



Universität Stuttgart

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers
www.mechbau.uni-stuttgart.de

Ergänzung zu den Vorlesungen

**Technische Mechanik und
Höhere Mechanik**

Vektor- und Tensorrechnung
Eine Einführung

WS 2015/16

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Voraussetzungen	1
1.1	Grundzüge der Vektorrechnung	1
2	Grundzüge der Tensorrechnung	9
2.1	Einführung des Tensorbegriffs	9
2.2	Elementare Rechenregeln der Tensoralgebra	10
2.3	Spezielle Tensoren und Operationen	13
2.4	Wechsel der Basis	16
2.5	Tensoren höherer Stufe	25
2.6	Fundamentaltensor 3. Stufe (RICCI-Tensor)	28
2.7	Der axiale Vektor	29
2.8	Das äußere Tensorprodukt von Tensoren	32
2.9	Das Eigenwertproblem und die Invarianten eines Tensors	34
3	Grundzüge der Vektor- und Tensoranalysis	36
3.1	Einführung des Funktionsbegriffs	36
3.2	Funktionen skalarer Variablen	36
3.3	Funktionen vektorieller und tensorieller Variablen	37
3.4	Integralsätze	41
3.5	Transformationsbeziehungen zwischen aktueller und Referenzkonfiguration	46

1 Mathematische Voraussetzungen

Bem.: Es werden an dieser Stelle nur die absolut notwendigen Grundzüge der Vektoralgebra in bezug auf ein orthonormiertes Basissystem dargestellt.

1.1 Grundzüge der Vektorrechnung

(a) SYMBOLE, SUMMENKONVENTION, KRONECKER- δ

ein- bzw. mehrfach indizierte Symbole

$$\begin{aligned} u_i &\longrightarrow u_1, u_2, u_3, \dots \\ u_i v_k &\longrightarrow u_1 v_1, u_1 v_2, u_1 v_3, \dots \\ &\quad u_2 v_1, u_2 v_2, \dots \\ &\quad \dots \\ t_{ik} &\longrightarrow t_{11}, t_{12}, \dots \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

EINSTEINSche Summenkonvention

Definition: Bei „doppelter“ Indizierung ist über den doppelten (stummen) Index zu summieren.

Beispiel:

$$\begin{aligned} u_j v_j &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n, \\ &= \sum_{j=1}^n u_j v_j \end{aligned}$$

KRONECKER-Symbol

Definition: Ex. ein Symbol δ_{ik} mit der Eigenschaft

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

Anwendungsbeispiel:

$$\begin{aligned} u_i \delta_{ik} &= u_1 \delta_{1k} + u_2 \delta_{2k} + \dots + u_n \delta_{nk} \\ \text{mit } u_1 \delta_{1k} &= \begin{cases} u_1 \delta_{11} = u_1 \\ u_1 \delta_{12} = 0 \\ \vdots \\ u_1 \delta_{1n} = 0 \end{cases} \\ \longrightarrow u_i \delta_{ik} &= u_k \end{aligned}$$

Wird das KRONECKER-Symbol über einen stummen Index mit einer indizierten Größe

multipliziert, so entfällt das KRONECKER-Symbol, der stumme Index verschwindet und der freie Index bleibt erhalten.

Bem.: Stumme Indizes können beliebig umbenannt werden.

(b) BEGRIFFE UND DEFINITIONEN DER VEKTORALGEBRA

Bem.: Alle folgenden Darstellungen beziehen sich auf den 3-d Anschauungsraum unserer physikalischen Erfahrung; d. h. auf den eigentlich EUKLIDischen Vektorraum \mathcal{V}^3 .

hier: RAUM ist ein Mengenbegriff aus der Mathematik und hat nicht unmittelbar mit dem 3-d Punktraum \mathcal{E}^3 und dem 3-d Vektorraum \mathcal{V}^3 zu tun.

A: Vektoraddition

Vor.: ex. $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots\} \in \mathcal{V}^3$

Es gelten die folgenden Beziehungen:

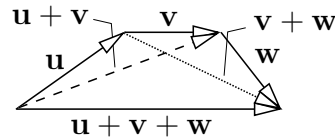
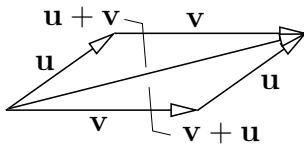
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad : \text{kommutatives Gesetz}$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad : \text{assoziatives Gesetz}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \quad : \mathbf{0} : \text{Identisches Element bzgl. der Vektoraddition}$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad : -\mathbf{u} : \text{inverses Element bzgl. der Vektoraddition}$$

Beispiele zum kommutativen und assoziativen Gesetz:



B: Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Vor.: ex. $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots\} \in \mathcal{V}^3$; $\{\alpha, \beta, \dots\} \in \mathbb{R}$

$$1 \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad : 1: \text{identisches Element}$$

$$\alpha (\beta \mathbf{v}) = (\alpha \beta) \mathbf{v} \quad : \text{assoziatives Gesetz}$$

$$(\alpha + \beta) \mathbf{v} = \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{v} \quad : \text{distributives Gesetz (skalare Addition)}$$

$$\alpha (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \mathbf{v} + \alpha \mathbf{w} \quad : \text{distributives Gesetz (Vektoraddition)}$$

$$\alpha \mathbf{v} = \mathbf{v} \alpha \quad : \text{kommutatives Gesetz}$$

Bem.: In der allgemeinen Vektorrechnung legen die Definitionen A und B den „affinen Vektorraum“ fest.

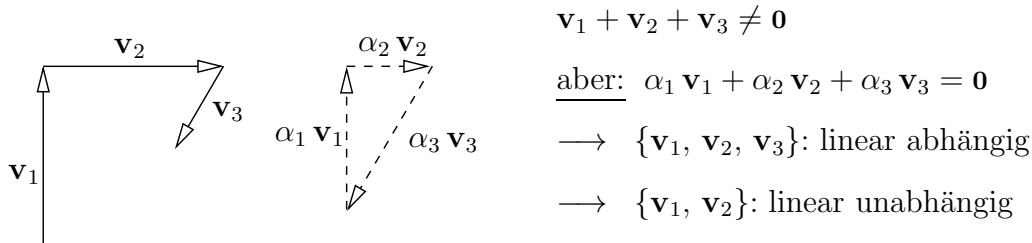
Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Bem.: Im \mathcal{V}^3 sind je 3 nicht-koplanare Vektoren linear unabhängig; d. h. jeder weitere Vektor kann als Vielfaches dieser Vektoren dargestellt werden.

Satz: Die Vektoren \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) sind linear abhängig, wenn reelle Zahlen α_i existieren, die nicht alle gleich Null sind, so daß gilt

$$\alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Beispiel (ebener Fall):



Bem.: Die α_i können mit einem beliebigen Faktor λ multipliziert werden.

Basisvektoren im \mathcal{V}^3

ex. : $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$: linear unabhängig

dann : $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}\}$: linear abhängig

es folgt

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \lambda \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\rightarrow \lambda \mathbf{v} = -\alpha_i \mathbf{v}_i$$

$$\text{bzw.} \quad \mathbf{v} = \frac{-\alpha_i}{\lambda} \mathbf{v}_i =: \beta_i \mathbf{v}_i$$

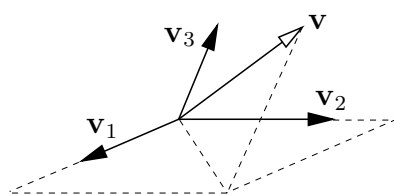
$$\text{mit} \quad \begin{cases} \beta_i = \frac{-\alpha_i}{\lambda} & : \text{ Koeffizienten (der Vektorkomponenten)} \\ \mathbf{v}_i & : \text{ Basisvektoren von } \mathcal{V} \end{cases}$$

Wahl eines speziellen Basissystems

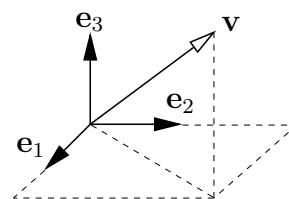
Bem.: Im \mathcal{V}^3 kann jedes System von 3 linear unabhängigen Vektoren als Basissystem gewählt werden; z. B.

\mathbf{v}_i : allgemeines Basissystem

\mathbf{e}_i : spezielles, orthonormiertes Basissystem (Rechtssystem)



Basissystem \mathbf{v}_i



Basissystem \mathbf{e}_i

Darstellung des Vektors \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \beta_i \mathbf{v}_i \\ \gamma_i \mathbf{e}_i \end{cases}$$

hier: Spezielle Wahl der orthonormierten Basis \mathbf{e}_i

Bezeichnungen

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$$

mit $\begin{cases} v_i \mathbf{e}_i & : \text{Vektorkomponenten} \\ v_i & : \text{Koeffizienten der Vektorkomponenten} \end{cases}$

C: Skalarprodukt von Vektoren

Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} && : \text{kommutatives Gesetz} \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} && : \text{distributives Gesetz} \\ \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{v}) = (\alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} && : \text{assoziatives Gesetz} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \forall \mathbf{u}, \text{ wenn } \mathbf{v} \equiv \mathbf{0} \\ \rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &\neq 0 \quad , \text{ wenn } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Bem.: Die Definitionen A, B und C legen den „EUKLIDischen Vektorraum“ fest. Gilt anstelle von $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \neq 0$ speziell

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 \quad , \text{ wenn } \mathbf{u} \neq \mathbf{0},$$

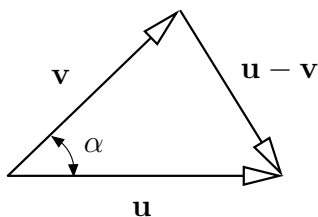
dann legen A, B und C den „eigentlich EUKLIDischen Vektorraum \mathcal{V}^3 “ (Anschauungsraum) fest.

Quadrat und Norm eines Vektors

$$\mathbf{v}^2 := \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad , \quad v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^2}$$

Bem.: Die Norm ist der Betrag bzw. die positive Quadratwurzel des Vektors.

Winkel zwischen zwei Vektoren



$$\sphericalangle(\mathbf{u}; \mathbf{v}) =: \alpha$$

Kosinussatz (vgl. z. B. BRONSTEIN-SEMENDJAJEW, Taschenbuch der Mathematik)

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$$

$$\rightarrow \cos\alpha = \frac{\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 - (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}{2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

$$\text{bzw. } \cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

$$\text{oder } \boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha}$$

Skalarprodukte (innere Produkte) in Basisdarstellung

Skalarprodukt der Basisvektoren \mathbf{e}_i :

$$\sphericalangle(\mathbf{e}_i; \mathbf{e}_k) \begin{cases} 90^\circ & \text{für } i \neq k & : \cos 90^\circ = 0 \\ 0^\circ & \text{für } i = k & : \cos 0^\circ = 1 \end{cases}$$

so daß

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k &= |\mathbf{e}_i||\mathbf{e}_k|\cos\sphericalangle(\mathbf{e}_i; \mathbf{e}_k) \\ &= \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_i; \mathbf{e}_k) \end{aligned}$$

Es folgt mit dem KRONECKER- δ

$$\boxed{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}}$$

Skalarprodukt von zwei Vektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_i \mathbf{e}_i) \cdot (v_k \mathbf{e}_k) \\ &= u_i v_k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) \\ &= u_i v_k \delta_{ik} \\ &= u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \end{aligned}$$

D: Kreuzprodukt (äußeres Produkt) von Vektoren

Man definiert das folgende Vektorprodukt

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\sphericalangle(\mathbf{u}; \mathbf{v})\mathbf{n}$$

mit \mathbf{n} : Einheitsvektor $\perp \mathbf{u}, \mathbf{v}$ (Rechtsschraubenregel, vgl. S. 7)

Aus o. g. Definition erhält man die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= -\mathbf{v} \times \mathbf{u} && : \text{kein kommutatives Gesetz} \\ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} && : \text{distributives Gesetz} \\ \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha\mathbf{v}) && : \text{assoziatives Gesetz} \end{aligned}$$

Dreifaches skalares Produkt (Spatprodukt):

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

Rechenregeln für das äußere Produkt (ohne Beweis)

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = 0\end{aligned}$$

Entwicklungssatz:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}$$

LAGRANGESche Identität (Jean Louis Lagrange: 1736-1813):

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$$

Norm des äußeren Produkts:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \sphericalangle(\mathbf{u}; \mathbf{v})$$

Kreuzprodukt in Basisdarstellung

hier: vereinfachte Darstellung im Matrizenschema

Berechnung von

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2) \mathbf{e}_1 - (v_1 w_3 - v_3 w_1) \mathbf{e}_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Bem.: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}, \mathbf{w}$; d. h. es muß gelten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$

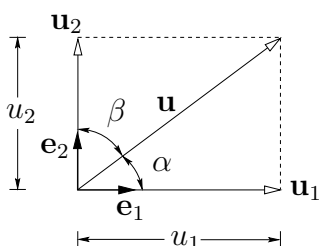
Beispiel:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i = (v_2 w_3 - v_3 w_2) v_1 - (v_1 w_3 - v_3 w_1) v_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1) v_3 = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

Bemerkungen zu den Produkten von Vektoren

• zum Skalarprodukt

Zerlegung eines Vektors (Beispiel: in der Ebene):



$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

$$\text{mit } \mathbf{u}_i = u_i \mathbf{e}_i$$

\mathbf{u}_i : Vektorkomponenten

u_i : Koeffizienten der Vektorkomponenten

Projektion von \mathbf{u} auf die Richtungen von \mathbf{e}_i :

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$$

Bestätigung der Projektionsregel:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i &= (u_k \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i \\ &= u_k \delta_{ki} = u_i \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

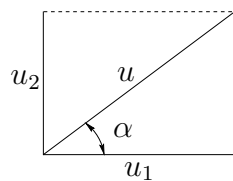
Berechnung der Projektionen:

$$\begin{aligned} u_1 &= |\mathbf{u}| |\mathbf{e}_1| \cos \alpha \\ &= |\mathbf{u}| \cos \alpha = u \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\text{mit } u = |\mathbf{u}|$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u \cos \beta \\ &= u \cos(90^\circ - \alpha) = u \sin \alpha \end{aligned}$$

Merke: Für die Beträge von Vektorkomponenten gilt

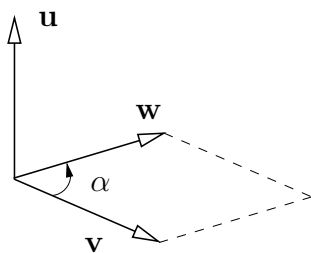


$$u_1 = u \cos \alpha$$

$$u_2 = u \sin \alpha$$

• zum Kreuzprodukt

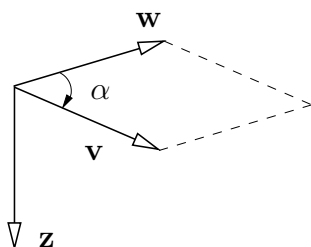
Orientierung des Vektors $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$:



$$(1) \quad \mathbf{u} \perp \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

$$(2) \quad \text{Rechtsschraubenregel (Rechtshandregel)}$$

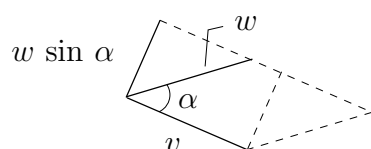
Es ist offensichtlich, daß



$$\mathbf{z} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

$$\longrightarrow \mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

Betrag des Kreuzprodukts:

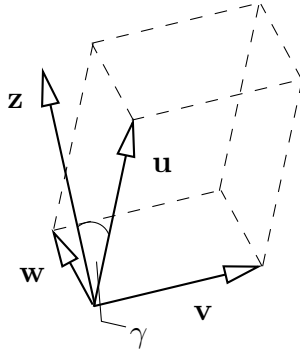


$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \sin \alpha$$

$$= v (w \sin \alpha)$$

Merke: Der Vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ steht senkrecht auf \mathbf{v} und \mathbf{w} (Rechtsschraubenorientierung); sein Betrag entspricht der von \mathbf{v} und \mathbf{w} aufgespannten Fläche.

dreifach skalares Produkt (Spatprodukt):



$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) =: [\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{w}]$$

$$\text{mit } \mathbf{z} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

$$\text{folgt } \mathbf{u} \cdot \mathbf{z} = |\mathbf{u}| |\mathbf{z}| \cos \gamma$$

$$= z (u \cos \gamma)$$

$$\text{mit } (u \cos \gamma) : \text{Projektion von } \mathbf{u} \text{ auf Richtung von } \mathbf{z}$$

Bem.: Spatprodukt liefert das Volumen des von \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} gebildeten Parallelepipedes (Spat).

Bemerkung: Die in diesem Skript dargestellten Beziehungen gelten grundsätzlich in jedem beliebigen Basissystem. Zur Vereinfachung werden die folgenden Basisdarstellungen stets bezüglich einer orthonormierten Basis angegeben. Eine allgemeinere Darstellung findet sich u. a. bei DE BOER, R.: Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure. Springer-Verlag, Berlin 1982.

2 Grundzüge der Tensorrechnung

Bem.: Alle folgenden Darstellungen beziehen sich auf den eigentlich EUKLIDischen Vektorraum \mathcal{V}^3 und den daraus herleitbaren n -fachen dyadischen Produktraum $\mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^3$ (n -mal).

2.1 Einführung des Tensorbegriffs

(a) TENSORBEGRIFF UND LINEARE ABBILDUNG

Definition: Ein Tensor \mathbf{T} 2. Stufe ist eine lineare Abbildung, die einem Vektor \mathbf{u} eindeutig einen Vektor \mathbf{w} zuordnet:

$$\mathbf{w} = \mathbf{T} \mathbf{u}$$

darin sind $\begin{cases} \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}^3 & ; \quad \mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^3, \mathcal{V}^3) \\ \mathcal{L}(\mathcal{V}^3, \mathcal{V}^3) & : \quad \text{Menge aller Tensoren 2. Stufe bzw.} \\ & \quad \text{linearer Abbildungen von Vektoren} \end{cases}$

(b) TENSORBEGRIFF UND DYADISCHER PRODUKTRAUM

Definition: Es existiert ein „einfacher Tensor“ ($\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$) mit der Eigenschaft

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{c} =: (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$$

darin sind $\begin{cases} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3 & \text{(dyadischer Produktraum)} \\ \otimes & : \quad \text{dyadisches Produkt (binäres Verknüpfungssymbol)} \end{cases}$

man erkennt unmittelbar, daß

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^3, \mathcal{V}^3) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3 \subset \mathcal{L}(\mathcal{V}^3, \mathcal{V}^3)$$

Bem.: ($\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$) bildet einen Vektor \mathbf{c} in einen Vektor $\mathbf{d} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$ ab.

Basisdarstellung des einfachen Tensors:

$$\mathbf{A} := \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \otimes (b_k \mathbf{e}_k) = a_i b_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)$$

mit $\begin{cases} a_i b_k & : \quad \text{Koeffizienten der Tensorkomponenten} \\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k & : \quad \text{Tensorbasis} \end{cases}$

d. h.: Tensoren $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ besitzen 9 unabhängige Komponenten (und Richtungen); z. B. $a_1 b_3 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3)$ u. s. w.

Basisdarstellung eines beliebigen Tensors:

$$\mathbf{T} = t_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)$$

$$\text{mit } t_{ik} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} : \begin{cases} \text{Koeffizientenmatrix von } \mathbf{T} \text{ mit} \\ 9 \text{ unabhängigen Einträgen} \end{cases}$$

2.2 Elementare Rechenregeln der Tensoralgebra

Vor.: Es existiert $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots\} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$.

(a) TENSORADDITION

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad : \text{kommutatives Gesetz}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad : \text{assoziatives Gesetz}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A} \quad : \mathbf{0} \quad : \text{identisches Element}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad : -\mathbf{A} \quad : \text{inverses Element}$$

Tensoraddition bzgl. der orthonormierten Tensorbasis:

$$\mathbf{A} = a_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k), \quad \mathbf{B} = b_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)$$

$$\longrightarrow \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \underbrace{(a_{ik} + b_{ik})}_{c_{ik}} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)$$

Bem.: Die Ausführung der Tensoraddition als Addition der Tensorkoeffizienten setzt für beide Tensoren dieselbe Tensorbasis voraus.

(b) MULTIPLIKATION EINES TENSORS MIT EINEM SKALAR

$$1 \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad : 1 \quad : \text{identisches Element}$$

$$\alpha (\beta \mathbf{A}) = (\alpha \beta) \mathbf{A} \quad : \text{assoziatives Gesetz}$$

$$(\alpha + \beta) \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A} \quad : \text{distributives Gesetz (bzgl. skalarer Addition)}$$

$$\alpha (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \quad : \text{distributives Gesetz (bzgl. Tensoraddition)}$$

$$\alpha \mathbf{A} = \mathbf{A} \alpha \quad : \text{kommutatives Gesetz}$$

(c) LINEARE ABBILDUNG ZWISCHEN TENSOR UND VEKTOR

Es gilt die Definition der linearen Abbildung (vgl. 2.1)

$$\mathbf{w} = \mathbf{T} \mathbf{u}$$

Bem.: Die Multiplikation eines Tensors mit einem Vektor wird in der Literatur gelegentlich auch als „verjüngendes Produkt“ eingeführt.

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} && : \text{distributives Gesetz} \\ \mathbf{A}(\alpha \mathbf{u}) &= \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}) && : \text{assoziatives Gesetz} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} &= \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u} && : \text{distributives Gesetz} \\ (\alpha \mathbf{A})\mathbf{u} &= \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}) && : \text{assoziatives Gesetz} \\ \mathbf{0}\mathbf{u} &= \mathbf{0} && : \mathbf{0} : \text{Nullelement der linearen Abbildung} \\ \mathbf{I}\mathbf{u} &= \mathbf{u} && : \mathbf{I} : \text{identisches Element der linearen Abbildung} \end{aligned}$$

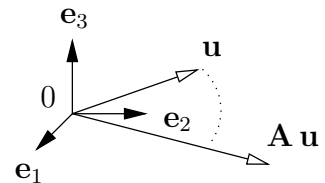
Lineare Abbildung in Basisdarstellung:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= a_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k), \quad \mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{A}\mathbf{u} &= (a_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) (u_j \mathbf{e}_j) = a_{ik} u_j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Man erhält

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} = a_{ik} u_j \delta_{kj} \mathbf{e}_i = \underbrace{a_{ik} u_k}_{w_i} \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad \begin{cases} i & : \text{freier Index} \\ k & : \text{stummer Index} \end{cases}$$

Bem.: Eine lineare Abbildung \mathbf{A} bewirkt in der Regel eine Drehung **und** eine Streckung des Vektors \mathbf{u} .



Identitätstensor $\mathbf{I} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$:

$$\mathbf{I} = \delta_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$$

Kontrolle der definierten Eigenschaft:

$$\mathbf{u} = \mathbf{I}\mathbf{u} = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) u_j \mathbf{e}_j = u_j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j = u_j \delta_{ij} \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{e}_i \quad \text{q. e. d.}$$

Bem.: Tensoren, die nur Basisvektoren enthalten, heißen Fundamentaltensoren, d. h.

$$\mathbf{I} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3 \text{ ist Fundamentaltensor 2. Stufe.}$$

(d) SKALARPRODUKT VON TENSOREN (inneres Produkt)

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} && : \text{kommutatives Gesetz} \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} && : \text{distributives Gesetz} \\ (\alpha \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{A} \cdot (\alpha \mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) && : \text{assoziatives Gesetz} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad \forall \mathbf{A}, \text{ wenn } \mathbf{B} \equiv \mathbf{0} \\ &\longrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} > 0 \text{ für } \mathbf{A} \neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Skalarprodukt von \mathbf{A} mit einem einfachen Tensor $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \mathbf{b}$$

Skalarprodukt in Basisdarstellung:

$$\mathbf{A} = a_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k), \quad \mathbf{B} = b_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)$$

$$\alpha = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \cdot b_{st} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) = a_{ik} b_{st} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t)$$

Man erhält

$$\alpha = a_{ik} b_{st} \delta_{is} \delta_{kt} = a_{ik} b_{ik}$$

Bem.: Das Ergebnis des Skalarprodukts ist ein Skalar.

(e) TENSORPRODUKT VON TENSOREN

Definition: Das Tensorprodukt von Tensoren genügt der Beziehung

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v})$$

Bem.: Mit dieser Definition ist das Tensorprodukt von Tensoren unmittelbar an die lineare Abbildung geknüpft (vgl. 2.1 (a)).

Es gelten die Beziehungen

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) \quad : \text{assoziatives Gesetz}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C} \quad : \text{distributives Gesetz}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C} \quad : \text{distributives Gesetz}$$

$$\alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) \quad : \text{assoziatives Gesetz}$$

$$\mathbf{I}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{I} = \mathbf{T} \quad : \mathbf{I} : \text{identisches Element}$$

$$\mathbf{0}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad : \mathbf{0} : \text{Nullelement}$$

Bem.: Das kommutative Gesetz gilt im allgemeinen nicht, d. h. $\mathbf{A}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{A}$.

Tensorprodukt für einfache Tensoren:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$$

Es gilt mit oben genannter Definition:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{v} &= \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v}) \\ \longrightarrow [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})]\mathbf{v} &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})[(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})\mathbf{v}] \\ &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{v})\mathbf{c} \\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} \\ &= [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{d})]\mathbf{v} \end{aligned}$$

Konsequenz:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \otimes \mathbf{d}$$

Tensorprodukt in Basisdarstellung:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{B} &= a_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) b_{st} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \\ &= a_{ik} b_{st} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \\ &= a_{ik} b_{st} \delta_{ks} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t) \\ &= a_{ik} b_{kt} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t) \end{aligned}$$

Bem.: Das Ergebnis des Tensorprodukts ist ein Tensor.

2.3 Spezielle Tensoren und Operationen

(a) TRANSPONIERTER TENSOR

Definition: Der zu $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ gehörende transponierte Tensor \mathbf{A}^T genügt der Eigenschaft

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{u}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$$

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \\ (\alpha \mathbf{A})^T &= \alpha \mathbf{A}^T \\ (\mathbf{A} \mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \end{aligned}$$

Transposition eines einfachen Tensors $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$:

Mit oben genannter Definition gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{u} &= \mathbf{w} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{a} \\ &= (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \\ \longrightarrow (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \end{aligned}$$

Transponierter Tensor in Basisdarstellung:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= a_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \\ \longrightarrow \mathbf{A}^T &= a_{ik} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) \\ &= a_{ki} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \quad : \text{Umbenennung der Indizes} \end{aligned}$$

Merke: Transposition eines beliebigen Tensors $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ kann durch Transposition der Tensorbasen **oder** der Tensorkoeffizienten erfolgen.

(b) SYMMETRISCHER UND SCHIEFSYMMETRISCHER TENSOR

Definition: Ein Tensor $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ ist symmetrisch, wenn

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

und schief-symmetrisch (antimetrisch), wenn

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$$

Symmetrischer und schief-symmetrischer Anteil eines beliebigen Tensors $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$:

$$\text{sym } \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$$

$$\text{skw } \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

$$\longrightarrow \mathbf{A} = \text{sym } \mathbf{A} + \text{skw } \mathbf{A}$$

Eigenschaften symmetrischer und schief-symmetrischer Tensoren:

$$\mathbf{w} \cdot (\text{sym } \mathbf{A}) \mathbf{v} = (\text{sym } \mathbf{A}) \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} \cdot (\text{skw } \mathbf{A}) \mathbf{v} = -(\text{skw } \mathbf{A}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Positive Definitheit symmetrischer Tensoren:

- $\text{sym } \mathbf{A}$ ist positiv definit, wenn $\text{sym } \mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\text{sym } \mathbf{A}) \mathbf{v} > 0$
- $\text{sym } \mathbf{A}$ ist positiv semidefinit, wenn $\text{sym } \mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\text{sym } \mathbf{A}) \mathbf{v} \geq 0$

(c) INVERSER TENSOR

Definition: Der zu $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ gehörende inverse Tensor \mathbf{A}^{-1} genügt der Eigenschaft

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{w} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}$$

Vor.: \mathbf{A}^{-1} existiert

Es gelten die Beziehungen

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} =: \mathbf{A}^{T-1}$$

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

Bem.: Die Berechnung des inversen Tensors in Basisdarstellung erfolgt im Zusammenhang mit der Einführung des „doppelten Kreuzprodukts“ (äußeres Tensorprodukt von Tensoren).

(d) ORTHOGONALER TENSOR

Definition: Ein orthogonaler Tensor $\mathbf{Q} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ genügt der Eigenschaft

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$$

Darüber hinaus gilt $\begin{cases} \det \mathbf{Q} = \pm 1 & : \text{ orthogonaler Tensor} \\ \det \mathbf{Q} = 1 & : \text{ eigentlich orthogonaler Tensor} \end{cases}$

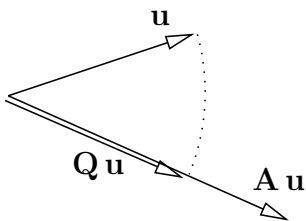
Bem.: Die Berechnung der Determinante eines Tensors zweiter Stufe erfolgt mit Hilfe des äußeren Tensorprodukts (vgl. 2.8).

Eigenschaft des orthogonalen Tensors:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{w} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \\ \longrightarrow \mathbf{Q} \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{u} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Bem.: Eine lineare Abbildung mit \mathbf{Q} erhält die Norm eines Vektors (vgl. TM I, 1.2 B)

Veranschaulichung:



im allgemeinen: lineare Abbildung mit $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ bewirkt Drehung **und** Streckung

speziell: lineare Abbildung mit \mathbf{Q} bewirkt **nur** eine Drehung

(e) SPUR EINES TENSORS

Definition: Die Spur $\text{tr } \mathbf{A}$ eines Tensors $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ ist das spezielle Skalarprodukt

$$\text{tr } \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$$

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \text{tr}(\alpha \mathbf{A}) &= \alpha \text{tr } \mathbf{A} \\ \text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \text{tr } \mathbf{A}^T &= \text{tr } \mathbf{A} \\ \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}) &= \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{A}) \\ \longrightarrow (\mathbf{A} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} \\ \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}) &= \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B}) \end{aligned}$$

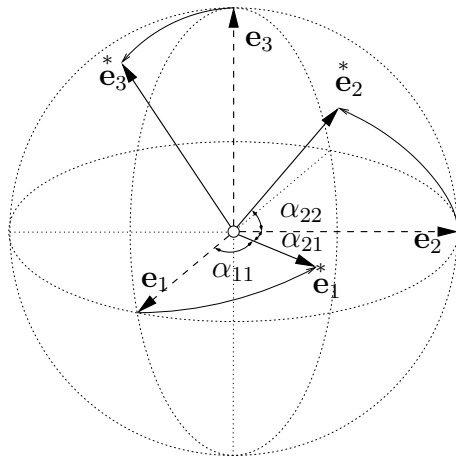
2.4 Wechsel der Basis

Bem.: Ziel ist die Herstellung eines Zusammenhangs für die Darstellung vektorieller und tensorieller Größen bzgl. unterschiedlicher Basissysteme.

hier: Beschränkung auf gegeneinander gedrehte, orthonormierte Basissysteme.

(A) DREHUNG DES BEZUGSSYSTEMS

Veranschaulichung:



$\{0, \mathbf{e}_i\}$: Bezugssystem

$\{0, \mathbf{e}_i^*\}$: gedrehtes Bezugssystem

$\{\alpha_{ik}\}$: Winkel zwischen den Basisvektoren \mathbf{e}_i und \mathbf{e}_k^*

Entwicklung des Transformationstensors:

Es gilt

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{I} \mathbf{e}_i^* \quad \text{und} \quad \mathbf{I} = \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j$$

so daß

$$\mathbf{e}_i^* = (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_i^* = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^*) \mathbf{e}_j$$

man benutzt $\mathbf{e}_i^* = \delta_{ik} \mathbf{e}_k^*$, so daß

$$\mathbf{e}_i^* = (\mathbf{e}_j \cdot \delta_{ik} \mathbf{e}_k^*) \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^*) (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_j$$

man erhält

$$\mathbf{e}_i^* = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^*) (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_i =: \mathbf{R} \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^*) \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

Bem.: \mathbf{R} ist der Transformationstensor, der die Basisvektoren \mathbf{e}_i in die Basisvektoren \mathbf{e}_i^* abbildet.

Koeffizientenmatrix R_{jk} :

$$R_{jk} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^* = |\mathbf{e}_j| |\mathbf{e}_k^*| \cos \sphericalangle (\mathbf{e}_j; \mathbf{e}_k^*) = \cos \alpha_{jk} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{e}_j| = |\mathbf{e}_k^*| = 1$$

Bem.: R_{jk} enthält die 9 „Richtungscosini“ zwischen den Basisvektoren \mathbf{e}_i und \mathbf{e}_k^* .

Orthogonalität des Transformationstensors:

Bem.: Die Basisvektoren \mathbf{e}_i erfahren eine reine Drehung, d. h. \mathbf{R} ist orthogonaler Tensor.

Orthogonalitätsbedingung:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} \mathbf{R}^T \stackrel{!}{=} \mathbf{I} &= R_{jk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) R_{pn} (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_p) = R_{jk} R_{pn} \delta_{kn} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p \\ &= R_{jk} R_{pk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p)\end{aligned}$$

Mit $\mathbf{I} = \delta_{jp} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p)$ folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\boxed{R_{jk} R_{pk} = \delta_{jp}} \quad (*)$$

Bem.: (*) liefert 6 Bedingungen an die 9 Richtungscosini ($\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \text{sym}(\mathbf{R} \mathbf{R}^T)$), d. h. nur 3 der 9 Winkelfunktionen sind voneinander unabhängig, so daß die Drehung des Bezugssystems durch 3 Winkel darstellbar ist.

(B) EINFÜHRUNG CARDANOSCHER WINKEL

Idee: Drehung um 3 Achsen, die durch die Basisrichtungen \mathbf{e}_i gegeben sind. Dieses Vorgehen geht zurück auf GIROLAMO CARDANO (1501-1576).

Vorgehensweise: Man setzt die Drehung des Bezugssystems aus drei voneinander unabhängigen Drehungen um die Achsen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ zusammen. Jede Drehung wird durch einen Transformationstensor \mathbf{R}_i ($i=1, 2, 3$) ausgedrückt.

Drehung von \mathbf{e}_i um $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1$

$$\mathbf{e}_i^* = \{\mathbf{R}_1 [\mathbf{R}_2 (\mathbf{R}_3 \mathbf{e}_i)]\} = \mathbf{R}^* \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3$$

Drehung von \mathbf{e}_i um $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \{\mathbf{R}_3 [\mathbf{R}_2 (\mathbf{R}_1 \mathbf{e}_i)]\} = \bar{\mathbf{R}} \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$$

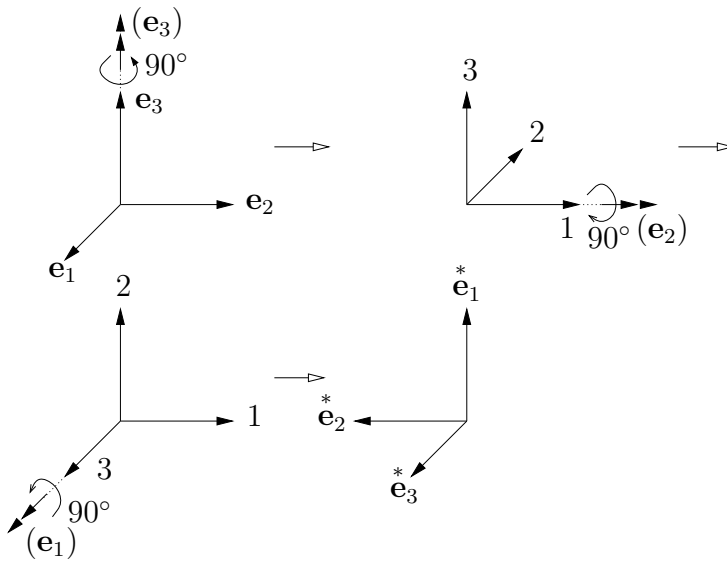
Man erkennt

$$\mathbf{R}^* \neq \bar{\mathbf{R}} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{e}^* \neq \bar{\mathbf{e}}_i$$

Bem.: Das Ergebnis der orthogonalen Transformation hängt von der Reihenfolge der Drehungen ab.

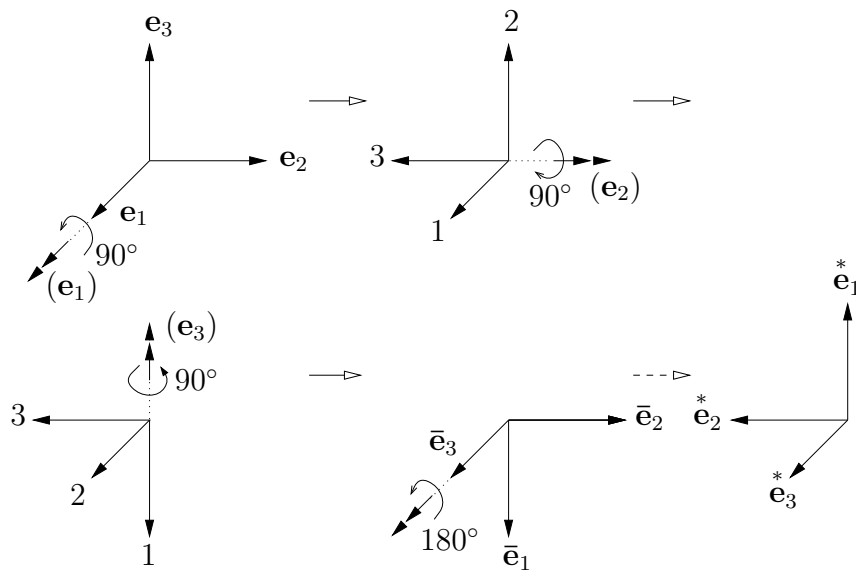
Veranschaulichung:

(a) Drehung um e_3, e_2, e_1 (z. B. jeweils um 90°)



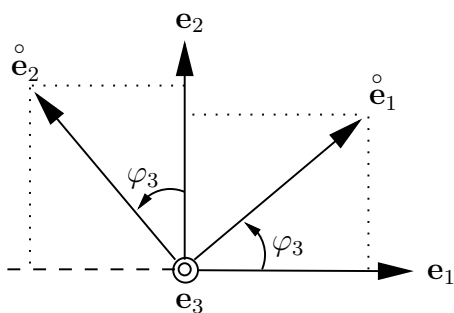
(b) Drehung um e_1, e_2, e_3 (z. B. jeweils um 90°)

mit



Bestimmung der orthogonalen Drehtensoren R_i

(a) Drehung um die e_3 -Achse



Es gilt:

$$\overset{\circ}{e}_1 = \cos \varphi_3 e_1 + \sin \varphi_3 e_2$$

$$\overset{\circ}{e}_2 = -\sin \varphi_3 e_1 + \cos \varphi_3 e_2$$

$$\overset{\circ}{e}_3 = e_3$$

Es gilt allgemein

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i = \mathbf{R}_3 \mathbf{e}_i = R_{3jk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_i = R_{3jk} \delta_{ki} \mathbf{e}_j = R_{3ji} \mathbf{e}_j$$

so daß durch Koeffizientenvergleich

$$\mathbf{R}_3 = R_{3ji} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \quad \text{mit} \quad R_{3ji} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Drehung um die \mathbf{e}_2 - und \mathbf{e}_1 -Achse

Es folgt in Analogie zum Vorangegangenen

$$\mathbf{R}_2 = R_{2ji} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \quad \text{mit} \quad R_{2ji} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = R_{1ji} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \quad \text{mit} \quad R_{1ji} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix}$$

Bem.: Der Rotationstensor \mathbf{R} kann aus den Einzelrotationen unter Beachtung der Reihenfolge der Drehungen zusammengesetzt werden.

(c) Bestimmung der Gesamttrotation \mathbf{R}

(c₁) bei Drehung von \mathbf{e}_i um $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \overset{*}{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \\ &= R_{1ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) R_{2no} (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_o) R_{3pq} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) \\ &= R_{1ij} R_{2no} R_{3pq} \delta_{jn} \delta_{op} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_q) \\ &= \underbrace{R_{1ij} R_{2jo} R_{3oq}}_{\overset{*}{R}_{iq}} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_q) \end{aligned}$$

mit

$$\overset{*}{R}_{iq} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & -\cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 & \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

(c₂) bei Drehung von \mathbf{e}_i um $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \\ &= \underbrace{R_{3ij} R_{2jo} R_{1oq}}_{\bar{R}_{iq}} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_q) \end{aligned}$$

mit

$$\bar{R}_{iq} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 & \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 \\ \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 & \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 \\ -\sin \varphi_2 & \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Orthogonalität der CARDANOSchen Drehtensoren:

Es gilt für alle $\mathbf{R} \in \{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \overset{*}{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}\}$

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T, \text{ d. h. } \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad (\det \mathbf{R})^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Orthogonalität}$$

darüber hinaus gilt für alle Drehtensoren

$$\det \mathbf{R} = 1 \quad : \quad \text{„eigentliche“ Orthogonalität}$$

Bem.: Eine Basistransformation mit „uneigentlich“ orthogonalen Transformationen ($\det \mathbf{R} = -1$) erzeugt aus einem „rechtshändigen“ ein „linkshändiges“ Basissystem.

Beispiel zur Orthogonalität:

hier: Untersuchung von $\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_{3ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$

$$\text{mit } R_{3ij} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_3^T &= R_{3ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) R_{3on}(\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_o) \\ &= R_{3ij} R_{3on} \delta_{jn} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_o) = R_{3in} R_{3on} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_o) \end{aligned}$$

worin

$$R_{3in} R_{3on} = \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi_3 + \cos^2 \varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \varphi_3 + \cos^2 \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_{io}$$

und erhält

$$\mathbf{R}_3 \mathbf{R}_3^T = \delta_{io} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_o) = \mathbf{I} \quad \text{q. e. d.}$$

außerdem folgt

$$\det \mathbf{R}_3 := \det (R_{3ij}) = 1 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}_3 \text{ ist eigentlich orthogonal}$$

Darstellung von Rotationstensoren:

Es gilt allgemein bei Transformation zwischen Basissystemen $\bar{\mathbf{e}}_i$ und Basissystemen $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i &= \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{e}}_i \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{R}} = \bar{R}_{ik} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_k \\ \longrightarrow \quad \bar{\mathbf{e}}_i &= \bar{\mathbf{R}}^T \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{R}}^{-1} \equiv \bar{\mathbf{R}}^T \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \overset{\circ}{\mathbf{R}} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \quad \text{mit} \quad \overset{\circ}{\mathbf{R}} = \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}_k$$

Konsequenz: Durch Vergleich folgt

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}^T, \quad \text{d. h.,} \quad \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}_k = (\bar{R}_{ik})^T \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_k \quad \longrightarrow \quad \overset{\circ}{R}_{ik} = \bar{R}_{ki}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{R}} &= \overset{\circ}{R}_{ik} (\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}_k) = \overset{\circ}{R}_{ik} (\bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{e}}_k) \\ &= \overset{\circ}{R}_{ik} \bar{R}_{ni} \bar{\mathbf{e}}_n \otimes \bar{R}_{pk} \bar{\mathbf{e}}_p = (\bar{R}_{ni} \overset{\circ}{R}_{ik} \bar{R}_{pk}) \bar{\mathbf{e}}_n \otimes \bar{\mathbf{e}}_p \stackrel{!}{=} \bar{R}_{pn} \bar{\mathbf{e}}_n \otimes \bar{\mathbf{e}}_p = \bar{\mathbf{R}}^T \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \boxed{\bar{R}_{ni} \overset{\circ}{R}_{ik} \bar{R}_{pk} \stackrel{!}{=} \bar{R}_{pn} \quad \longleftrightarrow \quad \bar{R}_{ni} \overset{\circ}{R}_{ik} = \delta_{nk}}$$

Bem.: Aufgrund der zueinander inversen Koeffizientenmatrizen \bar{R}_{ni} und $\overset{\circ}{R}_{ik}$ können die 9 unbekannt Koeffizienten von $\overset{\circ}{R}_{ik}$ mit Hilfe der 6 Gleichungen aus $\bar{R}_{ni} \overset{\circ}{R}_{ik} = \delta_{nk}$ bestimmt werden. Wegen $\bar{\mathbf{R}}^{-1} = \bar{\mathbf{R}}^T$ gilt $\bar{R}_{ni}^{-1} = (\bar{R}_{ni})^T = \bar{R}_{in}$, d. h.

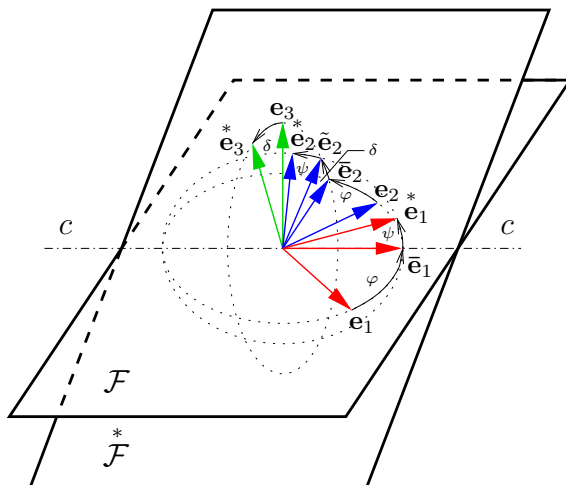
$$\boxed{\overset{\circ}{R}_{ik} = (\bar{R}_{ik})^T = \bar{R}_{ki}}$$

(C) EINFÜHRUNG EULERSCHER WINKEL

Bem.: Drehung eines Basissystems \mathbf{e}_i um drei Achsen.

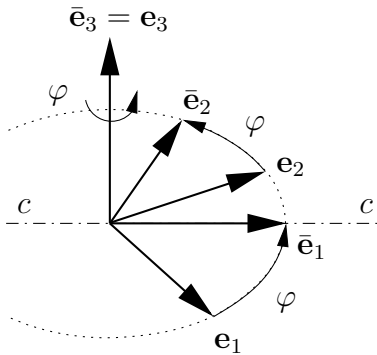
Einführung der Winkel φ , δ und ψ um die Achsen \mathbf{e}_3 , $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3^*$

Veranschaulichung:



Idee: Die Ebenen \mathcal{F} und \mathcal{F}^* werden durch die Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ bzw. $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*$ aufgespannt. Die Vektoren \mathbf{e}_3 und \mathbf{e}_3^* stehen jeweils senkrecht zur entsprechenden Ebene. Die Basissysteme \mathbf{e}_i und \mathbf{e}_i^* können mit Hilfe des EULERSCHEN Drehensors \mathbf{R} ineinander überführt werden:

$$\mathbf{e}_i^* := \mathbf{R} \mathbf{e}_i$$

1. Schritt:

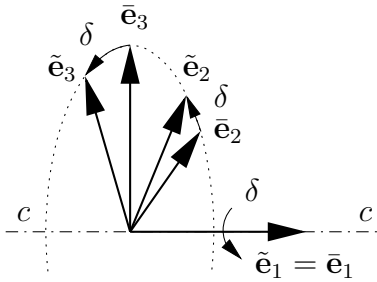
$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k.$$

Damit ergibt sich für das neue Basissystem $\bar{\mathbf{e}}_i$

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{R}_3 \mathbf{e}_i = R_{3jk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_i = R_{3ji} \mathbf{e}_j$$

bzw. im einzelnen

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_1 &= R_{3j1} \mathbf{e}_j = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 &= R_{3j2} \mathbf{e}_j = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 &= R_{3j3} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

2. Schritt:

Drehung des Basissystems $\bar{\mathbf{e}}_i$ um die $\bar{\mathbf{e}}_1$ -Achse mit dem Winkel δ , so daß $\tilde{\mathbf{e}}_2$ in der Ebene \mathcal{F}^* liegt und $\tilde{\mathbf{e}}_3$ senkrecht auf der Ebene \mathcal{F}^* steht. Dies liefert den Drehtensor

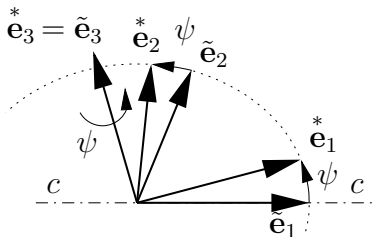
$$\bar{\mathbf{R}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_j \otimes \bar{\mathbf{e}}_k.$$

Damit ergibt sich für das neue Basissystem $\tilde{\mathbf{e}}_i$

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{e}}_i = \bar{R}_{1jk} (\bar{\mathbf{e}}_j \otimes \bar{\mathbf{e}}_k) \bar{\mathbf{e}}_i = \bar{R}_{1ji} \bar{\mathbf{e}}_j$$

bzw. im einzelnen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_1 &= \bar{R}_{1j1} \bar{\mathbf{e}}_j = \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &= \bar{R}_{1j2} \bar{\mathbf{e}}_j = \cos \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \sin \delta \bar{\mathbf{e}}_3 \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 &= \bar{R}_{1j3} \bar{\mathbf{e}}_j = -\sin \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \cos \delta \bar{\mathbf{e}}_3. \end{aligned}$$

3. Schritt:

Drehung in der Ebene \mathcal{F}^* um die $\tilde{\mathbf{e}}_3$ -Achse mit dem Winkel ψ rotiert das Basissystem $\tilde{\mathbf{e}}_i$. Dies liefert den Drehtensor

$$\tilde{\mathbf{R}}_3 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_j \otimes \tilde{\mathbf{e}}_k$$

Damit ergibt sich für das neue Basissystem \mathbf{e}_i^*

$$\mathbf{e}_i^* = \tilde{\mathbf{R}}_3 \tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{R}_{3jk} (\tilde{\mathbf{e}}_j \otimes \tilde{\mathbf{e}}_k) \tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{R}_{3ji} \tilde{\mathbf{e}}_j$$

bzw. im einzelnen

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1^* &= \tilde{R}_{3j1} \tilde{\mathbf{e}}_j = \cos \psi \tilde{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \tilde{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{e}_2^* &= \tilde{R}_{3j2} \tilde{\mathbf{e}}_j = -\sin \psi \tilde{\mathbf{e}}_1 + \cos \psi \tilde{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{e}_3^* &= \tilde{R}_{3j3} \tilde{\mathbf{e}}_j = \tilde{\mathbf{e}}_3.\end{aligned}$$

Zusammenfassung:

(a) Einsetzen von $\tilde{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{e}}_i$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1^* &= \cos \psi \bar{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi (\cos \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \sin \delta \bar{\mathbf{e}}_3) \\ \mathbf{e}_2^* &= -\sin \psi \bar{\mathbf{e}}_1 + \cos \psi (\cos \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \sin \delta \bar{\mathbf{e}}_3) \\ \mathbf{e}_3^* &= \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\sin \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \cos \delta \bar{\mathbf{e}}_3\end{aligned}$$

liefert:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1^* &= \cos \psi \bar{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \cos \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \sin \psi \sin \delta \bar{\mathbf{e}}_3 \\ \mathbf{e}_2^* &= -\sin \psi \bar{\mathbf{e}}_1 + \cos \psi \cos \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \cos \psi \sin \delta \bar{\mathbf{e}}_3 \\ \mathbf{e}_3^* &= -\sin \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \cos \delta \bar{\mathbf{e}}_3 \\ \longrightarrow \mathbf{e}_i^* &= \tilde{\mathbf{R}}_3 \underbrace{(\bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{e}}_i)}_{\tilde{\mathbf{e}}_i} =: \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{e}}_i \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}_3 \bar{\mathbf{R}}_1\end{aligned}$$

(b) Einsetzen von $\bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{R}_3 \mathbf{e}_i$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1^* &= \cos \psi (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) + \sin \psi \cos \delta (-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) + \sin \psi \sin \delta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2^* &= -\sin \psi (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) + \cos \psi \cos \delta (-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) + \cos \psi \sin \delta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3^* &= -\sin \delta (-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) + \cos \delta \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

liefert:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1^* &= (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \delta \sin \varphi) \mathbf{e}_1 + \\ &\quad + (\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \delta \cos \varphi) \mathbf{e}_2 + \sin \psi \sin \delta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2^* &= (-\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \delta \sin \varphi) \mathbf{e}_1 + \\ &\quad + (-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \delta \cos \varphi) \mathbf{e}_2 + \cos \psi \sin \delta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3^* &= \sin \delta \sin \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \delta \cos \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \delta \mathbf{e}_3 \\ \longrightarrow \mathbf{e}_i^* &= \bar{\mathbf{R}} \underbrace{(\mathbf{R}_3 \mathbf{e}_i)}_{\bar{\mathbf{e}}_i} =: \mathbf{R} \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} \mathbf{R}_3 = \tilde{\mathbf{R}}_3 \bar{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_3\end{aligned}$$

Drehtensoren \mathbf{R} und $\bar{\mathbf{R}}$:

Für die Gesamttrotation folgt damit:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i^* &= (\tilde{\mathbf{R}}_3 \bar{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_3) \mathbf{e}_i =: \mathbf{R} \mathbf{e}_i \\ &= (\tilde{\mathbf{R}}_3 \bar{\mathbf{R}}_1) \underbrace{(\mathbf{R}_3 \mathbf{e}_i)}_{\bar{\mathbf{e}}_i} = \tilde{\mathbf{R}}_3 \underbrace{(\bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{e}}_i)}_{\tilde{\mathbf{e}}_i} = \underbrace{\tilde{\mathbf{R}}_3 \tilde{\mathbf{e}}_i}_{\mathbf{e}_i^*}\end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{R} \mathbf{e}_i \quad \longrightarrow \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{R}^T \mathbf{e}_i^* =: \mathbf{R}^* \mathbf{e}_i \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{R} = \mathbf{R}^T}$$

und damit analog zu vorherigen Überlegungen

$$\longrightarrow \quad \boxed{R_{ik}^* = (R_{ik})^T = R_{ki}}$$

Darstellung des Rotationstensors:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \delta \sin \varphi & -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \delta \sin \varphi & \sin \delta \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \delta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \delta \cos \varphi & -\sin \delta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \delta & \cos \psi \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$$

Zusammenfassen von Transformationstensoren mit unterschiedlichen Basissystemen:

Beispiel: $\bar{\mathbf{R}} := \tilde{\mathbf{R}}_3 \bar{\mathbf{R}}_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^* &= \tilde{\mathbf{R}}_3 \tilde{\mathbf{e}}_i = (\tilde{\mathbf{R}}_3 \bar{\mathbf{R}}_1) \bar{\mathbf{e}}_i \\ \longrightarrow \quad \bar{\mathbf{R}} &= \tilde{R}_{3ik} (\tilde{\mathbf{e}}_i \otimes \tilde{\mathbf{e}}_k) \bar{R}_{1no} (\bar{\mathbf{e}}_n \otimes \bar{\mathbf{e}}_o) \\ &= \tilde{R}_{3ik} (\underbrace{\bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{e}}_k}_{\bar{R}_{1si} \bar{\mathbf{e}}_s \otimes \bar{R}_{1tk} \bar{\mathbf{e}}_t}) \bar{R}_{1no} (\bar{\mathbf{e}}_n \otimes \bar{\mathbf{e}}_o) \\ \longrightarrow \quad \bar{\mathbf{R}} &= \bar{R}_{1si} \tilde{R}_{3ik} \bar{R}_{1tk} (\bar{\mathbf{e}}_s \otimes \bar{\mathbf{e}}_t) \bar{R}_{1no} (\bar{\mathbf{e}}_n \otimes \bar{\mathbf{e}}_o) \\ &= \bar{R}_{1si} \tilde{R}_{3ik} \bar{R}_{1tk} \bar{R}_{1no} \delta_{tn} (\bar{\mathbf{e}}_s \otimes \bar{\mathbf{e}}_o) \\ &= \underbrace{\bar{R}_{1si} \tilde{R}_{3ik} \bar{R}_{1tk} \bar{R}_{1to}}_{\bar{R}_{so}} (\bar{\mathbf{e}}_s \otimes \bar{\mathbf{e}}_o) \end{aligned}$$

Damit erhält man für den Rotationstensor $\bar{\mathbf{R}}$:

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi \cos \delta & \cos \psi \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \psi \sin \delta & \cos \psi \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_k$$

Bem.: Die Kombination einzelner Drehungen (z. B. $\mathbf{R} = \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$ mit $\mathbf{e}_i^* = \mathbf{R} \mathbf{e}_i$) vereinfacht sich bei der Verwendung der CARDANOSchen Winkel, da sich die Rotationen stets auf dieselbe Basis \mathbf{e}_i beziehen.

Drehung um eine raumfeste Achse:

Bem.: Eine Drehung um 3 voneinander unabhängige Achsen kann auch als Drehung um die resultierende Drehachse dargestellt werden:

→ EULER-RODRIGUES-Form der räumlichen Drehung

Die EULER-RODRIGUES-Form der Drehung wird später behandelt (vgl. Kapitel 2.7).

2.5 Tensoren höherer Stufe

Definition: Ein beliebiger Tensor n -ter Stufe sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3 \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}^3 \quad (n\text{-mal}) \\ \text{mit } \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3 \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}^3 &: n\text{-facher dyadischer Produktraum} \end{aligned}$$

Bem.: i. d. R. $n \geq 2$; jedoch existieren Sonderfälle für $n = 1$ (Vektor) und $n = 0$ (Skalar).

Allgemeine Darstellung der linearen Abbildung

Definition: Eine lineare Abbildung ist ein „verjüngendes Produkt“ der Form

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad \text{mit } n \geq s$$

Erläuterung am Beispiel einfacher Tensoren:

$$\underbrace{(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})}_{\mathbf{A}} \underbrace{(\mathbf{e} \otimes \mathbf{f})}_{\mathbf{B}} = \underbrace{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{f})}_{\mathbf{C}} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

Fundamentaltensoren 4. Stufe

Bem.: Fundamentaltensoren 4. Stufe werden aus dem dyadischen Produkt von 2 Identitätstensoren 2. Stufe und den damit darstellbaren unabhängigen Transpositionen gebildet.

Man führt ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} &= (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) \\ (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{23T} &= \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{24T} &= \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

mit $(\cdot)^{ikT}$: spezielle Transposition; d. h. Vertauschung des i -ten mit dem k -ten Basissystem

Bem.: Weitere Transpositionen von $\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ liefern keine weiteren unabhängigen Tensoren. Die o. g. Fundamentaltensoren genügen der Eigenschaft

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^T = (\mathbf{A}^{13}{}^{24})^T$$

Konsequenz: Die Fundamentaltensoren 4. Stufe sind symmetrisch (bzgl. eine Vertauschung der beiden ersten mit den beiden letzten Basissystemen).

Eigenschaften der Fundamentaltensoren 4. Stufe

(a) identische Abbildung

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{23}{T}} \mathbf{A} &= (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) a_{st} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \\ &= a_{st} \delta_{is} \delta_{jt} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = a_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{A} \\ \longrightarrow \mathbf{I}^{\overset{4}{}} &:= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{23}{T}} \text{ ist Identitätstensor 4. Stufe}\end{aligned}$$

(b) „transponierende“ Abbildung

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{24}{T}} \mathbf{A} &= (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) a_{st} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \\ &= a_{st} \delta_{js} \delta_{it} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = a_{ji} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{A}^T\end{aligned}$$

(c) „spurbildende“ Abbildung

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{A} &= (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) a_{st} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \\ &= a_{st} \delta_{js} \delta_{it} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = a_{jj} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} = (\text{tr } \mathbf{A}) \mathbf{I}\end{aligned}$$

$$\text{mit } \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = a_{st} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \cdot (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) = a_{st} \delta_{sj} \delta_{tj} = a_{jj}$$

Spezifische Tensoren 4. Stufe

Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ beliebige Tensoren zweiter Stufe. Dann kann mit $\mathbf{A}^{\overset{4}{}}$ ein vierstufiger Tensor definiert werden, der über folgende Eigenschaften verfügt:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{\overset{4}{}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}} = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A}^T)^{\overset{14}{T}} \quad (*) \\ \mathbf{A}^{\overset{4}{T}} &= [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}}]^T = (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T)^{\overset{23}{T}} \\ \mathbf{A}^{\overset{4}{-1}} &= [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}}]^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1})^{\overset{23}{T}}\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$(\cdot)^T = [(\cdot)^{\overset{13}{T}}]^{\overset{24}{T}}$$

Mit (*) können die folgenden Regeln abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\overset{23}{T}} &= (\mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD})^{\overset{23}{T}} \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= (\mathbf{ACB}^T \otimes \mathbf{D}) \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\overset{23}{T}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}^T \mathbf{BD})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}} \mathbf{C} &= \mathbf{ACB}^T \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}} \mathbf{v} &= [\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \mathbf{v})]^{\overset{23}{T}}\end{aligned}$$

Mit der Definition eines vierstufigen Tensors $\overset{4}{\mathbf{B}}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}\overset{4}{\mathbf{B}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}} = [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{13}{T}}]^T \\ \overset{4}{\mathbf{B}}^T &= [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}}]^T = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})^{\overset{24}{T}} \\ \overset{4}{\mathbf{B}}^{-1} &= [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}}]^{-1} = (\mathbf{B}^{T-1} \otimes \mathbf{A}^{T-1})^{\overset{24}{T}}\end{aligned}$$

läßt sich zeigen, daß

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}}(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\overset{24}{T}} &= (\mathbf{A}\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{B}^T\mathbf{C})^{\overset{23}{T}} \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}}(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\overset{24}{T}} &= (\mathbf{A}\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}\mathbf{B}^T)^{\overset{24}{T}} \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}}(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\overset{23}{T}} &= (\mathbf{A}\mathbf{D} \otimes \mathbf{C}^T\mathbf{B})^{\overset{24}{T}} \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}}(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= (\mathbf{A}\mathbf{C}^T\mathbf{B} \otimes \mathbf{D}) \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\overset{24}{T}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{D}\mathbf{B}^T\mathbf{C})\end{aligned}$$

und

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}}\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C}^T\mathbf{B}$$

Außerdem gilt

$$(\overset{4}{\mathbf{C}}\overset{4}{\mathbf{D}})^T = \overset{4}{\mathbf{D}}^T\overset{4}{\mathbf{C}}^T$$

worin $\overset{4}{\mathbf{C}}$ und $\overset{4}{\mathbf{D}}$ beliebige Tensoren vierter Stufe sind.

Tensoren höherer Stufe und unvollständige Abbildungen

Um bei Tensoroperationen mit Tensoren höhere Stufe die Anzahl der in einem Skalarprodukt zu verbindenden Basisvektoren eindeutig festzulegen, wird bei einer unvollständigen Abbildung die Stufe des resultierenden Tensors mit Hilfe eines unterstrichenen oberen Index $(\cdot)^{\underline{z}}$ angegeben.

Beispiele in Basisdarstellung:

$$\begin{aligned}(\overset{4}{\mathbf{A}}\overset{3}{\mathbf{B}})^{\underline{3}} &= [a_{ijkl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) b_{mno}(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_o)]^{\underline{3}} \\ &= a_{ijkl} b_{mno} \delta_{km} \delta_{ln} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_o) \\ (\overset{3}{\mathbf{A}}\overset{3}{\mathbf{B}})^{\underline{1}} &= [a_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) b_{mno}(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_o)]^{\underline{1}} \\ &= a_{ij} b_{mno} \delta_{im} \delta_{jn} \mathbf{e}_o\end{aligned}$$

Merke: Die unvollständige Abbildung wird durch eine hinreichende Anzahl von Skalarprodukten der inneren Basisvektoren gebildet.

2.6 Fundamentaltensor 3. Stufe (RICCI-Tensor)

Bem.: Der Fundamentaltensor 3. Stufe wird eingeführt im Zusammenhang mit der Bildung „äußerer Produkte“ (z. B. Kreuzprodukt zwischen Vektoren).

Definition: Der Fundamentaltensor $\overset{3}{\mathbf{E}}$ genügt der Vorschrift

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$$

Einführung von $\overset{3}{\mathbf{E}}$ in Basisdarstellung:

Es gilt

$$\overset{3}{\mathbf{E}} = e_{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)$$

mit dem „Permutationssymbol“ e_{ijk}

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & : \text{gerade Permutation} \\ 0 & : \text{doppelte Indizierung} \\ -1 & : \text{ungerade Permutation} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1 \\ e_{321} = e_{213} = e_{132} = -1 \\ \text{alle übrigen } e_{ijk} \text{ verschwinden} \end{cases}$$

Anwendung von $\overset{3}{\mathbf{E}}$ auf das Kreuzprodukt von Vektoren:

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \\ &= e_{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) (u_s \mathbf{e}_s \otimes v_t \mathbf{e}_t) \\ &= e_{ijk} u_s v_t \delta_{js} \delta_{kt} \mathbf{e}_i = e_{ijk} u_j v_k \mathbf{e}_i \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Vergleich mit der bekannten Darstellung (vgl. TM I, 1.2 D)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \dots \quad \text{q. e. d.}$$

Eine Identität für $\overset{3}{\mathbf{E}}$:

Es gilt für eine unvollständige Abbildung 2. Stufe bzw. 4. Stufe zwischen zwei RICCI-Tensoren

$$(\overset{3}{\mathbf{E}} \overset{3}{\mathbf{E}})^2 = 2 \mathbf{I}, \quad (\overset{3}{\mathbf{E}} \overset{3}{\mathbf{E}})^4 = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{23T} - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{24T}$$

2.7 Der axiale Vektor

Bem.: Der axiale Vektor (Pseudovektor) dient u. a. zur Darstellung von Rotationen (Drehvektor).

Definition: Der axiale Vektor $\overset{\text{A}}{\mathbf{t}} \in \mathcal{V}^3$ ist dem schiefssymmetrischen Anteil $\text{skw } \mathbf{T}$ eines beliebigen Tensors $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ über die folgende Vorschrift zugeordnet:

$$\overset{\text{A}}{\mathbf{t}} := \frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} \mathbf{T}^T$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} \overset{\text{A}}{\mathbf{t}} &= \frac{1}{2} e_{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) t_{st} (\mathbf{e}_t \otimes \mathbf{e}_s) \\ &= \frac{1}{2} e_{ijk} t_{st} \delta_{jt} \delta_{ks} \mathbf{e}_i = \frac{1}{2} e_{ijk} t_{kj} \mathbf{e}_i \\ &= \frac{1}{2} [(t_{32} - t_{23}) \mathbf{e}_1 + (t_{13} - t_{31}) \mathbf{e}_2 + (t_{21} - t_{12}) \mathbf{e}_3] \end{aligned}$$

Es gilt mit 2.3 (b)

$$\mathbf{T} = \text{sym } \mathbf{T} + \text{skw } \mathbf{T}$$

so daß für den axialen Vektor von \mathbf{T} :

$$\begin{aligned} \overset{\text{A}}{\mathbf{t}} &= \frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} (\text{sym } \mathbf{T} + \text{skw } \mathbf{T})^T \\ &= \frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} (\text{skw } \mathbf{T}^T) = -\frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} (\text{skw } \mathbf{T}) \end{aligned}$$

Bem.: Ein symmetrischer Tensor besitzt keinen axialen Vektor.

Axialer Vektor und lineare Abbildung:

Es gilt (man bestätige durch Ausrechnen)

$$(\text{skw } \mathbf{T}) \mathbf{v} = \overset{\text{A}}{\mathbf{t}} \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^3$$

Axialer Vektor und das Vektorprodukt zwischen Tensoren:

Definition: Das Vektorprodukt von 2 Tensoren $\{\mathbf{T}, \mathbf{S}\} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ genügt der Vorschrift

$$\mathbf{S} \times \mathbf{T} = \overset{3}{\mathbf{E}} (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{T}^T)$$

Bem.: Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zwischen 2 Tensoren liefert einen Vektor.

Im Vergleich mit der Definition des axialen Vektors gilt

$$\mathbf{I} \times \mathbf{T} = \overset{3}{\mathbf{E}} \mathbf{T}^T = 2 \overset{\text{A}}{\mathbf{t}}$$

außerdem gilt für das Vektorprodukt von 2 Tensoren

$$\mathbf{S} \times \mathbf{T} = -\mathbf{T} \times \mathbf{S}$$

Axialer Vektor und das äußere Tensorprodukt zwischen Vektor und Tensor:

Definition: Das äußere Tensorprodukt zwischen einem Vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^3$ und einem Tensor $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ genügt der Vorschrift

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{T}) \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\mathbf{T} \mathbf{v}) ; \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}^3$$

Bem.: Das äußere Tensorprodukt zwischen Vektor und Tensor liefert einen Tensor.

Es gelten die Beziehungen

$$\mathbf{u} \times \mathbf{T} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{T})^T = -\mathbf{T} \times \mathbf{u}$$

→ d. h. $\mathbf{u} \times \mathbf{T}$ ist schiefsymmetrisch

$$\mathbf{u} \times \mathbf{T} = [\overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{T})]^2$$

mit $(\cdot)^2$: „unvollständige“ lineare Abbildung (Assoziation), deren Ergebnis ein Tensor 2. Stufe ist.

Auswertung in Basisdarstellung liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{T} &= [(e_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) (u_r \mathbf{e}_r \otimes t_{st} \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t)]^2 \\ &= e_{ijk} u_r t_{st} \delta_{jr} \delta_{ks} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t) \\ &= e_{ijk} u_j t_{kt} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t) \end{aligned}$$

insbesondere gilt für $\mathbf{T} \equiv \mathbf{I}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{I} = [\overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{I})]^2 = e_{ijk} u_j \delta_{kt} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t) = e_{ijt} u_j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t)$$

außerdem gilt für den speziellen Tensor $\mathbf{u} \times \mathbf{I}$

$$\overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{u} \times \mathbf{I}) = -2 \mathbf{u}$$

$$\rightarrow \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{u} \times \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{u} \times \mathbf{I})^T$$

Konsequenz: Im Tensor $\mathbf{u} \times \mathbf{I}$ ist \mathbf{u} bereits der diesem Tensor zugeordnete axiale Vektor.

Schließlich gilt

$$\mathbf{u} \times \mathbf{I} = -\overset{3}{\mathbf{E}} \mathbf{u}$$

$$\rightarrow \overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{u} \times \mathbf{I}) = -\overset{3}{\mathbf{E}} (\overset{3}{\mathbf{E}} \mathbf{u}) = -(\overset{3}{\mathbf{E}} \overset{3}{\mathbf{E}})^2 \mathbf{u} \stackrel{!}{=} -2 \mathbf{u}$$

$$\text{d. h. } (\overset{3}{\mathbf{E}} \overset{3}{\mathbf{E}})^2 = 2 \mathbf{I}$$

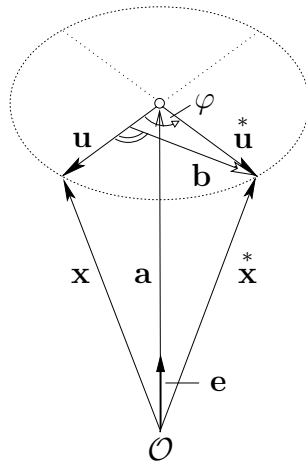
Einige zusätzliche Regeln:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c})$$

$$(\mathbf{I} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{w} \times \mathbf{I}$$

ANWENDUNGSBEISPIEL FÜR DAS TENSORPRODUKT ZWISCHEN VEKTOR UND TENSOR

Drehung um eine raumfeste Achse



Drehung von \mathbf{x} um die Achse \mathbf{e}

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{a} + \mathbf{u}^* = \mathbf{a} + C_1 \mathbf{u} + \mathbf{b}$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{a} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} \\ \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{a} \\ \mathbf{b} = C_2 (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \end{cases}$$

$$\text{und} \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{e}; \quad |\mathbf{e}| = 1$$

Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 :

(a) Es gilt für den Winkel zwischen \mathbf{u} und \mathbf{u}^*

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*}{|\mathbf{u}| |\mathbf{u}^*|} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{u}| = |\mathbf{u}^*|$$

außerdem gilt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* = \mathbf{u} \cdot (C_1 \mathbf{u} + \mathbf{b}) = C_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}}_{= 0, \text{ da } \mathbf{u} \perp \mathbf{b}} = C_1 |\mathbf{u}|^2$$

damit folgt

$$\cos \varphi = \frac{C_1 |\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{u}|^2} = C_1 \quad \longrightarrow \quad C_1 = \cos \varphi$$

(b) Es gilt für den Winkel zwischen \mathbf{b} und \mathbf{u}^*

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^*}{|\mathbf{b}| |\mathbf{u}^*|}$$

außerdem gilt

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^* = \mathbf{b} \cdot (C_1 \mathbf{u} + \mathbf{b}) = C_1 \underbrace{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}}_{= 0, \text{ da } \mathbf{u} \perp \mathbf{b}} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}|^2$$

und

$$|\mathbf{b}| = C_2 |\mathbf{e} \times \mathbf{x}| = C_2 \underbrace{|\mathbf{e}|}_1 \underbrace{|\mathbf{x}| \sin \angle(\mathbf{e}; \mathbf{x})}_{|\mathbf{u}|} = C_2 |\mathbf{u}|$$

so daß

$$\sin \varphi = \frac{|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{b}| |\mathbf{u}|} = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{u}|} = \frac{C_2 |\mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|} = C_2 \quad \longrightarrow \quad C_2 = \sin \varphi$$

Damit folgt für $\hat{\mathbf{x}}^*$

$$\hat{\mathbf{x}}^* = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} + \cos \varphi [\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}] + \sin \varphi (\mathbf{e} \times \mathbf{x})$$

Ermittlung des Rotationstensors \mathbf{R} :

für das Tensorprodukt zwischen Vektor und Tensor gilt

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{e} \times (\mathbf{I} \mathbf{x}) = \mathbf{e} \times \mathbf{x}$$

damit folgt

$$\hat{\mathbf{x}}^* = (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \mathbf{x} + \cos \varphi (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \mathbf{x} + \sin \varphi (\mathbf{e} \times \mathbf{I}) \mathbf{x} \stackrel{!}{=} \mathbf{R} \mathbf{x}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{R} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos \varphi (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \sin \varphi (\mathbf{e} \times \mathbf{I})} \quad (*)$$

Bem.: (*) ist die EULER-RODRIGUES-Form der räumlichen Drehung.

Beispiel: Drehung um die \mathbf{e}_3 -Achse

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3 = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \cos \varphi_3 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + \sin \varphi_3 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{I})$$

Es gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{I} &= [\overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{I})]^2 \\ &= [e_{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_l)]^2 \\ &= e_{ijk} \delta_{j3} \delta_{kl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l) = e_{i3l} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l) \\ &= \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_3 &= \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \cos \varphi_3 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \sin \varphi_3 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \\ &= R_{3ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad R_{3ij} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{q. e. d.}$$

2.8 Das äußere Tensorprodukt von Tensoren

Definition: Das äußere Tensorprodukt von Tensoren ist wie folgt definiert:

$$(\mathbf{A} \ast \mathbf{B})(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) := \mathbf{A} \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B} \mathbf{u}_2 - \mathbf{A} \mathbf{u}_2 \times \mathbf{B} \mathbf{u}_1$$

Daraus läßt sich direkt ableiten:

$$\mathbf{A} \ast \mathbf{B} = \mathbf{B} \ast \mathbf{A}$$

Darüber hinaus gelten die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \ast \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T \ast \mathbf{B}^T \\ (\mathbf{A} \ast \mathbf{B})(\mathbf{C} \ast \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \mathbf{C} \ast \mathbf{B} \mathbf{D}) + (\mathbf{A} \mathbf{D} \ast \mathbf{B} \mathbf{C}) \\ (\mathbf{I} \ast \mathbf{I}) &= 2\mathbf{I} \\ (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \ast (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \otimes (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) \\ (\mathbf{A} \ast \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= (\mathbf{B} \ast \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \ast \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Mit der o. g. Definition kann leicht gezeigt werden, daß

$$[(\mathbf{A} \ast \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}][(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_3] = e_{ijk} (\mathbf{A} \mathbf{u}_i \times \mathbf{B} \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{C} \mathbf{u}_k$$

Das äußere Tensorprodukt in Basissystemen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \ast \mathbf{B} &= a_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \ast b_{no} (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_o) \\ &= a_{ik} b_{no} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_n) \otimes (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_o) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{cases} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_n = \overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_n) = e_{inj} \mathbf{e}_j \\ \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_o = \overset{3}{\mathbf{E}} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_o) = e_{kop} \mathbf{e}_p \end{cases}$$

$$\longrightarrow \mathbf{A} \ast \mathbf{B} = a_{ik} b_{no} e_{inj} e_{kop} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p)$$

Darüber hinaus gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \ast \mathbf{I} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} \ast \mathbf{B} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} - (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) \mathbf{I} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{B}^T - \\ &\quad - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ (\mathbf{A} \ast \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{I})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{I}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I})(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{I})(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}) - \\ &\quad - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{I})(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{C} + (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{C} \end{aligned}$$

Der Kofaktor, der adjungierte Tensor und die Determinante:

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \text{cof } \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \mathbf{A} \ast \mathbf{A} =: \overset{+}{\mathbf{A}}, \quad \text{adj } \mathbf{A} = (\text{cof } \mathbf{A})^T \\ \det \mathbf{A} &= \frac{1}{6} (\mathbf{A} \ast \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = \det |a_{ik}| = \frac{(\mathbf{A} \mathbf{u}_1 \times \mathbf{A} \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{A} \mathbf{u}_3}{(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_3} \end{aligned}$$

Es gilt in Basisdarstellung

$$\overset{+}{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} (a_{ik} a_{no} e_{inj} e_{kop}) (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p) = \overset{+}{a}_{jp} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p)$$

Bem.: In der Koeffizientenmatrix $\overset{+}{a}_{jp}$ des Kofaktors $\text{cof } \mathbf{A}$ steht an jeder Position die zugehörige Unterdeterminante des Ursprungstensors, z. B.

$$\overset{+}{a}_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} \quad \text{u. s. w.}$$

Der inverse Tensor:

Es gilt die Beziehung

$$\mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1} \text{adj } \mathbf{A}; \quad \mathbf{A}^{-1} \text{ existiert, wenn } \det \mathbf{A} \neq 0$$

Rechenregeln für den Kofaktor, die Determinante und den inversen Tensor:

$$\det(\mathbf{A} \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$$

$$\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^3 \det \mathbf{A}$$

$$\det \mathbf{I} = 1$$

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

$$\det \overset{+}{\mathbf{A}} = (\det \mathbf{A})^2$$

$$\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}$$

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} + \overset{+}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \overset{+}{\mathbf{B}} + \det \mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^+ = \overset{+}{\mathbf{A}} \overset{+}{\mathbf{B}}$$

$$(\overset{+}{\mathbf{A}})^T = (\mathbf{A}^T)^+$$

2.9 Das Eigenwertproblem und die Invarianten eines Tensors

Definition: Für das Eigenwertproblem eines beliebigen Tensors zweiter Stufe \mathbf{A} gilt

$$(\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \text{mit } \begin{cases} \gamma_{\mathbf{A}} & : \text{ Eigenwert} \\ \mathbf{a} & : \text{ Eigenvektor} \end{cases}$$

Auflösen nach \mathbf{a} liefert

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{0} = \text{adj}(\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) \frac{\mathbf{0}}{\det(\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I})}$$

Konsequenz: Diese Gleichung liefert für \mathbf{a} nur dann eine nicht-triviale Lösung, wenn die charakteristische Gleichung erfüllt ist, d. h.

$$\det(\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) = 0$$

Mit der Rechenregel für die Determinante

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \frac{1}{6} [(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})] \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{6} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{6} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{3} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} + \\ &\quad + \frac{1}{3} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{6} (\mathbf{B} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{6} (\mathbf{B} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} \\ &= \det \mathbf{A} + \overset{+}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \overset{+}{\mathbf{B}} + \det \mathbf{B}\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) &= \det \mathbf{A} + \overset{+}{\mathbf{A}} \cdot (-\gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) + \mathbf{A} \cdot (-\gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) + \det(-\gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) \\ &= \det \mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \frac{1}{2} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{I} + \gamma_{\mathbf{A}}^2 \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{I} \times \mathbf{I}) - \gamma_{\mathbf{A}}^3 \det \mathbf{I} = 0\end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}I_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A} \times \mathbf{I}) \cdot \mathbf{I} \\ II_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{I} \\ III_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{6} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}\end{aligned}$$

kann die charakteristische Gleichung wie folgt vereinfacht werden:

$$\det(\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) = III_{\mathbf{A}} - \gamma_{\mathbf{A}} II_{\mathbf{A}} + \gamma_{\mathbf{A}}^2 I_{\mathbf{A}} - \gamma_{\mathbf{A}}^3 = 0$$

Bem.: Die Koeffizienten $I_{\mathbf{A}}$, $II_{\mathbf{A}}$ und $III_{\mathbf{A}}$ stellen die *drei skalaren Hauptinvarianten* eines Tensors \mathbf{A} dar, die eine wichtige Rolle in der Kontinuumsmechanik spielen.

Alternative Darstellung der Invarianten

Durch Skalarprodukte:

$$\begin{aligned}I_{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \text{tr } \mathbf{A} \\ II_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} (I_{\mathbf{A}}^2 - \mathbf{A} \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) = \frac{1}{2} [(\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A})] \\ III_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{6} I_{\mathbf{A}}^3 - \frac{1}{2} I_{\mathbf{A}}^2 (\mathbf{A} \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) + \frac{1}{3} \mathbf{A}^T \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \\ &= \frac{1}{6} [(\text{tr } \mathbf{A})^3 - 3 \text{tr } \mathbf{A} \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A}) + 2 \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A})] = \det \mathbf{A}\end{aligned}$$

Durch Eigenwerte:

$$\begin{aligned}I_{\mathbf{A}} &= \gamma_{\mathbf{A}(1)} + \gamma_{\mathbf{A}(2)} + \gamma_{\mathbf{A}(3)} \\ II_{\mathbf{A}} &= \gamma_{\mathbf{A}(1)} \gamma_{\mathbf{A}(2)} + \gamma_{\mathbf{A}(2)} \gamma_{\mathbf{A}(3)} + \gamma_{\mathbf{A}(3)} \gamma_{\mathbf{A}(1)} \\ III_{\mathbf{A}} &= \gamma_{\mathbf{A}(1)} \gamma_{\mathbf{A}(2)} \gamma_{\mathbf{A}(3)}\end{aligned}$$

CALEY-HAMILTON-Theorem:

$$\mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A} - I_{\mathbf{A}} \mathbf{A} \mathbf{A} + II_{\mathbf{A}} \mathbf{A} - III_{\mathbf{A}} \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

3 Grundzüge der Vektor- und Tensoranalysis

3.1 Einführung des Funktionsbegriffs

Bezeichnungen:

$$\text{es existiert } \left\{ \begin{array}{l} \phi(\dots) : \text{skalarwertige Funktion} \\ \mathbf{v}(\dots) : \text{vektorwertige Funktion} \\ \mathbf{T}(\dots) : \text{tensorwertige Funktion} \end{array} \right\} \text{ von } (\dots) \left\{ \begin{array}{l} \text{skalaren Variablen} \\ \text{vektoriellen Variablen} \\ \text{tensoriellen Variablen} \end{array} \right.$$

Beispiel: $\phi(\mathbf{A})$: skalarwertige Tensorfunktion

Begriffe:

- **Definitionsbereich** einer Funktion: Gesamtheit der Werte der unabhängig veränderlichen Größen (Variablen); i. d. R. zusammenhängend.
- **Bildbereich** einer Funktion: Gesamtheit der Werte der abhängig veränderlichen Größen: $\phi(\dots)$; $\mathbf{v}(\dots)$; $\mathbf{T}(\dots)$.

3.2 Funktionen skalarer Variablen

hier: Vektor- und tensorwertige Funktionen von reellen skalaren Variablen.

(a) VEKTORWERTIGE FUNKTIONEN EINER VARIABLEN

es existiert:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\alpha) \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} : \text{eindeutige vektorwertige Funktion,} \\ \quad \text{Bildbereich im offenen Gebiet } \mathcal{V}^3 \\ \alpha : \text{reelle skalare Variable} \end{array} \right.$$

Ableitung von $\mathbf{u}(\alpha)$ mit dem Differentialquotienten:

$$\mathbf{w}(\alpha) := \mathbf{u}'(\alpha) := \frac{d\mathbf{u}(\alpha)}{d\alpha}$$

Differential von $\mathbf{u}(\alpha)$:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}'(\alpha) d\alpha$$

Einführung höherer Ableitungen und Differentiale:

$$d^2\mathbf{u} = d(d\mathbf{u}) = \mathbf{u}''(\alpha) d\alpha^2 = \frac{d^2\mathbf{u}(\alpha)}{d\alpha^2} d\alpha^2 \quad \text{u. s. w.}$$

(b) VEKTORWERTIGE FUNKTIONEN MEHRERER VARIABLEN

es existiert:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \quad \text{mit} \quad \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\} : \text{reelle skalare Variablen}$$

partielle Ableitung von $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$:

$$\mathbf{w}_\alpha(\alpha, \beta, \gamma, \dots) := \frac{\partial \mathbf{u}(\cdot)}{\partial \alpha} =: \mathbf{u}_{,\alpha}$$

totales Differential von $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}_{,\alpha} d\alpha + \mathbf{u}_{,\beta} d\beta + \mathbf{u}_{,\gamma} d\gamma + \dots$$

höhere partielle Ableitungen (Beispiele):

$$\mathbf{u}_{,\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\cdot)}{\partial \alpha^2}; \quad \mathbf{u}_{,\gamma\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\cdot)}{\partial \gamma \partial \beta}$$

Bem.: Die Reihenfolge partieller Ableitungen ist vertauschbar.

(c) TENSORIELLE FUNKTIONEN EINER BZW. MEHRERER VARIABLEN

Behandlung in Analogie zum Vorangegangenen

Einige Rechenregeln:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}'$$

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \mathbf{B} + \mathbf{A} \mathbf{B}'$$

$$(\mathbf{A}^{-1})' = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{A}^{-1}$$

3.3 Funktionen vektorieller und tensorieller Variablen(a) ABLEITUNG VON FELDFUNKTIONEN NACH DEM ORTSVEKTOR(GRADIENTENBILDUNG)

Bem.: Funktionen des Ortsvektors heißen **Feldfunktionen**. Ableitungen nach dem Ortsvektor werden als "Gradienten einer Funktion" bezeichnet.

skalarwertige Funktionen $\phi(\mathbf{x})$

$$\text{grad } \phi(\mathbf{x}) := \frac{d\phi(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} =: \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Ergebnis ist ein Vektorfeld}$$

bzw. in Basissystemen

$$\text{grad } \phi(\mathbf{x}) := \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{e}_i =: \phi_{,i} \mathbf{e}_i$$

vektorwertige Funktionen $\mathbf{v}(\mathbf{x})$

$$\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} =: \mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Ergebnis ist ein Tensorfeld}$$

bzw. in Basissystemen

$$\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j =: v_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

tensorwertige Funktionen $\mathbf{T}(\mathbf{x})$

$$\text{grad } \mathbf{T}(\mathbf{x}) := \frac{d\mathbf{T}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} =: \overset{3}{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Ergebnis ist ein Tensorfeld 3. Stufe}$$

bzw. in Basissystemen

$$\text{grad } \mathbf{T}(\mathbf{x}) := \frac{\partial t_{ik}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j =: t_{ik,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j$$

Bem.: Gradientenbildung $\text{grad}(\cdot) = \nabla(\cdot)$ (mit ∇ : Nabla-Operator) erhöht die Stufe der abgeleiteten Funktion.

(b) ABLEITUNG VON FUNKTIONEN VON BELIEBIGEN VEKTOREN UND TENSOREN NACH TENSOREN

Bem.: Ableitungen nach den jeweiligen Variablen werden in Analogie zum Vorangegangenen behandelt, z. B.

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{T}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial R_{ij}(\mathbf{T}, \mathbf{v})}{\partial t_{st}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t$$

Einige spezielle Regeln für die Ableitung von Tensorfunktionen nach Tensoren

Für beliebige Tensoren zweiter Stufe $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ gelten die folgenden Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{AB})}{\partial \mathbf{B}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I})^T \\ \frac{\partial(\mathbf{AB})}{\partial \mathbf{A}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{B}^T)^T \\ \frac{\partial(\mathbf{AA})}{\partial \mathbf{A}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I})^T + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}^T)^T \\ \frac{\partial(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} &= (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I})^T + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})^T \\ \frac{\partial(\mathbf{AA}^T)}{\partial \mathbf{A}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I})^T + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})^T \\ \frac{\partial(\mathbf{ABC})}{\partial \mathbf{B}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}^T)^T \\ \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{A}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^T \\ \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{A}} &= -(\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{A}^{T-1})^T \\ \frac{\partial \mathbf{A}^+}{\partial \mathbf{A}} &= \det \mathbf{A} [(\mathbf{A}^{T-1} \otimes \mathbf{A}^{T-1}) - (\mathbf{A}^{T-1} \otimes \mathbf{A}^{T-1})^T] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial\mathbf{C}} &= \alpha \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{C}} + \beta \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{C}} \\
\frac{\partial(\alpha\mathbf{v})}{\partial\mathbf{C}} &= \mathbf{v} \otimes \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{C}} + \alpha \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{C}} \\
\frac{\partial(\alpha\mathbf{A})}{\partial\mathbf{C}} &= \mathbf{A} \otimes \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{C}} + \alpha \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{C}} \\
\frac{\partial(\mathbf{A}\mathbf{v})}{\partial\mathbf{C}} &= \left[\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{C}} \right)^{24} \right]^T \mathbf{v} + \left[\mathbf{A} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{C}} \right]^3 \\
\frac{\partial(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{\partial\mathbf{C}} &= \left[\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{C}} \right)^{13} \right]^T \mathbf{v} + \left[\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{C}} \right)^{13} \right]^T \mathbf{u} \\
\frac{\partial(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{\partial\mathbf{C}} &= \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{C}} \right)^T \mathbf{B} + \left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{C}} \right)^T \mathbf{A} \\
\frac{\partial(\mathbf{A}\mathbf{B})}{\partial\mathbf{C}} &= \left(\left[\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{C}} \right)^{24} \right]^T \mathbf{B} \right)^4 + \left(\left[\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{C}} \right)^{14} \right]^T \mathbf{A}^T \right)^4
\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{A}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^T =: \mathbf{I}^4 \\
\frac{\partial\mathbf{A}^T}{\partial\mathbf{A}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^T \\
\frac{\partial(\mathbf{A}\cdot\mathbf{I})\mathbf{I}}{\partial\mathbf{A}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \\
\frac{\partial\mathbf{t}^A(\mathbf{A})}{\partial\mathbf{A}} &= -\frac{1}{2} \mathbf{E}^3
\end{aligned}$$

Hauptinvarianten und ihre Ableitungen (vgl. Kapitel 2.9)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_{\mathbf{A}}}{\partial\mathbf{A}} &= \mathbf{I} \quad \text{mit} \quad I_{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} \\
\frac{\partial II_{\mathbf{A}}}{\partial\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \ast \mathbf{I} \quad \text{mit} \quad II_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} (I_{\mathbf{A}}^2 - \mathbf{A}\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}) \\
\frac{\partial III_{\mathbf{A}}}{\partial\mathbf{A}} &= \overset{+}{\mathbf{A}} \quad \text{mit} \quad III_{\mathbf{A}} = \det \mathbf{A}
\end{aligned}$$

(c) SPEZIELLE OPERATOREN

hier: Einführung der weiteren Differentialoperatoren $\operatorname{div}(\cdot)$ und $\operatorname{rot}(\cdot)$.

Divergenz eines Vektorfelds $\mathbf{v}(\mathbf{x})$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{I} =: \phi(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Ergebnis ist ein Skalarfeld}$$

bzw. in Basissystemen

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= v_{i,j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_n) \\
&= v_{i,j} \delta_{in} \delta_{jn} = v_{n,n} \\
&= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

Divergenz eines Tensorfelds $\mathbf{T}(\mathbf{x})$

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = [\operatorname{grad} \mathbf{T}(\mathbf{x})] \mathbf{I} =: \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Ergebnis ist ein Vektorfeld}$$

bzw. in Basissystemen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) &= t_{ik,j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j) (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_n) \\ &= t_{ik,j} \delta_{kn} \delta_{jn} \mathbf{e}_i = t_{in,n} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Bem.: Divergenzbildung $\operatorname{div}(\cdot) = \nabla \cdot (\cdot)$ erniedrigt die Stufe der abgeleiteten Funktionen.

Rotation eines Vektorfelds $\mathbf{v}(\mathbf{x})$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \overset{3}{\mathbf{E}} [\operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x})]^T =: \mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Ergebnis ist ein Vektorfeld}$$

bzw. in Basissystemen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= e_{ijn} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n) v_{o,p} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_o) \\ &= e_{ijn} v_{o,p} \delta_{jp} \delta_{no} \mathbf{e}_i = e_{ijn} v_{n,j} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Konsequenz: $\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ist der 2-fache axiale Vektor, der dem schiefssymmetrischen Anteil von $\operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x})$ zugeordnet ist.

Bem.: Rotationsbildung $\operatorname{rot}(\cdot) = \operatorname{curl}(\cdot) = \nabla \times (\cdot)$ erhält die Stufe der abgeleiteten Funktion.

LAPLACE-Operator

$$\Delta(\cdot) := \operatorname{div} \operatorname{grad}(\cdot) \quad \longrightarrow \quad \text{weiter wie oben}$$

Bem.: LAPLACE-Operator $\Delta(\cdot) = \nabla \cdot \nabla(\cdot)$ erhält die Stufe der abgeleiteten Funktion.

Rechenregeln für die Operatoren $\operatorname{grad}(\cdot)$, $\operatorname{div}(\cdot)$ und $\operatorname{rot}(\cdot)$

$$\operatorname{grad}(\phi\psi) = \phi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \phi$$

$$\operatorname{grad}(\phi\mathbf{v}) = \mathbf{v} \otimes \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{grad} \mathbf{v}$$

$$\operatorname{grad}(\phi\mathbf{T}) = \mathbf{T} \otimes \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{grad} \mathbf{T}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T \mathbf{u}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = [\operatorname{grad} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes (\operatorname{grad} \mathbf{b})^T]^T$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{T}\mathbf{v}) = (\operatorname{grad} \mathbf{T})^T \mathbf{v} + \mathbf{T} \operatorname{grad} \mathbf{v}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{T}\mathbf{S}) = [(\operatorname{grad} \mathbf{T})^T \mathbf{S}]^T + (\mathbf{T} \operatorname{grad} \mathbf{S})^T$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) = (\operatorname{grad} \mathbf{T})^T \mathbf{S}^T + (\operatorname{grad} \mathbf{S})^T \mathbf{T}^T$$

$$\operatorname{grad} \mathbf{x} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{u}) \mathbf{v} \\
\operatorname{div}(\phi \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{div} \mathbf{v} \\
\operatorname{div}(\mathbf{T} \mathbf{v}) &= (\operatorname{div} \mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T}^T \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} \\
\operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{v})^T &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \\
\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (\operatorname{grad} \mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{I} - (\operatorname{grad} \mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{I} \\
&= \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \\
\operatorname{div}(\phi \mathbf{T}) &= \mathbf{T} \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{div} \mathbf{T} \\
\operatorname{div}(\mathbf{T} \mathbf{S}) &= (\operatorname{grad} \mathbf{T}) \mathbf{S} + \mathbf{T} \operatorname{div} \mathbf{S} \\
\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{T}) &= \mathbf{v} \times \operatorname{div} \mathbf{T} + \operatorname{grad} \mathbf{v} \times \mathbf{T} \\
\operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{T}) &= \mathbf{v} \otimes \operatorname{div} \mathbf{T} + (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{T}^T \\
\operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{v})^+ &= \mathbf{0} \\
\operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{v} \pm (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} \pm \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \\
\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= 0 \\
\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} \\
\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi &= \mathbf{0} \\
\operatorname{rot} \operatorname{grad} \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\
\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \mathbf{v})^T &= \operatorname{grad} \operatorname{rot} \mathbf{v} \\
\operatorname{rot}(\phi \mathbf{v}) &= \phi \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \phi \times \mathbf{v} \\
\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) \\
&= \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{u}) \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u} - (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{u}
\end{aligned}$$

GRASSMANN - Entwicklung:

$$\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} = (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T \mathbf{v} - (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v}$$

3.4 Integralsätze

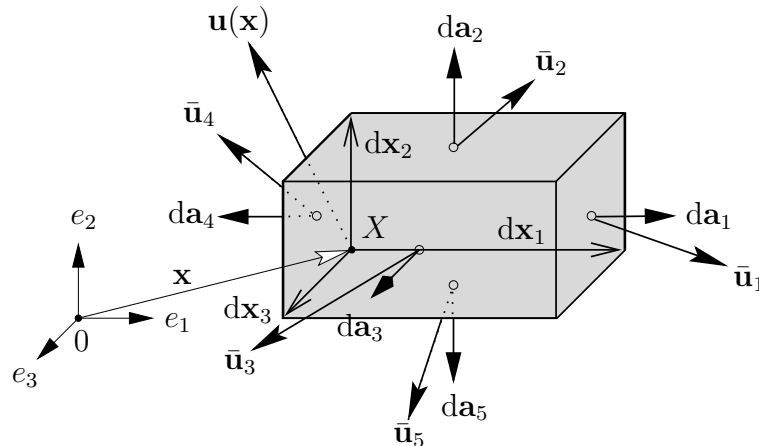
Bem.: Es werden einige Integralsätze für die Umwandlung von Oberflächen- in Volumenintegrale angegeben.

Vor.: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ sei ein stetiges und hinreichend oft stetig differenzierbares Vektorfeld. Der Definitionsbereich von \mathbf{u} liege im \mathcal{V}^3 .

(a) BEWEIS DES INTEGRALSATZES

$$\int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes d\mathbf{a} = \int_V \text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x}) dv \quad \text{mit } d\mathbf{a} = \mathbf{n} da$$

und $\begin{cases} da & : \text{Oberflächenelement} \\ \mathbf{n} & : \text{nach außen orientierter Oberflächennormaleneinheitsvektor} \end{cases}$



Ausgangspunkt: Betrachtung eines infinitesimalen Volumenelements dv , aufgespannt im Punkt X mit dem Ortsvektor \mathbf{x} , und $\bar{\mathbf{u}}_i$, den Werten von $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ in den Flächenschwerpunkten der Teilflächen 1-6.

Bestimmung der Flächenelementvektoren $d\mathbf{a}_i$:

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_1 &= d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3 = dx_2 dx_3 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \\ &= dx_2 dx_3 \mathbf{e}_1 = -d\mathbf{a}_4 \longrightarrow \mathbf{e}_1 = \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_4 \end{aligned}$$

Man erhält außerdem

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_2 &= dx_3 dx_1 \mathbf{e}_2 = -d\mathbf{a}_5 \longrightarrow \mathbf{e}_2 = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_5 \\ d\mathbf{a}_3 &= dx_1 dx_2 \mathbf{e}_3 = -d\mathbf{a}_6 \longrightarrow \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_6 \end{aligned}$$

Bem.: Die Flächenvektoren erfüllen den Flächensatz $\sum_{i=1}^6 d\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$

Bestimmung des Volumenelements dv :

$$dv = (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3 = dx_1 dx_2 dx_3$$

Werte von $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ in den Teilflächenschwerpunkten:

Bem.: Die Zuwächse von $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ in die Richtungen von dx_1, dx_2, dx_3 werden durch die ersten Glieder einer TAYLOR-Reihenentwicklung dargestellt.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}_4 &= \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} dx_3 \\ \bar{\mathbf{u}}_1 &= \bar{\mathbf{u}}_4 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} dx_1\end{aligned}$$

Man erhält außerdem

$$\bar{\mathbf{u}}_2 = \bar{\mathbf{u}}_5 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} dx_2, \quad \bar{\mathbf{u}}_3 = \bar{\mathbf{u}}_6 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} dx_3$$

Berechnung des Oberflächenintegrals

$$\int_{S(dv)} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes d\mathbf{a} \rightarrow \sum_{i=1}^6 \bar{\mathbf{u}}_i \otimes d\mathbf{a}_i = \bar{\mathbf{u}}_1 \otimes d\mathbf{a}_1 + \underbrace{\bar{\mathbf{u}}_4 \otimes d\mathbf{a}_4}_{\left(\bar{\mathbf{u}}_1 - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} dx_1\right) \otimes (-d\mathbf{a}_1)} + \dots$$

so daß

$$\sum_{i=1}^6 \bar{\mathbf{u}}_i \otimes d\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} dx_1 \otimes d\mathbf{a}_1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} dx_2 \otimes d\mathbf{a}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} dx_3 \otimes d\mathbf{a}_3$$

mit

$$d\mathbf{a}_1 = dx_2 dx_3 \mathbf{e}_1, \quad d\mathbf{a}_2 = dx_1 dx_3 \mathbf{e}_2, \quad d\mathbf{a}_3 = dx_1 dx_2 \mathbf{e}_3$$

folgt

$$\sum_{i=1}^6 \bar{\mathbf{u}}_i \otimes d\mathbf{a}_i = \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \otimes \mathbf{e}_3 \right)}_{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \text{grad } \mathbf{u}} \underbrace{dx_1 dx_2 dx_3}_{dv}$$

so daß

$$\sum_{i=1}^6 \bar{\mathbf{u}}_i \otimes d\mathbf{a}_i = \text{grad } \mathbf{u} dv$$

damit folgt bei Integration über ein beliebiges Volumen V

$$\int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes d\mathbf{a} = \int_V \text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x}) dv \quad \text{q. e. d.} \quad (*)$$

(b) BEWEIS DES GAUSSSCHEN INTEGRALSATZES

$$\int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{x}) dv$$

Ausgangspunkt: Integralsatz (*) bei skalarer Multiplikation mit dem Identitätstensor

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \cdot \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes d\mathbf{a} &= \mathbf{I} \cdot \int_V \operatorname{grad} \mathbf{u}(\mathbf{x}) dv \\ \rightarrow \int_S \underbrace{\mathbf{I} \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes d\mathbf{a}]}_{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a}} &= \int_V \underbrace{\mathbf{I} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u}(\mathbf{x})}_{\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x})} dv \end{aligned}$$

so daß

$$\int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) dv \quad (**)$$

(c) BEWEIS DES INTEGRALSATZES

$$\int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}) d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) dv$$

Ausgangspunkt: Multiplikation des Oberflächenintegrals mit einem konstanten Vektor $\mathbf{b} \in \mathcal{V}^3$

$$\mathbf{b} \cdot \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}) d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}] \cdot d\mathbf{a} =: \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a}$$

$$\text{mit } \mathbf{u}(\mathbf{x}) := \mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}$$

es folgt mit dem Integralsatz (**)

$$\mathbf{b} \cdot \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}) d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} [\mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}] dv$$

Mit Hilfe eines Divergenztheorems ergibt sich speziell für $\mathbf{b} = \text{konst.}$

$$\operatorname{div} [\mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}] = \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}$$

damit folgt

$$\mathbf{b} \cdot \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}) d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b} dv$$

so daß

$$\int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}) d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) dv \quad \text{q. e. d.}$$

Bem.: Weitere Beweise werden an dieser Stelle nicht geführt.

(d) ZUSAMMENSTELLUNG EINIGER INTEGRALSÄTZE

Es gilt für die Umwandlung von Oberflächen- in Volumenintegrale

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{u} \otimes d\mathbf{a} &= \int_V \text{grad } \mathbf{u} \, dv \\ \int_S \phi \, d\mathbf{a} &= \int_V \text{grad } \phi \, dv \\ \int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{a} &= \int_V \text{div } \mathbf{u} \, dv \\ \int_S \mathbf{u} \times d\mathbf{a} &= - \int_V \text{rot } \mathbf{u} \, dv \\ \int_S \mathbf{T} \, d\mathbf{a} &= \int_V \text{div } \mathbf{T} \, dv \\ \int_S \mathbf{u} \times \mathbf{T} \, d\mathbf{a} &= \int_V \text{div} (\mathbf{u} \times \mathbf{T}) \, dv \\ \int_S \mathbf{u} \otimes \mathbf{T} \, d\mathbf{a} &= \int_V \text{div} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{T}) \, dv\end{aligned}$$

Es gilt für die Umwandlung von Linien- in Flächenintegrale

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{u} \otimes d\mathbf{x} &= - \int_S \text{grad } \mathbf{u} \times d\mathbf{a} \\ \oint_L \phi \, d\mathbf{x} &= - \int_S \text{grad } \phi \times d\mathbf{a} \\ \oint_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} &= \int_S (\text{rot } \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{a} \\ \oint_L \mathbf{u} \times d\mathbf{x} &= \int_S (\mathbf{I} \text{div } \mathbf{u} - \text{grad}^T \mathbf{u}) \, d\mathbf{a} \\ \oint_L \mathbf{T} \, d\mathbf{x} &= \int_S (\text{rot } \mathbf{T})^T \, d\mathbf{a}\end{aligned}$$

mit $d\mathbf{a} = \mathbf{n} \, da$

Bem.: Weitere Beziehungen der Vektor- und Tensorrechnung werden, sofern dies erforderlich ist, unmittelbar im benötigten Zusammenhang angegeben. Auf eine Darstellung allgemeiner nichtorthogonaler und nichtnormierter Basissysteme wurde generell verzichtet.

3.5 Transformationsbeziehungen zwischen aktueller und Referenzkonfiguration

Gegeben sind der Deformationsgradient $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$ und beliebige vektorielle und tensorielle Feldfunktionen \mathbf{v} und \mathbf{A} . Dann gelten mit

$$\begin{array}{l} \text{Referenzkonfiguration} \\ \text{aktuelle Konfiguration} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Grad}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}(\cdot) \\ \text{Div}(\cdot) = [\text{Grad}(\cdot)] \cdot \mathbf{I} \quad \text{oder} \quad [\text{Grad}(\cdot)] \mathbf{I} \\ \text{grad}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\cdot) \\ \text{div}(\cdot) = [\text{grad}(\cdot)] \cdot \mathbf{I} \quad \text{oder} \quad [\text{grad}(\cdot)] \mathbf{I} \end{array} \right.$$

die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{array}{ll} \text{Grad } \mathbf{v} = (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{F} & \text{Grad } \mathbf{A} = [(\text{grad } \mathbf{A}) \mathbf{F}]^{\sharp} \\ \text{grad } \mathbf{v} = (\text{Grad } \mathbf{v}) \mathbf{F}^{-1} & \text{grad } \mathbf{A} = [(\text{Grad } \mathbf{A}) \mathbf{F}^{-1}]^{\sharp} \\ \text{Div } \mathbf{v} = (\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}^T & \text{Div } \mathbf{A} = (\text{grad } \mathbf{A}) \mathbf{F}^T \\ \text{div } \mathbf{v} = (\text{Grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}^{T-1} & \text{div } \mathbf{A} = (\text{Grad } \mathbf{A}) \mathbf{F}^{T-1} \end{array}$$

Darüber hinaus gilt

$$\begin{array}{ll} \text{Div } \mathbf{F}^{T-1} = -\mathbf{F}^{T-1} (\mathbf{F}^{T-1} \text{Grad } \mathbf{F})^{\perp} = -(\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^{T-1} [\text{Grad}(\det \mathbf{F})] \\ \text{div } \mathbf{F}^T = -\mathbf{F}^T (\mathbf{F}^T \text{grad } \mathbf{F}^{-1})^{\perp} = -(\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^T [\text{grad}(\det \mathbf{F})^{-1}] \end{array}$$