



Universität Stuttgart

Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

[www.mechbau.uni-stuttgart.de](http://www.mechbau.uni-stuttgart.de)

**Ergänzung zur Vorlesung**

**Technische Mechanik III – Teil III**

Formelsammlung

Stand WS 2012/13

letzte Änderung: 9.1.2013

## TEIL I: Allgemeine Voraussetzungen

### 1 Materieller Körper, Konfiguration und Bewegung

**Definition:** Ein materieller Körper  $\mathcal{B}$  ist eine kontinuierlich verteilte Menge materieller Punkte  $\mathcal{P}$ , die sich eindeutig auf Gebiete des Anschauungsraums abbilden läßt. Eine solche Abbildung heißt Konfiguration.

**Einführung der Plazierungsfunktion:**

$$\mathbf{x} = \chi(\mathcal{P}, t)$$

**Bem.:** Die Bewegungsfunktion  $\chi$  weist jedem materiellen Punkt  $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$  zu jeder Zeit  $t \geq t_0$  eine eindeutige Lage  $\mathbf{x}(t)$  zu.

**Anfangsbedingung** ( $t = t_0$ ):

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}(t = t_0) = \chi(\mathcal{P}, t_0)$$

**Folgerung:** Man identifiziert die materiellen Punkte  $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$  durch ihre Ausgangslage  $\mathbf{X}$  zum Zeitpunkt  $t_0$ .

**Einführung der Bewegungsfunktion:**

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$$

**Geschwindigkeit und Beschleunigung:**

- Einführung der Geschwindigkeit als zeitliche Änderung der Bewegung

$$\mathbf{v} := \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \chi(\mathbf{X}, t)$$

- Einführung der Beschleunigung als zeitliche Änderung der Geschwindigkeit

$$\mathbf{b} := \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{d^2}{dt^2} \chi(\mathbf{X}, t)$$

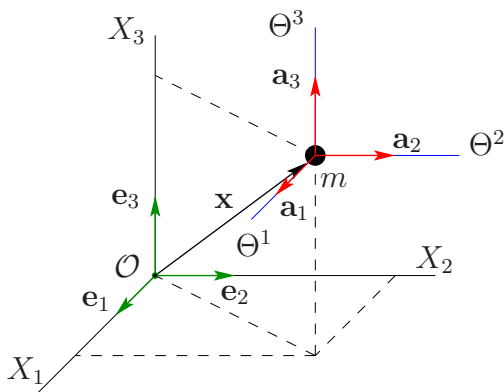
**Bem.:** Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind **Feldfunktionen**, d. h. Funktionen von Ort und Zeit:

$$\{\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}\} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$$

## 2 Darstellung der Bewegung in natürlichen Koordinaten

### 2.1 Darstellung der Bewegung im Raum

Darstellung der Bewegung in kartesischen Koordinaten in einem raumfesten Bezugssystem  $\{\mathcal{O}, \mathbf{e}_i\}$ :



Bewegung:

$$\mathbf{x} = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \mathbf{e}_i$$

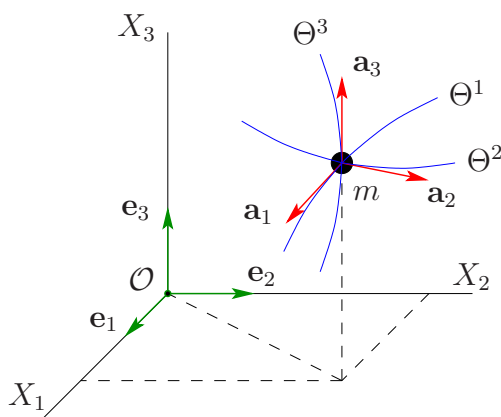
Tangentenvektoren:

$$\mathbf{a}_i := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_i}$$

Bemerkungen:

- Die Parameterlinien  $X_i$  sind die natürlichen Koordinaten des Raumes.
- Bezüglich kartesischer Koordinaten sind die Tangentenvektoren  $\mathbf{a}_i$  (natürliche Basis) und die orthonormierten Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  identisch.
- Man identifiziert die speziellen natürlichen Koordinaten  $X_i$  mit den allgemeinen natürlichen Koordinaten  $\Theta^i$ .
- Die Parameterlinien  $\Theta^i$  müssen nicht entlang einer Geraden gemessen werden (krümmelige Koordinaten).

Darstellung der Bewegung in krummlinigen Koordinaten in einem raumfesten Bezugssystem  $\{\mathcal{O}, \mathbf{e}_i\}$ :



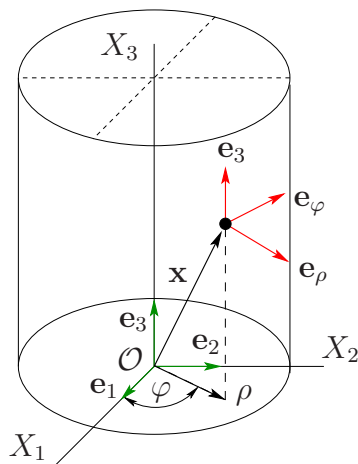
Bewegung:

$$\mathbf{x} = x_i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t) \mathbf{e}_i$$

Tangentenvektoren:

$$\mathbf{a}_i := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^i}$$

## Darstellung der Bewegung in Zylinderkoordinaten:



Einführung natürlicher Koordinaten (Zylinderkoordinaten):

$$\Theta^1 = \rho \quad ; \quad \Theta^2 = \varphi \quad ; \quad \Theta^3 = X_3$$

Transformationsbeziehungen zwischen  $X_i$  und  $\Theta^i$ :

$$X_1 = \rho \cos \varphi = \Theta^1 \cos \Theta^2$$

$$X_2 = \rho \sin \varphi = \Theta^1 \sin \Theta^2$$

$$X_3 = \Theta^3$$

Ortsvektor  $\mathbf{x}$  in natürlichen Koordinaten:

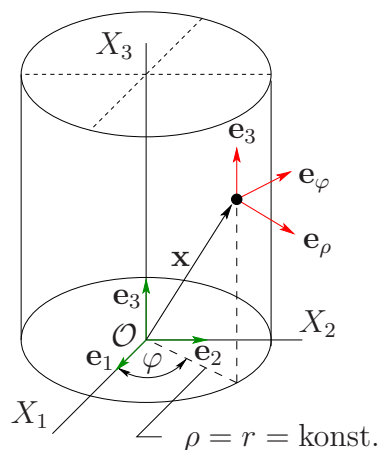
$$\mathbf{x} = \Theta^1 \cos \Theta^2 \mathbf{e}_1 + \Theta^1 \sin \Theta^2 \mathbf{e}_2 + \Theta^3 \mathbf{e}_3$$

Differentiation nach  $\Theta^i$  und Normierung der Tangentenvektoren liefert:

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{a}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2$$

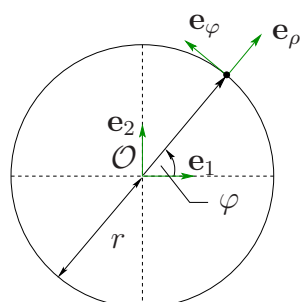
$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_3$$

**Beispiel:** Bewegung auf einer Zylindermantelfläche ( $\rho = r = \text{konst.}$ )

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$$

**Beispiel:** Bewegung auf einer Kreisbahn ( $\rho = r = \text{konst.}$  und  $X_3 = \text{konst.}$ )

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$$

## TEIL II: Kinematik der Massenpunkte und der Starrkörper

### 3 Kinematik der Massenpunkte

#### 3.1 Geradlinige Bewegung

Charakterisierung der Bewegung mit Hilfe der Beschleunigung  $b$ :

$$b \begin{cases} > 0 : & \text{beschleunigte Bewegung} \\ = 0 : & \text{gleichförmige Bewegung} \\ < 0 : & \text{verzögerte Bewegung} \end{cases}$$

**Grundaufgaben der geradlinigen Bewegung:**

**Fall 1:**  $b = \text{konst.}$  (konstante Beschleunigung)

$$b = \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad v = b(t - t_0) + v_0$$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \rightarrow \quad s = \frac{1}{2} b(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0$$

**Fall 2:**  $b = b(t)$  (zeitabhängige Beschleunigung)

$$b(t) = \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad v = \int_{t_0}^t b(\tilde{t}) d\tilde{t} + v_0$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad \rightarrow \quad s = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tilde{t}} b(\tilde{t}) d\tilde{t} d\tilde{t} + v_0(t - t_0) + s_0$$

**Fall 3:**  $b = b(v)$  (geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung)

$$dt = \frac{dv}{b(v)} \quad \rightarrow \quad t = \int_{v_0}^v \frac{1}{b(\tilde{v})} d\tilde{v} + t_0$$

$$ds = \frac{v dv}{b(v)} \quad \rightarrow \quad s = \int_{v_0}^v \frac{\tilde{v} d\tilde{v}}{b(\tilde{v})} + s_0$$

**Fall 4:**  $b = b(s)$  (wegabhängige Beschleunigung)

$$b(s) = \frac{v dv}{ds} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^s b(\tilde{s}) d\tilde{s}$$

$$dt = \frac{ds}{v(s)} \quad \rightarrow \quad t = \int_{s_0}^s \frac{d\tilde{s}}{v(\tilde{s})} + t_0$$

### 3.2 Krummlinige Bewegung

Darstellung in Zylinderkoordinaten (Bezug der Bewegung auf  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_3$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 &= \text{konst.} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho \\ \dot{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \rho \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \rho \sin \varphi \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \rho \mathbf{e}_\rho + x_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{x}_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \underbrace{\dot{\rho}}_{v_\rho} \mathbf{e}_\rho + \underbrace{\rho \dot{\varphi}}_{v_\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \underbrace{\dot{x}_3}_{v_3} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} &= \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + (\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{x}_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \underbrace{(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2)}_{b_\rho} \mathbf{e}_\rho + \underbrace{(2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi})}_{b_\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \underbrace{\ddot{x}_3}_{b_3} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Bewegung auf der Zylindermantelfläche ( $\rho = r = \text{konst.}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= r \mathbf{e}_\rho + x_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} &= r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{x}_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} &= -r \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_\rho + r \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \ddot{x}_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Bewegung auf einer Kreisbahn ( $\rho = r = \text{konst.}$  und  $x_3 = \text{konst.}$ ):

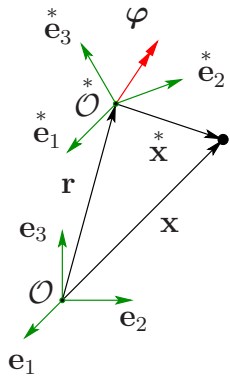
$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= r \mathbf{e}_\rho + x_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} &= \underbrace{r \dot{\varphi}}_{v_\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{b} &= \underbrace{-r \dot{\varphi}^2}_{b_\rho} \mathbf{e}_\rho + \underbrace{r \ddot{\varphi}}_{b_\varphi} \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\text{mit } \left\{ \begin{array}{l} v_\varphi : \text{Umfangsgeschwindigkeit} \\ b_\rho : \text{Zentripetalbeschleunigung} \\ b_\varphi : \text{Umfangsbeschleunigung} \end{array} \right.$$

### 3.3 Relativbewegung

**Bem.:** Manchmal kann es sinnvoll sein, Bewegungen in einem mitbewegten Bezugssystem  $\{\mathcal{O}^*, \mathbf{e}_i^*\}$  zu formulieren. Dabei ist zu beachten, daß bei Zeitableitungen die Basis des Relativsystems ebenfalls eine Zeitableitung besitzt.

**Veranschaulichung:**



Zusammenhang zwischen Absolut- und Relativbewegung:

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{r} + \mathbf{x}^*} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}}^* \\ \mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{x}}^* \end{cases}$$

Zeitableitung der Basisvektoren:

$$\boxed{\dot{\mathbf{e}}_i^* = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i^*} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}$$

**Zeitableitung im Relativsystem:**

Für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{u}^* = u_i \mathbf{e}_i^*$  im Relativsystem gilt:

$$\dot{\mathbf{u}}_i^* = (\mathbf{u}^*)^\nabla + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^* \quad \text{mit} \quad \begin{cases} (\mathbf{u}^*)^\nabla := \dot{u}_i(t) \mathbf{e}_i^* & : \text{relative (Oldroyd)-Ableitung} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^* = \dot{u}_i(t) \mathbf{e}_i^* & : \text{Anteil aus Änderung der Basis} \end{cases}$$

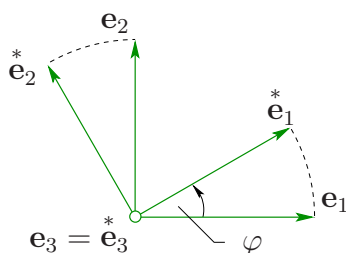
**Allgemeine Formel für Absolutgeschwindigkeit und Absolutbeschleunigung:**

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \underbrace{\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^*}_{\text{Führungsgeschwindigkeit}} + \underbrace{\mathbf{v}^*}_{\text{Relativgeschwindigkeit}} \\ \mathbf{b} &= \underbrace{\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^*)}_{\text{Führungsbeschleunigung}} + \underbrace{2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^*}_{\text{Coriolis-Beschleunigung}} + \underbrace{\mathbf{b}^*}_{\text{Relativbeschleunigung}} \end{aligned}$$

**Möglichkeit zur Berechnung von Relativaufgaben:**

- (a) Einsetzen in die Formeln, d. h., Formulierung von  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{x}^*$ ,  $\mathbf{v}^*$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ ,  $\mathbf{b}^*$
- (b) Aufstellen des Ortsvektors und anschließendes zeitliches Ableiten (Koeffizienten und Basis)

**Einschub Koordinatentransformationen für Drehung in der Ebene:**

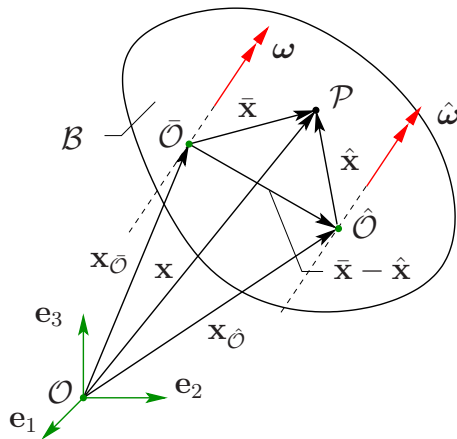


$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}_1^* - \sin \varphi \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_2 &= \sin \varphi \mathbf{e}_1^* + \cos \varphi \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_1^* &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2^* &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

## 4 Kinematik der Starrkörper

### Allgemeine Bewegung des starren Körpers

**Bem.:** Der Starrkörper besitzt 6 Freiheitsgrade im Raum (3 Translationen und 3 Rotationen). Bei der Bewegung des Starrkörpers erfahren die Vektoren  $\bar{\mathbf{x}}$  und  $\hat{\mathbf{x}}$  lediglich eine Rotation, d. h.  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}}$  und  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}$ .



Geschwindigkeit und Beschleunigung bei Bezug auf  $\hat{O}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}}_{\hat{O}} + \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= \mathbf{v}_{\hat{O}} + \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} &= \dot{\mathbf{v}}_{\hat{O}} + (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}})' \\ &= \mathbf{b}_{\hat{O}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

Wechsel des Bezugspunkts::

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\hat{O}} &= \mathbf{v}_{\bar{O}} + \boldsymbol{\omega} \times (\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{\hat{O}} + \hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{v}_{\bar{O}} + \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}} + (\hat{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega}) \times \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\boldsymbol{\omega} = \hat{\boldsymbol{\omega}}}$$

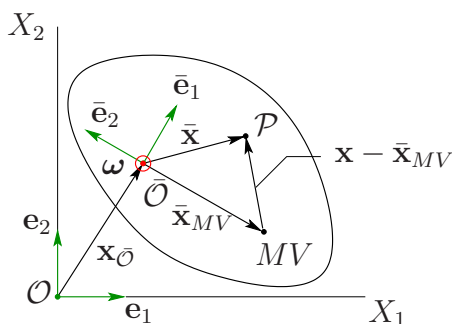
**Reduktion auf eine Geschwindigkeitsschraube** ( $\mathbf{v}_{\bar{O}}$  und  $\boldsymbol{\omega}$  besitzen eine gemeinsame Wirkungslinie):

$$\boxed{\bar{\mathbf{x}}_B = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\bar{O}}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_B = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_{\bar{O}}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\omega}}$$

### Ebene Bewegung des Starrkörpers

**Bem.:** Die ebene Bewegung des Starrkörpers ist ein Sonderfall der allgemeinen Bewegung. Es verbleiben 3 kinematische Freiheitsgrade, nämlich zwei Translationen in der Ebene und eine Rotation senkrecht zu Ebene. Damit entspricht der Ortsvektor  $\bar{\mathbf{x}}_B$  bei Reduktion auf eine Geschwindigkeitsschraube der Lage des momentanen Geschwindigkeitspols mit  $\mathbf{v}_B = \mathbf{0}$ , da  $\mathbf{v}_{\bar{O}} \parallel \boldsymbol{\omega}$ .

(a) **Geschwindigkeitzustand und momentaner Geschwindigkeitspol  $MV$ :**



Lage des momentanen Geschwindigkeitspols  $MV$ :

$$\boxed{\mathbf{x}_{MV} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\bar{O}}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_{MV} = \mathbf{0}}$$

Betrag von  $\mathbf{x}_{MV}$ :

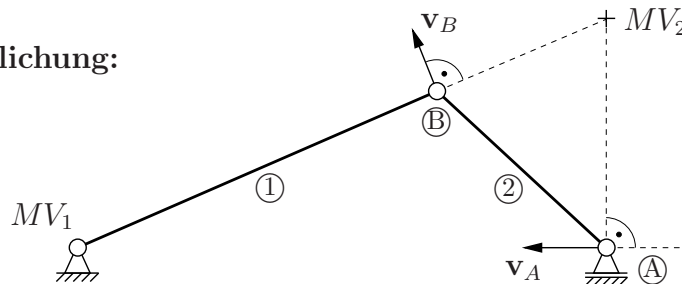
$$\boxed{\bar{x}_{MV} = \frac{v_{\bar{O}}}{\omega}}$$



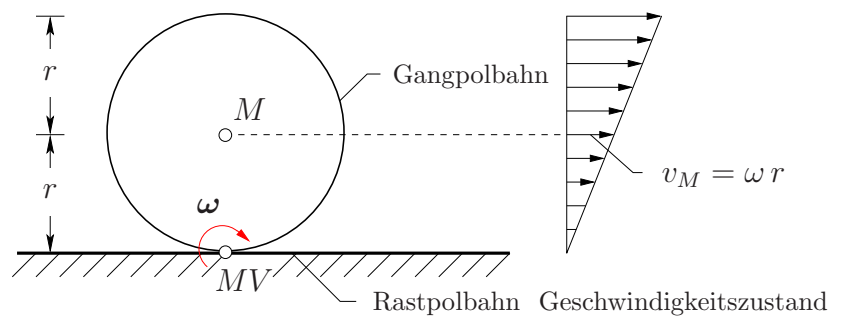
**Graphische Methoden zur Bestimmung des momentanen Geschwindigkeitspols:**

- Ist in einem Punkt  $\textcircled{A}$  die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$  bekannt, so liegt der momentane Geschwindigkeitspol  $MV$  auf der Senkrechten zu  $\mathbf{v}_A$  in  $\textcircled{A}$ .
- Sind in  $\textcircled{A}$  und  $\textcircled{B}$  die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_A$  und  $\mathbf{v}_B$  bekannt, so liegt  $MV$  im Schnittpunkt der beiden in  $\textcircled{A}$  und  $\textcircled{B}$  auf  $\mathbf{v}_A$  und  $\mathbf{v}_B$  errichteten Senkrechten.
- Ist ein Punkt bekannt, für den  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  gilt, so ist dieser Punkt der momentane Geschwindigkeitspol  $MV$ .

Veranschaulichung:

**Gangpolbahn und Rastpolbahn:**

- Gangpolbahn (körperfest): Menge aller momentanen Geschwindigkeitspole des Körpers.
- Rastpolbahn (bahnfest): Menge aller momentanen Geschwindigkeitspole der Bahn, auf der der Körper abrollt.

**Beispiel:** Rollendes Rad**(b) momentaner Beschleunigungspol  $MB$ :**

$$\mathbf{x}_{MB} = \frac{\dot{\omega} \times \mathbf{b}_{\bar{0}} + (\omega \cdot \omega) \mathbf{b}_{\bar{0}}}{\dot{\omega} \cdot \dot{\omega} + (\omega \cdot \omega)^2} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b}_{MB} = \mathbf{0}$$

## TEIL III: Kinetik der Massenpunkte und der Massenpunktsysteme

### 5 Impuls- und Drallsatz

#### 5.1 Impulssatz der Punktkinetik

**Bem.:** Der Impulssatz hat axiomatischen Charakter und basiert auf der Naturbeobachtung.

**Newton'sche Gesetze:**

1. Ein Körper, auf den keine resultierende Kraft einwirkt, verharrt im Zustand der Ruhe bzw. der gleichförmigen Bewegung ( $\mathbf{v} = \text{konst.}$ ).
2. *Newton'sches Grundgesetz* (Impulssatz): „Kraft = Masse  $\times$  Beschleunigung“
3. Reaktionsgesetz: „Actio = Reactio“
4. Gesetz vom Kräfteparallelogramm

**Formelmäßige Darstellung der Gesetze 1. und 2.:**

- Das 1. *Newton'sche* Gesetz (Impulserhaltungssatz) lautet:

$$\mathbf{0} = \mathbf{k} \quad \longleftrightarrow \quad m \mathbf{v} = \text{konst.}$$

- Das 2. *Newton'sche* Gesetz (Impulssatz) lautet:

$$m \mathbf{b} = \mathbf{k}$$

mit  $\begin{cases} m = \text{konst.} \\ \mathbf{k} : \text{ auf den Massenpunkt einwirkende} \\ \text{resultierende Kraft} \end{cases}$

**Axiomatische Einführung des Impulssatzes:**

„Impuls (Bewegungsgröße) = Masse  $\times$  Geschwindigkeit“  $\longrightarrow$   $\mathbf{l} = m \mathbf{v}$

**Axiom:** Die zeitliche Änderung des Impulses entspricht der Summe der auf den Massenpunkt  $m$  angreifenden Kräfte.  $\longrightarrow \dot{\mathbf{l}} = \mathbf{k}$

**Diskussion des Impulssatzes:**

Impulssatz für Systeme mit veränderlichen Massen:  $m \dot{\mathbf{v}} + \dot{m} \mathbf{v} = \mathbf{k}$

Massenänderung in Abhängigkeit von  $\mathbf{v}$  nach *Einstein*:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} m_0 & : \text{ Ruhemasse} \\ c & : \text{ Lichtgeschwindigkeit} \end{cases}$$

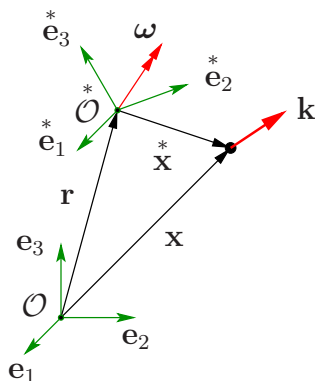
**Allgemeine Vorgehensweise:**

1. Massenpunkt freischneiden und alle Kräfte antragen.
2. Impulssatz in Koordinatenrichtungen aufstellen.
3. Durch Integration  $\mathbf{x}$  bestimmen oder bei bekannter Bewegung  $\mathbf{k}$  berechnen.

**Inertialsysteme und *Galilei*-Transformation:**

**Definition:** Alle Bezugssysteme, in denen das *Newtonsche* Grundgesetz gilt, sind Inertialsysteme.

**Wechsel des Bezugssystems:**



$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{b}_f & = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^*) \\ \mathbf{b}_c & = 2 \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}^* \\ \mathbf{b}_r & = \dot{\mathbf{x}}^* \end{cases}$$

Im Absolutsystem (Inertialsystem) bzgl.  $\{0, \mathbf{e}_i\}$  gilt:  $\mathbf{k} = m \mathbf{b} = m (\mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r)$

Im Relativsystem bzgl.  $\{0, \mathbf{e}_i^*\}$  gelte:  $\mathbf{k} = m \mathbf{b}_r$

Forderung, damit auch  $\{0, \mathbf{e}_i^*\}$  Inertialsystem ist:

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_r \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}_f \equiv \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_c \equiv \mathbf{0} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \text{konst.} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

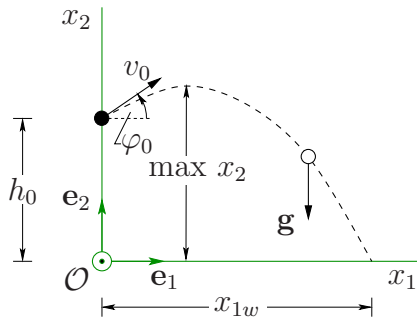
Jedes Bezugssystem, daß durch eine gleichförmige Translationsbewegung ( $\dot{\mathbf{r}} = \text{konst.}$ ) aus einem Inertialsystem hergeleitet wird, ist selbst ein Inertialsystem. Die Ortsvektoren genügen der *Galilei*-Transformation:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \dot{\mathbf{r}} t$$

## Beispiele zum Impulssatz der Punktkinetik

### Schiefer Wurf

**Bem.:** Freier Wurf im Schwerfeld (2-d Problem) ohne Luftwiderstand.



**gegeben:**  $v_0, \varphi_0, h_0, \mathbf{g}$ .

**gesucht:** Wurfbahn  $x_2(x_1)$ , Wurfzeit  $t_w$ ,  
Wurfweite  $x_{1w}$ , Wurfhöhe  $\max x_2$ .

Wurfbahn: 
$$x_2(x_1) = h_0 + \tan \varphi_0 x_1 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi_0} x_1^2$$

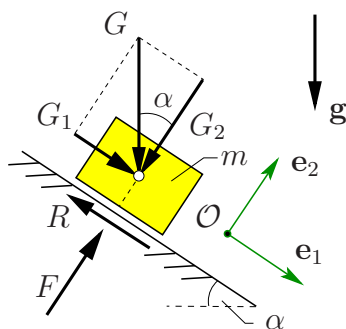
Wurfzeit: 
$$t_w = \frac{v_0 \sin \varphi_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \varphi_0}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}}$$

Wurfweite:  $x_{1w} = x_1(t_w) = v_0 \cos \varphi_0 t_w$  mit  $h_0 = 0$  folgt  $x_{1w} = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \varphi_0$

Wurfhöhe:  $\max x_2 = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi_0}{2g}$

### Geführte Bewegung

**Bem.:** Klotz auf schiefer Ebene im Schwerfeld mit *Coulombscher* Gleitreibung.



**gegeben:**  $m, \alpha, \mu_G, x_0, v_0, \mathbf{g}$ .

**gesucht:** Bewegung, Geschwindigkeit, Beschleunigung

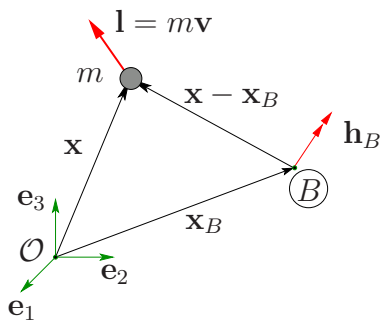
$$m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{k} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_1 : m \ddot{x}_1 = G_1 - R \\ \mathbf{e}_2 : m \ddot{x}_2 = F - G_2 \end{cases}$$

Bewegung in  $\mathbf{e}_2$ -Richtung nicht möglich (Führung):  $x_2 \equiv 0 \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x}_2 = 0$

Bewegung in  $\mathbf{e}_1$ -Richtung 
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = g (\sin \alpha - \mu_G \cos \alpha) = b_1 = \text{konst.} \\ \dot{x}_1 = g (\sin \alpha - \mu_G \cos \alpha) t + v_0 \\ x_1 = \frac{1}{2} g (\sin \alpha - \mu_G \cos \alpha) t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases}$$

### 5.2 Drallsatz der Punktkinetik

Drall (Drehimpuls)  $\mathbf{h}_B$  des Massenpunkts  $m$ :



$$\mathbf{h}_B = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{l}$$

**Bem.:**  $B$  ist ein beliebiger raumfester Punkt

Zeitableitung von  $\mathbf{h}_B$ :  $\dot{\mathbf{h}}_B = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \times \dot{\mathbf{l}}$

**Drallsatz:** Die zeitliche Änderung des Drallvektors entspricht dem Moment der auf den Massenpunkt  $m$  einwirkenden Kräfte bzgl. desselben raumfesten Punkts  $B$ .

$$\dot{\mathbf{h}}_B = \mathbf{m}_B$$

**Bem.:** Der Drallsatz der Punktkinetik ist kein eigenständiges Axiom, da er aus dem Impulssatz hergeleitet werden kann.

### 5.3 d'Alembertsche Trägheitskräfte

**Bem.:** Die Einführung d'Alembertscher Trägheitskräfte basiert auf der Interpretation der Trägheitswirkungen (Scheinkräfte) als eingeprägte Kräfte.

**d'Alembertsches Kräftegleichgewicht (dynamisches Gleichgewicht):**

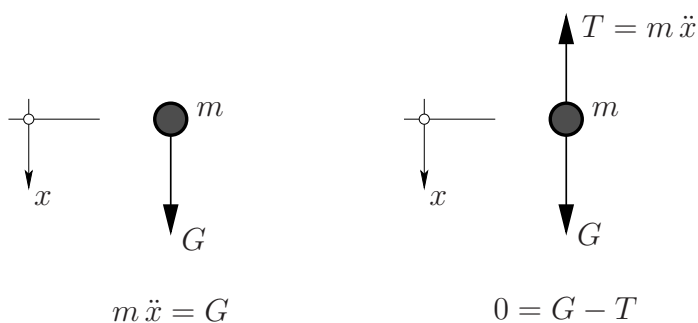
aus dem Impulssatz folgt

$$\mathbf{t} = -m\ddot{\mathbf{x}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{0} = \mathbf{k} + \mathbf{t}$$

mit  $\mathbf{t}$  : d'Alembertsche Trägheitskraft

**Veranschaulichung:** Freier Fall

Newtonsche Formulierung      d'Alembertsche Formulierung



## 6 Impuls- und Drallbilanzsätze

### Impuls- und Drallbilanz

**Bem.:** Impuls- und Drallbilanz sind die integrierten Formen von Impuls- und Drallsatz. Die Impuls- und Drallbilanz können z. B. bei Stoßvorgängen zwischen Massenpunkten und starren Körpern verwendet werden.

Impulsbilanz:

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{l}(t_2) - \mathbf{l}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{k} dt =: \mathbf{K}$$

mit  $\mathbf{K}$  : Kraftantrieb

Drallbilanzsatz:

$$\dot{\mathbf{h}}_B = \mathbf{m}_B \rightarrow \mathbf{h}_B(t_2) - \mathbf{h}_B(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_B dt =: \mathbf{M}_B$$

mit  $\mathbf{M}_B$  : Momentenantrieb

### Impuls- und Drallerhaltung

**Bem.:** Sonderfälle für  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  bzw.  $\mathbf{m}_B = \mathbf{0}$ .

Impulserhaltungssatz:

$$\mathbf{l}(t_2) - \mathbf{l}(t_1) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{l}(t) = \text{konst.}$$

Drallerhaltungssatz:

$$\mathbf{h}_B(t_2) - \mathbf{h}_B(t_1) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{h}_B(t) = \text{konst.}$$

## 7 Energie- und Arbeitssatz

### Arbeitssatz der Mechanik

|  |
|--|
| $\underbrace{\mathcal{K}_{\textcircled{1}} - \mathcal{K}_{\textcircled{2}}}_{\text{kinetische Energie in den Zuständen } \textcircled{1} \text{ und } \textcircled{2}} = \underbrace{\mathcal{A}_{12}}_{\text{Arbeit der auf } m \text{ einwirkenden Kräfte die zwischen } \textcircled{1} \text{ und } \textcircled{2} \text{ geleistet wird}}$ |
|--|

allgemein gilt:

$$\mathcal{A}_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

→ Projektion der Summe der eingepprägten Kräfte  $\mathbf{F}$  in Wegrichtung durch Skalarprodukt (nur Kräfte in Bewegungsrichtung interessieren).

**Arbeit konservativer und nicht-konservativer Kräfte:**

$$\mathcal{A}_{12} = \underbrace{\tilde{\mathcal{A}}_{12}}_{\text{nicht-konservative Kräfte (z. B. Reibung)}} + \underbrace{\bar{\mathcal{A}}_{12}}_{\text{konservative Kräfte (z. B. Gewichtskräfte)}}$$

**Konservative Kräfte:** Eine Kraft ist konservativ, wenn ihre Arbeit  $\mathcal{A}_{12}$  nicht vom Weg abhängt, auf dem sie zwischen den Zuständen ① mit  $t_1$  und ② mit  $t_2$  geleistet wird.

**Arbeit und Potential konservativer Kräfte:**

$$\bar{\mathcal{A}}_{12} = -\mathcal{U}_{12} = -\int_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} \frac{d\mathcal{U}}{dx} dx = \mathcal{U}_{\textcircled{1}} - \mathcal{U}_{\textcircled{2}}$$

$$\rightarrow \underbrace{\mathcal{K}_{\textcircled{2}} + \mathcal{U}_{\textcircled{2}} = \mathcal{K}_{\textcircled{1}} + \mathcal{U}_{\textcircled{1}} + \tilde{\mathcal{A}}_{12}}_{\substack{\text{Energieerhaltungssatz} \\ \text{Arbeitssatz}}}$$

**Bem.:** Die Anwendung des Energieerhaltungssatzes setzt  $\tilde{\mathcal{A}}_{12}$  voraus, d. h., es wirken nur konservative Kräfte.

**Kinetische Energie  $\mathcal{K}$  :**

- \* Translation:  $\frac{1}{2} m v^2$
- \* Rotation:  $\frac{1}{2} \theta_M \omega^2$   
(nur ausgedehnte Körper)

**Potentielle Energie  $\mathcal{U}$  :**

- \* Lageenergie:  $m g h$
- \* Normalkraftfeder:  $\frac{1}{2} c_f f^2$
- \* Momentenfeder:  $\frac{1}{2} c_\varphi \varphi^2$

## TEIL IV: Kinetik der starren Körper

### 8 Impuls- und Drallsatz

#### Bilanzrelationen für Impuls und Drall

\* Kinetik der Massenpunkte

- Impulssatz: axiomatische Einführung
- Drallsatz: Herleitung aus dem Impulssatz, d. h. kein eigenständiges Axiom

\* Kinetik der materiellen Körper

- Impulssatz: axiomatische Einführung
- Drallsatz: ist ein eigenständiges Axiom

#### Massenbilanz des materiellen Körpers

**Axiom:** In einem geschlossenen System bleibt die Masse eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  konstant.

$$\begin{aligned} m(\mathcal{B}, t) &= \text{konst.} \\ \dot{m}(\mathcal{B}, t) &= 0 \end{aligned}$$

#### Impulssatz des materiellen Körpers

**Axiom:** Die zeitliche Änderung des Impulses entspricht der am Körper  $\mathcal{B}$  angreifenden resultierenden Kraft.

$$\dot{\mathbf{i}}(\mathcal{B}, t) = \mathbf{k}(\mathcal{B}, t)$$

$$\text{mit } \begin{cases} \mathbf{i}(\mathcal{B}, t) = \left( \int_V \dot{\mathbf{x}} dm \right)' = \int_V \ddot{\mathbf{x}} dm \quad (\text{mit Massenerhaltungssatz}) \\ \mathbf{k}(\mathcal{B}, t) : \text{ resultierende Kraft} \end{cases}$$

daraus folgt:

$$\int_V \ddot{\mathbf{x}} dm = \mathbf{k}(\mathcal{B}, t)$$



**Formulierung des Impulssatzes bzgl. des Massenmittelpunkts:**

Lage des Massenmittelpunkts:

$$\mathbf{x}_M = \frac{1}{m} \int_V \mathbf{x} dm \quad \rightarrow \quad m \dot{\mathbf{x}}_M = \int_V \dot{\mathbf{x}} dm \quad \rightarrow \quad m \ddot{\mathbf{x}}_M = \int_V \ddot{\mathbf{x}} dm$$

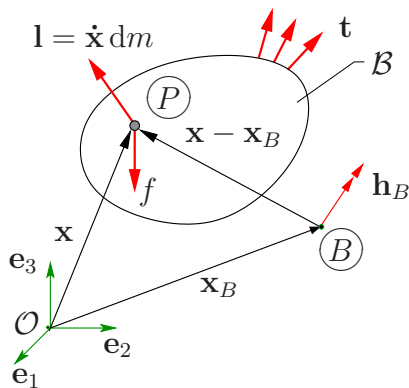
**Schwerpunktsatz** (Impulssatz bzgl. des Massenmittelpunkts):

$$m \ddot{\mathbf{x}}_M = \mathbf{k}(\mathcal{B}, t)$$

**Drallsatz des materiellen Körpers**

**Formulierung des Drallsatzes**

**Axiom:** Die zeitliche Änderung des Drallvektors entspricht der Summe der Momente aller am Körper  $\mathcal{B}$  angreifenden Kräfte bzgl. desselben raumfesten Punkts  $B$ .



$$\dot{\mathbf{h}}_B = \mathbf{m}_B(\mathcal{B}, t)$$

mit  $\begin{cases} \mathbf{h}_B(\mathcal{B}, t) = \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \times \dot{\mathbf{x}} dm \\ \mathbf{m}(\mathcal{B}, t) : \text{Moment bzgl. } B \end{cases}$

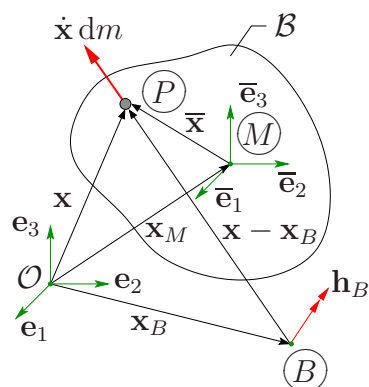
Es gilt mit dem Massenerhaltungssatz

$$\dot{\mathbf{h}}_B = \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \times \ddot{\mathbf{x}} dm$$

es folgt:

$$\int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \times \ddot{\mathbf{x}} dm = \mathbf{m}_B(\mathcal{B}, t)$$

**Formulierung des Drallsatzes bzgl. des Massenmittelpunkts**



$$\dot{\mathbf{h}}_M(\mathcal{B}, t) = \mathbf{m}_M(\mathcal{B}, t)$$

mit  $\begin{cases} \mathbf{h}_M(\mathcal{B}, t) = \int_V \bar{\mathbf{x}} \times \dot{\bar{\mathbf{x}}} dm \\ \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_M \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$

## Drallvektor und Massenträgheitstensor

### Drallvektor bzgl. des Massenmittelpunkts

$$\boxed{\mathbf{h}_M(\mathcal{B}, t) = \int_M \bar{\mathbf{x}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{x}}) dm =: \boldsymbol{\theta}_M \boldsymbol{\omega}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{h}_M(\mathcal{B}, t) & : \text{Drallvektor bzgl. } M \\ \boldsymbol{\theta}_M & : \text{Massenträgheitstensor} \end{cases}$$

### Massenträgheitstensor bzgl. des Massenmittelpunkts

$$\boldsymbol{\theta}_M = \int_M [(\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{I} - (\bar{\mathbf{x}} \otimes \bar{\mathbf{x}})] dm$$

### Auswertung des Massenträgheitstensors

Bezüglich des Massenmittelpunkts eines starren Körpers folgt

$$\boldsymbol{\theta}_M = \int_M \underbrace{[(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2)\delta_{ij} - \bar{x}_i \bar{x}_j]}_{\bar{\theta}_{ij}} dm (\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j)$$

mit  $\bar{\theta}_{ij}$  : Koeffizienten des Massenträgheitstensors  $\boldsymbol{\theta}_M$

- axiale Massenträgheitsmomente

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\theta}_{11} &= \int_M (\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) dm \\ \bar{\theta}_{22} &= \int_M (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_3^2) dm \\ \bar{\theta}_{33} &= \int_M (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) dm \end{aligned}}$$

- Deviationsmomente

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\theta}_{12} &= \bar{\theta}_{21} = - \int_M \bar{x}_1 \bar{x}_2 dm \\ \bar{\theta}_{13} &= \bar{\theta}_{31} = - \int_M \bar{x}_1 \bar{x}_3 dm \\ \bar{\theta}_{23} &= \bar{\theta}_{32} = - \int_M \bar{x}_2 \bar{x}_3 dm \end{aligned}}$$

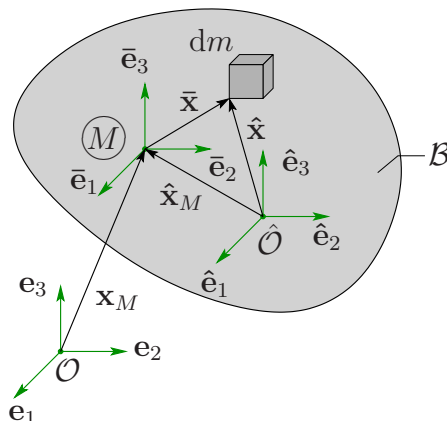
- polares Massenträgheitsmoment

$$\boxed{\bar{\theta}_P := \int_M (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) dm = \frac{1}{2} (\bar{\theta}_{11} + \bar{\theta}_{22} + \bar{\theta}_{33})}$$

## Massenträgheitsmomente in unterschiedlichen Bezugssystemen

### (a) Wechsel des Bezugssystems

Veranschaulichung:



Drallvektor bzgl.  $\hat{O}$ :

$$\mathbf{h}_{\hat{O}}(\mathcal{B}, t) = \boldsymbol{\theta}_{\hat{O}} \boldsymbol{\omega}$$

Translation des Bezugssystems (Satz von *Steiner-Huygens*):

$$\boldsymbol{\theta}_{\hat{O}} = \boldsymbol{\theta}_M + [(\hat{\mathbf{x}}_M \cdot \hat{\mathbf{x}}_M) \mathbf{I} - (\hat{\mathbf{x}}_M \otimes \hat{\mathbf{x}}_M)] m$$

bzw. in Koeffizientendarstellung:

$$\hat{\theta}_{ij} = \bar{\theta}_{ij} + \underbrace{[(\hat{x}_{M1}^2 + \hat{x}_{M2}^2 + \hat{x}_{M3}^2) \delta_{ij} - \hat{x}_{Mi} \hat{x}_{Mj}]}_{\text{Steiner-Anteile}} m$$

- axiale Massenträgheitsmomente

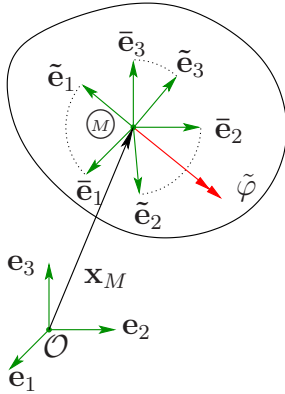
$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{11} &= \bar{\theta}_{11} + m(\hat{x}_{M2}^2 + \hat{x}_{M3}^2) \\ \hat{\theta}_{22} &= \bar{\theta}_{22} + m(\hat{x}_{M1}^2 + \hat{x}_{M3}^2) \\ \hat{\theta}_{33} &= \bar{\theta}_{33} + m(\hat{x}_{M1}^2 + \hat{x}_{M2}^2) \end{aligned}$$

- Deviationsmomente für  $i \neq j$

$$\hat{\theta}_{ij} = \bar{\theta}_{ij} - m(\hat{x}_{Mi} \hat{x}_{Mj})$$

**Rotation des Bezugssystems bzgl. des Massenmittelpunkts**

**Bem.:**  $\boldsymbol{\theta}_M$  bleibt erhalten, seine Koeffizienten ändern sich jedoch mit der Rotation des Bezugssystems



$$\boldsymbol{\theta}_M = \tilde{\theta}_{op} (\tilde{\mathbf{e}}_o \otimes \tilde{\mathbf{e}}_p)$$

mit  $\tilde{\theta}_{op} = \tilde{R}_{oi} \bar{\theta}_{ij} \tilde{R}_{pj}$

**Bem.:**  $\tilde{\mathbf{R}}$  kann dargestellt werden durch:

- 3 voneinander unabhängige Richtungs-Cosini
- 3 *Cardanosche* Winkel
- 3 *Eulersche* Winkel
- 1 *Euler-Rodriguez*-Winkel

**Hauptträgheitsmomente**

Hauptträgheitsmomente für den allgemeinen 3-dimensionalen Fall durch Lösen des Eigenwertproblems bzw. durch Drehung des Basissystems bis ein Zustand erreicht wird, bei dem alle Deviationsmomente verschwinden

$$\boldsymbol{\theta}_M = \theta_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^3 \theta_i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) \quad \text{mit} \quad \theta_{ij} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{bmatrix}$$

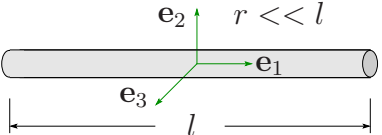
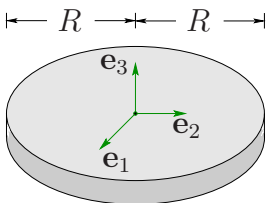
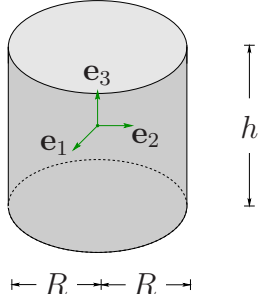
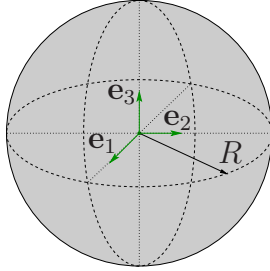
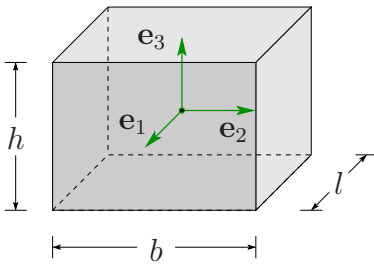
mit  $\left\{ \begin{array}{l} \theta_i : \text{zugehörige Hauptträgheitsmomente (Eigenwerte } \lambda_i \equiv \theta_i \text{ von } \boldsymbol{\theta}_M) \\ \mathbf{e}_i : \text{zugehörige Hauptrichtungen} \end{array} \right.$

Charakteristische Gleichung des Eigenwertproblems

$$III\boldsymbol{\theta}_M - \lambda II\boldsymbol{\theta}_M + \lambda^2 I\boldsymbol{\theta}_M - \lambda^3 = 0$$

$$\text{mit} \left\{ \begin{array}{l} I\boldsymbol{\theta}_M = \boldsymbol{\theta}_M \cdot \mathbf{I} \\ II\boldsymbol{\theta}_M = \frac{1}{2} [(\boldsymbol{\theta}_M \cdot \mathbf{I})^2 - \boldsymbol{\theta}_M \boldsymbol{\theta}_M \cdot \mathbf{I}] \\ III\boldsymbol{\theta}_M = \det \boldsymbol{\theta}_M \end{array} \right\} \text{Hauptinvarianten}$$

Beispiele zur Berechnung von Massenträgheitsmomenten

| Geometrie   | $\theta_{11}$                                  | $\theta_{22}$                                  | $\theta_{33}$             |
|---|--|--|---------------------------|
| schlanker prismatischer Stab<br> | 0  | $\frac{ml^2}{12}$                              | $\frac{ml^2}{12}$         |
| dünne Kreisscheibe<br>           | $\frac{mR^2}{4}$                               | $\frac{mR^2}{4}$                               | $\frac{mR^2}{2}$          |
| Zylinder<br>                    | $m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$ | $m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$ | $\frac{mR^2}{2}$          |
| Kugel<br>                      | $\frac{2mR^2}{5}$                              | $\frac{2mR^2}{5}$                              | $\frac{2mR^2}{5}$         |
| Quader<br>                     | $\frac{m}{12}(b^2 + h^2)$                      | $\frac{m}{12}(l^2 + h^2)$                      | $\frac{m}{12}(b^2 + l^2)$ |

## 9 Energie- und Arbeitssatz

### 9.1 Energiesatz des materiellen Körpers

**Energiesatz** (Bilanz der mechanischen Leistung)

$$\boxed{\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_i} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_a & : \text{ Leistung der äußeren Kräfte} \\ \mathcal{L}_i & : \text{ Leistung der inneren Spannungen} \end{cases}$$

**Sonderfall des starren Körpers**

**Bem.:** Am starren Körper verschwindet die Leistung der inneren Spannungen (keine Verzerrungsgeschwindigkeiten), d. h.

$$\mathcal{L}_i \equiv 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_a}$$

Für die kinetische Energie des starren Körpers gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}_M \cdot \dot{\mathbf{x}}_M + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h}_M(\mathcal{B}, t) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}_M \cdot \dot{\mathbf{x}}_M + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}_M \boldsymbol{\omega} \end{aligned}}$$

**Bem.:** Die kinetische Energie  $\mathcal{K}$  setzt sich aus der Translationsenergie bzgl. des Massenmittelpunkts und der Rotationsenergie um den Massenmittelpunkt zusammen.

Leistung der äußeren Kräfte

$$\mathcal{L}_a = \dot{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{k}(\mathcal{B}, t) + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m}_M(\mathcal{B}, t)$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{k}(\mathcal{B}, t) & = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \\ \mathbf{m}_M(\mathcal{B}, t) & = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{x}}_i \times \mathbf{f}_i \end{cases}$$

Einsetzen in den Energiesatz liefert

$$\boxed{\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_a \iff \dot{\mathbf{x}}_M \cdot m \ddot{\mathbf{x}}_M + \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{h}}_M(\mathcal{B}, t) = \dot{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{k}(\mathcal{B}, t) + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m}_M(\mathcal{B}, t)}$$

## 9.2 Arbeitssatz und Energieerhaltungssatz

Arbeitssatz für starre Körper (konservative und nicht-konservative Kräfte)

$$\mathcal{K}_{\textcircled{2}} - \mathcal{K}_{\textcircled{1}} = \mathcal{A}_{a12}(\mathcal{B}, t) = \int_1^2 \mathcal{L}_a(\mathcal{B}, t) dt$$

mit

$$\begin{cases} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}_M \cdot \dot{\mathbf{x}}_M + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h}_M \\ \mathcal{A}_{a12} &= \int_1^2 (\dot{\mathbf{x}}_M \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m}_M) dt \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{a12} = \tilde{\mathcal{A}}_{a12} + \bar{\mathcal{A}}_{a12} \quad \begin{cases} \tilde{\mathcal{A}}_{a12} : \text{Arbeit der nicht-konservativen Kräfte} \\ \bar{\mathcal{A}}_{a12} : \text{Arbeit der konservativen Kräfte } (\mathcal{U}_{a\textcircled{1}} - \mathcal{U}_{a\textcircled{2}}) \end{cases}$$

$$\mathcal{K}_{\textcircled{2}} + \mathcal{U}_{a\textcircled{2}} = \mathcal{K}_{\textcircled{1}} + \mathcal{U}_{a\textcircled{1}} + \tilde{\mathcal{A}}_{a12}$$

Energieerhaltungssatz für starre Körper ( $\tilde{\mathcal{A}}_{a12} \equiv 0$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathcal{B}, t) + \mathcal{U}_a(\mathcal{B}, t) &= \text{konst.} \\ \rightarrow \mathcal{K}_{\textcircled{2}} + \mathcal{U}_{a\textcircled{2}} &= \mathcal{K}_{\textcircled{1}} + \mathcal{U}_{a\textcircled{1}} \end{aligned}$$

## 9.3 Das Prinzip von *d'Alembert*

**Bem.:** Das Prinzip von *d'Alembert* ( $Pvd'A$ ) hat in der Kinetik denselben Stellenwert wie das Prinzip der virtuellen Arbeit ( $PdvA$ ) in der Statik.

**Formulierung des Prinzips:**

**Bem.:** Man ersetzt im Energiesatz (Bilanz der mechanischen Leistung) die Translations- und Rotationsgeschwindigkeit durch virtuelle Größen, d. h.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_M &\rightarrow \delta \mathbf{x}_M &: \text{virtuelle Verschiebung} \\ \boldsymbol{\omega} &\rightarrow \delta \boldsymbol{\varphi} &: \text{virtuelle Verdrehung} \end{aligned}$$

$$[\mathbf{k}(\mathcal{B}, t) - m\ddot{\mathbf{x}}_M] \cdot \delta \mathbf{x}_M + [\mathbf{m}_M(\mathcal{B}, t) - \dot{\mathbf{h}}_M(\mathcal{B}, t)] \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} = 0$$

- Bem.:**
- Führungskräfte und -momente sind orthogonal zu virtuellen Größen  $\delta \mathbf{x}_M$  und  $\delta \boldsymbol{\varphi}$
  - Für den Fall der Statik geht das Prinzip von *d'Alembert* ( $Pvd'A$ ) in das Prinzip der virtuellen Arbeit ( $PdvA$ ) über, es gilt:  $\ddot{\mathbf{x}}_M \equiv \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \equiv \mathbf{0}$

## 10 Die ebene Starrkörperbewegung

### Beschreibende Gleichungen

**Bem.:** Darstellung der ebenen Bewegung in der  $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_2$ -Ebene; von den 6 Kinematoren der allgemeinen Bewegung verbleiben 3 Kinematoren bei ebener Bewegung:

2 Translationsgeschwindigkeiten :  $\dot{\mathbf{x}}_{M1}, \dot{\mathbf{x}}_{M2}$

1 Rotationsgeschwindigkeit :  $\omega_3 = \dot{\varphi}_3$

Koeffizientendarstellung von Schwerpunkt- und Drallsatz:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}_1 : m \ddot{x}_{M1} = k_1 \\ \mathbf{e}_2 : m \ddot{x}_{M2} = k_2 \\ \mathbf{e}_3 : \theta_M \dot{\omega}_3 = m_{M3} \omega_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Schwerpunktsatz} \\ \text{Drallsatz} \end{array}$$

**Energiesatz** (Bilanz der mechanischen Leistung) bei ebener Starrkörperbewegung:

- Auswertung bezüglich  $M$ :

$$\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_a \rightarrow (m \dot{v}_M) v_M + (\theta_M \dot{\omega}_3) \omega_3 = k_1 \dot{x}_{M1} + k_2 \dot{x}_{M2} + m_{M3} \omega_3$$

- Auswertung bezüglich  $MV$ :

$$\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_a \rightarrow (\theta_{MV} \dot{\omega}_3) \omega_3 = m_{MV3} \omega_3$$

**Arbeitssatz** bei ebener Starrkörperbewegung:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\textcircled{2}} - \mathcal{K}_{\textcircled{1}} &= \mathcal{A}_{a12}(\mathcal{B}, t) = \int_1^2 \mathcal{L}_a(\mathcal{B}, t) dt \\ \mathcal{K} &= \begin{cases} \frac{1}{2} m (\dot{x}_{M1}^2 + \dot{x}_{M2}^2) + \frac{1}{2} \theta_M \omega_3^2 & : \text{ bzgl. } M \\ \frac{1}{2} \theta_{MV} \omega_3^2 & : \text{ bzgl. } MV \end{cases} \\ \mathcal{L}_a &= \begin{cases} k_1 \dot{x}_{M1} + k_2 \dot{x}_{M2} + m_{M3} \omega_3 & : \text{ bzgl. } M \\ m_{MV3} \omega_3 & : \text{ bzgl. } MV \end{cases} \end{aligned}$$

**Energieerhaltungssatz** bei ebener Starrkörperbewegung:

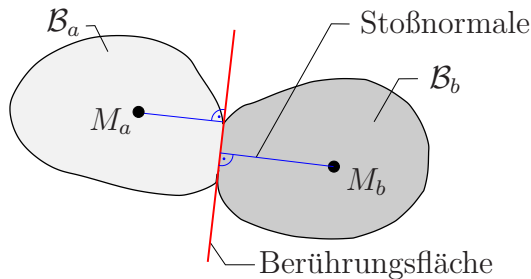
$$\mathcal{K}_{\textcircled{2}} + \mathcal{U}_{a\textcircled{2}} = \mathcal{K}_{\textcircled{1}} + \mathcal{U}_{a\textcircled{1}}$$



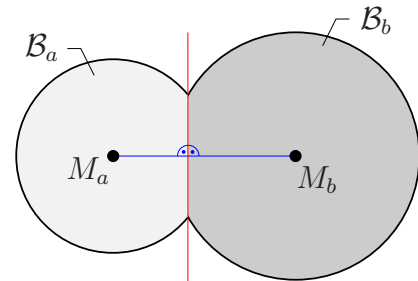
# 11 Stoßvorgänge

## 11.1 Beschreibende Gleichungen

exzentrischer Stoß



zentrischer Stoß



- **Zentrischer bzw. zentraler Stoß:**  
Die Stoßnormale führt durch die Massenmittelpunkte beider Körper.
- **Exzentrischer Stoß:**  
sonst

**Bem.:** Es können sehr komplexe Prozesse beim Stoßvorgang entstehen, die hier unter den folgenden, stark idealisierenden Annahmen beschrieben werden.

### Annahmen zur Beschreibung des Stoßproblems:

- Die Stoßdauer  $\tau$  sei vernachlässigbar klein:  $\tau \rightarrow 0$ .
- Während der Stoßdauer ändern die Körper ihre Lage nicht. Deformationen treten nur in der Berührungszone auf. Sonst bleibt der Körper starr.
- Es existiert ein Grenzwert des Zeitintegrals über  $\mathbf{k}(\mathcal{B}, t)$ :

$$\mathbf{S}(\tau) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} \mathbf{k}(\mathcal{B}, t) dt \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{k}(\mathcal{B}, t) & : \text{ resultierende Stoßkraft} \\ \mathbf{S}(\tau) & : \text{ Stoßimpuls (Stoßantrieb)} \end{cases}$$

- Die in der Berührungszone während des Stoßvorgangs auftretenden Kontaktkräfte sind so groß, daß alle anderen am Körper auftretenden Kräfte dagegen vernachlässigt werden können.
- Die Berührungsfläche sei eine Ebene, so daß die Stoßkraft  $\mathbf{k}(\mathcal{B}, t)$  nur in Richtung der Stoßnormalen wirkt:  $\rightarrow$  Vernachlässigung der Tangentialanteile beim Stoß.
- Die Stoßdauer kann in eine Kompressions- und eine Restitutionsphase zerlegt werden. Es folgt für den Stoßimpuls:

$$\mathbf{S}(\tau) = \mathbf{S}_R + \mathbf{S}_K$$

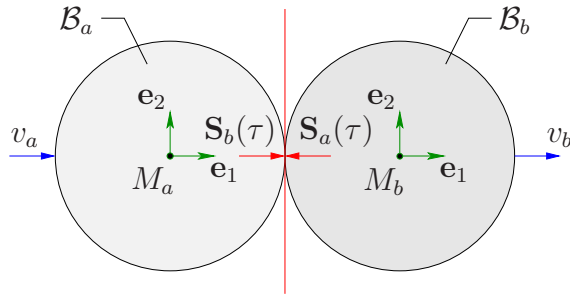
Allgemeiner Stoß (teilelastisch):  $\mathbf{S}_R = e \mathbf{S}_K$

Newtonsche Stoßhypothese mit  $0 \leq e \leq 1$  (Stoßkennziffer bzw. Stoßzahl)

$$\text{Grenzfälle :} \quad e = \begin{cases} 1 & \rightarrow \mathbf{S}_R = \mathbf{S}_K & : \text{ elastischer Stoß} \\ 0 & \rightarrow \mathbf{S}_R = \mathbf{0} & : \text{ plastischer Stoß} \end{cases}$$

## 11.2 Ebene, zentraler Stoß

Gerader, zentraler Stoß:



$$v_a'' = v_a' - \frac{m_b}{m_a + m_b} (v_a' - v_b')(1 + e)$$

$$v_b'' = v_b' - \frac{m_a}{m_a + m_b} (v_b' - v_a')(1 + e)$$

$(\cdot)''$  : Komponente nach dem Stoß

$(\cdot)'$  : Komponente vor dem Stoß

Stoßbedingung:

$$e = \frac{v_a'' - v_b''}{v_b' - v_a'}$$

Energieverlust:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} (v_a' - v_b')^2 (1 - e^2)$$

Sonderfälle des geraden zentralen Stoßes:

elastischer Stoß:  $e = 1 \rightarrow \mathbf{S}_R \equiv \mathbf{S}_K$

$$v_a'' = v_a' - \frac{2m_b}{m_a + m_b} (v_a' - v_b')$$

$$v_b'' = v_b' - \frac{2m_a}{m_a + m_b} (v_b' - v_a')$$

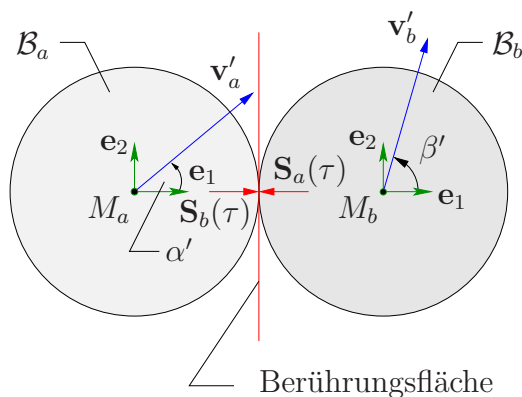
$$\Delta E = 0$$

plastischer Stoß:  $e = 0 \rightarrow \mathbf{S}_R \equiv \mathbf{0}$

$$v_a'' = v_b'' = \frac{m_a v_a' + m_b v_b'}{m_a + m_b}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} (v_a' - v_b')^2$$

Schiefer, zentraler Stoß:



$$v_{a1}'' = v_{a1}' - \frac{m_b}{m_a + m_b} (v_{a1}' - v_{b1}')(1 + e)$$

$$v_{a2}'' = v_{a2}'$$

$$v_{b1}'' = v_{b1}' - \frac{m_a}{m_a + m_b} (v_{b1}' - v_{a1}')(1 + e)$$

$$v_{b2}'' = v_{b2}'$$

Stoßbedingung:

$$e = \frac{v_{a1}'' - v_{b1}''}{v_{b1}' - v_{a1}'}$$

Energieverlust:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} (v_{a1}' - v_{b1}')^2 (1 - e^2)$$

### 11.3 Ebener, exzentrischer Stoß

**Bem.:** Beim exzentrischen Stoß muss neben den Impulsbilanzen bzgl. der Massenmittelpunkte von  $\mathcal{B}_a$  und  $\mathcal{B}_b$  auch die Drallbilanzen für beide Körper ausgewertet werden.

Allgemeine Gleichungen für:

$$\mathcal{B}_a : \begin{cases} \mathbf{e}_1 : m_a (v''_{Ma1} - v'_{Ma1}) = -S(\tau) \\ \mathbf{e}_2 : m_a (v''_{Ma2} - v'_{Ma2}) = 0 \\ \mathbf{e}_3 : \theta_{Ma} (\omega''_a - \omega'_a) = -x_{Ma2} S(\tau) \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_b : \begin{cases} \mathbf{e}_1 : m_b (v''_{Mb1} - v'_{Mb1}) = S(\tau) \\ \mathbf{e}_2 : m_b (v''_{Mb2} - v'_{Mb2}) = 0 \\ \mathbf{e}_3 : \theta_{Mb} (\omega''_b - \omega'_b) = x_{Mb2} S(\tau) \end{cases}$$

mit  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_a(\tau) = -S(\tau) \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{S}_b(\tau) = S(\tau) \mathbf{e}_1 \end{array} \right\}$  keine Anteile in  $\mathbf{e}_2$ -Richtung

**Bemerkungen:**

- Bei Lagerungen der Körper  $\mathcal{B}_a$  und  $\mathcal{B}_b$  sind Auflagerreaktionen (Impulsantriebe) infolge der Stoßimpulse  $\mathbf{S}_a(\tau)$  und  $\mathbf{S}_b(\tau)$  zu berücksichtigen.
- Bei Bezug der Drallbilanzen auf den momentanen Geschwindigkeitspol entfallen die Impulsbilanzen, d. h. in der Drallbilanz muss  $\Theta_M$  durch  $\Theta_{MV}$  und  $x_{M2}$  durch  $x_{MV2}$  ersetzt werden.
- Oben genanntes Gleichungssystem enthält 6 Gleichungen für die 7 Unbekannten:  
 $v''_{Ma1}, v''_{Ma2}, \omega''_a, v''_{Mb1}, v''_{Mb2}, \omega''_b, S(\tau) \rightarrow$  Zusatzgleichung wird benötigt.
- Entwicklung einer Zusatzgleichung in Analogie zur Stoßbedingung beim geraden zentralen Stoß.

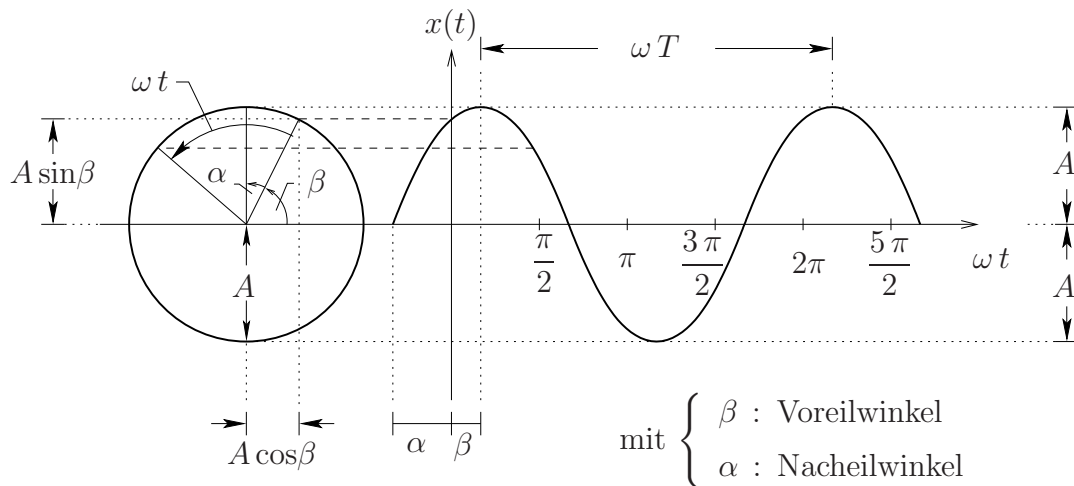
$$e = \frac{v''_{Ba1} - v''_{Bb1}}{v'_{Bb1} - v'_{Ba1}}$$

## TEIL V: Einführung in die Schwingungslehre

### 12 Grundlagen und Voraussetzungen

#### 12.1 Vorbemerkungen und Begriffe

##### Harmonische, periodische Schwingungen



$$x(t) = A \sin(\omega t + \beta)$$

$$\longrightarrow x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t - \alpha)$$

##### Zusammenstellung wichtiger Begriffe:

$A$  : Schwingungsamplitude

$$A = \frac{1}{2}(x_{max} - x_{min})$$

$\omega$  : Kreisfrequenz

$\alpha, \beta$  : Phasenwinkel

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$T$  : Schwingungsdauer (Periode)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$f$  : Frequenz

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

##### Klassifikation von harmonischen Schwingungen:

| freie Schwingung |          | erzwungene Schwingung |          |
|------------------|----------|-----------------------|----------|
| ungedämpft       | gedämpft | ungedämpft            | gedämpft |
|                  |          |                       |          |

## 12.2 Federsteifigkeiten und Federschaltungen

### (a) Ersatzfedersteifigkeiten:

#### Dehnfedern:

Analogie: Federgesetz:  $F = c_F f \rightarrow c_F = \frac{F}{f}$

„1-Kraft“:  $F = 1 \rightarrow c_F = \frac{1}{f}$

Vorgehen:

- Berechnung der Durchbiegung infolge einer Kraft  $F = 1$  (z. B. mit Hilfe des *PdvK*)
- Berechnung der Federsteifigkeit  $c_F$

#### Drehfedern:

Analogie: Federgesetz:  $M = c_D \varphi \rightarrow c_D = \frac{M}{\varphi}$

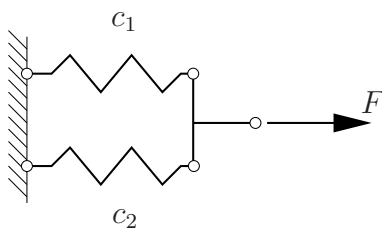
„1-Moment“:  $M = 1 \rightarrow c_D = \frac{1}{\varphi}$

Vorgehen:

- Berechnung der Durchbiegung infolge eines Moments  $M = 1$  (z. B. mit Hilfe des *PdvK*)
- Berechnung der Federsteifigkeit  $c_D$

### (b) Federschaltungen:

#### Parallelschaltung:



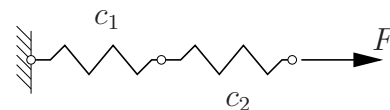
Kriterien der Parallelschaltung:

$$F = F_1 + F_2 \quad (\text{unterschiedliche Kraft})$$

$$f = f_1 = f_2 \quad (\text{gleicher Weg})$$

$$\boxed{c^* = c_1 + c_2}$$

#### Reihenschaltung:



Kriterien der Reihenschaltung:

$$F = F_1 = F_2 \quad (\text{gleiche Kraft})$$

$$f = f_1 + f_2 \quad (\text{unterschiedlicher Weg})$$

$$\boxed{c^* = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}}$$

## 13 Freie Schwingungen mit einem Freiheitsgrad

### 13.1 Freie ungedämpfte Schwingung

- lineare Schwingung (Schwingungsdifferentialgleichung)

$$\boxed{\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} & : \text{ Eigenkreisfrequenz} \\ x_1 & : \text{ Koordinate} \end{cases}$$

Lösung der normierten Schwingungsdifferentialgleichung

$$\boxed{x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)}$$

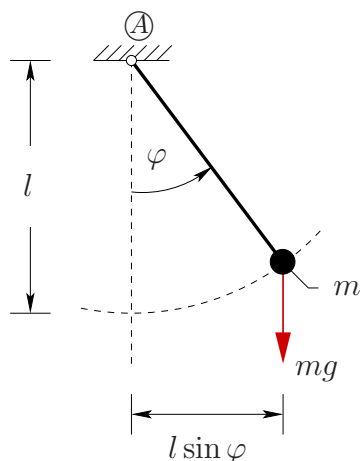
Lösung mit der Berücksichtigung von Anfangsbedingungen

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x_0 & : \text{ Anfangsauslenkung} \\ v_0 & : \text{ Anfangsgeschwindigkeit} \end{cases}$$

Schwingungsamplitude und Phasenwinkel

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2} \\ \tan \beta &= \frac{C_2}{C_1} \quad \rightarrow \quad \beta = \arctan \frac{C_2}{C_1} = \arctan \frac{x_0 \omega}{v_0} \end{aligned}}$$

- Nichtlineare Schwingungen am Beispiel des mathematischen Pendels



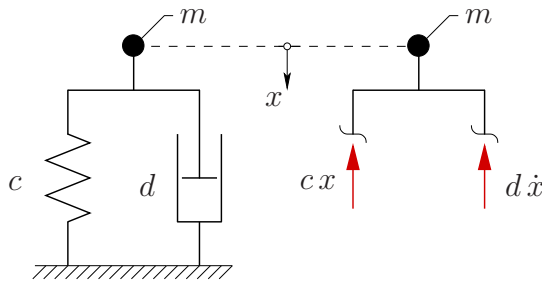
Anwendung des Drallsatzes bezüglich A liefert:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0}$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

## 13.2 Freie gedämpfte Schwingung

- gedämpfter Einmassenschwinger



Stoffgesetze der Feder- und Dämpferelemente:

$$F_F = c x$$

$$F_D = d \dot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2D\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} : \text{ ungedämpfte Eigenkreisfrequenz} \\ D = \frac{d}{2m\omega_0} : \text{ Lehrsches Dämpfungsmaß} \end{cases}$$

**Fall A: überkritische (starke) Dämpfung ( $D > 1$ )**

$$\boxed{x(t) = e^{-D\omega_0 t} \left( \frac{v_0 + D\omega_0 x_0}{\bar{\nu}} \sinh(\bar{\nu} t) + x_0 \cosh(\bar{\nu} t) \right)}$$

mit  $\bar{\nu} = \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}$  : Kreisfrequenz der stark gedämpften Schwingung

**Fall B: kritische Dämpfung (Aperiodischer Grenzfall) ( $D = 1$ )**

$$\boxed{x(t) = e^{-\omega_0 t} [x_0 + (v_0 + x_0 \omega_0) t]}$$

**Fall C: unterkritische (schwache) Dämpfung ( $D < 1$ )**

$$\boxed{x(t) = e^{-D\omega_0 t} \left( \frac{v_0 + D\omega_0 x_0}{\nu} \sin(\nu t) + x_0 \cos(\nu t) \right)}$$

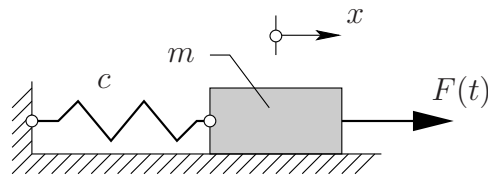
mit  $\nu = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$  : gedämpfte Kreisfrequenz

Alternative Darstellung der Lösung:

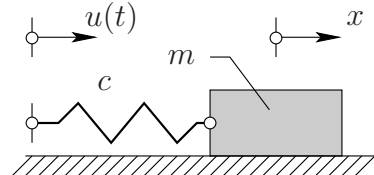
$$\boxed{x(t) = A e^{-D\omega_0 t} \sin(\nu t + \beta)} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} A = \sqrt{\left( \frac{v_0 + D\omega_0 x_0}{\nu} \right)^2 + x_0^2} \\ \beta = \arctan \frac{x_0 \nu}{v_0 + D\omega_0 x_0} \end{cases}$$

## 14 Erzwungene Schwingungen mit einem Freiheitsgrad

### 14.1 Erzwungene ungedämpfte Schwingung mit periodischer Erregung



(1) kraft-erregtes System



(2) weger-erregtes System

**Aufstellung der Schwingungsdifferentialgleichungen** (reibungsfrei)

$$(1) \text{ kraft-erregtes System: } m\ddot{x} = F(t) - cx \quad \longrightarrow \quad m\ddot{x} + cx = F(t)$$

$$(2) \text{ weger-erregtes System: } m\ddot{x} = -c(x - u(t)) \quad \longrightarrow \quad m\ddot{x} + cx = cu(t)$$

**Bem.:** Kraft- und Wegerregung führen auf denselben Typ Differentialgleichung mit dem Störglied  $F(t) = cu(t)$ . Das Störglied repräsentiert in jedem Fall eine Erregerkraft.

Harmonische Erregung:

$$\boxed{\begin{array}{l} F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \\ u(t) = u_0 \cos(\Omega t) \end{array}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} F_0, u_0 : \text{ Erregeramplitude} \\ \Omega : \text{ Erregerkreisfrequenz} \end{cases}$$

**Normierung der Schwingungsdifferentialgleichung.:**

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = a \cos(\Omega t)} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} : \text{ Eigenkreisfrequenz} \\ a = \left\{ \frac{F_0}{m}; \frac{cu_0}{m} \right\} : \text{ Amplitude der Erregerbeschleunigung} \end{cases}$$

**Lösung der normierten Schwingungsdifferentialgleichung:**

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x_h(t) : \text{ Lösung der homogenen Dgl.} \\ x_p(t) : \text{ Partikulärlösung} \end{cases}$$



**(a) homogene Lösung:**

Lösung der homogenen Schwingungsdifferentialgleichung gemäß 13.1.

**(b) spezielle Lösung:**

**Bem.:** Man wählt einen Ansatz in Abhängigkeit des Störglieds.

$$\rightarrow x_p(t) = A_0 \cos(\Omega t) \quad \text{mit} \quad A_0 : \text{Amplitude der Partikularlösung}$$

Einsetzen in die inhomogene Schwingungsdifferentialgleichung liefert die Vergrößerungsfunktion und die statische Amplitude.

**Vergrößerungsfunktion und statische Amplitude:**

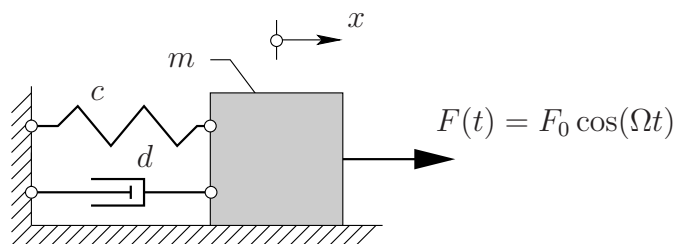
$$A_0 = \frac{a}{\omega^2 - \Omega^2} =: V_a A_{stat.}$$

weiterhin gilt:

$$A_{stat.} = \frac{a}{\omega^2} \quad ; \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0} \rightarrow V_a = \frac{1}{1 - \eta^2}$$

$$\text{mit} \begin{cases} \eta & : \text{Frequenzverhältnis} \\ V_a & : \text{Vergrößerungsfunktion} \\ A_{stat.} & : \text{stat. Auslenkung infolge der Erregeramplitude} \end{cases}$$

## 14.2 Erzwungene gedämpfte Schwingung mit periodischer Erregung

**Aufstellung der Schwingungsdifferentialgleichung:**

$$m \ddot{x} = F(t) - c x - d \dot{x} \quad \rightarrow \quad m \ddot{x} + d \dot{x} + c x = F(t)$$

**Normierung der Schwingungsdifferentialgleichung:**

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = a \cos(\Omega t)$$

$$\text{mit } \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} & : \text{ Eigenkreisfrequenz} \\ D = \frac{d}{2m\omega_0} & : \text{ Lehrsches Dämpfungsmaß} \\ a = \frac{F_0}{m} & : \text{ Amplitude der Erregerbeschleunigung} \end{cases}$$

**(a) homogene Lösung:**

Lösung der homogenen Schwingungsdifferentialgleichung gemäß 13.2.

**(b) spezielle Lösung:**

**Bem.:** Man wählt einen Ansatz in Abhängigkeit des Störglieds.

$$\longrightarrow x_p(t) = A_0 \cos(\Omega t) \quad \text{mit } A_0 : \text{ Amplitude der Partikularlösung}$$

Einsetzen in die inhomogene Schwingungsdifferentialgleichung liefert die Vergrößerungsfunktion und die statische Amplitude.

**Amplitude der Partikularlösung und Vergrößerungsfunktion:**

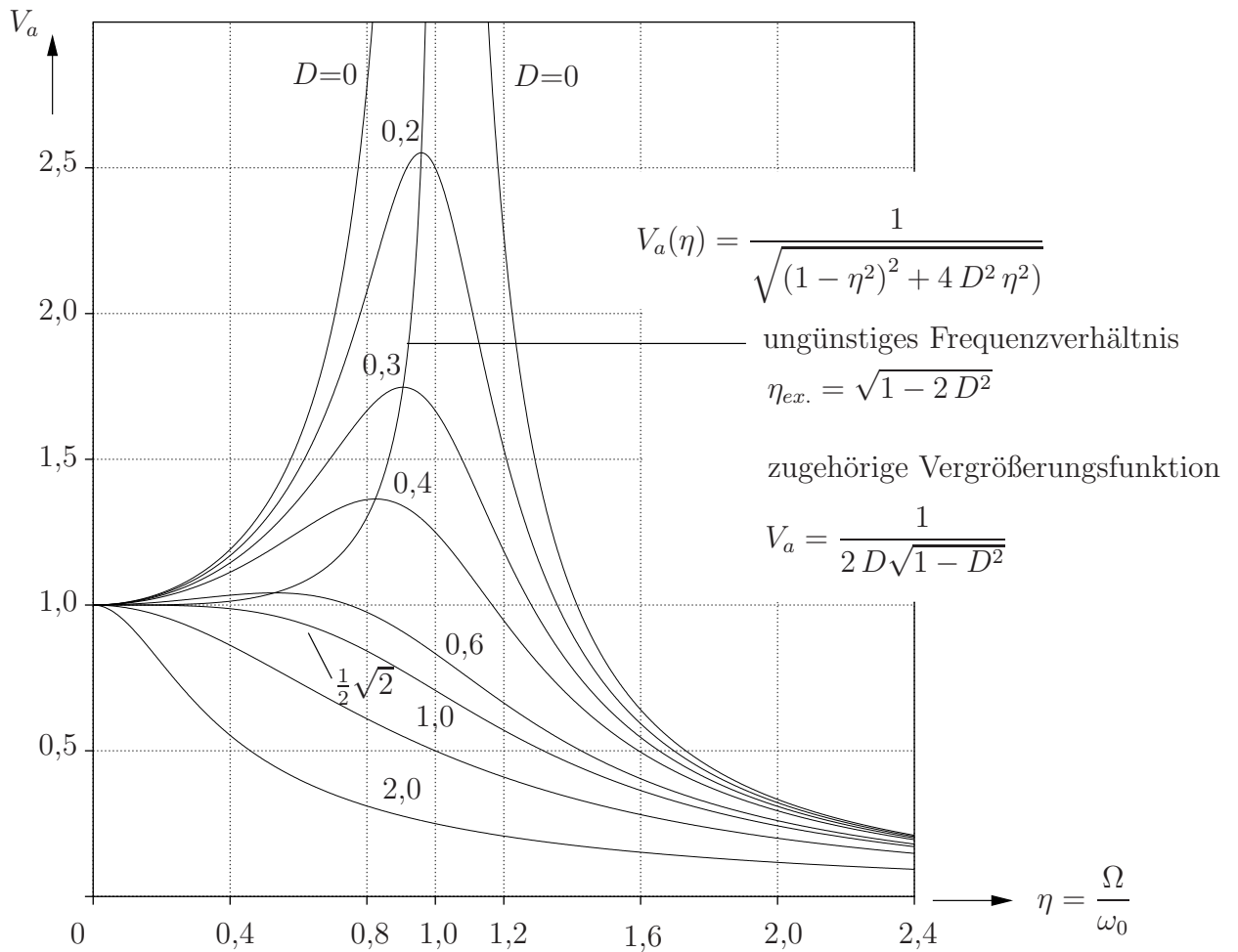
$$A_0 = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2}} =: V_a A_{stat.}$$

Es gilt für die Vergrößerungsfunktion

$$V_a = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \eta = \frac{\Omega}{\omega_0} & : \text{ Frequenzverhältnis} \\ A_{stat.} = \frac{a}{\omega_0^2} & : \text{ stat. Auslenkung infolge der Erregeramplitude} \end{cases}$$

**Vergrößerungsfunktion  $V_a$  (Amplituden-Frequenzgang)**



**Nacheilwinkel  $\varphi$  (Phasen-Frequenzgang)**

