}^F geschrieben werden:

$$\mathbf{z}^{F} = \operatorname{div} \left[2\,\mu^{F}\,\mathbf{D}_{F} + \lambda^{F}\,(\,\mathbf{D}_{F}\cdot\mathbf{I}\,)\,\mathbf{I} \right] \\ = \mu^{F}\Delta \mathbf{\dot{x}}_{F} + \left(\,\mu^{F} + \lambda^{F}\,\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\dot{x}}_{F} + \\ + 2\,\mathbf{D}_{F}\,\operatorname{grad}\mu^{F} + \operatorname{div}\mathbf{\dot{x}}_{F}\,\operatorname{grad}\lambda^{F}\,.$$

$$(9.3.4)$$

Das Symbol $\Delta(\ldots)$ kennzeichnet den Laplace-Operator.

Die makroskopische Strömung einer Flüssigkeit in porösen Festkörpern kann als wirbelfreie Bewegung aufgefaßt werden. Mikroskopische Verwirbelungen bei der Umströmung einzelner Körner eines granularen Mediums oder bei der Durchströmung einzelner Porenkanäle eines duktilen Materials werden dadurch nicht ausgeschlossen, spielen jedoch im Rahmen der makroskopischen Betrachtungsweise keine Rolle. Bei wirbelfreier Bewegung kann das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{\dot{x}}_{F}$ als Gradient eines Geschwindigkeitspotentials W^{F} dargestellt werden, d. h.:

$$\mathbf{x}_{F}^{\prime} = \operatorname{grad} W^{F} \quad \operatorname{mit} \quad \operatorname{rot} \mathbf{x}_{F}^{\prime} = \mathbf{0}.$$
 (9.3.5)

Beachtet man, daß

$$\Delta \mathbf{\dot{x}}_F = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\dot{x}}_F - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{\dot{x}}_F, \qquad (9.3.6)$$

so folgt aus (9.3.4):

$$\mathbf{z}^{F} = (2\,\mu^{F} + \lambda^{F}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{x}_{F}^{\prime} + 2\,\mathbf{D}_{F} \operatorname{grad} \mu^{F} + \operatorname{div} \mathbf{x}_{F} \operatorname{grad} \lambda^{F}.$$
(9.3.7)

Man erkennt, daß die Zähigkeitskraft für wirbelfreie φ^F immer dann verschwindet, wenn für feldlich konstante μ^F und λ^F makroskopische Inkompressibilität (div $\mathbf{x}_F = 0$) angenommen werden kann. Dies ist z. B. bei der Durchströmung starrer, im Ausgangszustand homogen verteilter poröser Körper der Fall^I, vgl. de Boer & Ehlers [1986b, Abschnitt 5.2].

^IIm Ausgangszustand homogen verteilte Konstituierenden (Grad_i $n_{0i}^i = \mathbf{0}$) wurden mit (5.3.2) vorausgesetzt.

Für das Beschleunigungsfeld gilt

$$\mathbf{\ddot{x}}_{F} = \frac{\partial \mathbf{\dot{x}}_{F}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(\mathbf{\dot{x}}_{F} \cdot \mathbf{\dot{x}}_{F} \right) - \mathbf{\dot{x}}_{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{\dot{x}}_{F}, \qquad (9.3.8)$$

so daß für die wirbelfreie Bewegung

$$\mathbf{\mathbf{x}}_{F}^{\prime} = \frac{\partial \mathbf{\mathbf{x}}_{F}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(\mathbf{\mathbf{x}}_{F} \cdot \mathbf{\mathbf{x}}_{F} \right).$$
(9.3.9)

Die Flüssigkeitsbewegung in porösen Medien wird in der Regel als schleichende Strömung behandelt, d. h. man setzt

$${}''_{F} = \mathbf{0}$$
. (9.3.10)

Ein Vergleich von (9.3.9) und (9.3.10) zeigt, daß für die schleichende Strömung nicht nur ein stationäres, rotationsfreies Geschwindigkeitsfeld vorausgesetzt werden muß; sondern das Geschwindigkeitsfeld muß darüber hinaus homogen sein, so daß grad $\mathbf{\dot{x}}_F = \mathbf{0}$. Im allgemeinen kann jedoch kein homogenes Geschwindigkeitsfeld vorausgesetzt werden; man wird vielmehr davon ausgehen müssen, daß der Term $\frac{1}{2}$ grad ($\mathbf{\dot{x}}_F \cdot \mathbf{\dot{x}}_F$) für sehr kleine Strömungsgeschwindigkeiten gegenüber den übrigen Ausdrücken in der Bewegungsgleichung (9.3.2) vernachlässigt werden kann, vgl. *Hamel* [1934, S. 130].

Für die schleichende Strömung folgt aus (9.3.2)

$$\mathbf{z}^{F} - n^{F} \operatorname{grad} p + \rho^{F} \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}_{E}^{F} = \mathbf{0}$$
(9.3.11)

mit \mathbf{z}^{F} aus (9.3.7). Der effektive Flüssigkeitsdruck p kann im Schwerefeld – hier entspricht **b** der Erdbeschleunigung \mathbf{g} – mit Hilfe der Standrohrspiegelhöhe h ausgedrückt werden, vgl. de Boer & Ehlers [1986b, Gl. (5.1.10)], so daß

grad
$$p = \gamma^{FR} \operatorname{grad} h + \rho^{FR} \mathbf{b}$$

mit $\gamma^{FR} = \rho^{FR} |\mathbf{b}|$. (9.3.12)

Für isotrope poröse Festkörper gilt außerdem mit (6.4.23), (6.4.45), (6.4.47) und $(9.1.2)_3$:

$$\hat{\mathbf{p}}_{E}^{F} = -\alpha_{\theta} \operatorname{grad} \theta - \frac{n^{F} \gamma^{FR}}{k^{F}} \mathbf{w}^{F}.$$
(9.3.13)

Darin ist

$$\mathbf{w}^F = n^F (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S) \tag{9.3.14}$$

als Filtergeschwindigkeit der Porenflüssigkeit definiert. Mit (9.3.12) und (9.3.13) folgt aus (9.3.11):

$$\mathbf{z}^{F} - n^{F} \gamma^{FR} \operatorname{grad} h - \alpha_{\theta} \operatorname{grad} \theta - \frac{n^{F} \gamma^{FR}}{k^{F}} \mathbf{w}^{F} = \mathbf{0}.$$
(9.3.15)

Kann die Zähigkeitskraft der Flüssigkeit vernachlässigt werden – dies ist z. B. für Wasser der Fall, vgl. de Boer & Ehlers [1986b, Abschnitt 5.3] –, und gilt außerdem $\alpha_{\theta} = 0$ bzw. grad $\theta = \mathbf{0}$, dann geht (9.3.15) in

$$-n^{F}\gamma^{FR}\operatorname{grad} h - \frac{n^{F}\gamma^{FR}}{k^{F}}\mathbf{w}^{F} = \mathbf{0}$$
(9.3.16)

bzw.

$$\mathbf{w}^F = -k^F \operatorname{grad} h \tag{9.3.17}$$

über. Die Beziehung (9.3.17) ist das *Darcysche Gesetz der Filterströmung*, vgl. *Darcy* [1856].

Die Bewegungsgleichung des Festkörperskeletts lautet mit (6.2.7)

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^{S} + \rho^{S} (\mathbf{b} - \overset{"}{\mathbf{x}}_{S}) - \hat{\mathbf{p}}^{F} = \mathbf{0}, \qquad (9.3.18)$$

so daß mit $(9.1.1)_5$ und $(9.1.1)_7$ bei Vernachlässigung der Trägheitskräfte

div
$$\mathbf{T}_E^S - n^S \operatorname{grad} p + \rho^S \mathbf{b} - \hat{\mathbf{p}}_E^F = \mathbf{0}.$$
 (9.3.19)

Daraus folgt mit (9.3.12) und (9.3.13)

div
$$\mathbf{T}_{E}^{S} + n^{S} (\rho^{SR} - \rho^{FR}) \mathbf{b} - n^{S} \gamma^{FR} \operatorname{grad} h + \alpha_{\theta} \operatorname{grad} \theta + \frac{n^{F} \gamma^{FR}}{k^{F}} \mathbf{w}^{F} = \mathbf{0}.$$
 (9.3.20)

Kann $\alpha_{\theta} = 0$ bzw. grad $\theta = \mathbf{0}$ vorausgesetzt werden, dann gilt entsprechend

div
$$\mathbf{T}_{E}^{S} + n^{S} (\rho^{SR} - \rho^{FR}) \mathbf{b} - n^{S} \gamma^{FR} \operatorname{grad} h + \frac{n^{F} \gamma^{FR}}{k^{F}} \mathbf{w}^{F} = \mathbf{0}.$$
 (9.3.21)

Die Bewegungsgleichung des Gesamtkörpers entsteht durch Addition von (9.3.15) und (9.3.20):

div
$$\mathbf{T}_{E}^{S} + n^{S} (\rho^{SR} - \rho^{FR}) \mathbf{b} + \mathbf{z}^{F} - \gamma^{FR} \operatorname{grad} h = \mathbf{0}.$$
 (9.3.22)

Für $\mathbf{z}^F = \mathbf{0}$ gilt entsprechend

div
$$\mathbf{T}_{E}^{S} + n^{S} (\rho^{SR} - \rho^{FR}) \mathbf{b} - \gamma^{FR} \operatorname{grad} h = \mathbf{0}.$$
 (9.3.23)

Diese Beziehung ist identisch mit de Boer & Ehlers [1988a, Gl. (3.22)]. Der zweite Summand kennzeichnet darin das um den Auftrieb verminderte Gewicht des Festkörpers pro Volumenelement dv. Die Größe

$$\mathbf{r} = -\gamma^{FR} \operatorname{grad} h \tag{9.3.24}$$

wird in der Literatur zu Grundwasserströmungen als volumenbezogene Reibungskraft interpretiert. Mit

$$h = \frac{U}{|\mathbf{b}|} + \frac{p}{\gamma^{FR}}, \quad \mathbf{b} = -\operatorname{grad} U, \qquad (9.3.25)$$

vgl. de Boer & Ehlers [1986b, Gl. (5.1.8)], kann (9.3.24) direkt in die entsprechenden Ergebnisse von Hoffman [1929], von Terzaghi & Rendulic [1934] bzw. Heinrich & Desoyer [1956] überführt werden; siehe de Boer & Ehlers [1988a].

9.4 Zur Implementierung der Theorie poröser Medien in numerische Algorithmen (FEM)

Mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung (9.2.11) und den Bewegungsgleichungen für Festkörperskelett und Flüssigkeit können numerische Berechnungsverfahren zur Behandlung flüssigkeitsgesättigter, elastisch-plastisch deformierbarer poröser Körper angegeben werden, die jedoch im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie einen nicht unerheblichen Aufwand erfordern, der in erster Linie durch die Kopplung der Partialkörper in Bewegung und Temperatur hervorgerufen wird. Diese Problematik soll im folgenden nicht ausdiskutiert werden; stattdessen soll lediglich das prinzipielle Vorgehen für einen einfachen Fall (wassergesättigter, isotroper Festkörper – isothermer Prozeß) angedeutet werden.

Numerische Berechnungsverfahren (FEM) basieren entweder auf einer Extremalaussage oder auf dem "Prinzip der virtuellen Verrückungen". Da eine Extremalaussage – hier ist die Existenz eines quadratischen Potentials vorauszusetzen – in der Regel nur in der geometrisch linearen Theorie oder der im *Hill*schen Sinne inkrementell linearen Theorie existiert, vgl. z. B. *Hill* [1958], wird man bei allgemeinen Problemen poröser Medien vom Prinzip der virtuellen Verrückungen ausgehen müssen; bezüglich einer Extremalaussage für flüssigkeitsgesättigte, elastisch-plastisch deformierbare poröse Körper im Rahmen der geometrisch linearen Theorie sei auf *de Boer & Kowalski* [1985] verwiesen. Im einfachsten Fall der geometrisch nichtline
aren Theorie benutzt man für das Festkörperskelett die Bewegungsgleichung (9.3.21), so daß nach Multiplikation mit einer virtuellen Verrückung η^{S} und Integration über den Bereich \mathcal{B} des Gesamtvolumens V

$$\int_{\mathcal{B}} \left[\operatorname{div} \mathbf{T}_{E}^{S} + n^{S} (\rho^{SR} - \rho^{FR}) \mathbf{b} - n^{S} \gamma^{FR} \operatorname{grad} h + \frac{n^{F} \gamma^{FR}}{k^{F}} \mathbf{w}^{F} \right] \cdot \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v = 0 \quad (9.4.1)$$

bzw.

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{T}_{E}^{S} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v = \int_{\partial \mathcal{B}_{t}} \mathbf{t}_{E}^{S} \cdot \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}a + \int_{\mathcal{B}} \left[n^{S} (\rho^{SR} - \rho^{FR}) \mathbf{b} - n^{S} \gamma^{FR} \operatorname{grad} h + \frac{n^{F} \gamma^{FR}}{k^{F}} \mathbf{w}^{F} \right] \cdot \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v.$$

$$(9.4.2)$$

In (9.4.2) kennzeichnet $\partial \mathcal{B}_t$ den Bereich der Oberfläche mit bekannten Oberflächenkräften. Die Beziehung (9.4.2) liefert ein nichtlineares Gleichungssystem, das durch Newton-Iteration zu lösen ist.

Betrachtet man die Standrohrspiegelhöhe h, den Durchlässigkeitskoeffizienten k^F und die Filtergeschwindigkeit \mathbf{w}^F ebenso wie die äußere Last \mathbf{t}_E^S als gegeben, dann erhält man durch Linearisierung des Funktionals

$$G(t) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{T}_{E}^{S} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v$$
(9.4.3)

im Zustand 2:

Da die virtuelle Verrückung η^S für statische Belastungsprozesse zeitunabhängig ist, gilt

$$G'_{S} = \int_{\mathcal{B}} \left[\left(\mathbf{T}_{E}^{S} \right)_{S}^{0} + \mathbf{L}_{S} \mathbf{T}_{E}^{S} \right] \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v \,.$$

$$(9.4.5)$$

Die Truesdellsche Ableitung der Extraspannungen

$$(\mathbf{T}_{E}^{S})_{S}^{0} = (\mathbf{D}_{S} \cdot \mathbf{I})\mathbf{T}_{E}^{S} + (\mathbf{T}_{E}^{S})_{S}^{\prime} - \mathbf{L}_{S}\mathbf{T}_{E}^{S} - \mathbf{T}_{E}^{S}\mathbf{L}_{S}^{T}, \qquad (9.4.6)$$

vgl. Truesdell [1953, Gl. (55.b2)], kann bei Beachtung von (5.6.26) und $(7.2.6)_2$ durch die untere Lie-Ableitung der Kirchhoffschen Extraspannungen ersetzt werden:

$$(\mathbf{T}_E^S)_S^0 = (\det \mathbf{F}_S)^{-1} (\boldsymbol{\tau}_E^S)^{\nabla}.$$
(9.4.7)

Damit folgt

$$G'_{S} = \int_{\mathcal{B}} (\det \mathbf{F}_{S})^{-1} \left[(\boldsymbol{\tau}_{E}^{S})^{\nabla} + \mathbf{L}_{S} \boldsymbol{\tau}_{E}^{S} \right] \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v, \qquad (9.4.8)$$

so daß für (9.4.2) mit $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\int_{\mathcal{B}} \left(\det \mathbf{F}_{S} \right)^{-1} \left[\left(\boldsymbol{\tau}_{E}^{S} \right)^{\nabla} + \mathbf{L}_{S} \boldsymbol{\tau}_{E}^{S} \right] \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v \Big|_{t=t_{1}} \Delta t =
= -\int_{\mathcal{B}} \left(\det \mathbf{F}_{S} \right)^{-1} \boldsymbol{\tau}_{E}^{S} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v \Big|_{t=t_{1}} -
-\int_{\mathcal{B}} \left[\left[n^{S} \gamma^{FR} \operatorname{grad} h - \frac{n^{F} \gamma^{FR}}{k^{F}} \mathbf{w}^{F} \right] \cdot \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v \Big|_{t=t_{1}} +
+ \int_{\partial \mathcal{B}_{t}} \mathbf{t}_{E}^{S} \cdot \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}a \Big|_{t=t_{2}} + \int_{\mathcal{B}} n^{S} (\rho^{SR} - \rho^{FR}) \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v \Big|_{t=t_{2}} .$$
(9.4.9)

Der Zielzustand 2 eines Inkrements ist erreicht, wenn die linke Seite von (9.4.9) im Rahmen einer zu definierenden Toleranz verschwindet. In jedem Iterationsschritt sind für die ersten beiden Summanden der rechten Seite von (9.4.9) verbesserte Werte einzusetzen, so daß nach Abschluß der Iteration $t_1 = t_2$. Die Größe $(\boldsymbol{\tau}_E^S)^{\nabla}$ kann mit Hilfe des Gesamtstofftensors $\overset{4}{\mathbf{C}}$, vgl. (8.4.8), aus dem Verschiebungsansatz hergeleitet werden; $\boldsymbol{\tau}_E^S$ ist formal durch das jeweils gültige Elastizitätsgesetz nach Kapitel 7 definiert. Die verbesserten Werte von \mathbf{w}^F können nach jedem Iterationsschritt aus dem Darcyschen Gesetz (9.3.17) bestimmt werden:

$$\mathbf{w}^F = -k^F \operatorname{grad} h \,. \tag{9.4.10}$$

Dabei ist zu beachten, daß k^F im allgemeinen eine Funktion der Festkörperdeformation ist. Als Alternative zu dieser Vorgehensweise kann mit (9.4.10) für (9.4.9) auch geschrieben

werden:

$$\int_{\mathcal{B}} \left(\det \mathbf{F}_{S} \right)^{-1} \left[\left(\boldsymbol{\mathcal{T}}_{E}^{S} \right)^{\nabla} + \mathbf{L}_{S} \boldsymbol{\mathcal{T}}_{E}^{S} \right] \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v \Big|_{t=t_{1}} \Delta t =
= -\int_{\mathcal{B}} \left(\det \mathbf{F}_{S} \right)^{-1} \boldsymbol{\mathcal{T}}_{E}^{S} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v \Big|_{t=t_{1}} - \int_{\mathcal{B}} \gamma^{FR} \operatorname{grad} h \cdot \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v \Big|_{t=t_{1}} + \qquad (9.4.11)
+ \int_{\partial \mathcal{B}_{t}} \mathbf{t}_{E}^{S} \cdot \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}a \Big|_{t=t_{2}} + \int_{\mathcal{B}} n^{S} (\rho^{SR} - \rho^{FR}) \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}^{S} \mathrm{d}v \Big|_{t=t_{2}}.$$

Diese Beziehung hat gegenüber (9.4.9) den Vorteil, daß hier nach jedem Iterationsschritt für den Flüssigkeitskörper nur die Standrohrspiegelhöhe h feldlich neu zu bestimmen ist. Dies ist jedoch leicht möglich, wenn man nach jedem Iterationsschritt die Festkörperdeformation festhält, so daß $\mathbf{x}_{S} = \mathbf{0}$ und daher

$$\mathbf{w}^F = n^F \, \mathbf{x}_F^{\prime} \,. \tag{9.4.12}$$

Geht man ferner davon aus, daß der Volumenanteil der Flüssigkeit nach jedem Iterationsschritt stationär ist, d. h. $\partial n^{F} / \partial t = 0$, dann folgt mit $(6.2.6)_2$

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{w}^{F\mathbf{II}}, \qquad (9.4.13)$$

so daß mit (9.4.10)

$$0 = -\operatorname{div}(k^{F}\operatorname{grad} h)$$

$$= -k^{F}\Delta h - \operatorname{grad} k^{F} \cdot \operatorname{grad} h$$
(9.4.14)

bzw. für feldlich konstante k^F :

$$0 = \Delta h \,. \tag{9.4.15}$$

Die Beziehung (9.4.15) ist die Laplacesche Differentialgleichung für die Standrohrspiegelhöhe h. Einfache Lösungsmöglichkeiten dieser Beziehung ergeben sich z. B. nach Heinrich & Desoyer [1958] oder Klesse [1987]. Bezüglich diverser Lösungsmöglichkeiten von (9.4.14), vgl. z. B. Schulte [1988].

^{II}Für $\mathbf{\dot{x}}_{F} = \mathbf{0}$ kann (9.4.13) auch aus der Inkompressibilitätsbedingung (4.5.13) für $\hat{n}^{i} = 0$ geschlossen werden.

9.5 Ergänzende Bemerkungen

Die im vorliegenden Kapitel angegebenen Beziehungen gestatten die numerische Behandlung von Randwertaufgaben flüssigkeitsgesättigter, elastisch-plastisch deformierbarer poröser Festkörper. Alternativen zu den hier diskutierten Gleichungen sind denkbar und lassen sich formal mit Hilfe der Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel aufzeigen.

Schließlich bleibt festzustellen, daß der unter Voraussetzung des vereinfachten konstitutiven Modells, vgl. Abschnitt 6.5, hergeleitete Lösungsalgorithmus (9.4.11) auch für das leere Festkörperskelett gilt, indem man γ^{FR} und ρ^{FR} zu Null setzt. In diesem Fall gehen $(\boldsymbol{\tau}_{E}^{S})^{\nabla}, \boldsymbol{\tau}_{E}^{S}$ und \mathbf{t}_{E}^{S} in $(\boldsymbol{\tau}^{S})^{\nabla}, \boldsymbol{\tau}^{S}$ und \mathbf{t}^{S} über, die entsprechend den Ausführungen aus Kapitel 7 und Kapitel 8 durch dieselben Stoffbeziehungen wie die erstgenannten Größen definiert sind.

Kapitel 10: Abschließende Bemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurde eine allgemeine Theorie poröser Medien auf der Basis der um das Konzept der Volumenanteile erweiterten Mischungstheorie entwickelt. Als Anwendungsbeispiel wurde innerhalb dieser Vorgehensweise das Modell eines inkompressiblen, binären porösen Mediums, bestehend aus einer inkompressiblen, viskosen Flüssigkeit und einem inkompressiblen, elastisch-plastisch deformierbaren Festkörperskelett, unter Einbeziehung der durch die Inkompressibilitätseigenschaft hervorgerufenen inneren Zwangsbedingung diskutiert und ein anwendungsbezogenes, vereinfachtes Modell angegeben. Andere Modelle, z. B. ein mit mehreren Flüssigkeiten oder ein mit Flüssigkeiten und Gasen gefüllter Festkörper, können in Analogie zur aufgezeigten Vorgehensweise leicht entwickelt werden. Ein aus mehreren Konstitutiver Modelle können das Elastizitätsgesetz aus Kapitel 7 und die Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens aus Kapitel 8 in der Regel übernommen werden.

Abschließend sei noch einmal auf einen von Prof. *de Boer* und mir geplanten Forschungsbericht verwiesen, *de Boer & Ehlers* [1990], der speziell auf die Anwendung des hier diskutierten Modells auf bodenmechanische Problemstellungen abstellen wird. Dies wird sich vor allem auf die Beschreibung des plastischen Materialverhaltens auswirken; in Kapitel 8 wurde überwiegend von duktilem Material ausgegangen. In der Bodenmechanik muß jedoch granulares Material vorausgesetzt werden, so daß die Plastizitätstheorie auf der Basis der Fließbedingung (8.2.3) und der Fließregel (8.3.3) zu entwickeln ist.

Ein Vergleich des hier diskutierten Modells mit anderen in der Literatur dokumentierten Modellen poröser Medien befindet sich ebenfalls in Vorbereitung, *de Boer et al.* [1991].

Anhang A: Rechenregeln – ohne Beweis

Alle folgenden Definitionen und Rechenvorschriften, die im absoluten Tensorkalkül dargestellt werden, lassen sich leicht – z. B. in einer beliebigen Basisdarstellung – im Zusammenhang mit den bei *de Boer* [1982] angegebenen Definitionen und Regeln verifizieren.

A.1 Tensoren höherer Stufe: Multiplikationen, lineare Abbildungen, Identitäten

Es seien A, B, C, D beliebige, nichtsinguläre Tensoren 2. Stufe.

Definition eines einfachen Tensors 4. Stufe mit den Eigenschaften:

$$\overset{4}{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\right)^{\frac{14}{T}}, \tag{A.1.1}$$

$$\mathbf{\hat{A}}^{T} = [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{T}]^{T} = (\mathbf{A}^{T} \otimes \mathbf{B}^{T})^{T}, \qquad (A.1.2)$$

$${}^{4}\mathbf{A}^{-1} = [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{T}]^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1})^{T}.$$
(A.1.3)

Transpositionen $(\dots)^{T}^{ik}$ kennzeichnen die miteinander zu vertauschenden Tensorbasen; die Transposition $(\dots)^{T}$ beinhaltet die Vertauschung der ersten beiden gegen die letzten beiden Tensorbasen, d. h.

$$(\dots)^{T} = [(\dots)^{T}]^{T}.$$
(A.1.4)

Mit der Definition (A.1.1) gelten folgende Rechenregeln:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\frac{14}{T}} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\frac{14}{T}} = (\mathbf{C} \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} \mathbf{B})^{\frac{14}{T}}, \qquad (A.1.5)$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\widetilde{T}} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \otimes \mathbf{D}),$$
 (A.1.6)

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{T} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{D} \, \mathbf{B} \, \mathbf{C}^{T})$$
(A.1.7)

sowie

$$\left(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\right)^{T} \mathbf{C} = \mathbf{B}^{T} \mathbf{C} \mathbf{A}$$
(A.1.8)

und mit einem beliebigen Tensor $\overset{3}{\mathbf{C}}$ 3. Stufe

$$[(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\frac{14}{T}} \mathbf{C}]^{\underline{3}} = [(\mathbf{B}^T \mathbf{C})^{\underline{3}}]^{\frac{23}{T}} \mathbf{A}]^{\underline{3}}]^{\frac{23}{T}}.$$
 (A.1.9)

Definition eines einfachen Tensors 4. Stufe mit den Eigenschaften:

$$\overset{4}{\mathbf{B}} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{13}_{T}, \tag{A.1.10}$$

$$\overset{4}{\mathbf{B}}^{T} = [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{T}]^{T} = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})^{T}, \qquad (A.1.11)$$

$${}^{4}\mathbf{B}^{-1} = [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{T}]^{-1} = (\mathbf{B}^{T-1} \otimes \mathbf{A}^{T-1})^{T}.$$
(A.1.12)

Mit den Definitionen (A.1.1) und (A.1.10) gelten folgende Rechenregeln:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\frac{13}{T}} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\frac{13}{T}} = (\mathbf{D}^T \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} \mathbf{B}^T)^{\frac{14}{T}}, \qquad (A.1.13)$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\frac{14}{T}} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\frac{13}{T}} = (\mathbf{C} \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}^T \mathbf{D})^{\frac{13}{T}},$$
(A.1.14)

$$\left(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\right)^{T} \left(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}\right)^{T} = \left(\mathbf{D} \,\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \,\mathbf{C}^{T}\right)^{T}, \qquad (A.1.15)$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{T} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{B} \mathbf{C}^{T} \mathbf{A} \otimes \mathbf{D}), \qquad (A.1.16)$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\widetilde{T}} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C} \mathbf{B}^T \mathbf{D}),$$
 (A.1.17)

sowie

$$\left(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\right)^{^{13}}\mathbf{C} = \mathbf{B} \,\mathbf{C}^T \mathbf{A} \,. \tag{A.1.18}$$

Fundamentaltensoren 4. Stufe, vgl. *de Boer* [1982, Abschnitt 4.10] können mit Hilfe der Definitionen (A.1.1) und (A.1.10) dargestellt werden:

$$\mathbf{A} = \overset{4}{\mathbf{I}} \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \overset{4}{\mathbf{I}} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\frac{14}{T}}, \tag{A.1.19}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} = \frac{4}{\mathbf{I}} \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \frac{4}{\mathbf{I}} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \qquad (A.1.20)$$

$$\mathbf{A}^{T} = \overline{\overline{\mathbf{I}}} \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \overline{\overline{\mathbf{I}}} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\frac{13}{T}}. \tag{A.1.21}$$

Es seien **v** ein beliebiger Vektor, **A**, **B**, **C**, **D** beliebige Tensoren 2. Stufe und $\overset{3}{\mathbf{A}}$, $\overset{3}{\mathbf{B}}$, $\overset{3}{\mathbf{C}}$ beliebige Tensoren 3. Stufe. Dann gelten folgende Identitäten^I:

$$[\mathbf{A} (\mathbf{B} \otimes \mathbf{v})]^{\underline{1}} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v}, \qquad (A.1.22)$$

$$[\mathbf{A} (\mathbf{B} \otimes \mathbf{v})^{T}]^{\underline{1}} = \mathbf{B}^{T} \mathbf{A} \mathbf{v}, \qquad (A.1.23)$$

$$[\mathbf{A} (\mathbf{B} \otimes \mathbf{v})]^{\underline{3}} = (\mathbf{A} \mathbf{B}) \otimes \mathbf{v}, \qquad (A.1.24)$$

$$[(\mathbf{v} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{B}]^{\underline{3}} = \mathbf{v} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{B}), \qquad (A.1.25)$$

$$[\mathbf{A} (\mathbf{B} \overset{3}{\mathbf{C}})^{\underline{3}}]^{\underline{3}} = [(\mathbf{A} \mathbf{B}) \overset{3}{\mathbf{C}}]^{\underline{3}}, \qquad (A.1.26)$$

$$[\mathbf{A} (\mathbf{B} \mathbf{C}^{T})^{\underline{3}}]^{\underline{3}} = [(\mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{C}^{T}]^{\underline{3}}, \qquad (A.1.27)$$

^IDie Kennzeichnung $(...)^{\underline{i}}$ weist darauf hin, daß die jeweilige Assoziation so zu bilden ist, daß ein Tensor i-ter Stufe entsteht.

$$(\overset{3}{\mathbf{A}}\mathbf{B})^{\underline{3}}\mathbf{C}]^{\underline{3}} = [\overset{3}{\mathbf{A}}(\mathbf{B}\mathbf{C})]^{\underline{3}},$$

$$(A.1.28)$$

$$(\overset{3}{\mathbf{A}}^{12}\mathbf{B})^{\underline{3}}\mathbf{C}]^{\underline{3}} = [\overset{3}{\mathbf{A}}^{12}(\mathbf{B}\mathbf{C})]^{\underline{3}},$$

$$(A.1.29)$$

$$[(\mathbf{A}^{T} \ \mathbf{B})^{2} \mathbf{C}]^{2} = [\mathbf{A}^{T} \ (\mathbf{B} \ \mathbf{C})]^{2},$$
(A.1.29)

$$[(\mathbf{A} \mathbf{B})^{\underline{2} \ I} \mathbf{C}]^{\underline{2} \ I} = [(\mathbf{A}^{I} \mathbf{C})^{\underline{2} \ I} \mathbf{B}]^{\underline{2}},$$
(A.1.30)

$$[(\mathbf{A}\overset{3}{\mathbf{B}})^{\underline{3}}\mathbf{C}]^{\underline{3}} = [\mathbf{A}(\overset{3}{\mathbf{B}}\mathbf{C})^{\underline{3}}]^{\underline{3}}, \qquad (A.1.31)$$

$$[(\mathbf{A} \mathbf{B})^{\underline{S} \ \underline{I}} \mathbf{C}]^{\underline{S} \ \underline{I}} = [\mathbf{A} (\mathbf{B}^{\underline{I}} \mathbf{C})^{\underline{S} \ \underline{I}}]^{\underline{S}},$$
(A.1.32)

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{\underline{3}\,T} = (\mathbf{A}\,\mathbf{B}^T)^{\underline{3}},$$
 (A.1.33)

$$(\mathbf{\hat{A}}^T \mathbf{B})^{\underline{3}} = (\mathbf{\hat{A}}\mathbf{B})^{\underline{3} T}, \qquad (A.1.34)$$
$$(\mathbf{\hat{A}}^{23}_T \mathbf{B})^{\underline{3}}_T^{23} = (\mathbf{B}^T \mathbf{\hat{A}}^{12}_T)^{\underline{3}}_T^{12} \qquad (A.1.35)$$

$$(\mathbf{A}^{T} \ \mathbf{B})^{\underline{a} T} = (\mathbf{B}^{T} \ \mathbf{A}^{T})^{\underline{a} T}, \qquad (A.1.35)$$
$$(\mathbf{I} \ \mathbf{A})^{\underline{3}} = (\mathbf{A}^{T} \mathbf{I})^{\underline{3}} = \mathbf{A}^{3}, \qquad (A.1.36)$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \mathbf{C} \end{pmatrix} = (\mathbf{A} \mathbf{B})^{\underline{3}} \mathbf{C}, \qquad (A.1.37)$$

$$\overset{3}{\mathbf{A}} (\mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}) = [(\overset{3}{\mathbf{A}} \mathbf{D}^{T})^{\underline{3} \overset{23}{T}} \mathbf{B}]^{\underline{3} \overset{23}{T}} \mathbf{C}, \qquad (A.1.38)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\overset{3}{\mathbf{B}} \mathbf{C})^{\underline{3}} \mathbf{v} = \mathbf{C}^{T} (\mathbf{A} \overset{3}{\mathbf{B}})^{\underline{1}} \cdot \mathbf{v}, \qquad (A.1.39)$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \mathbf{C} = [\mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{3}^{23} \\ \mathbf{B}^{T} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}^{\frac{3}{2}T}]^{\frac{3}{2}} \mathbf{v}.$$
(A.1.40)

Mit einem beliebigen Tensor $\overset{4}{\mathbf{B}}$ vierter Stufe gilt ferner:

$$\overset{3}{\mathbf{A}} \cdot (\overset{4}{\mathbf{B}} \mathbf{C})^{\underline{4}} \mathbf{v} = \overset{4}{\mathbf{B}} \cdot (\overset{3}{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{C} \mathbf{v})$$
(A.1.41)

A.2 Gradienten und Divergenzen

Es sei \mathbf{A} ein beliebiges, nichtsinguläres Tensorfeld 2. Stufe und \mathbf{F} der Deformationsgradient, d.h.:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \qquad (A.2.1)$$

$$\mathbf{F} = \operatorname{Grad} \mathbf{x} \quad \operatorname{mit} \quad \operatorname{Grad} (...) = \frac{\partial (...)}{\partial \mathbf{X}},$$
 (A.2.2)

$$\mathbf{F}^{-1} = \operatorname{grad} \mathbf{X} \quad \operatorname{mit} \quad \operatorname{grad} (...) = \frac{\partial (...)}{\partial \mathbf{x}}.$$
 (A.2.3)

Es gelten folgende Beziehungen:

Grad
$$\mathbf{A} = [(\operatorname{grad} \mathbf{A}) \mathbf{F}]^{\underline{3}},$$
 (A.2.4)

grad
$$\mathbf{A} = [(\operatorname{Grad} \mathbf{A}) \mathbf{F}^{-1}]^{\underline{3}},$$
 (A.2.5)

$$\operatorname{Div} \mathbf{A} = (\operatorname{grad} \mathbf{A}) \mathbf{F}^T, \qquad (A.2.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = (\operatorname{Grad} \mathbf{A}) \mathbf{F}^{T-1}, \qquad (A.2.7)$$

$$\operatorname{Grad}\left(\det \mathbf{F}\right) = \det \mathbf{F} \left(\mathbf{F}^{T-1} \operatorname{Grad} \mathbf{F}\right)^{\underline{1}}, \qquad (A.2.8)$$

grad (det
$$\mathbf{F}^{-1}$$
) = det \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{F}^T grad \mathbf{F}^{-1})¹. (A.2.9)

Kopplung aufeinander folgender Deformationsgradienten:

Es seien \mathbf{F}_1 der Deformationsgradient zwischen Konfiguration 2 und Konfiguration 1 und \mathbf{F}_0 der Deformationsgradient zwischen Konfiguration 1 und Konfiguration 0, so daß

$$\mathbf{F}_0 = \operatorname{Grad}_0 \mathbf{x}_1 \quad \operatorname{mit} \quad \operatorname{Grad}_0 = \frac{\partial(\dots)}{\partial \mathbf{x}_0},$$
 (A.2.10)

$$\mathbf{F}_1 = \operatorname{Grad}_1 \mathbf{x}_2 \quad \operatorname{mit} \quad \operatorname{Grad}_1 = \frac{\partial(\dots)}{\partial \mathbf{x}_1}$$
 (A.2.11)

und

$$\mathbf{F} = \operatorname{Grad}_0 \mathbf{x}_2 \,. \tag{A.2.12}$$

Es seien $\overset{3}{G}_{0}$ und $\overset{3}{G}_{1}$ die zu \mathbf{F}_{0} und \mathbf{F}_{1} gehörenden zweiten Deformationsgradienten, so daß

$$\overset{3}{\mathbf{G}}_{0} = \operatorname{Grad}_{0} \mathbf{F}_{0} \quad \operatorname{mit} \quad \overset{3}{\mathbf{G}}_{0} = \overset{3}{\mathbf{G}}_{0}^{23}, \tag{A.2.13}$$

$$\overset{3}{\mathbf{G}}_{1} = \operatorname{Grad}_{1} \mathbf{F}_{1} \quad \operatorname{mit} \quad \overset{3}{\mathbf{G}}_{1} = \overset{3}{\mathbf{G}}_{1}^{23}. \tag{A.2.14}$$

und

$$\overset{3}{\mathbf{G}} = \operatorname{Grad}_{0} \mathbf{F} \quad \operatorname{mit} \quad \overset{3}{\mathbf{G}} = \overset{3}{\mathbf{G}}^{23}_{T}. \tag{A.2.15}$$

Mit (A.2.10) bis (A.2.15) sind zwei aufeinander folgende Deformationsgradientenpaare für Materialien zweiten Grades definiert, so daß

$$(\mathbf{F}, \overset{3}{\mathbf{G}}) = (\mathbf{F}_1, \overset{3}{\mathbf{G}}_1) \circ (\mathbf{F}_0, \overset{3}{\mathbf{G}}_0)$$
(A.2.16)

mit

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \, \mathbf{F}_0 \,, \tag{A.2.17}$$

$$\overset{3}{\mathbf{G}} = [(\overset{3}{\mathbf{G}}_{1} \mathbf{F}_{0})^{\underline{3}} \overset{2^{3}}{T} \mathbf{F}_{0}]^{\underline{3}} \overset{2^{3}}{T} + (\mathbf{F}_{1} \overset{3}{\mathbf{G}}_{0})^{\underline{3}}.$$
(A.2.18)

Gl. (A.2.18) lautet in Gradientendarstellung mit (A.2.4), (A.2.13) - (A.2.15), (A.2.17):

$$\begin{array}{rcl}
\overset{3}{\mathbf{G}} &= & \operatorname{Grad}_{0} \left(\mathbf{F}_{1} \, \mathbf{F}_{0} \right) \\
&= & \left[\left(\operatorname{Grad}_{0} \, \mathbf{F}_{1} \right)^{\frac{23}{T}} \mathbf{F}_{0} \right]^{\frac{2}{2}}^{\frac{23}{T}} + \left(\mathbf{F}_{1} \, \operatorname{Grad}_{0} \, \mathbf{F}_{0} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&= & \left\{ \left[\left(\operatorname{Grad}_{1} \, \mathbf{F}_{1} \right) \, \mathbf{F}_{0} \right]^{\frac{2}{2}}^{\frac{23}{T}} \mathbf{F}_{0} \right\}^{\frac{2}{2}}^{\frac{23}{T}} + \left(\mathbf{F}_{1} \, \operatorname{Grad}_{0} \, \mathbf{F}_{0} \right)^{\frac{3}{2}} \\
& & \text{q.e.d.}. \\
\end{array} \tag{A.2.19}$$

Die Symmetrieeigenschaften von (A.2.13) - (A.2.15) sind offensichtlich. Wegen (A.2.15) sind auch (A.2.18) bzw. (A.2.19) symmetrisch. Die Symmetrie von (A.2.19) kann auch mit Hilfe der Identitäten (A.1.30) und (A.1.33) im Zusammenhang mit $\operatorname{Grad}_{1} \mathbf{F}_{1} = (\operatorname{Grad}_{1} \mathbf{F}_{1})^{\frac{23}{T}}$ und $\operatorname{Grad}_{0} \mathbf{F}_{0} = (\operatorname{Grad}_{0} \mathbf{F}_{0})^{\frac{23}{T}}$ leicht erkannt werden.

A.3 Ableitungen nach Tensoren 2. Stufe

Es seien \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} beliebige, nichtsinguläre Tensoren 2. Stufe. Dann gelten die folgenden Ableitungsvorschriften:

$$\frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{B})}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{I})^{\frac{14}{T}}, \tag{A.3.1}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}^T)^T, \qquad (A.3.2)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I})^{\frac{14}{T}} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}^{T})^{\frac{14}{T}}, \qquad (A.3.3)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{A}^T \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I})^{\frac{13}{T}} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})^{\frac{14}{T}}, \qquad (A.3.4)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I})^T + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})^T, \qquad (A.3.5)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C})}{\partial \mathbf{B}} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}^T)^T, \qquad (A.3.6)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{A}^{-1})}{\partial \mathbf{A}} = -(\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{A}^{T-1})^{\frac{14}{T}}.$$
(A.3.7)

Zusätzlich sind folgende Ableitungsregeln bekannt, vgl. de Boer [1982, Abschnitt 5.6]:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\frac{14}{T}} = \overset{4}{\mathbf{I}}, \qquad (A.3.8)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \,\mathbf{I}}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad = \frac{4}{\mathbf{I}},\tag{A.3.9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{T}}{\partial \mathbf{A}} = \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}\right)^{\frac{13}{T}} = \frac{\frac{4}{\overline{\mathbf{I}}}}{\overline{\mathbf{I}}}.$$
 (A.3.10)

Aus (A.3.1) - (A.3.10) können mit Hilfe der Kettenregel beliebig viele weitere Ableitungen bestimmt werden.

Beispiel: Mit (A.1.4), (A.3.2), (A.3.10) gilt:

$$\frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{B}^{T})}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{B}^{T})}{\partial \mathbf{B}^{T}} \frac{\partial \mathbf{B}^{T}}{\partial \mathbf{B}}
= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}^{T})^{\frac{14}{T}} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\frac{13}{T}}
= (\mathbf{I} \mathbf{I} \otimes \mathbf{A} \mathbf{I})^{\frac{13}{T}}
= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})^{\frac{13}{T}}.$$
(A.3.11)

Anhang B: Gruppen linearer Abbildungen 2. Grades

B.1 Die lineare Gruppe \mathcal{L}

Cross [1973] hat gezeigt, daß die ersten und zweiten Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \operatorname{Grad} \mathbf{x} , \qquad \mathbf{F}^{-1} = \operatorname{grad} \mathbf{X} ,$$

$$\overset{3}{\mathbf{G}} = \operatorname{Grad} \mathbf{F} , \qquad \overset{3}{\mathbf{G}}^{-1} = \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1} , \qquad (B.1.1)$$

$$\overset{3}{\mathbf{G}} = \overset{3}{\mathbf{G}}^{\frac{23}{T}} , \qquad \overset{3}{\mathbf{G}}^{-1} = \overset{3}{\mathbf{G}}^{-1} \overset{23}{T}$$

von Materialien zweiten Grades Elemente einer Gruppe linearer Abbildungen 2. Grades sind.

Die lineare Gruppe \mathcal{L} ist durch die Menge aller möglichen Paare $(\mathbf{H}, \overset{\circ}{\mathbf{C}})$ in der Weise gegeben, daß

$$\mathcal{L} = \{ (\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) \} \quad \text{mit} \quad \overset{3}{\mathbf{C}} = \overset{3}{\mathbf{C}}^{23}_{T}.$$
(B.1.2)

Die in (B.1.2) geforderte Symmetrieeigenschaft kennzeichnet die Menge der eigentlich zweiten Deformationsgradienten (Beispiel: Grad \mathbf{F} , grad \mathbf{F}^{-1} / Gegenbeispiel: grad \mathbf{F} , Grad \mathbf{F}^{-1}). In (B.1.2) wird jedoch nicht allgemein gefordert, daß \mathbf{H} ein Deformationsgradient gemäß (B.1.1)₁ und $\overset{3}{\mathbf{C}}$ der Gradient von \mathbf{H} ist. Vielmehr sollen \mathbf{H} und $\overset{3}{\mathbf{C}}$ lediglich den Charakter erster und zweiter Deformationsgradienten besitzen, so daß alle für die Paare (\mathbf{F} , Grad \mathbf{F}) $\in \mathcal{L}$ und (\mathbf{F}^{-1} , grad \mathbf{F}^{-1}) $\in \mathcal{L}$ geltenden Beziehungen für alle ($\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}$) $\in \mathcal{L}$ gefordert werden. Sind

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}), \quad (\overline{\mathbf{H}}, \overset{3}{\overline{\mathbf{C}}}) \in \mathcal{L}$$
 (B.1.3)

aufeinander folgende Paare der linearen Gruppe - im Sinne aufeinander folgender Deformationsgradienten, vgl. Abschnitt ${\rm A.2}$ -, dann ist

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) \circ (\overline{\mathbf{H}}, \overset{3}{\overline{\mathbf{C}}}) = (\check{\mathbf{H}}, \overset{3}{\check{\mathbf{C}}}) \in \mathcal{L}$$
 (B.1.4)

die die Gruppe \mathcal{L} definierende binäre Operation (Komposition), vgl. Bowen [1976, Abschnitt 2.6]. Mit (A.2.16) - (A.2.18) ist die Komposition (B.1.4) in der Weise definiert, daß

$$\mathbf{H} = \mathbf{H} \mathbf{H},$$

$$\overset{3}{\check{\mathbf{C}}} = [(\overset{3}{\mathbf{C}} \overline{\mathbf{H}})^{\underline{3}} \overset{23}{T} \overline{\mathbf{H}}]^{\underline{3}} \overset{23}{T} + (\mathbf{H} \overline{\mathbf{C}})^{\underline{3}}.$$

$$(B.1.5)$$

In einer einfachen Indexschreibweise lautet $(B.1.5)_2$

$$\check{C}_{ijk} = C_{inp} \,\overline{H}_{nj} \,\overline{H}_{pk} + H_{in} \,\overline{C}_{njk} \,. \tag{B.1.6}$$

Die Definition einer Gruppe verlangt, daß \mathcal{L} bezüglich der Komposition (B.1.4) ein identisches Element

$$(\mathbf{I}, \mathbf{0}) \in \mathcal{L}$$
 (B.1.7)

und ein inverses Element

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}})^{-1} = (\mathbf{H}^{-1}, \overset{3}{\mathbf{C}}^{-1}) \in \mathcal{L}$$
 (B.1.8)

besitzt. Zusätzlich muß in Bezug auf die definierende Komposition (B.1.4) das assoziative Gesetz gelten:

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) \circ [(\overline{\mathbf{H}}, \overset{3}{\mathbf{C}}) \circ (\check{\mathbf{H}}, \overset{3}{\check{\mathbf{C}}})] =$$

$$= [(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) \circ (\overline{\mathbf{H}}, \overset{3}{\overline{\mathbf{C}}})] \circ (\check{\mathbf{H}}, \overset{3}{\check{\mathbf{C}}}).$$
(B.1.9)

Die Beziehung (B.1.9) kann mit (B.1.5) leicht bestätigt werden.

Die Existenz des identischen Elements (B.1.7) beinhaltet, daß, vgl. *Bowen* [1976, Abschnitt 2.6],

$$(\mathbf{I}, \overset{3}{\mathbf{O}}) \circ (\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) = (\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}),$$

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) \circ (\mathbf{I}, \overset{3}{\mathbf{O}}) = (\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}).$$
(B.1.10)

 $\frac{\text{Beweis zu } (B.1.10)_1:}{\text{Mit } (B.1.5)_1 \text{ gilt}}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} \mathbf{H} \qquad \text{q.e.d.} \,. \tag{B.1.11}$$

Mit (A.1.36) und $(B.1.5)_2$ gilt

$$\overset{3}{\mathbf{C}} = [(\overset{3}{\mathbf{0}}\mathbf{H})^{\underline{3}} \overset{23}{T}\mathbf{H}]^{\underline{3}} \overset{23}{T} + (\mathbf{I}\overset{3}{\mathbf{C}})^{\underline{3}} \qquad \text{q.e.d.} .$$
(B.1.12)

Die Existenz des inversen Elements (B.1.8) beinhaltet, daß, vgl. Bowen [1976, Abschnitt 2.6],

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) \circ (\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}})^{-1} = (\mathbf{I}, \overset{3}{\mathbf{0}}), (\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}})^{-1} \circ (\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) = (\mathbf{I}, \overset{3}{\mathbf{0}}).$$
 (B.1.13)

Aus $(B.1.13)_1$ folgt mit der Vorschrift (B.1.5):

$$\mathbf{I} = \mathbf{H} \mathbf{H}^{-1},
\overset{3}{\mathbf{0}} = [(\overset{3}{\mathbf{C}} \mathbf{H}^{-1})^{\underline{3}} \overset{23}{T} \mathbf{H}^{-1}]^{\underline{3}} \overset{23}{T} + (\mathbf{H} \overset{3}{\mathbf{C}}^{-1})^{\underline{3}}.$$
(B.1.14)

Die Beziehung (B.1.14)₂ kann mit (A.1.26) und (A.1.36) nach $\overset{3}{\mathbf{C}}^{-1}$ aufgelöst werden, so daß

$$\overset{3}{\mathbf{C}}^{-1} = -\{\mathbf{H}^{-1} [(\overset{3}{\mathbf{C}} \mathbf{H}^{-1})^{\underline{3}} \overset{23}{T} \mathbf{H}^{-1}]^{\underline{3}} \overset{23}{T}\}^{\underline{3}}$$
(B.1.15)

oder weiter mit (A.1.32)

$$\overset{3}{\mathbf{C}}^{-1} = -\{ [\mathbf{H}^{-1} \, (\overset{3}{\mathbf{C}} \, \mathbf{H}^{-1})^{\underline{3}}]^{\underline{3}} \, \overset{23}{T} \, \mathbf{H}^{-1} \}^{\underline{3}} \, \overset{23}{T}.$$
(B.1.16)

In Indexdarstellung lauten (B.1.15) und (B.1.16)

$$C_{ijk}^{-1} = -H_{in}^{-1} C_{nop} H_{oj}^{-1} H_{pk}^{-1} , \qquad (B.1.17)$$

vgl. Bowen [1976, Gl. (2.6.10)].

Beweis zu (B.1.16): Der Beweis zu (B.1.16) soll am Beispiel der Paare

$$(\mathbf{F}, \operatorname{Grad} \mathbf{F}), \quad (\mathbf{F}^{-1}, \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1}) \in \mathcal{L}$$
 (B.1.18)

erfolgen.

Es gilt

$$\mathbf{I} = \mathbf{F} \, \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \tag{B.1.19}$$

und somit

$$\overset{3}{\mathbf{0}} = \operatorname{grad}\left(\mathbf{F}\,\mathbf{F}^{-1}\right). \tag{B.1.20}$$

Mit Hilfe von (A.2.5) und (A.2.19) folgt aus (B.1.20):

$${}^{3}_{\mathbf{0}} = \{ [(\operatorname{Grad} \mathbf{F}) \, \mathbf{F}^{-1}]^{\underline{3}} {}^{\underline{23}}_{T} \, \mathbf{F}^{-1} \, \}^{\underline{3}} {}^{\underline{23}}_{T} + (\mathbf{F} \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{3}} \,. \tag{B.1.21}$$

Im Vergleich von (B.1.19) und (B.1.21) mit (B.1.14) erkennt man, daß

$$(\mathbf{F}, \operatorname{Grad} \mathbf{F}) \circ (\mathbf{F}^{-1}, \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1}) = (\mathbf{I}, \overset{3}{\mathbf{0}}),$$
 (B.1.22)

d.h. grad ${\bf F}^{-1}$ ist inverses Element zu Grad F. Der Beweis zu (B.1.16) ist geführt, da

grad
$$\mathbf{F}^{-1} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}^{-1}}{\partial \mathbf{F}} \operatorname{grad} \mathbf{F}\right)^{\underline{3}}$$
 (B.1.23)

und daraus mit (A.1.9), (A.2.5) und (A.3.7)

$$\operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}^{-1}}{\partial \mathbf{F}} \operatorname{grad} \mathbf{F}\right)^{\underline{3}}$$

$$= -\left[\left(\mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{F}^{T-1}\right)^{\underline{1}^{4}} \operatorname{grad} \mathbf{F}\right]^{\underline{3}}$$

$$= -\left[\left(\mathbf{F}^{-1} \operatorname{grad} \mathbf{F}\right)^{\underline{3}} \overline{T}^{2} \mathbf{F}^{-1}\right]^{\underline{3}} \overline{T}^{2} \mathbf{F}^{-1}\right]^{\underline{3}} \overline{T}^{2} \mathbf{F}^{-1}\right]^{\underline{3}} \overline{T}^{2}.$$

$$(B.1.24)$$

$$= -\left[\left\{\mathbf{F}^{-1} \left[\left(\operatorname{Grad} \mathbf{F}\right) \mathbf{F}^{-1}\right]^{\underline{3}}\right\}^{\underline{3}} \overline{T}^{2} \mathbf{F}^{-1}\right]^{\underline{3}} \overline{T}^{2}.$$

Die Form von (B.1.24) ist mit derjenigen von (B.1.16) identisch, q.e.d..

B.2 Die eigentlich unimodulare Gruppe \mathcal{U}_e

Die eigentlich unimodulare Gruppe

$$\mathcal{U}_e \in \mathcal{L}$$
 (B.2.1)

ist die Menge aller volumenerhaltenden Paare

$$(\mathbf{H}, \overset{\mathbf{3}}{\mathbf{C}}) \in \mathcal{U}_e \tag{B.2.2}$$

mit den Eigenschaften

det
$$\mathbf{H} = 1$$
,
 $(\mathbf{H}^{T-1} \overset{3}{\mathbf{C}})^{\underline{1}} = \mathbf{0}$.
(B.2.3)

Die Forderung $(B.2.3)_1$ ist offensichtlich, die Forderung $(B.2.3)_2$ kann mit einem speziellen Paar $(\mathbf{F}^{-1}, \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})$, das die Eigenschaft

$$\det \mathbf{F}^{-1} = 1,$$

grad (det \mathbf{F}^{-1}) = 0 (B.2.4)

besitzt, leicht eingesehen werden. Aus (B.2.4) folgt mit der Identität (A.2.9)

$$\mathbf{0} = \operatorname{grad} (\operatorname{det} \mathbf{F}^{-1})$$

= $\operatorname{det} \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}}$ (B.2.5)
= $(\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}}$ q.e.d..

Die Eigenschaften (B.2.4) und (B.2.5) bedingen im Zusammenhang mit der Symmetrieeigenschaft des zweiten Deformationsgradienten, daß

$$(\mathbf{F}^{-1}, \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1}) \in \mathcal{U}_e$$

wenn det $\mathbf{F}^{-1} = 1$ und $(\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} = \mathbf{0}$. (B.2.6)

Das Paar (B.2.6) existiert jedoch nur für inkompressible Einkomponentenmaterialien. Im allgemeinen und speziell in der Mischungstheorie kann die Eigenschaft (B.2.4) jedoch nicht festgestellt werden. Im Sinne einer dem Paar (\mathbf{F} , Grad \mathbf{F}) $\in \mathcal{L}$ vorangehenden Transformation soll daher ein spezielles Paar

$$(\overline{\mathbf{H}}, \frac{3}{\mathbf{C}}) \in \mathcal{U}_e$$
 (B.2.7)

aus

$$(\mathbf{F}^{-1}, \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1}) \in \mathcal{L}$$
 (B.2.8)

hergeleitet werden. Setzt man

$$\mathbf{F} = (\det \mathbf{F})^{1/3} \overline{\mathbf{F}} \quad \text{mit} \quad \det \overline{\mathbf{F}} = 1,$$
 (B.2.9)

so folgt

$$\overline{\mathbf{F}}^{-1} = (\det \mathbf{F})^{1/3} \mathbf{F}^{-1} \quad \text{mit} \quad \det \overline{\mathbf{F}}^{-1} = 1.$$
 (B.2.10)

Definiert man mit

$$\overline{\mathbf{F}}^{-1} = (\det \mathbf{F})^{1/3} \operatorname{grad} \mathbf{X}$$
(B.2.11)

$$= Grad \mathbf{X}$$

einen Operator

$$Grad(...) = (\det \mathbf{F})^{1/3} \operatorname{grad}(...),$$
 (B.2.12)

dann gilt mit (B.2.10)

$$Grad \overline{\mathbf{F}}^{-1} = (\det \mathbf{F})^{1/3} \operatorname{grad} \left[(\det \mathbf{F})^{1/3} \mathbf{F}^{-1} \right]$$
(B.2.13)

und daraus mit der Identität (A.2.9) und den üblichen Rechenregeln

Grad
$$\overline{\mathbf{F}}^{-1} = (\det \mathbf{F})^{2/3} \left[\operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1} - \frac{1}{3} \mathbf{F}^{-1} \otimes (\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} \right].$$
 (B.2.14)

Das Paar $(\overline{\mathbf{F}}^{-1}, \operatorname{Grad} \overline{\mathbf{F}}^{-1})$ besitzt die Eigenschaften (B.2.3). Mit (B.2.10) ist (B.2.3)₁ offensichtlich. Die Kontrolle der Eigenschaften (B.2.3)₂ führt auf

$$(\overline{\mathbf{F}}^{T} Grad \, \overline{\mathbf{F}}^{-1})^{\underline{1}} = (\det \mathbf{F})^{1/3} \left[(\mathbf{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} - \frac{1}{3} \left\{ \mathbf{F}^{T} [\mathbf{F}^{-1} \otimes (\mathbf{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}}] \right\}^{\underline{1}} \right].$$
(B.2.15)

Die Anwendung der Identität (A.1.22) zeigt:

$$(\overline{\mathbf{F}}^{T} Grad \, \overline{\mathbf{F}}^{-1})^{\underline{1}} = (\det \mathbf{F})^{1/3} \left[(\mathbf{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} - \frac{1}{3} (\mathbf{F}^{T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) (\mathbf{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} \right]$$

$$= \mathbf{0} \qquad \text{q.e.d.}.$$
(B.2.16)

Dennoch ist

$$(\overline{\mathbf{F}}^{-1}, \operatorname{Grad} \overline{\mathbf{F}}^{-1}) \notin \mathcal{U}_e,$$
 (B.2.17)

da

$$Grad \,\overline{\mathbf{F}}^{-1} \neq (Grad \,\overline{\mathbf{F}}^{-1})^{\frac{23}{T}}$$
 (B.2.18)

nicht die Gruppe $\mathcal{U}_e \in \mathcal{L}$ definierende Symmetrieeigenschaft besitzt, vgl. (B.1.2) sowie (B.2.14). Daher wird anstelle von (B.2.14) gesetzt:

$$\frac{^{3}}{^{\mathbf{C}}} = (\det \mathbf{F})^{2/3} \{ \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1} - \alpha \left[\mathbf{F}^{-1} \otimes (\mathbf{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} \right]^{-1} - \alpha \left[\mathbf{F}^{-1} \otimes (\mathbf{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} \right]^{23}^{23} \}.$$
(B.2.19)

Im Gegensatz zu $Grad\,\overline{\mathbf{F}}^{-1}$ erfüllt $\frac{3}{\mathbf{C}}$ aus (B.2.19) die Symmetrie
eigenschaft

$$\frac{\overset{3}{\mathbf{C}}}{=} \frac{\overset{3}{\mathbf{C}}^{23}}{\overset{23}{\mathbf{C}}^{T}}.$$
(B.2.20)

Der Parameter α wird so bestimmt, daß das Paar

$$(\overline{\mathbf{H}}, \overline{\mathbf{C}}) \in \mathcal{U}_e \quad \text{mit} \quad \overline{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{F}}^{-1}$$
 (B.2.21)

die Eigenschaft $(B.2.3)_2$ erfüllt, d. h.:

$$\mathbf{0} = (\overline{\mathbf{F}}^T \, \overline{\mathbf{C}})^{\underline{1}}$$

= $(\det \mathbf{F})^{1/3} \left[(\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} - \alpha \left\{ \mathbf{F}^T \left[\mathbf{F}^{-1} \otimes (\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} \right] \right\}^{\underline{1}} - (B.2.22)$
 $- \alpha \left\{ \mathbf{F}^T \left[\mathbf{F}^{-1} \otimes (\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} \right]^{\frac{23}{T}} \right\}^{\underline{1}} \right].$

Daraus folgt mit den Identitäten (A.1.22) und (A.1.23)

$$\mathbf{0} = (\det \mathbf{F})^{1/3} \left[(\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} - \alpha (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}^{-1}) (\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} - \alpha (\mathbf{F}^{T-1} \cdot \mathbf{F}^T) (\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} \right],$$
(B.2.23)

so daß

$$\alpha = \frac{1}{4} \tag{B.2.24}$$

und damit aus (B.2.19)

$$\frac{3}{\mathbf{C}} = (\det \mathbf{F})^{2/3} \left\{ \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1} - \frac{1}{4} \left[\mathbf{F}^{-1} \otimes (\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} \right] - \frac{1}{4} \left[\mathbf{F}^{-1} \otimes (\mathbf{F}^T \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} \right]_T^{23} \right\}$$
(B.2.25)

Somit ist $(\overline{\mathbf{H}}, \overline{\mathbf{C}}) \in \mathcal{U}_e$ mit $\overline{\mathbf{H}}$ gemäß (B.2.21) und $\overline{\mathbf{C}}$ gemäß (B.2.25) eine zulässige Wahl eines Paares der eigentlich unimodularen Gruppe \mathcal{U}_e .

Durch Ausnutzung von (A.2.9) kann $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ aus (B.2.25) leicht in *Bowen* [1976, Gl. (2.6.15)] überführt werden. Es gilt

$$(\mathbf{F}^{T} \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1})^{\underline{1}} = \det \mathbf{F} \operatorname{grad} (\det \mathbf{F}^{-1})$$

= $-(\det \mathbf{F})^{-1} \operatorname{grad} (\det \mathbf{F})$ (B.2.26)

und damit:

$$\frac{{}^{3}}{\overline{\mathbf{C}}} = (\det \mathbf{F})^{2/3} \operatorname{grad} \mathbf{F}^{-1} + \frac{1}{4} (\det \mathbf{F})^{-1/3} \mathbf{F}^{-1} \otimes \operatorname{grad} (\det \mathbf{F}) + \frac{1}{4} (\det \mathbf{F})^{-1/3} [\mathbf{F}^{-1} \otimes \operatorname{grad} (\det \mathbf{F})]^{\frac{23}{T}}, \quad \text{q.e.d.} .$$

$$(B.2.27)$$

B.3 Die eigentlich orthogonale Gruppe \mathcal{O}_e

Die eigentlich orthogonale Gruppe

$$\mathcal{O}_e \in \mathcal{U}_e \in \mathcal{L} \tag{B.3.1}$$

ist die Menge aller das innere Produkt zweiten Grades erhaltenden Abbildungen (*second-grade inner-produkt preserving*, vgl. Cross [1973, Abschnitt 4.2])

9

$$(\mathbf{H}, \mathbf{C}) \in \mathcal{O}_e \tag{B.3.2}$$

mit der Eigenschaft

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}})^{T} = (\mathbf{H}^{T}, \overset{3}{\mathbf{C}}^{23})$$

= $(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}})^{-1} = (\mathbf{H}^{-1}, \overset{3}{\mathbf{C}}^{-1}).$ (B.3.3)

Die Eigenschaften (B.3.3) beinhalten, daß das jeweilige transponierte Element gleichzeitig inverses Element ist. Demzufolge ist gemäß $(B.1.13)_1$

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{C}}) \circ (\mathbf{H}^{T}, \overset{3}{\mathbf{C}}^{23}) = (\mathbf{I}, \overset{3}{\mathbf{0}})$$
(B.3.4)

und daraus mit (B.1.14)

$$\mathbf{I} = \mathbf{H} \mathbf{H}^{T},
\overset{3}{\mathbf{0}} = [(\overset{3}{\mathbf{C}} \mathbf{H}^{T})^{\underline{3}} \overset{23}{T} \mathbf{H}^{T}]^{\underline{3}} \overset{23}{T} + (\mathbf{H} \overset{3}{\mathbf{C}} \overset{23}{T})^{\underline{3}},
(B.3.5)$$

so daß mit (A.1.32) und (A.1.33)

$$\overset{3}{\mathbf{C}} = -\{ [\mathbf{H}^{T} (\overset{3}{\mathbf{C}} \mathbf{H}^{T})^{\underline{3}}]^{\underline{3}} \overset{2^{3}}{T} \mathbf{H}^{T} \}^{\underline{3}}.$$
(B.3.6)

(B.3.6) kann jedoch nur für

$$\overset{3}{\mathbf{C}} = \overset{3}{\mathbf{0}} \tag{B.3.7}$$

erfüllt werden, so daß die orthogonale Gruppe nur Elemente

$$(\mathbf{H}, \overset{3}{\mathbf{0}}) \in \mathcal{O}_e \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^T$$
 (B.3.8)

enthält.

Die Beziehung (B.3.7) kann auch direkt aus der Symmetrieeigenschaft ($\overset{3}{\mathbf{C}} = \overset{3}{\mathbf{C}}^{23}$) geschlossen werden, da

$${}^{3}\mathbf{C}^{-1} = {}^{3}\mathbf{C}^{23} = {}^{3}\mathbf{C}$$
 (B.3.9)

nur für $\overset{3}{\mathbf{C}} = \overset{3}{\mathbf{0}}$ möglich ist.

Im Sinne einer dem Paar $(\mathbf{F}, \operatorname{Grad} \mathbf{F}) \in \mathcal{L}$ vorangehenden Transformation stellt das Paar

$$(\overline{\mathbf{H}}, \overset{3}{\mathbf{0}}) = (\mathbf{R}^T, \overset{3}{\mathbf{0}}) \in \mathcal{O}_e \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R}$$
 (B.3.10)

eine zulässige Wahl dar.

Anhang C: Tabellen



Tafel C.1: Greensche und Almansische Verzerrungstensoren von $\varphi^S.$



Tafel C.2: Karni-Reiner-Verzerrungstensoren von φ^S .
$$(\dots)^{\Delta} = (\dots)'_{S} + \mathbf{L}_{S}^{T} (\dots) + (\dots) \mathbf{L}_{S}$$
$$(\widehat{\dots})^{\Delta}_{p} = (\widehat{\dots})'_{S} + \widehat{\mathbf{L}}_{Sp}^{T} (\widehat{\dots}) + (\widehat{\dots}) \widehat{\mathbf{L}}_{Sp}$$



Tafel C.3: Greensche und Almansische Verzerrungsgeschwindigkeiten von φ^S .

$$(\dots)^{\nabla} = (\dots)'_{S} - \mathbf{L}_{S} \ (\dots) - (\dots) \mathbf{L}_{S}^{T}$$
$$(\widehat{\dots})^{\nabla}_{p} = (\widehat{\dots})'_{S} - \widehat{\mathbf{L}}_{Sp} (\widehat{\dots}) - (\widehat{\dots}) \widehat{\mathbf{L}}_{Sp}^{T}$$



Tafel C.4: Karni-Reiner-Verzerrungsgeschwindigkeiten von φ^S .



Tafel C.5: Transportverhalten der Spannungstensoren und Translationstensoren von φ^S sowie deren Geschwindigkeiten.



Tafel C.6: Transportverhalten der Stoffbeziehungen für die Kirchhoffschen Extraspannungen und Translationstensoren von φ^S .



Tafel C.7: Konstitutive Gleichungen (vereinfachtes konstitutives Modell) für die Kirchhoffschen Extraspannungen von φ^S und deren Geschwindigkeiten.



Tafel C.8: Transportverhalten der elastischen Tangenten von φ^S (vereinfachtes konstitutives Modell).

Literatur

- Adkins, J. E.: Non-linear diffusion, I. Diffusion and flow of mixtures of fluids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* **255** (1963a), 607 633.
- Adkins, J. E.: Non-linear diffusion, II. Constitutive equations for mixtures of isotropic fluids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* **255** (1963b), 635 648.
- Adkins, J. E.: Diffusion of fluids through aelotropic highly elastic solids. Archive for Rational Mechanics and Analysis 15 (1964a), 222 – 234.
- Adkins, J. E.: Non-linear diffusion, III. diffusion through isotropic highly elastic solids.
 Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A 256 (1964b), 301 316.
- Argyris, J. H. & Kleiber, M.: Incremental Formulation in Nonlinear Mechanics and Large Strain Elasto-Plasticity — Natural Approach. Part I. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 11 (1977), 215 – 247.
- Armstrong, P. J. & Frederick, C. O.: A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect. Report RD/B/N 731, CEGB 1966.
- Atkin, R. J.: Constitutive theory for a mixture of an isotropic elastic solid and a non-Newtonian fluid. Zeitschrift f
 ür Angewandte Mathematik und Mechanik 18 (1967), 803 825.
- Atkin, R. J. & Craine, R. E.: Continuum theories of mixtures: Applications. IMA Journal of Applied Mathematics 17 (1976a), 153 207.
- Atkin, R. J. & Craine, R. E.: Continuum theories of mixtures: Basic theory and historical development. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics 29 (1976b), 209 – 244.
- Bedford, A. & Drumheller, D. S.: Recent advances: Theories of immiscible and structured mixtures. International Journal of Engineering Sciences **21** (1983), 863 960.
- Berg, C. A.: Plastic dilation and void interaction. In *Inelastic Behaviour of Solids*, Batelle Institute Materials Science Colloquia 1969, McGraw-Hill, New York 1970.
- Bernstein, B.: Hypo-elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis 6 (1960), 89 104.
- Biot, M. A.: Le problème de la consolidation des matières argileuses sous une charge. Annales de la Société scientifique de Bruxelles, série B 55 (1935), 110 – 113.
- Biot, M. A.: General theory of three-dimensional consolidation. Journal of Applied Physics **12** (1941), 155 164.

- Biot, M. A.: Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. Journal of Applied Physics 26 (1955), 182 185.
- Biot, M. A.: General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. Journal of Applied Mechanics 23 (1956a), 91 96.
- Biot, M. A.: Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I. Low frequency range. Journal of the Acoustical Society of America 28 (1956b), 168 – 178.
- Bluhm, J. & Ehlers, W.: Zur endlichen Elastizität von Stäben ein Vergleich verschiedener FEM-Modelle. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik **69** (1989), T239 – T240.
- de Boer: On plastic deformations of soils. International Journal of Plasticity 4 (1988a), 371 391.
- de Boer, R.: Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1982.
- de Boer, R.: Constitutive Equations for Granular and Brittle Materials in Plastic Range — A Kinematic Hardening Model. Report MECH 88/6, FB 10/Mechanik, Universität-GH-Essen 1988b.
- de Boer, R. & Ehlers, W.: Grundlagen der isothermen Plastitzitäts- und Viskoplastizitätstheorie. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen Heft 14, Universität-GH-Essen 1980.
- de Boer, R. & Ehlers, W.: On the problem of fluid- and gas-filled elasto-plastic solids. International Journal of Solids and Structures **22** (1986a), 1231 – 1242.
- de Boer, R. & Ehlers, W.: Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendungen auf bodenmechanische Probleme. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen Heft 40, Universität-GH-Essen 1986b.
- de Boer, R. & Ehlers, W.: Auftrieb und Reibung in flüssigkeitsgefüllten porösen Körpern – eine Klarstellung. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik **68** (1988a), 567 – 572.
- de Boer, R. & Ehlers, W.: A Historical Review of the Formulation of Porous Media Theories. Acta Mechanica **74** (1988b), 1 – 8.
- de Boer, R. & Ehlers, W.: Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme, Teil II (1990), nicht veröffentlicht.
- de Boer, R.; Ehlers, W.; Kowalski, S. J. & Plischka, J.: Porous Media A Survey of Different Approaches. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen Heft 54, Universität-GH-Essen 1991.

- de Boer, R. & Kowalski, S. J.: A plasticity theory for fluid-saturated porous solids. International Journal of Engineering Sciences 21 (1983), 1343 – 1357.
- de Boer, R. & Kowalski, S. J.: Extremum principles in the theory of plasticity for fluid saturated porous media. Ingenieur-Archiv 55 (1985), 134 146.
- Bowen, R. M.: Toward a thermodynamics and mechanics of mixtures. Archive for Rational Mechanics and Analysis 24 (1967), 370 403.
- Bowen, R. M.: On the stoichiometry of chemically reacting materials. Archive for Rational Mechanics and Analysis **29** (1968a), 114 124.
- Bowen, R. M.: Thermochemistry of reacting materials. Journal of Chemical Physics 49 (1968b), 1625 1637.
- Bowen, R. M.: Acceleration and higher order waves in a mixture of chemically reacting elastic materials. Archive for Rational Mechanics and Analysis **33** (1969a), 169 180.
- Bowen, R. M.: The thermochemistry of a reacting mixture of elastic materials with diffusion. Archive for Rational Mechanics and Analysis **34** (1969b), 97 127.
- Bowen, R. M.: Thermochemistry of reacting materials. Journal of Chemical Physics 50 (1969c), 4601 4602.
- Bowen, R. M.: Theory of mixtures. In Eringen, A. C. (Hrsg.): Continuum Physics. Academic Press, New York-San Fransisco-London 1976, Band III, S. 1–127.
- Bowen, R. M.: Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. International Journal of Engineering Science 18 (1980), 1129 – 1148.
- Bowen, R. M.: Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. International Journal of Engineering Science 20 (1982), 697 – 735.
- Bowen, R. M.: Diffusion models implied by the theory of mixtures. In *Truesdell, C.* (Hrsg.): *Rational Thermodynamics.* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo 1984, 2. Auflage.
- Bowen, R. M. & Chen, P. J.: On the effects of diffusion and chemical reactions on the growth and decay of acceleration waves. Archive for Rational Mechanics and Analysis 48 (1972), 319 – 351.
- Bowen, R. M. & Garcia, D. J.: On the thermodynamics of mixtures with several temperatures. International Journal of Engineering Science 8 (1970), 63 83.
- Bowen, R. M. & Wiese, J. C.: Diffusion in mixtures of elastic materials. International Journal of Engineering Science 7 (1969), 689 722.
- Brauns, W.: Plastische Deformationen von granularen Stoffen. Dissertation, Universität-GH-Essen, Essen (1989).

- Caroll, M. M. & Holt, A. C.: Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials. Journal of Applied Physics 43 (1972a), 1626 1636.
- Caroll, M. M. & Holt, A. C.: Suggested modifications of the $p \alpha$ modell for porous materials. Journal of Applied Physics 43 (1972b), 759 761.
- Coleman, B. D. & Mizel, V. J.: Existence of caloric equations of state. Journal of Chemical Physics 40 (1964), 1116 1125.
- Coleman, B. D. & Noll, W.: The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. Archive for Rational Mechanics and Analysis 13 (1963), 167–178.
- Cosserat, E. & Cosserat, F.: Sur la mécanique générale. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris) 145 (1907), 1139 – 1142.
- Cosserat, E. & Cosserat, F.: Théorie des Corps Déformables. A. Hermann & Fils, Paris 1909.
- Craine, R. E.: Oscillations of a plate in a binary mixture of incompressible Newtonian fluids. International Journal of Engineering Science 9 (1971), 1177 1192.
- Craine, R. E.; Green, A. E. & Naghdi, P. M.: A mixture of viscous elastic materials with different constituent temperatures. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics 23 (1970), 171 – 184.
- Cross, J. J.: Mixtures of fluids and isotropic solids. Archive of Mechanics 25 (1973), 1025 1039.
- Dafalias, Y. F.: Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations. Journal of Applied Mechanics 50 (1983), 561 – 565.
- Darcy, H.: Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Dalmont, Paris 1856.
- Delesse, M.: Pour déterminer la composition des roches. Annales des mines, 4. séries 13 (1848), 379 388.
- Doria, M. L. & Bowen, R. M.: Growth and decay of curved acceleration waves in chemically reacting fluids. *Physics of Fluids* **13** (1970), 867 876.
- Doyle, T. C. & Ericksen, J. L.: Nonlinear Elasticity, Advances in Applied Mechanics IV. Academic Press, New York 1956.
- Dresenkamp, H.-T.: Stoffgleichung für spröde und granulare Stoffe im Bruchzustand. Dissertation, Universität-GH-Essen, Essen (1987).
- Drucker, D. C. & Prager, W.: Soil mechanics and plastic analysis of limit design. *Quarterly* of Applied Mathematics **10** (1952), 157 165.
- Drumheller, D. S.: The theoretical treatment of a porous solid using a mixture theory. International Journal of Solids and Structures 14 (1978), 441 – 456.

- Drumheller, D. S.: A theory for dynamic compaction of wet porous solids. International Journal of Solids and Structures 23 (1987), 211 237.
- Dunwoody, N. T.: A thermodynamical theory of diffusion in solid-fluid mixtures. Archive for Rational Mechanics and Analysis **38** (1970), 348 371.
- Dunwoody, N. T. & Müller, I.: A thermodynamic theory of two chemically reacting ideal gases with different temperatures. Archive for Rational Mechanics and Analysis **29** (1968), 344 369.
- Eckart, C.: The thermodynamics of irreversible processes. *Physical Review* 58 (1940), 267 269, 269 275, 919.
- Ehlers, W.: Zur inkrementellen Beschreibung elastisch-plastischer Körper innerhalb der Theorie kleiner Verzerrungen und großer Rotationen. Dissertation, Universtät-GH-Essen, Essen (1983).
- Ehlers, W.: Zur Entwicklung konstitutiver Gleichungen für poröse Medien. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 68 (1988), T170 T171.
- Ehlers, W.: Ein Elastizitätsgesetz für poröse Medien. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 69 (1989a), T472 – T474.
- Ehlers, W.: On thermodynamics of elasto-plastic porous media. Archives of Mechanics **41** (1989b), 73–93.
- Ehlers, W.: Poröse Medien ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie. Habilitation, Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 47, Universität-GH-Essen 1989c.
- *Eibl, J. & Iványi, G.*: Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton. *Deutscher Ausschuß für Stahlbeton* **260** (1976).
- Ergun, M. U.: Evaluation of three-dimensional shear testing. In Proceedings of the 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Stockholm 1981, Nr. 1, S. 593 – 596.
- Eringen, A. C. & Ingram, J. D.: A continuum theory of chemically reacting media. International Journal of Engineering Science **3** (1965), 197 – 212.
- Euler, L.: Briefe an eine Prinzessin in Deutschland über verschiedene Gegenstände aus der Physik und der Philosophie, erster Theil. bey Johann Friedrich Junius, Leipzig 1769.
- Fick, A.: Ueber Diffusion. Annalen der Physik und Chemie 94 (1855), 59 86.
- Fillunger, P.: Der Auftrieb in Talsperren. Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst (1913), 532 – 556, 567 – 570.
- Fillunger, P.: Neuere Grundlagen für die statische Berechnung von Talsperren. Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins (1914), 441 447.

- Fillunger, P.: Auftrieb und Unterdruck in Talsperren. Die Wasserwirtschaft **22** (1929), 334 336, 371 377.
- Fillunger, P.: Zur Frage des Auftriebs in Talsperren. Die Wasserwirtschaft **23** (1930), 63 66.
- Fillunger, P.: Das Delesse'sche Gesetz. Monatsheft für Mathematik und Physik **42** (1935), 87 96.
- Fillunger, P.: Erdbaumechanik? Selbstverlag des Verfassers, Wien 1936.
- Forchheimer, P.: Wasserbewegung durch Boden. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 45 (1901), 1736 – 1788.
- Gadala, M. S.; Mullins, M. L. & Dokainish, M. A.: A modified plasticity theory for porous metals. International Journal for Numerical Methods in Engineering 15 (1980), 1129–1148.
- Gassmann, F.: Uber die Elastizität poröser Medien. Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich **96** (1951), 1 – 23.
- Gibbs, J. W.: The Collected Works of J. Willard Gibbs, Band 1: Thermodynamics. Yale University Press, New Haven 1928.
- Goodman, M. A. & Cowin, S. C.: A continuum theory for granular materials. Archive for Rational Mechanics and Analysis 44 (1972), 249 – 266.
- Green, A. E. & Adkins, J. E.: A contribution to the theory of non-linear diffusion. Archive for Rational Mechanics and Analysis 15 (1964), 235 – 246.
- Green, A. E. & Naghdi, P. M.: A dynamical theory of interacting continua. International Journal of Engineering Science **3** (1965a), 231 241.
- Green, A. E. & Naghdi, P. M.: A general theory of an elastic-plastic continuum. Archive for Rational Mechanics and Analysis 18 (1965b), 251 – 281.
- Green, A. E. & Naghdi, P. M.: A thermodynamic development of elastic-plastic continua. In Proceedings of the IUTAM Symposium on Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1966, S. 117 – 131.
- Green, A. E. & Naghdi, P. M.: Remarks on a paper by R. M. Bowen. Archive for Rational Mechanics and Analysis 27 (1967a), 175 – 180.
- Green, A. E. & Naghdi, P. M.: A theory of mixtures. Archive for Rational Mechanics and Analysis 24 (1967b), 243 – 263.
- Green, A. E. & Naghdi, P. M.: On basic equations for mixtures. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics **22** (1969), 427 – 438.

- Green, A. E. & Naghdi, P. M.: The flow of fluid through an elastic solid. Acta Mechanica **9** (1970), 329 340.
- Green, A. E. & Steel, T. R.: Constitutive equations for interacting continua. International Journal of Engineering Science 4 (1966), 483 500.
- Green, R. J.: A plasticity theory for porous solids. International Journal of Mechanical Sciences 14 (1972), 215 224.
- Gruttmann, F. & Stein, E.: Tangentiale Steifigkeitsmatrizen bei Anwendung von Projektionsverfahren in der Elastoplastizitätstheorie. Ingenieur-Archiv 58 (1988), 15 – 24.
- Gudehus, G.: Elastoplastische Stoffgleichungen für trockenen Sand. Ingenieur-Archiv 42 (1973), 151 169.
- Hamel, G.: Über Grundwasserströmung. Zeitschrift fr angewandte Mathematik und Mechanik 14 (1934), 120 – 157.
- Haupt, P.: Incremental representation of viscoelastic-plastic materials. *Ingenieur-Archiv* **53** (1983), 1 12.
- Haupt, P.: On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of viscoelastic-plastic material behavior. *International Journal of Plasticity* 1 (1985), 303 – 316.
- Heinrich, G.: Wissenschaftliche Grundlagen der Theorie der Setzung von Tonschichten. Wasserkraft und Wasserwirtschaft **33** (1938), 5 – 10.
- Heinrich, G. & Desoyer, K.: Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen. Ingenieur-Archiv **23** (1955), 73 – 84.
- Heinrich, G. & Desoyer, K.: Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen, II. Mitteilung. Ingenieur-Archiv 24 (1956), 81 – 84.
- Heinrich, G. & Desoyer, K.: Praktische Methoden zur Lösung von Problemen der stationären und instationären Grundwasserströmungen. Ingenieur-Archiv **26** (1958), 30 – 42.
- Heinrich, G. & Desoyer, K.: Theorie dreidimensionaler Setzungsvorgänge in Tonschichten. Ingenieur-Archiv **30** (1961), 225 – 253.
- Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 6 (1958), 236 249.
- Hoffman, O.: Zur Frage des Auftriebs in Talsperren. Die Wasserwirtschaft **22** (1929), 562 566.

- Jaumann, G.: Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differerentialgesetze. Sitzungsbericht Akademie der Wissenschaften (Wien), mathematischnaturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa **120** (1911), 385 – 530.
- Kelly, P. D.: A reacting continuum. International Journal of Engineering Science 2 (1964), 129 – 153.
- Kenyon, D. E.: The theory of an incompressible solid-fluid mixture. Archive for Rational Mechanics and Analysis 62 (1976a), 131 147.
- Kenyon, D. E.: Thermostatic of solid-fluid mixtures. Archive for Rational Mechanics and Analysis 62 (1976b), 117 129.
- Kleiber, M.: Kinematics of deformation processes in materials subjected to finite elasticplastic strains. International Journal of Engineering Sciences 13 (1975), 513 – 525.
- Kleiber, M.: A note on finite strain theory of elasto-plasticity. Acta Mechanica 50 (1984), 291 297.
- Klesse, C.: Untersuchung über den stationären Zufluß zu einem vollkommenen Brunnen. Diplomarbeit, Universität-GH-Essen, Fachberich Bauwesen, Fachgebiet Mechanik (1987).
- Kojić, M. & Cheatham, J. B.: Analysis of the influence of fluid flow on the plasticity of porous rock under an axially symmetric punch. Society of Petroleum Engineers Journal 14 (1974a), 271 – 278.
- Kojić, M. & Cheatham, J. B.: Theory of plasticity of porous media with fluid flow. Society of Petroleum Engineers Journal 14 (1974b), 263 270.
- Kubik, J.: A macroscopic description of geometrical pore structure of porous solids. International Journal of Engineering Sciences 24 (1986a), 971 – 980.
- Kubik, J.: On internal coupling in dynamic equations of fluid-saturated porous solids. International Journal of Engineering Sciences 24 (1986b), 981 – 989.
- Lade, P. V.: Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces. International Journal of Solids and Structures 13 (1977), 1019 1035.
- Lade, P. V.: Three parameter failure criterion for concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division 108 (1982), 850 – 863.
- Lade, P. V. & Duncan, J. M.: Cubical triaxial tests on cohesionless soil. Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE 99 (1973), 793 812.
- Lee, E. H.: Elastic-plastic deformation at finite strains. Journal of Applied Mechanics 36 (1969), 1 6.
- Lee, E. H.: Some comments on elastic-plastic analysis. International Journal of Solids and Structures 17 (1981), 859 872.

- Lee, E. H.; Mallet, R. L. & Wertheimer, T. B.: Stress analysis for anisotropic hardening in finite-deformation plasticity. Journal of Applied Mechanics 50 (1983), 554 – 560.
- Lee, E. H. & McMeeking, R. M.: Concerning elastic and plastic components of deformation. International Journal of Solids and Structures 16 (1980), 715 – 721.
- Lehmann, T.: Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elasto-plastische Formänderungen. Ingenieur-Archiv 41 (1972), 297 310.
- Liu, I.-S.: Method of Lagrangen multipliers for the exploitation of the entropy principle. Archive for Rational Mechanics and Analysis 46 (1972), 131 – 148.
- Liu, I.-S. & Müller, I.: Thermodynamics of mixtures of fluids. In *Truesdell*, C. (Hrsg.): *Rational Thermodynamics*. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo 1984, 2. Auflage.
- Lubarda, V. A. & Lee, E. H.: A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance. Journal of Applied Mechanics 48 (1981), 35 40.
- Macvean, D. B.: Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannung- und Verzerrungstensoren. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik **19** (1968), 157 – 185.
- Marotzke, C.: Bewertung von Stoffgesetzten für Elastomere anhand von Versuchen und numerischer Untersuchungen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 65 (1985), 388 – 390.
- Marsden, J. E. & Hughes, T. J. R.: Mathematical Foundation of Elasticity. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1983.
- Maxwell, J. C.: On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions of the Royal* Society of London Series A **157** (1866), 49 – 88.
- Maxwell, J. C.: On the dynamical theory of gases. *Philosophical Magazine*, Series 4 35 (1868), 129–145, 185–217.
- Meixner, J.: Zur Thermodynamik der Thermodiffusion. Annalen der Physik **39** (1941), 333 356.
- Meixner, J.: Zur Thermodynamik der irreversiblen Prozesse in Gasen mit chemisch reagierenden, dissoziierenden und anregenden Komponenten. Annalen der Physik **43** (1943), 244 – 270.
- Melan, E.: Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums. Ingenieur-Archiv 9 (1938), 116–126.
- Mielniczuk, J.: Zum ebenen Fließen der porigen Metalle. Ingenieur-Archiv **52** (1982), 221 228.

- Mills, L. L. & Zimmermann, R. M.: Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions. Journal of the American Concrete Institute **67** (1970), 527 – 535.
- Mills, N.: Incompressible mixture of Newtonian fluids. International Journal of Engineering Science 4 (1966), 97 – 112.
- Mills, N.: On a theory of multi-component mixtures. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics **20** (1967), 449 508.
- von Mises, R.: Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen zustand. Göttinger Nachrichten, mathematisch-physikalische Klasse (1913), 582 – 592.
- von Mises, R.: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 8 (1928), 161 185.
- Mooney, M.: A theory of large elastic deformation. Journal of Applied Physics 11 (1940), 582 592.
- Morland, L. W.: A simple constitutive theory for a fluid-saturated porous solid. Journal of Geophysical Research 77 (1972), 890 900.
- Mróz, M.; Shrivastava, H. P. & Dubey, R. N.: A non-linear hardening model and its application to cyclic loading. Acta Mechanica 25 (1976), 51 61.
- Müller, I.: On the entropy inequality. Archive for Rational Mechanics and Analysis 26 (1967), 118 141.
- Müller, I.: A thermodynamic theory of mixtures of fluids. Archive for Rational Mechanics and Analysis 28 (1968), 1 – 39.
- Murnaghan, F. D.: Finite Deformation of an Elastic Solid. Dover Publications, New York 1951.
- Nemet-Nasser, S.: Decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elastoplasticity. International Journal of Solids and Structures 15 (1979), 155 166.
- Nemet-Nasser, S.: On finite deformation elasto-plasticity. International Journal of Solids and Structures 18 (1982), 857 – 872.
- Noll, W.: On the continuity of the solid and fluid states. Journal of Rational Mechanics and Analysis 4 (1955), 3 – 81.
- Noll, W.: A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. Archives for Rational Mechanics and Analysis 2 (1958), 197 226.
- Ottosen, N. S.: A failure criterion for concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division 103 (1977), 527 535.

- Passman, S. L.; Nunziato, J. W. & Walsh, E. K.: A theory of multiphasic mixtures. In Truesdell, C. (Hrsg.): Rational Thermodynamics. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo 1984, 2. Auflage.
- Paulun, J.: Plastische Inkompressibilität bei großen Formänderungen. Acta Mechanica **37** (1980), 43 51.
- Prager, W.: The theory of plasticity: A survey of recent achievements. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 169 (1955), 41 57.
- Prager, W.: A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids. Journal of Applied Mechanics 23 (1956), 493 – 496.
- Raats, P. A. C.: Forces acting upon the solid phase of a porous medium. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik **19** (1968), 606 613.
- Raats, P. A. C.: Application of the theory of mixtures in soil physics. In Truesdell, C. (Hrsg.): Rational Thermodynamics. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo 1984, 2. Auflage.
- Rivlin, R. S.: Large elastic deformations of isotropic materials. *Philosophical Transactions* of the Royal Society of London Series A **241** (1948), 379 397.
- Rivlin, R. S. & Saunders, D. W.: Large elastic deformations of isotropic materials, VII. Experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transactions of the Royal* Society of London Series A 243 (1951), 251 – 288.
- Schulte, K.: Wasserbewegung in ungesättigten feinkörnigen Böden. In Nendza, H. (Hrsg.): Mitteilungen aus dem Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik. Universität-GH-Essen 1988, Heft 13.
- Shield, R. T. & Ziegler, H.: On Prager's hardening rule. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 9 (1958), 260 – 276.
- Shima, S. & Oyane, M.: Plasticity theory for porous metals. International Journal of Mechanical Sciences 18 (1976), 285 – 291.
- Simo, J. C. & Ortiz, M.: A unified approach to finite deformation analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 49 (1985), 221 – 245.
- Simo, J. C. & Pister, K. S.: Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: Computational implications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 46 (1984), 201 – 215.
- Simo, J. C. & Taylor, R. L.: Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 48 (1985), 101 – 118.

- Stefan, J.: Uber das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen. Sitzungsbericht Akademie der Wissenschaften (Wien), mathematischnaturwissenschaftliche Klasse, Abteilung II 63 (1871), 63 – 124.
- von Terzaghi, K.: Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen. Sitzungsbericht Akademie der Wissenschaften (Wien), mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa **132** (1923), 125 – 138.
- von Terzaghi, K.: Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage. Franz Deuticke, Leipzig-Wien 1925.
- von Terzaghi, K. & Fröhlich, O. K.: Theorie der Setzung von Tonschichten. Franz Deuticke, Leipzig-Wien 1936, 1 Auflage.
- von Terzaghi, K. & Fröhlich, O. K.: Erdbaumechanik und Baupraxis: Eine Klarstellung. Franz Deuticke, Leipzig-Wien 1937.
- von Terzaghi, K. & Peck, R. B.: Die Bodenmechanik in der Baupraxis. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.
- von Terzaghi, K. & Rendulic, L.: Die wirksame Flächeporosität des Betons. Zeitschrift des Österrichischen Ingenieur- und Architektenvereins (1934), 1 – 9.
- Truesdell, C.: A New Definition of a Fluid, II. The Maxwellian Fluid. Tech. Bericht P-3553, §19, US Naval Research Laboratory 1949.
- Truesdell, C.: Corrections and additions to "The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics". Journal of Rational Mechanics and Analysis 2 (1953), 593 616.
- Truesdell, C.: Sulle basi della termomeccanica. Rendiconti Lincei (8) 22 (1957), 33 38, 158 166.
- Truesdell, C.: Sulle basi della termodinamica delle miscele. *Rendiconti Lincei (8)* 44 (1968), 381 383.
- Truesdell, C.: Rational Thermodynamics. McGraw-Hill, New York 1969.
- Truesdell, C.: Rational Thermodynamics. Springer-Verlag, New York 1984, 2. Auflage.
- Truesdell, C. & Noll, W.: The nonlinear field theories of mechanics. In Flügge, S. (Hrsg.): Handbuch der Physik. Springer-Verlag, Berlin 1965, Band III/3.
- Truesdell, C. & Toupin, R. A.: The classical field theories. In Flügge, S. (Hrsg.): Handbuch der Physik III/1. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960, Band III/1, S. 226 – 902.
- Tsakmakis, C.: Über inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung großer inelastischer Deformationen. In *VDI-Fortschrittberichte*. VDI Verlag, Düsseldorf 1987, Nr. 36 in Reihe 18.

- Vaid, Y. P. & Campanella, R. G.: Triaxial and plain strain behaviour of natural clay. Journal of the Geotechnical Engineering Division 100 (1974), 207 – 224.
- Wang, C.-C.: Inhomogeneities in second-grade fluid bodies and isotropic solid bodies. Archive of Mechanics 25 (1973), 765 – 780.
- Wang, C.-C. & Truesdell, C.: Introduction to Rational Elasticity. Noordhoff International Publishing, Leyden 1973.
- Willam, K. J. & Warnke, E. P.: Constitutive models for triaxial behaviour of concrete. Proceedings of the International Association for Bridge and Structural Engineering 19 (1975), 1 – 30.
- Winselmann, D.: Stoffgesetze mit isotroper und kinematischer Verfestigung sowie deren Anwendung auf Sand. Bericht aus dem Institut für Statik Nr. 84–44, TU Braunschweig 1984.
- Yong, R. N. & McKyes, E.: Yield and failure under triaxial stresses. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE 97 (1971), 159 – 176.
- Ziegler, H.: A modification of Prager's hardening rule. *Quarterly of Applied Mathematics* 17 (1959), 55 – 65.

Bisher in dieser Reihe erschienen:

- II-1 Gernot Eipper: Theorie und Numerik finiter elastischer Deformationen in fluidgesättigten porösen Festkörpern, June 1998.
- II-2 Wolfram Volk: Untersuchung des Lokalisierungsverhaltens mikropolarer poröser Medien mit Hilfe der Cosserat-Theorie, May 1999.
- II-3 Peter Ellsiepen: Zeit- und ortsadaptive Verfahren angewandt auf Mehrphasenprobleme poröser Medien, July 1999.
- II-4 Stefan Diebels: Mikropolare Zweiphasenmodelle: Formulierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien, March 2000.
- II-5 Dirk Mahnkopf: Lokalisierung fluidgesättigter poröser Festkörper bei finiten elastoplastischen Deformationen, March 2000.
- II-6 Heiner Müllerschön: Spannungs-Verformungsverhalten granularer Materialien am Beispiel von Berliner Sand, August 2000.
- II-7 Stefan Diebels (Ed.): Zur Beschreibung komplexen Materialverhaltens: Beiträge anläßlich des 50. Geburtstages von Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers, August 2001.
- II-8 Jack Widjajakusuma: Quantitative Prediction of Effective Material Parameters of Heterogeneous Materials, June 2002.
- II-9 Alexander Droste: Beschreibung und Anwendung eines elastisch-plastischen Materialmodells mit Schädigung für hochporöse Metallschäume, October 2002.
- II-10 Peter Blome: Ein Mehrphasen-Stoffmodell f
 ür Böden mit Übergang auf Interface-Gesetze, October 2003.
- II-11 Martin Ammann: Parallel Finite Element Simulations of Localization Phenomena in Porous Media, April 2005.
- II-12 Bernd Markert: Porous Media Viscoelasticity with Application to Polymeric Foams, July 2005.
- II-13 Saeed Reza Ghadiani: A Multiphasic Continuum Mechanical Model for Design Investigations of an Effusion-Cooled Rocket Thrust Chamber, September 2005.
- II-14 Wolfgang Ehlers & Bernd Markert (Eds.): Proceedings of the 1st GAMM Seminar on Continuum Biomechanics, September 2005.
- II-15 Bernd Scholz: Application of a Micropolar Model to the Localization Phenomena in Granular Materials: General Model, Sensitivity Analysis and Parameter Optimization, November 2007.

- II-16 Wolfgang Ehlers & Nils Karajan (Eds.): Proceedings of the 2nd GAMM Seminar on Continuum Biomechanics, December 2007.
- II-17 Tobias Graf: Multiphasic Flow Processes in Deformable Porous Media under Consideration of Fluid Phase Transitions, June 2008.
- II-18 Ayhan Acartürk: Simulation of Charged Hydrated Porous Materials, March 2009.
- II-19 Nils Karajan: An Extended Biphasic Description of the Inhomogeneous and Anisotropic Intervertebral Disc, March 2009.
- II-20 Bernd Markert: Weak or Strong On Coupled Problems In Continuum Mechanics, June 2010.