



Universität Stuttgart

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers
www.mechbau.uni-stuttgart.de

Ergänzung zur Vorlesung

Computerorientierte Methoden für
Kontinua und Flächentragwerke

Formelsammlung

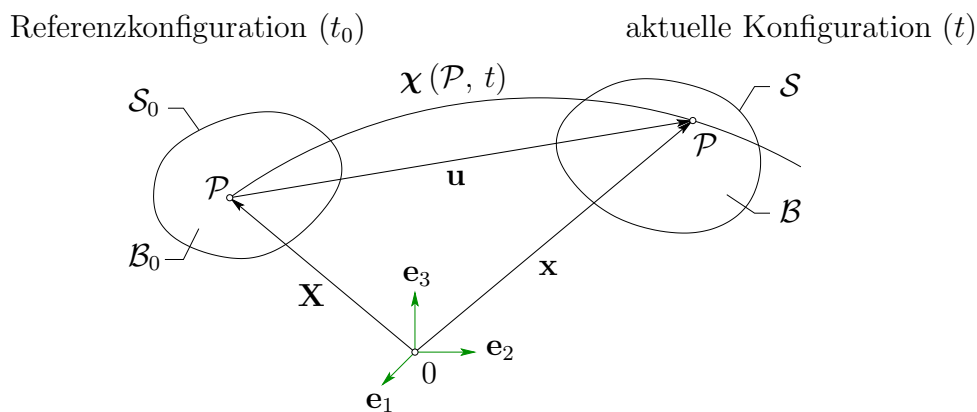
Stand WS 2014/15

TEIL I: Kontinua

1 Kinematik der Kontinua

Körper, Konfiguration und Bewegung

Materieller Körper in unterschiedlichen Konfigurationen:



$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathcal{P}, t)$$

mit $\boldsymbol{\chi}(\cdot)$: Platzierungsfunktion

Bewegung materieller Punkte:

- Materielle Beschreibung (*Lagrange*):

Bewegung:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$$

Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$$

$$\mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$$

- Räumliche Beschreibung (*Euler*):

inverse Bewegung:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

Ein-Eindeutigkeit der Bewegung:

Die Bewegung von \mathcal{P} ist eindeutig und eindeutig invertierbar, wenn gilt:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \quad \longleftrightarrow \quad d\mathbf{X} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)^{-1} d\mathbf{x}$$

Voraussetzung für o.g. Beziehung ist, daß $\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)^{-1}$ existiert:

$$\mathbf{F} \quad := \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad : \text{ materieller Deformationsgradient}$$

$$\mathbf{F}^{-1} \quad = \quad \frac{(\text{cof } \mathbf{F})^T}{\det \mathbf{F}}$$

Ergebnis: \mathbf{F}^{-1} existiert nur, wenn

$$\boxed{J := \det \mathbf{F} = \det \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \neq 0} \quad \text{mit } J : \text{Jacobi-Determinante}$$

Verschiebungsvektor:

$$\boxed{\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}(\mathcal{P}, t_0)}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) & = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \\ \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) & = \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \end{cases}$$

Materielle Zeitableitung:

$$\dot{\mathbf{u}} := \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

$$\longrightarrow \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}}_{\text{lokaler}} + \underbrace{(\text{grad } \mathbf{u}) \dot{\mathbf{x}}}_{\text{konvektiver Teil}}$$

Deformation und Verzerrung

Transporttheoreme:

- Linienelement: $d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$
- Flächenelement: $d\mathbf{a} = \text{cof } \mathbf{F} d\mathbf{A}$
- Volumenelement: $dv = \det \mathbf{F} dV$

Quadrate des Linienelements:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= \mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) d\mathbf{X} =: d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X} \end{aligned}$$

mit $\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}}$: „rechter“ *Greenscher* Deformationstensor

Verzerrung aus der Differenz der Quadrate der Linienelemente:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} =: d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} d\mathbf{X} \end{aligned}$$

mit $\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})}$: *Green-Lagrangescher* Verzerrungstensor

Es folgt

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u} \text{ Grad } \mathbf{u})$$

Für kleine Werte von $\text{Grad } \mathbf{u}$ folgt die linearisierte Verzerrung

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} := \text{lin } \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u})}$$

2 Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik

Fundamentaltbilanz

Für eine beliebige, volumenspezifische, vektorwertige mechanische Größe Ψ gilt

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \Psi dv = \int_S \Phi da + \int_{\mathcal{V}} \sigma dv + \int_{\mathcal{V}} \hat{\Psi} dv}$$

mit $\left\{ \begin{array}{l} \Psi : \text{volumenspezifische mechanische Größe} \\ \Phi : \text{Flußtensor der mechanischen Größe (Ausfluß positiv)} \\ \sigma : \text{Zufuhrvektor der mechanischen Größe} \\ \hat{\Psi} : \text{Produktion der mechanischen Größe} \end{array} \right.$

Für skalarwertige mechanische Größen Ψ gilt analog

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \Psi dv = \int_S \phi \cdot da + \int_{\mathcal{V}} \sigma dv + \int_{\mathcal{V}} \hat{\Psi} dv}$$

Lokale Form der Fundamentalbilanz:

Für die lokale Bilanz für \mathcal{P} gilt

$$\dot{\Psi} + \Psi \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \Phi + \sigma$$

Für skalarwertige Größen Ψ folgt analog

$$\dot{\Psi} + \Psi \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \phi + \sigma$$

Spezielle Bilanzen**Axiomatische Einführung der Massenbilanz:**

Axiom: In einem geschlossenen System ist die Masse eines materiellen Körpers \mathcal{B} konstant.

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv = \text{konst.}$$

Daraus ergibt sich

$$\dot{M} = \frac{d}{dt} M = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv \equiv 0$$

Im Vergleich mit der globalen Bilanz folgt für die *Lagrangesche* Formulierung der Massenbilanz

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0$$

Die *Eulersche* Formulierung der Massenbilanz ergibt sich zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \dot{\mathbf{x}}) = 0$$

Axiomatische Einführung der Impulsbilanz:

Axiom: In einem geschlossenen System entspricht die zeitliche Änderung des auf \mathcal{B} einwirkenden Impulses der Summe der auf \mathcal{B} einwirkenden Nah- und Fernwirkungskräfte.

Im Einzelnen gilt

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{l} \, dv = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad : \text{Körperimpuls}$$

$$\mathbf{k}_0 = \int_s \mathbf{t} \, da = \int_s \mathbf{T} \, da \quad : \text{Nahwirkung}$$

$$\mathbf{k}_v = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{b} \, dv \quad : \text{Fernwirkung, z.B. mit } \mathbf{b} = \mathbf{g}$$

Zudem gilt das *Cauchy*-Theorem

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \mathbf{t} & : \text{ Spannungsvektor} \\ \mathbf{T} & : \text{ Cauchyscher Spannungstensor} \\ \mathbf{n} & : \text{ Oberflächennormaleneinheitsvektor} \end{cases}$$

In Vergleich mit der globalen Bilanz folgt

$$(\rho \dot{\mathbf{x}})' + \rho \dot{\mathbf{x}} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}$$

Die lokale Form der Impulsbilanz ergibt sich zu

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}$$

Impulssatz für geometrisch lineare Anwendungen:

Bem.: Nach der geometrisch linearen Theorie liegen kleine Deformationen vor, d.h. Referenz- und aktuelle Konfiguration sind unmittelbar benachbart

$$\rho \approx \rho_0, \quad \mathbf{T} \approx \boldsymbol{\sigma}, \quad \operatorname{div}(\cdot) \approx \operatorname{Div}(\cdot)$$

Es folgt

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b}$$

Bem.: Für ruhende Systeme (Statik) gilt $\ddot{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{0}$, so daß

$$\mathbf{0} = \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} \quad : \text{ Kräftesatz}$$

3 Geometrisch lineare Elastizitätstheorie

Stoffgesetz der geometrisch linearen Elastizitätstheorie

Potential:

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mu (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{2} \lambda (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I})^2$$

$$\text{mit } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad : \text{ Lamé-Konstanten}$$

Spannung als Ableitung des Potentials nach $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{dU(\boldsymbol{\varepsilon})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I}$$

Tangente als Ableitung der Spannung nach $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$${}^4\mathbf{B} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d^2U}{d\boldsymbol{\varepsilon} \otimes d\boldsymbol{\varepsilon}} = 2\mu(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\text{23T}} + \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$$

$$\text{mit } \begin{cases} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\text{23T}} & : \text{ identische Abbildung} \\ \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} & : \text{ Spurbildung} \end{cases}$$

Alternative Darstellung des Stoffgesetzes mit ${}^4\mathbf{B} = \text{konstant}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\text{23T}} \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I}$$

Lamé-Naviersche Gleichungen

Einsetzen der Stoffbeziehungen in die linearisierte Impulsbilanz liefert

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \text{Div } \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{Div} [(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I}]$$

Umformung mit Verschiebungsableitungen und Laplace-Operator $\Delta(\cdot) := \text{Div Grad}(\cdot)$

$$\begin{aligned} \text{Div } \boldsymbol{\sigma} &= \mu(\Delta \mathbf{u} + \text{Grad Div } \mathbf{u}) + \lambda \text{Grad Div } \mathbf{u} \\ &= \lambda \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \text{Grad Div } \mathbf{u} \end{aligned}$$

Einsetzen in den Kräftesatz liefert

$$\mathbf{0} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \text{Grad Div } \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{b}$$

Bem.: Die Lamé-Navierschen Gleichungen sind die in den Verschiebungsableitungen formulierten Hauptgleichungen des linear-elastisch deformierbaren Körpers. Ist $\rho_0 \mathbf{b}$ ortsunabhängig ($\text{Div } \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0}$) und rotationsfrei ($\rho_0 \text{Rot } \mathbf{b} \equiv 0$), dann folgt

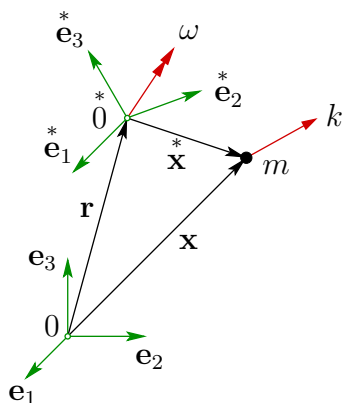
$$\Delta \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

4 Newtonsche Mechanik

Bem.: Formulierung nach *Newton* mit Bezug auf Inertialsysteme

Klassifikation von Bezugssystemen

hier: Bezug auf orthonormierte Basis \mathbf{e}_i



Absolut- und Relativbewegung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \mathbf{x}^*$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}}^* \\ \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{x}}^* \end{cases}$$

Absolut- und Relativgeschwindigkeit:

$$\mathbf{x}^* = x_i^* \mathbf{e}_i^* \rightarrow \dot{\mathbf{x}}^* = \dot{x}_i^* \mathbf{e}_i^* + x_i^* \dot{\mathbf{e}}_i^*$$

mit $\dot{\mathbf{e}}_i^* := \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i^*$ und $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{x}}^* = \underbrace{\dot{x}_i^* \mathbf{e}_i^*}_{\mathbf{v}^*} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^*$$

Damit folgt

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^*}_{\mathbf{v}_f} + \underbrace{\mathbf{v}^*}_{\mathbf{v}_r}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \mathbf{v} & : \text{ Absolutgeschwindigkeit} \\ \mathbf{v}_f = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^* & : \text{ Führungsgeschwindigkeit} \\ \mathbf{v}_r = \mathbf{v}^* & : \text{ Relativgeschwindigkeit} \end{cases}$$

Absolut- und Relativbeschleunigung:

Durch weiteres Differenzieren folgt analog

$$\mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^*) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^* + \mathbf{b}^*$$

$$\text{mit } \mathbf{b}^* = \ddot{x}_i^* \mathbf{e}_i^*$$

bzw. in alternativer Darstellung

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r$$

$$\text{mit } \begin{cases} \mathbf{b} & : \text{ Absolutbeschleunigung} \\ \mathbf{b}_f = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) & : \text{ Führungsbeschleunigung} \\ \mathbf{b}_c = 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} & : \text{ Coriolis-Beschleunigung} \\ \mathbf{b}_r = \mathbf{b}^* & : \text{ Relativbeschleunigung} \end{cases}$$

Anteil der Führungsbeschleunigung \mathbf{b}_f :

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} \quad : \text{ Drehbeschleunigung}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \quad : \text{ Zentripetalbeschleunigung}$$

Klassische *Newton'sche* Mechanik

Impulssatz für den Massenpunkt m nach *Newton*:

$$m \mathbf{b} = \mathbf{k} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{k} & : \text{ auf } m \text{ einwirkende Kraft} \\ \mathbf{b} & : \text{ Beschleunigung im Inertialsystem} \end{cases}$$

$$m (\mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r) = \mathbf{k}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{m \mathbf{b}_r = \mathbf{k} - \underbrace{m \mathbf{b}_f - m \mathbf{b}_c}_{\text{Scheinkräfte}}}$$

Beispiel: raumfestes System auf der Erde, d.h. $\mathbf{r} = \text{konst.}$ und $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathbf{b}_f = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) & : \text{ unvermeidbar} \\ \mathbf{b}_c = 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} & : \text{ nur bei Bewegung } (\mathbf{v}^* \neq \mathbf{0}) \end{cases}$$

Damit folgt für den Impulssatz bei „erdfestem“ Bezugssystem:

$$\boxed{m \mathbf{b}_r = \mathbf{k} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - 2 m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^*}$$

D'Alembertsches Prinzip

Bem.: Das *D'Alembertsche* Prinzip kann auch zur Herleitung der schwachen Formulierung des Randwertproblems genutzt werden.

Herleitung aus dem Impulssatz:

Multiplikation des Impulssatzes mit $\delta \mathbf{u}$ (Variation der Verschiebung bzw. Testfunktion) und Integration über das Volumen von \mathcal{B} :

$$\int_{\mathcal{V}} [\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{x}})] \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = 0$$

mit $\begin{cases} \delta \mathbf{x} = \delta(\mathbf{X} + \mathbf{u}) = \delta \mathbf{u} \\ \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{x}}) : \text{Residuum} \end{cases}$

Damit folgt

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} \, dv = \int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, da + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv$$

mit $\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{T} \mathbf{n}$ auf S : Randbedingung

Geometrisch linearisierte Form:

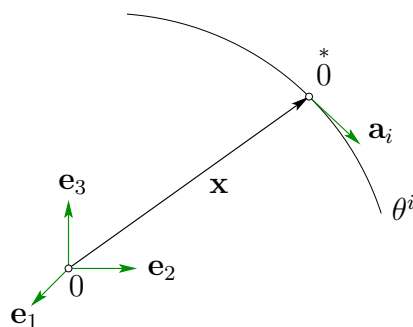
$$\int_{\mathcal{V}} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta(\operatorname{Grad} \mathbf{u}) \, dV = \int_S \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_{\mathcal{V}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV$$

mit $\boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{Grad} \delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta(\operatorname{Grad} \mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}$

5 Differentialgeometrie der Kontinua

Bem.: Das Folgende gilt im 3-d Raum unserer physikalischen Erfahrung (Anschauungsraum bzw. eigentlich *Euklidischer* Raum).

Tangentenraum und natürliche Basis



- raumfestes Bezugssystem $\{0, \mathbf{e}_i\}$
- Tangentialsystem $\{0^*, \mathbf{a}_i\}$

mit $i = \{1, 2, 3\}$ im 3-d Raum

Natürliche Basis:

Tangential an die Raumkurve mit $\{\theta^1\}$, die Fläche mit $\{\theta^1, \theta^2\}$ bzw. den „gekrümmten“ Raum mit $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$.

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{x}(\theta^i)}{\partial \theta^i} =: \mathbf{x}_{,i}$$

Kovariante Metrikoeffizienten:

$$a_{ik} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i \quad \longrightarrow \quad a_{ik} = a_{ki}$$

Bem.: D.h. 6 der 9 Werte in a_{ik} sind unabhängig.

Bemerkung zum Skalarprodukt:

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k = |\mathbf{a}_i| |\mathbf{a}_k| \cos \sphericalangle(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k)$$

Kontravariante, duale Basis:

Einführung der dualen Basis über die Eigenschaft

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^k := \delta_i^k \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^k = 0 & \text{für } i \neq k, \text{ d.h. } \mathbf{a}_i \perp \mathbf{a}^k \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^k = 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

Ermittlung der kontravarianten Metrik über die Vorschrift

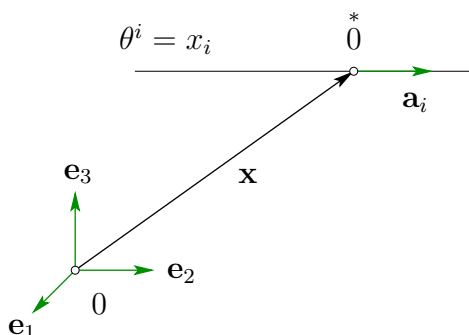
$$a_{ik} a^{kj} = \delta_i^j \quad \longrightarrow \quad 6 \text{ Gleichungen für 6 Unbekannte in } a^{kj}$$

Die kontravariante Basis ergibt sich über die Vorschrift

$$\mathbf{a}^k = a^{kj} \mathbf{a}_j$$

Bemerkungen:

- \mathbf{a}_i und a_{ik} definieren den Tangentenraum (kovariant)
- \mathbf{a}^i und a^{ik} definieren den Kotangentenraum (kontravariant)

Der Sonderfall der orthonormierten Basis:

Natürliche Basis und Metrikoeffizienten :

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{x}(x_i)}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i$$

$$\longrightarrow \quad a_{ik} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_k & \text{für } i \neq k \\ \mathbf{e}_i \parallel \mathbf{e}_k & \text{für } i = k \end{cases}$$

Kontravariante Metrik und duale Basis:

$$a_{ik} a^{kj} = \delta_{ik} a^{kj} = \delta_i^j \longrightarrow a^{kj} = \delta^{kj}$$

$$\longrightarrow \boxed{\mathbf{a}^k = \delta^{kj} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}^k}$$

Konsequenz: Tangenten- und Kotangentenraum fallen zusammen, d.h. $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$ und $a_{ik} = a^{ik} = \delta_{ik}$. Im Allgemeinen werden die Ausdrücke \mathbf{e}_i und δ_{ik} benutzt.

Ortsableitung der Basis und *Christoffelsymbole*

Ableitung der Tangentenvektoren:

$$\boxed{\mathbf{a}_{i,j} := \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \theta^j} =: \Gamma_{ij}^k \mathbf{a}_k}$$

mit Γ_{ij}^k : *Christoffelsymbole* 2.Art

Berechnung der *Christoffelsymbole* 2.Art:

$$\mathbf{a}_{i,j} \cdot \mathbf{a}^s = \Gamma_{ij}^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^s = \Gamma_{ij}^k \delta_k^s = \Gamma_{ij}^s$$

$$\boxed{\Gamma_{ij}^s = \mathbf{a}_{i,j} \cdot \mathbf{a}^s}$$

Umformung liefert

$$\underbrace{\mathbf{a}_{s,j} \cdot \mathbf{a}^i}_{\Gamma_{sj}^i} = - \underbrace{\mathbf{a}_{,j}^i \cdot \mathbf{a}_s}_{\Gamma_{js}^i} \longrightarrow \boxed{\Gamma_{sj}^i = -\Gamma_{js}^i}$$

Ableitung der Kotangentenvektoren:

$$\boxed{\mathbf{a}_{,j}^i := \Gamma_{js}^i \mathbf{a}^s = -\Gamma_{sj}^i \mathbf{a}^s}$$

$$\text{mit } \Gamma_{js}^i = \mathbf{a}_{,j}^i \cdot \mathbf{a}_s = -\Gamma_{sj}^i = \mathbf{a}_{s,j} \cdot \mathbf{a}^i$$

Christoffelsymbole 1.Art:

$$\mathbf{a}_{i,k} = \Gamma_{ik}^r \mathbf{a}_r = \Gamma_{ik}^r a_{rs} \mathbf{a}^s =: \Gamma_{iks} \mathbf{a}^s$$

mit Γ_{iks} : *Christoffelsymbole* 1.Art

$$\boxed{\Gamma_{iks} = \mathbf{a}_{i,k} \cdot \mathbf{a}_s}$$

Identitätstensor und natürliche Basis:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \text{grad } \mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \otimes \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \underbrace{\mathbf{x}_{,i}}_{\mathbf{a}_i} \otimes \underbrace{\text{grad } \theta^i}_{\mathbf{a}^i} =: \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^i \end{aligned}$$

Durch Hoch- und Runterziehen der Indizes mit Hilfe der Metrikkoeffizienten folgt

$$\mathbf{I} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^i = \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}_i = a^{ij} \mathbf{a}_j \otimes \mathbf{a}_i = a_{ij} \mathbf{a}^j \otimes \mathbf{a}^i$$

Kreuzprodukt der Tangentenvektoren:

Mit dem *Ricci*-Permutationstensor $\overset{3}{\mathbf{E}}$ gilt

$$\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = \overset{3}{\mathbf{E}}(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j)$$

$$\overset{3}{\mathbf{E}} = \begin{cases} E_{ijk} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j \otimes \mathbf{a}^k \\ E^{ijk} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \otimes \mathbf{a}_k \end{cases}$$

$$\text{mit } \begin{cases} E_{ijk} = (\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j) \cdot \mathbf{a}_k = \det \mathbf{A} e_{ijk} \\ E^{ijk} = (\mathbf{a}^i \times \mathbf{a}^j) \cdot \mathbf{a}^k = \det \bar{\mathbf{A}} e^{ijk} \end{cases}$$

mit e_{ijk}, e^{ijk} : Permutationssymbol oder *Levi-Civita*-Symbol

$$e_{ijk} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k \quad \longrightarrow \quad e_{ijk} = e^{ijk} = \begin{cases} 1 & : \text{gerade Permutation} \\ -1 & : \text{ungerade Permutation} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Transformationstensoren \mathbf{A} und $\bar{\mathbf{A}}$:

Mit \mathbf{A} und $\bar{\mathbf{A}}$ können \mathbf{a}_i und \mathbf{a}^i als Funktion von \mathbf{e}_i dargestellt werden, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \mathbf{A} \mathbf{e}_i & \text{mit } \mathbf{A} &= (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_k) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \\ \mathbf{a}^i &= \bar{\mathbf{A}} \mathbf{e}_i & \text{mit } \bar{\mathbf{A}} &= (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}^k) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

Für die Determinanten von \mathbf{A} und $\bar{\mathbf{A}}$ läßt sich zeigen, daß

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \sqrt{a} & \text{mit } a &= \det(a_{ik}) \\ \det \bar{\mathbf{A}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} & \text{mit } a^{-1} &= \det(a^{ik}) = [\det(a_{ik})]^{-1} \\ \longrightarrow & E_{ijk} = \sqrt{a} e_{ijk}, & E^{ijk} &= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{ijk} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \overset{3}{\mathbf{E}}(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2) = E_{ijk}(\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j \otimes \mathbf{a}^k)(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2) = \sqrt{a} \mathbf{a}^3$$

Bildung von Gradienten und Divergenzen

Gradient einer skalarwertigen Funktion $\phi(\mathbf{x})$:

$$\text{grad } \phi(\mathbf{x}) = \frac{d\phi}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial\phi}{\partial\theta^i} \frac{\partial\theta^i}{\partial\mathbf{x}} = \phi_{,i} \mathbf{a}^i$$

Gradient und Divergenz einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{v}(\mathbf{x})$:

$$\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\theta^i} \otimes \frac{\partial\theta^i}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{v}_{,i} \otimes \mathbf{a}^i$$

Bei kovarianter Basis von \mathbf{v} folgt mit *Christoffelsymbolen* 2.Art

$$\mathbf{v}_{,i} = (v^n_{,i} + v^s \Gamma_{si}{}^n) \mathbf{a}_n =: v^n|_i \mathbf{a}_n$$

mit $v^n|_i$: kovariante Ableitung

Bei kontravarianter Darstellung von \mathbf{v} folgt

$$\mathbf{v}_{,i} = (v_{n,i} - v_s \Gamma_{ni}{}^s) \mathbf{a}^n =: v_n|_i \mathbf{a}^n$$

$$\rightarrow \text{grad } \mathbf{v} = \begin{cases} v^n|_i \mathbf{a}_n \otimes \mathbf{a}^i \\ v_n|_i \mathbf{a}^n \otimes \mathbf{a}^i \end{cases}$$

Divergenz einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{v}(\mathbf{x})$:

$$\text{div } \mathbf{v} = (\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{I} = v^i|_i$$

Gradient und Divergenz einer tensorwertigen Funktion $\mathbf{T}(\mathbf{x})$

$$\text{grad } \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\theta^n} \otimes \frac{\partial\theta^n}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{T}_{,n} \otimes \mathbf{a}^n$$

Bei kovarianter Basis von \mathbf{T} folgt mit *Christoffelsymbolen* 2.Art

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{,n} &= \underbrace{(t^{ij}{}_{,n} + t^{sj} \Gamma_{sn}{}^i + t^{is} \Gamma_{sn}{}^j)} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \\ &= t^{ij}|_n \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \end{aligned}$$

Bei kontravarianter Basis von \mathbf{T} folgt

$$\mathbf{T}_{,n} = \underbrace{(t_{ij,n} - t_{sj} \Gamma_{in}^s - t_{is} \Gamma_{jn}^s)}_{t_{ij}|_n} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$$

$$= t_{ij}|_n \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$$

$$\rightarrow \text{grad } \mathbf{T} = \begin{cases} t^{ij}|_n \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \otimes \mathbf{a}^n \\ t_{ij}|_n \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j \otimes \mathbf{a}^n \end{cases}$$

Divergenz einer tensorwertigen Funktion $\mathbf{T}(\mathbf{x})$:

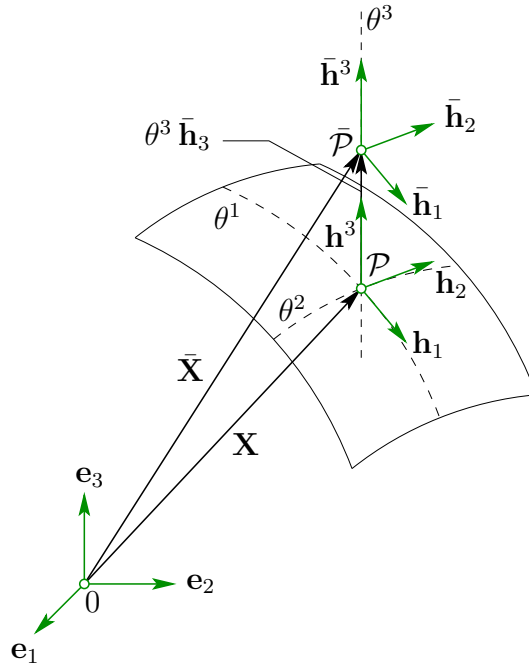
$$\text{div } \mathbf{T} = (\text{grad } \mathbf{T}) \mathbf{I} = t^{ij}|_j \mathbf{a}_i$$

TEIL II: Flächentragwerke

6 Differentialgeometrie der Flächentragwerke

Geometrie der Flächenträger

Referenzkonfiguration der Schalenmittelfläche:



Ortsvektor der Mittelfläche:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\theta^\alpha) \quad \text{mit } \alpha = \{1, 2\}$$

Natürliche Basis (Tangentenraum):

$$\mathbf{h}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}(\theta^\alpha)}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{X}_{,\alpha}$$

Normierter Normalenvektor:

$$\mathbf{h}^3 = \frac{\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2}{|\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2|}, \quad \mathbf{h}^3 \equiv \mathbf{h}_3$$

Ableitung der Tangentenvektoren:

$$\mathbf{h}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^r \mathbf{h}_r = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{h}_\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^3 \mathbf{h}_3$$

Darin ist

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 =: -b_{\alpha\beta} : \quad \text{„kovarianter Krümmungstensor“}$$

Ableitung des Normalenvektors:

$$\Gamma_{3\alpha}^3 \equiv 0$$

$$\mathbf{h}_{3,\alpha} = \Gamma_{3\alpha}^\beta \mathbf{h}_\beta$$

Darin ist

$$\Gamma_{3\alpha}^\beta =: b_\alpha^\beta : \quad \text{„gemischtvarianter Krümmungstensor“}$$

Schalenraum:

Der Ortsvektor des Schalenraums ist gegeben durch

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(\theta^\alpha) + \theta^3 \mathbf{h}_3$$

Tangentenvektoren:

$$\bar{\mathbf{h}}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}(\theta^\alpha)}{\partial \theta^\alpha} + \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} (\theta^3 \mathbf{h}_3)$$

$$\longrightarrow \boxed{\bar{\mathbf{h}}_\alpha = (\delta_\alpha^\beta + \theta^3 \Gamma_{3\alpha}{}^\beta) \mathbf{h}_\beta =: \mu_\alpha{}^\beta \mathbf{h}_\beta}$$

Darin ist

$$\mu_\alpha{}^\beta := \delta_\alpha^\beta + \theta^3 \Gamma_{3\alpha}{}^\beta : \text{„Schalenshifter“}$$

Normalenvektor

$$\boxed{\bar{\mathbf{h}}_3 = \mathbf{h}_3 = \mathbf{h}^3 = \bar{\mathbf{h}}^3}$$

Kovariante Metrikoeffizienten:

- für die Mittelfläche

$$h_{\alpha\beta} = \mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{h}_\beta,$$

$$h_{33} = \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{h}_3 = 1$$

$$h_{\alpha 3} = h_{3\alpha} \equiv 0, \quad \text{da } \mathbf{h}_\alpha \perp \mathbf{h}_3$$

$$\text{außerdem folgt } h := \det(h_{\alpha\beta})$$

- für den Schalenraum

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{h}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{h}}_\beta = \mu_\alpha{}^\gamma \mu_\beta{}^\delta h_{\gamma\delta},$$

$$\bar{h}_{33} = \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{h}_3 = 1,$$

$$\bar{h}_{\alpha 3} = \bar{h}_{3\alpha} \equiv 0$$

$$\text{außerdem folgt } \bar{h} := \underbrace{\det(\mu_\alpha{}^\gamma)}_{=: \mu} \underbrace{\det(\mu_\beta{}^\delta)}_{=: \mu} \det(h_{\gamma\delta}) = \mu^2 h$$

Gradientenbildung im Schalenraum

Gradient eines Vektorfelds $\mathbf{v}(\bar{\mathbf{X}})$:

$$\text{Grad } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta^k} \otimes \frac{\partial \theta^k}{\partial \bar{\mathbf{X}}} = \mathbf{v}_{,k} \otimes \bar{\mathbf{h}}^k = \underbrace{(v_{,k}^i + v^s \bar{\Gamma}_{sk}{}^i)}_{v^i|_k} \bar{\mathbf{h}}_i \otimes \bar{\mathbf{h}}^k = \underbrace{(v_{i,k} - v_s \bar{\Gamma}_{ik}{}^s)}_{v_i|_k} \bar{\mathbf{h}}^i \otimes \bar{\mathbf{h}}^k$$

Kovariante Ableitungen der Schalentheorie:

Man betrachtet nur Funktionen von θ^α , die nach θ^β abgeleitet werden.

$$\mathbf{v}_{,\beta} = v^\alpha|_\beta \bar{\mathbf{h}}_\alpha = v_\alpha|_\beta \bar{\mathbf{h}}^\alpha$$

$$\boxed{v^\alpha|_\beta = v^\alpha|_\beta + v^3 \Gamma_{3\beta}{}^\alpha = v^\alpha|_\beta + v^3 b_\alpha{}^\beta} \quad \text{mit} \quad v^\alpha|_\beta = v^\alpha{}_{,\beta} + v^\gamma \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}{}^\alpha$$

$$\boxed{v_\alpha|_\beta = v_\alpha|_\beta - v_3 \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^3 = v_\alpha|_\beta + v_3 b_{\alpha\beta}} \quad \text{mit} \quad v_\alpha|_\beta = v_{\alpha,\beta} - v_\gamma \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma$$

Gradient eines Tensorfelds $\mathbf{T}(\bar{\mathbf{X}})$:

$$\text{Grad } \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta^k} \otimes \frac{\partial \theta^k}{\partial \bar{\mathbf{X}}} = \mathbf{T}_{,k} \otimes \bar{\mathbf{h}}^k$$

$$\text{mit } \mathbf{T}_{,k} = \begin{cases} t^{ij}|_k \bar{\mathbf{h}}^i \otimes \bar{\mathbf{h}}^j \\ t_{ij}|_k \bar{\mathbf{h}}^i \otimes \bar{\mathbf{h}}^j \end{cases}$$

$$\text{mit } \begin{cases} t^{ij}|_k = t^{ij}_{,k} + t^{sj} \bar{\Gamma}_{sk}^i + t^{is} \bar{\Gamma}_{sk}^j \\ t_{ij}|_k = t_{ij,k} - t_{sj} \bar{\Gamma}_{ik}^s - t_{is} \bar{\Gamma}_{jk}^s \end{cases}$$

Kovariante Ableitungen der Schalentheorie:

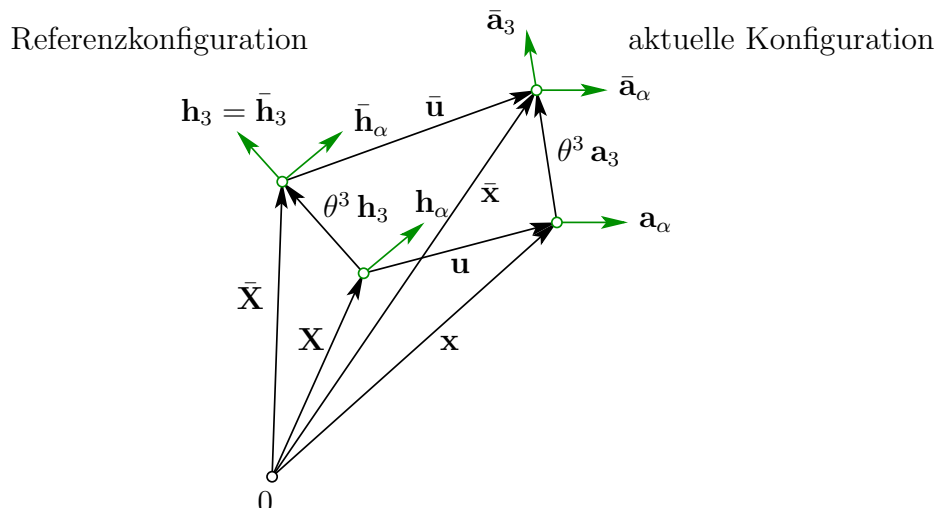
$$\begin{aligned} t^{\alpha\beta}|_\gamma &= t^{\alpha\beta} ||_\gamma + t^{3\beta} \bar{\Gamma}_{3\gamma}^\alpha + t^{\alpha 3} \bar{\Gamma}_{3\gamma}^\beta \\ &= t^{\alpha\beta} ||_\gamma + t^{3\beta} b_\gamma^\alpha + t^{\alpha 3} b_\gamma^\beta \end{aligned}$$

$$\text{mit } t^{\alpha\beta} ||_\gamma = t^{\alpha\beta}_{,\gamma} + t^{\delta\beta} \bar{\Gamma}_{\delta\gamma}^\alpha + t^{\alpha\delta} \bar{\Gamma}_{\delta\gamma}^\beta$$

$$\begin{aligned} t_{\alpha\beta}|_\gamma &= t_{\alpha\beta} ||_\gamma - t_{3\beta} \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^3 - t_{\alpha 3} \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^3 \\ &= t_{\alpha\beta} ||_\gamma + t_{3\beta} b_{\alpha\gamma} + t_{\alpha 3} b_{\beta\gamma} \end{aligned}$$

$$\text{mit } t_{\alpha\beta} ||_\gamma = t_{\alpha\beta,\gamma} - t_{\delta\beta} \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\delta - t_{\alpha\delta} \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\beta$$

Deformation und Verzerrung



Mittelfläche der aktuellen Konfiguration

Ortsvektor der Mittelfläche und natürliche Basis:

$$\mathbf{x}(\theta^\alpha) = \mathbf{X}(\theta^\alpha) + \mathbf{u}(\theta^\alpha) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{a}_\alpha := \frac{\partial \mathbf{x}(\theta^\alpha)}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{X}_{,\alpha} + \mathbf{u}_{,\alpha}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \mathbf{X}_{,\alpha} = \mathbf{h}_\alpha \\ \mathbf{u}_{,\alpha} = u^\beta \parallel_\alpha \mathbf{h}_\beta \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{h}_\alpha + u^\beta \parallel_\alpha \mathbf{h}_\beta = (\delta_\alpha^\beta + u^\beta \parallel_\alpha) \mathbf{h}_\beta}$$

Normalenvektor der Mittelfläche:

$$\boxed{\mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}}$$

Schalenraum der aktuellen Konfiguration

Ortsvektor für Punkte im Schalenraum und natürliche Basis:

$$\bar{\mathbf{x}}(\theta^i) = \bar{\mathbf{X}}(\theta^i) + \bar{\mathbf{u}}(\theta^i)$$

$$\text{mit } \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \theta^3 (\mathbf{a}_3 - \mathbf{h}_3)$$

liefert

$$\boxed{\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{X}}(\theta^i) + \mathbf{u}(\theta^\alpha) + \theta^3 \underbrace{(\mathbf{a}_3 - \mathbf{h}_3)}_{\mathbf{w}}}$$

$$\text{mit } \mathbf{w} := \mathbf{a}_3 - \mathbf{h}_3$$

Natürliche Basis (Tangentenvektoren):

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^\alpha} = \underbrace{\bar{\mathbf{X}}_{,\alpha}}_{\bar{\mathbf{h}}_\alpha = \mu_\alpha^\beta \mathbf{h}_\beta} + \mathbf{u}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha}$$

$$\longrightarrow \boxed{\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \bar{\mathbf{h}}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha}}$$

Natürliche Basis (Normalenvektor):

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^3} = \bar{\mathbf{h}}_3 + \mathbf{w}$$

Einsetzen liefert

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_3$$

Kovariante Metrik des Schalenraums:

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta$$

Damit folgt

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{h}}_{\alpha\beta} + \bar{\mathbf{h}}_\alpha \cdot (\mathbf{u}_{,\beta} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\beta}) + \bar{\mathbf{h}}_\beta \cdot (\mathbf{u}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha})$$

Außerdem gilt

$$\bar{a}_{\alpha 3} = (\bar{\mathbf{h}}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha}) \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 = 0$$

$$\bar{a}_{33} = a_{33} = 1$$

Deformation und Verzerrung im Schalenraum

Deformationsgradient:

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \bar{\mathbf{x}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} \otimes \frac{\partial \theta^i}{\partial \bar{\mathbf{X}}} = \bar{\mathbf{a}}_i \otimes \bar{\mathbf{h}}^i$$

Rechter Green'scher Deformationstensor:

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\bar{\mathbf{h}}^i \otimes \bar{\mathbf{a}}_i)(\bar{\mathbf{a}}_j \otimes \bar{\mathbf{h}}^j) = \bar{a}_{ij} \bar{\mathbf{h}}^i \otimes \bar{\mathbf{h}}^j$$

Green–Lagrangescher Verzerrungstensor:

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\bar{a}_{ij} - \bar{h}_{ij}) \bar{\mathbf{h}}^i \otimes \bar{\mathbf{h}}^j$$

Da $e_{33} = \frac{1}{2}(\bar{a}_{33} - \bar{h}_{33}) = 0$, folgt

$$\mathbf{E} = \underbrace{\frac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\beta})}_{e_{\alpha\beta}} \bar{\mathbf{h}}^\alpha \otimes \bar{\mathbf{h}}^\beta$$

Linearisierter Verzerrungstensor:

$$\text{lin } \mathbf{E} =: \boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\frac{1}{2} [\bar{\mathbf{h}}_\alpha \cdot (\mathbf{u}_{,\beta} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\beta}) + \bar{\mathbf{h}}_\beta \cdot (\mathbf{u}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha})]}_{\varepsilon_{\alpha\beta}} \bar{\mathbf{h}}^\alpha \otimes \bar{\mathbf{h}}^\beta$$

Verzerrungstensor der technischen Schalentheorie

Annahmen:

- dünne Schalen, d.h. θ^3 sehr klein
- geringe Krümmungen, d.h. $\Gamma_{3\alpha}{}^\beta = b_\alpha{}^\beta$ sehr klein $\longrightarrow \theta^3 \Gamma_{3\alpha}{}^\beta \ll \delta_\alpha^\beta$

Konsequenzen:

Es folgt

$$\boxed{\bar{\mathbf{h}}_\alpha = \mu_\alpha^\beta \mathbf{h}_\beta \approx \delta_\alpha^\beta \mathbf{h}_\beta = \mathbf{h}_\beta} \quad \longrightarrow \quad \bar{\mathbf{h}}^\alpha = \mathbf{h}^\alpha$$

Damit reduziert sich der linearisierte Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ auf

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta \\ \text{mit } \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}[\mathbf{h}_\alpha \cdot (\mathbf{u}_{,\beta} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\beta}) + \mathbf{h}_\beta \cdot (\mathbf{u}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha})] \end{aligned}}$$

Bem.: Der linearisierte Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ kann in einen translatorischen und einen rotatorischen Anteil zerlegt werden, d.h.

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &=: \mathbf{U} + \theta^3 \mathbf{R} \\ \text{mit } \begin{cases} \mathbf{U} &= \frac{1}{2}(\mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,\beta} + \mathbf{h}_\beta \cdot \mathbf{u}_{,\alpha}) \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta \\ \mathbf{R} &= \frac{1}{2}(\mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{w}_{,\beta} + \mathbf{h}_\beta \cdot \mathbf{w}_{,\alpha}) \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta \end{cases} \end{aligned}}$$

Verzerrungskoeffizienten von U und R:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,\beta} &= u_\alpha |_\beta = u_\alpha ||_\beta - u_3 \Gamma_{\alpha\beta}^3 \\ \text{mit } u_\alpha ||_\beta &= u_{\alpha,\beta} - u_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \end{aligned}}$$

Analog dazu gilt

$$\mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{w}_{,\beta} = w_\alpha |_\beta = w_\alpha ||_\beta - w_3 \Gamma_{\alpha\beta}^3 \simeq w_\alpha ||_\beta$$

so daß

$$\boxed{\mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{w}_{,\beta} = w_\alpha |_\beta = -u_3 ||_{\alpha\beta}}$$

Endgültige Darstellung des Verzerrungstensors:

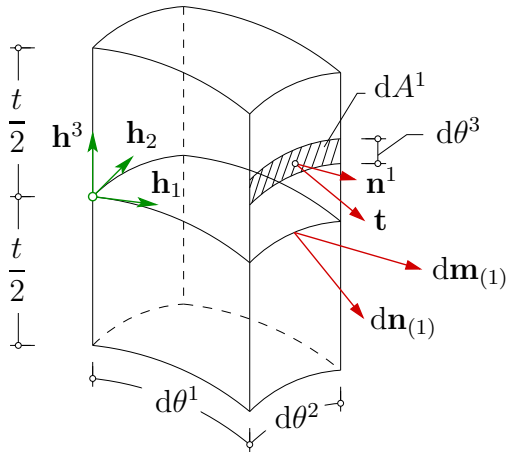
$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{U} + \theta^3 \mathbf{R} \\ \text{mit } \begin{cases} \mathbf{U} &= \frac{1}{2}(u_\alpha ||_\beta + u_\beta ||_\alpha - 2u_3 \Gamma_{\alpha\beta}^3) \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta \\ \mathbf{R} &= \frac{1}{2}(w_\alpha ||_\beta + w_\beta ||_\alpha) \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta \\ &= -\frac{1}{2}(u_3 ||_{\alpha\beta} + u_3 ||_{\beta\alpha}) \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta \end{cases} \end{aligned}}$$

$$\text{mit } \Gamma_{\alpha\beta}^3 = -b_{\alpha\beta}$$

7 Schnittgrößen und Gleichgewichtsbedingungen

Schnittkräfte und Schnittmomente

Volumenelement des Schalenraums:



Orientierte Flächenelemente, Flächenelemente und Normalenvektoren:

$$d\mathbf{A}^1 = d\theta^2 d\theta^3 \mathbf{h}_2 \times \mathbf{h}_3 = d\theta^2 d\theta^3 \sqrt{h} \mathbf{h}^1$$

so daß für den Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n}^1 = \frac{d\mathbf{A}^1}{|d\mathbf{A}^1|} = \frac{\mathbf{h}^1}{\sqrt{h^{11}}}$$

$$\text{mit } \sqrt{h} = \det(\mathbf{h}_{ik})$$

Entsprechend folgt

$$d\mathbf{A}^2 = d\theta^3 d\theta^1 \sqrt{h} \mathbf{h}^2$$

$$\mathbf{n}^2 = \frac{d\mathbf{A}^2}{|d\mathbf{A}^2|} = \frac{\mathbf{h}^2}{\sqrt{h^{22}}}$$

Reduktion der Spannungen auf Schnittkräfte:

Bem.: Durch Teilintegration der Spannungen auf dA^1/dA^2 entstehen Resultierende dn_1/dn_2 pro Linienelement $d\theta^2/d\theta^1$ der Mittelfläche.

Berechnung von dn_1 :

Teilintegration über die Schalendicke t liefert

$$dn_1 := \underbrace{\int_{(t)} \boldsymbol{\sigma} d\theta^3 \mathbf{h}^1 \sqrt{h} d\theta^2}_{=: \mathbf{N}} \longrightarrow \boxed{dn_1 = \mathbf{N} \mathbf{h}^1 \sqrt{h} d\theta^2}$$

Berechnung von dn_2 :

$$dn_2 = \int_{(t)} \boldsymbol{\sigma} d\theta^3 \mathbf{h}^2 \sqrt{h} d\theta^1 \quad \longrightarrow \quad \boxed{dn_2 = \mathbf{N} \mathbf{h}^2 \sqrt{h} d\theta^1}$$

Schnittkräfte pro Längenelement $\sqrt{h} d\theta^2$ / $\sqrt{h} d\theta^1$:

$$\mathbf{n}_1 := \mathbf{N} \mathbf{h}^1 = n^{11} \mathbf{h}_1 + n^{21} \mathbf{h}_2 + n^{31} \mathbf{h}_3$$

$$\mathbf{n}_2 := \mathbf{N} \mathbf{h}^2 = n^{12} \mathbf{h}_1 + n^{22} \mathbf{h}_2 + n^{32} \mathbf{h}_3$$

$$\text{mit } \begin{cases} n^{11}, n^{22} : \text{ Normalkräfte} \\ n^{21}, n^{12} : \text{ Schubkräfte} \\ n^{31}, n^{32} : \text{ Querkräfte} \end{cases}$$

Versatzmomente als Biege- und Drillmomente des Flächenträgers:

Berechnung von dm_1 :

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{m}}_1 &:= \bar{\mathbf{X}} \times \mathbf{t} dA^1 = \theta^3 \mathbf{h}_3 \times \mathbf{t} dA^1 = \theta^3 (\mathbf{h}_3 \times \boldsymbol{\sigma}) dA^1 \\ &= (\mathbf{h}_3 \times \boldsymbol{\sigma}) \theta^3 d\theta^3 \mathbf{h}^1 \sqrt{h} d\theta^2 \end{aligned}$$

Teilintegration über die Schalendicke t liefert

$$\boxed{dm_1 = \mathbf{M} \mathbf{h}^1 \sqrt{h} d\theta^2} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M} = \int_{(t)} (\mathbf{h}_3 \times \boldsymbol{\sigma}) \theta^3 d\theta^3$$

Berechnung von dm_2 :

$$d\bar{\mathbf{m}}_2 = \bar{\mathbf{X}} \times \mathbf{t} dA^2 = \theta^3 \mathbf{h}_3 \times \mathbf{t} dA^2 = \theta^3 (\mathbf{h}_3 \times \boldsymbol{\sigma}) d\theta^3 d\theta^1 \sqrt{h} \mathbf{h}^2$$

Teilintegration über die Schalendicke t liefert

$$\boxed{dm_2 = \mathbf{M} \mathbf{h}^2 \sqrt{h} d\theta^1}$$

Darstellung der Momentenspannungen über gewichtete Spannungstensoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{(t)} (\mathbf{h}_3 \times \boldsymbol{\sigma}) \theta^3 d\theta^3 =: \mathbf{h}_3 \times \bar{\mathbf{M}} \\ \text{mit } \bar{\mathbf{M}} &= m^{ik} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_k \quad \text{und} \quad m^{ik} = \int_{(t)} \sigma^{ik} \theta^3 d\theta^3 \end{aligned}$$

Schnittmomente pro Längenelement $\sqrt{h} d\theta^2 / \sqrt{h} d\theta^1$:

$$\mathbf{m}_1 = -m^{21} \sqrt{h} \mathbf{h}^1 + m^{11} \sqrt{h} \mathbf{h}^2$$

$$\text{mit } \begin{cases} m^{21} = \int_{(t)} \sigma^{21} \theta^3 d\theta^3 & : \text{Drillmoment} \\ m^{11} = \int_{(t)} \sigma^{11} \theta^3 d\theta^3 & : \text{Biegemoment} \end{cases}$$

$$\mathbf{m}_2 = m^{12} \sqrt{h} \mathbf{h}^2 - m^{22} \sqrt{h} \mathbf{h}^1$$

Gleichgewichtsbedingungen

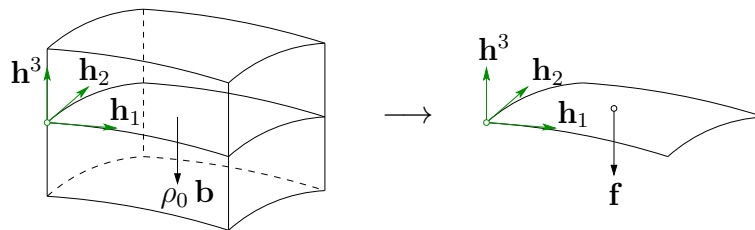
Schalenraum und Mittelfläche:

Es gilt der Kräftesatz für geometrisch lineare Systeme

$$\mathbf{0} = \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b}$$

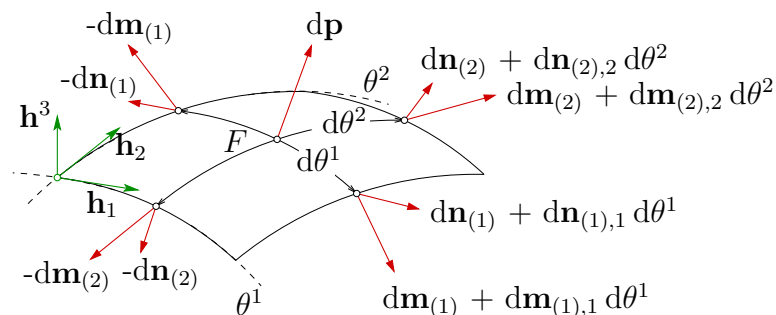
Integration über das betrachtete Gebiet/Teilgebiet Ω liefert mit *Gauss*-Satz und *Cauchy*-Theorem

$$\mathbf{0} = \int_{\Gamma} \mathbf{t} dA + \int_{\mathcal{V}} \rho_0 \mathbf{b} dv$$



Kräfte und Momente am Element der Mittelfläche:

Bem.: Kräfte und Momente durch Reduktion der Spannungen auf die Mittelfläche



$$\begin{aligned} d\mathbf{n}_{(1)} &= \mathbf{N} \mathbf{h}^1 \sqrt{h} d\theta^2, & d\mathbf{m}_{(1)} &= \mathbf{M} \mathbf{h}^1 \sqrt{h} d\theta^2 \\ d\mathbf{n}_{(2)} &= \mathbf{N} \mathbf{h}^2 \sqrt{h} d\theta^1, & d\mathbf{m}_{(2)} &= \mathbf{M} \mathbf{h}^2 \sqrt{h} d\theta^1 \end{aligned}$$

Äußere Belastung aus Nah- und Fernwirkung:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p} dA^3$$

$$\text{mit } dA^3 = |d\mathbf{A}^3| = \sqrt{h} d\theta^1 d\theta^2$$

Kräftegleichgewicht:

$$\mathbf{0} = d\mathbf{n}_{(\alpha),\alpha} d\theta^\alpha + d\mathbf{p}$$

$$\longrightarrow \mathbf{0} = (\mathbf{N} \mathbf{h}^\alpha \sqrt{h})_{,\alpha} + \mathbf{p} \sqrt{h}$$

$$\text{mit } \sqrt{h}_{,\alpha} = \sqrt{h} \Gamma_{\gamma\alpha}{}^\gamma$$

Zusammenfassend folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (n^{\beta\alpha} |_{|\alpha} + n^{3\alpha} \Gamma_{3\alpha}{}^\beta + p^\beta) \mathbf{h}_\beta \\ \mathbf{0} &= (n^{3\alpha} |_{|\alpha} + n^{\gamma\alpha} \Gamma_{\gamma\alpha}{}^3 + p^3) \mathbf{h}_3 \end{aligned}$$

Momentengleichgewicht bzgl. des Flächenschwerpunkts F :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= d\mathbf{m}_{(1),1} d\theta^1 + d\mathbf{m}_{(2),2} d\theta^2 + \\ &+ \left[-\frac{d\theta^1}{2} \mathbf{h}_1 \times (-d\mathbf{n}_{(1)}) \right] + \left[\frac{d\theta^1}{2} \mathbf{h}_1 \times (d\mathbf{n}_{(1)} + d\mathbf{n}_{(1),1} d\theta^1) \right] + \\ &+ \left[-\frac{d\theta^2}{2} \mathbf{h}_2 \times (-d\mathbf{n}_{(2)}) \right] + \left[\frac{d\theta^2}{2} \mathbf{h}_2 \times (d\mathbf{n}_{(2)} + d\mathbf{n}_{(2),2} d\theta^2) \right] \end{aligned}$$

Nach Streichung von Gliedern, die von höherer Ordnung klein sind, folgt

$$\mathbf{0} = (\mathbf{M} \mathbf{h}^\alpha \sqrt{h})_{,\alpha} + \mathbf{h}_\alpha \times (\mathbf{N} \mathbf{h}^\alpha \sqrt{h})$$

Zusammenfassend folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (m^{\beta\alpha} |_{|\alpha} - n^{3\beta}) \mathbf{h}_3 \times \mathbf{h}_\beta \\ \mathbf{0} &= (m^{\beta\gamma} \Gamma_{3\gamma}{}^\alpha + n^{\beta\alpha}) \mathbf{h}_\alpha \times \mathbf{h}_\beta \end{aligned}$$

Endgültige Form der Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} 0 &= n^{\beta\alpha} \parallel_{\alpha} + m^{\alpha\gamma} \parallel_{\gamma} \Gamma_{3\alpha}{}^{\beta} + p^{\beta} \\ 0 &= m^{\alpha\gamma} \parallel_{\gamma\alpha} + n^{\gamma\alpha} \Gamma_{\gamma\alpha}{}^3 + p^3 \end{aligned}$$

mit den „Krümmungstensoren“ $\Gamma_{3\alpha}{}^{\beta} = b_{\alpha}{}^{\beta}$ und $\Gamma_{\gamma\alpha}{}^3 = -b_{\gamma\alpha}$

8 Stoffgesetz und Hauptgleichungen

Reduktion des allgemeinen Elastizitätsgesetzes

Es gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mathbf{U} + \theta^3 \mathbf{R} = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{h}^{\alpha} \otimes \mathbf{h}^{\beta} \\ \text{mit } \begin{cases} \mathbf{U} &= \frac{1}{2}(u_{\alpha} \parallel_{\beta} + u_{\beta} \parallel_{\alpha} - 2u_3 \Gamma_{\alpha\beta}{}^3) \mathbf{h}^{\alpha} \otimes \mathbf{h}^{\beta} \\ \mathbf{R} &= -\frac{1}{2}(u_3 \parallel_{\alpha\beta} + u_3 \parallel_{\beta\alpha}) \mathbf{h}^{\alpha} \otimes \mathbf{h}^{\beta} \end{cases} \end{aligned}$$

Stoffgesetz der linearen Elastizitätstheorie:

Es gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} = (2\mu \varepsilon_{st} + \lambda \varepsilon_j{}^j h_{st}) \mathbf{h}^s \otimes \mathbf{h}^t = \sigma^{ik} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_k \\ \longrightarrow & \quad \boxed{\boldsymbol{\sigma} = (2\mu \varepsilon^{ik} + \lambda \varepsilon_j{}^j h^{ik}) \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_k} \end{aligned}$$

Die Forderung $\sigma_{33} \equiv 0$ beinhaltet

$$\sigma^{33} = 0 = 2\mu \varepsilon^{33} + \lambda (\varepsilon_1{}^1 + \varepsilon_2{}^2 + \varepsilon_3{}^3)$$

Bem.: $\sigma^{33} = 0$ und $\varepsilon_{33} = 0$ sind nur dann gleichzeitig zu erfüllen, wenn

$$\boxed{\varepsilon_1{}^1 + \varepsilon_2{}^2 = 0} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{33} = \varepsilon^{33} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}}$$

Einsetzen liefert

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = (2\mu \varepsilon^{ik} + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{\alpha}{}^{\alpha} h^{ik}) \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_k}$$

Ergebnis:

- $\sigma^{33} = 0$, $\sigma^{\alpha 3} = \sigma^{3\alpha}$ nicht aus Stoffgesetz bestimmbar, da $\varepsilon^{\alpha 3} \equiv 0$ (Eben- und Senkrechtbleiben)

- nur $\sigma^{\alpha\beta}$ ist aus dem Stoffgesetz bestimmbar

$$\sigma^{\alpha\beta} = (2\mu h^{\alpha\gamma} h^{\beta\delta} + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} h^{\alpha\beta} h^{\gamma\delta}) \varepsilon_{\gamma\delta}$$

Elastische Tangente der Schalentheorie:

$$\mathbf{B}^4 = (2\mu h^{\alpha\gamma} h^{\beta\delta} + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} h^{\alpha\beta} h^{\gamma\delta}) \mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{h}_\beta \otimes \mathbf{h}_\gamma \otimes \mathbf{h}_\delta$$

Man erhält als Ergebnis

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &=: \mathbf{B}^4 \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{H}^4 \boldsymbol{\varepsilon} \\ \text{mit } \mathbf{H}^4 &= (1-\nu)(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{23} + \nu(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \\ &= \underbrace{[(1-\nu)h^{\alpha\gamma} h^{\beta\delta} + \nu h^{\alpha\beta} h^{\gamma\delta}]}_{H^{\alpha\beta\gamma\delta}} \mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{h}_\beta \otimes \mathbf{h}_\gamma \otimes \mathbf{h}_\delta \end{aligned}$$

Schnittgrößen als Funktion der Verschiebungsableitungen

Schnittkräfte:

Für den Schnittkrafttensor \mathbf{N} gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int_{(t)} \boldsymbol{\sigma} \, d\theta^3 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{(t)} \mathbf{H}^4 \boldsymbol{\varepsilon} \, d\theta^3 = \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{H}^4 \left(\mathbf{U} \int_{(t)} d\theta^3 + \mathbf{R} \underbrace{\int_{(t)} \theta^3 \, d\theta^3}_{\equiv 0} \right) \\ &= \frac{E t}{1-\nu^2} \mathbf{H}^4 \mathbf{U} =: D \mathbf{H}^4 \mathbf{U} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \begin{cases} D = \frac{E t}{1-\nu^2} : \text{ Dehnsteifigkeit} \\ \mathbf{U} = \frac{1}{2}(u_\alpha \parallel_\beta + u_\beta \parallel_\alpha - 2u_3 \Gamma_{\alpha\beta}^3) \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta = u_{\alpha\beta} \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta \end{cases}$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= n^{\alpha\beta} \mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{h}_\beta \\ \text{mit } n^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} D H^{\alpha\beta\gamma\delta} (u_\gamma \parallel_\delta + u_\delta \parallel_\gamma - 2u_3 \Gamma_{\gamma\delta}^3) \end{aligned}$$

Schnittmomente:

Für den Schnittmomententensor gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{(t)} (\mathbf{h}_3 \times \boldsymbol{\sigma}) \theta^3 d\theta^3 = \mathbf{h}_3 \times \bar{\mathbf{M}} \\ \bar{\mathbf{M}} &= \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{H} \left(\underbrace{\mathbf{U} \int_{(t)} \theta^3 d\theta^3}_{\equiv 0} + \mathbf{R} \underbrace{\int_{(t)} (\theta^3)^2 d\theta^3}_{= J_{22} = \frac{1}{12} t^3} \right) = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \mathbf{H} \mathbf{R} =: B \mathbf{H} \mathbf{R} \\ \text{mit } \begin{cases} B = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} & : \text{Biegesteifigkeit} \\ \mathbf{R} = -\frac{1}{2} (u_3 \parallel_{\alpha\beta} + u_3 \parallel_{\beta\alpha}) \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta \end{cases} \end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= m^{\alpha\beta} \mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{h}_\beta \\ \text{mit } m^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} B H^{\alpha\beta\gamma\delta} (u_3 \parallel_{\gamma\delta} + u_3 \parallel_{\delta\gamma}) \end{aligned}$$

Hauptgleichungen der technischen Schalentheorie

Ausgangspunkt ist die endgültige Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= n^{\alpha\beta} \parallel_{\beta} + m^{\beta\gamma} \parallel_{\gamma} \Gamma_{3\beta}{}^\alpha + p^\alpha \\ 0 &= m^{\alpha\beta} \parallel_{\beta\alpha} + n^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}{}^3 + p^3 \end{aligned}$$

Ableitungen von $n^{\alpha\beta}$ und $m^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta} \parallel_{\beta} &= \frac{1}{2} D H^{\alpha\beta\gamma\delta} (u_\gamma \parallel_{\delta\beta} + u_\delta \parallel_{\gamma\beta} - 2(u_3 \Gamma_{\gamma\delta}{}^3) \parallel_{\beta}) \\ m^{\beta\gamma} \parallel_{\gamma} &= -\frac{1}{2} B H^{\beta\gamma\rho\delta} (u_3 \parallel_{\rho\delta\gamma} + u_3 \parallel_{\delta\rho\gamma}) \\ m^{\alpha\beta} \parallel_{\beta\alpha} &= -\frac{1}{2} B H^{\alpha\beta\gamma\delta} (u_3 \parallel_{\gamma\delta\beta\alpha} + u_3 \parallel_{\delta\gamma\beta\alpha}) \end{aligned}$$

Bem.: Durch Einsetzen entstehen 3 gekoppelte partielle Differentialgleichungen.

Man erhält in Richtung von \mathbf{h}_α :

$$\begin{aligned} &D H^{\alpha\beta\gamma\delta} (u_\gamma \parallel_{\delta\beta} + u_\delta \parallel_{\gamma\beta} - 2(u_3 \Gamma_{\gamma\delta}{}^3) \parallel_{\beta}) - \\ &- B H^{\beta\gamma\rho\delta} \Gamma_{3\beta}{}^\alpha (u_3 \parallel_{\rho\delta\gamma} + u_3 \parallel_{\delta\rho\gamma}) + 2p^\alpha = 0 \end{aligned}$$

und in Richtung von $\mathbf{h}_3 \perp \mathbf{h}_\alpha$:

$$\begin{aligned} &D H^{\alpha\beta\gamma\delta} \Gamma_{\alpha\beta}{}^3 (u_\gamma \parallel_{\delta} + u_\delta \parallel_{\gamma} - 2u_3 \Gamma_{\gamma\delta}{}^3) - \\ &- B H^{\alpha\beta\gamma\delta} (u_3 \parallel_{\gamma\delta\beta\alpha} + u_3 \parallel_{\delta\gamma\beta\alpha}) + 2p^3 = 0 \end{aligned}$$

Bem.: Die Gleichungen müssen normiert werden, um physikalische Koeffizienten zu erhalten, d.h.

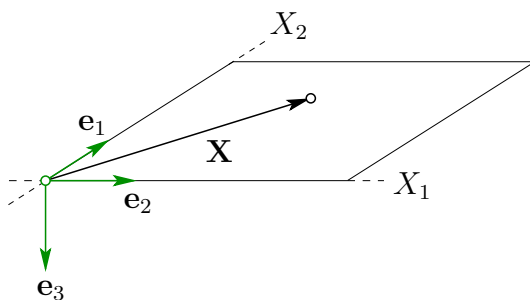
$$\mathbf{h}_\alpha \longrightarrow \mathbf{h}_\alpha^* = \frac{\mathbf{h}_\alpha}{|\mathbf{h}_\alpha|} = \frac{\mathbf{h}_\alpha}{\sqrt{h_{(\alpha\alpha)}}} \longrightarrow |\mathbf{h}_\alpha^*| = 1$$

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{h}_3^* : \text{ definitionsgemäß normiert}$$

9 Ebene Flächenträger: Scheiben und Platten

Reduktion der Hauptgleichungen auf ebene Flächenträger

hier: Behandlung rechteckiger Flächenträger



- Ortsvektor der Mittelfläche:

$$\mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \theta^\alpha \equiv X^\alpha$$

- Tangentenvektoren:

$$\mathbf{h}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{e}_\alpha$$

- Normalenvektor:

$$\mathbf{h}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|} = \mathbf{e}^3 \equiv \mathbf{e}_3$$

$$\longrightarrow h_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} \longrightarrow \boxed{\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i}$$

Bem.: D.h. Tangenten- und Kotangentenraum fallen zusammen.

- *Christoffelsymbole* und „Krümmungstensoren“:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \mathbf{e}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{e}_\gamma \equiv 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_{\alpha,\beta} \equiv \mathbf{0}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = \mathbf{e}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{e}_3 \equiv 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_3 \perp \mathbf{e}_{\alpha,\beta} (\equiv \mathbf{0})$$

$$\Gamma_{3\alpha}^\beta = \mathbf{e}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{e}_\beta \equiv 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_{3,\alpha} \equiv \mathbf{0}$$

Kovariante Ableitungen der Verschiebungskoeffizienten:

$$u_\alpha ||_\beta = u_{\alpha,\beta} - u_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$$

$$\longrightarrow \boxed{u_\alpha ||_\beta = u_{\alpha,\beta}} \quad \boxed{u_3 ||_\alpha = u_{3,\alpha}}$$

Konsequenz: Alle *Christoffelsymbole* entfallen, d.h. alle kovarianten Ableitungen werden zu partiellen Ableitungen.

Damit folgt das Scheiben- und Plattenproblem:

- Scheibenproblem

$$D H^{\alpha\beta\gamma\delta} (u_{\gamma,\delta\beta} + u_{\delta,\gamma\beta}) + 2p^\alpha = 0$$

- Plattenproblem

$$B H^{\alpha\beta\gamma\delta} (u_{3,\gamma\delta\beta\alpha} + u_{3,\delta\gamma\beta\alpha}) - 2p^3 = 0$$

Auswertung des Stoffgesetzes:

Mit $h^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ ergibt sich

$$H^{\alpha\beta\gamma\delta} = (1 - \nu) \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + \nu \delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta}$$

Damit folgt

$$H^{1212} = H^{2121} = 1 - \nu$$

$$H^{1122} = H^{2211} = \nu$$

$$H^{1111} = H^{2222} = 1$$

Hauptgleichungen der Rechteckscheibe:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 : 2 u_{1,11} + (1 + \nu) u_{2,12} + (1 - \nu) u_{1,22} &= -\frac{2p^1}{D} \\ \mathbf{e}_2 : 2 u_{2,22} + (1 + \nu) u_{1,12} + (1 - \nu) u_{2,11} &= -\frac{2p^2}{D} \end{aligned}$$

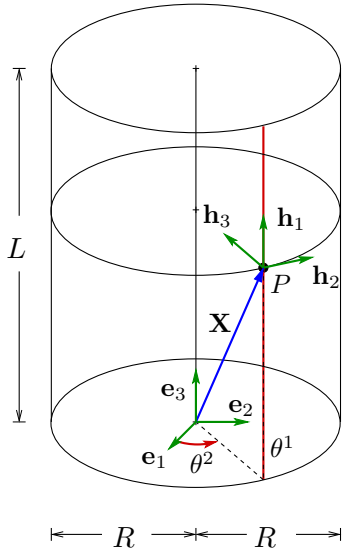
Hauptgleichungen der Rechteckplatte:

$$\mathbf{e}_3 : u_{3,1111} + 2 u_{3,1122} + u_{3,2222} = \frac{p^3}{B}$$

Bem.: Eine Überführung auf physikalische Koeffizienten ist nicht erforderlich, da $\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha$ und $\mathbf{h}_3 = \mathbf{e}_3$ mit $|\mathbf{e}_i| = 1$.

10 Rotationsschalen: Beispiel Kreiszyinderschale

Geometrie der Kreiszyinderschale



- Ortsvektor:

$$\mathbf{X} = R \cos(\theta^2) \mathbf{e}_1 + R \sin(\theta^2) \mathbf{e}_2 + \theta^1 \mathbf{e}_3$$

- Tangentenvektoren:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{h}_2 = -R \sin(\theta^2) \mathbf{e}_1 + R \cos(\theta^2) \mathbf{e}_2$$

- Normalenvektor:

$$\mathbf{h}_3 = \frac{\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2}{|\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2|} = -\cos(\theta^2) \mathbf{e}_1 - \sin(\theta^2) \mathbf{e}_2$$

Metrikoeffizienten:

- kovariante Metrik :

$$h_{\alpha\beta} = \mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{h}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$$

- kontravariante Metrik :

$$h^{\alpha\gamma} h_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad \longrightarrow \quad h^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-2} \end{bmatrix}$$

Kotangentebasis und Normalenvektor:

$$\mathbf{h}^\alpha = h^{\alpha\beta} \mathbf{h}_\beta \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{h}^1 = \mathbf{h}_1 = \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{h}^2 = -R^{-1} \sin(\theta^2) \mathbf{e}_1 + R^{-1} \cos(\theta^2) \mathbf{e}_2 = R^{-2} \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}^3 = \mathbf{h}_3 = -\cos(\theta^2) \mathbf{e}_1 - \sin(\theta^2) \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Christoffelsymbole und „Krümmungstensoren“:

- Christoffelsymbole:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = \mathbf{h}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{h}^\gamma \quad \longrightarrow \quad \boxed{\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma \equiv 0}$$

- kovarianter „Krümmungstensor“:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^3 = -b_{\alpha\beta} = \mathbf{h}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{h}^3 \quad \longrightarrow \quad \Gamma_{\alpha\beta}{}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

- gemischtvarianter „Krümmungstensor“:

$$\Gamma_{3\alpha}{}^\beta = b_\alpha{}^\beta = \mathbf{h}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{h}^\beta \quad \longrightarrow \quad \Gamma_{3\alpha}{}^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}$$

Stoffgesetz und Hauptgleichungen

Auswertung des Stoffgesetzes:

$$H^{\alpha\beta\gamma\delta} = (1 - \nu) h^{\alpha\gamma} h^{\beta\delta} + \nu h^{\alpha\beta} h^{\gamma\delta}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} H^{1111} = 1 \\ H^{1212} = H^{2121} = R^{-2} (1 - \nu) \\ H^{1122} = H^{2211} = R^{-2} \nu \\ H^{2222} = R^{-4} \end{cases}$$

Hauptgleichungen in Richtung von \mathbf{h}_α :

$$D H^{\alpha\beta\gamma\delta} [u_{\gamma,\delta\beta} + u_{\delta,\gamma\beta} - 2(u_3 \Gamma_{\gamma\delta}{}^3)_{,\beta}] - B H^{\beta\gamma\rho\delta} \Gamma_{3\beta}{}^\alpha (u_{3,\rho\delta\gamma} + u_{3,\delta\rho\gamma}) + 2p^\alpha = 0$$

- Hauptgleichung in Richtung von \mathbf{h}_1 :

$$2R^2 u_{1,11} + (1 - \nu) u_{1,22} + (1 + \nu) u_{2,12} - 2R\nu u_{3,1} = -\frac{2R^2}{D} p^1$$

- Hauptgleichung in Richtung von \mathbf{h}_2 :

$$R^3 (1 - \nu) u_{2,11} + R^3 (1 + \nu) u_{1,12} + 2R u_{2,22} - 2R^2 u_{3,2} + \frac{2B}{D} [R^2 (u_{3,112} + R^{-1} u_{2,11}) + u_{3,222} + 3R^{-1} u_{2,22}] = -\frac{2R^5}{D} p^2$$

Hauptgleichungen in Richtung von \mathbf{h}_3 :

$$D H^{\alpha\beta\gamma\delta} \Gamma_{\alpha\beta}{}^3 (u_{\gamma,\delta} + u_{\delta,\gamma} - 2u_3 \Gamma_{\gamma\delta}{}^3) - B H^{\alpha\beta\gamma\delta} (u_{3,\gamma\delta\beta\alpha} + u_{3,\delta\gamma\beta\alpha}) + 2p^3 = 0$$

- Hauptgleichung in Richtung von \mathbf{h}_3 :

$$R^3 \nu u_{1,1} + R u_{2,2} - R^2 u_3 - \frac{B}{D} [R^4 u_{3,1111} + 2R^2 (u_{3,1122} + 2R^{-1} u_{2,112}) + u_{3,2222} + 4R^{-1} u_{2,222}] = -\frac{R^4}{D} p^3$$

Hauptgleichungen in physikalischen Koeffizienten

Normierung:

$$\mathbf{p} = p^\alpha \mathbf{h}_\alpha = p^\alpha |\mathbf{h}_\alpha| \frac{\mathbf{h}_\alpha}{|\mathbf{h}_\alpha|} =: \overset{*}{p}^\alpha \overset{*}{\mathbf{h}}_\alpha \quad \longrightarrow \quad p^1 = \overset{*}{p}^1, \quad p^2 = R^{-1} \overset{*}{p}^2$$

$$\overset{*}{u}_\alpha = u_\alpha |\mathbf{h}^\alpha| = u_\alpha \sqrt{h^{(\alpha\alpha)}} \quad \longrightarrow \quad u_1 = \overset{*}{u}_1, \quad u_2 = R \overset{*}{u}_2$$

$$\overset{*}{\mathbf{h}}_1 = \frac{\mathbf{h}_1}{\sqrt{h_{11}}} = \mathbf{h}_1, \quad \overset{*}{\mathbf{h}}_2 = \frac{\mathbf{h}_2}{\sqrt{h_{22}}} = \frac{1}{R} \mathbf{h}_2,$$

Hauptgleichungen:

$$\overset{*}{\mathbf{h}}_1 : 2R^2 \overset{*}{u}_{1,11} + (1 - \nu) \overset{*}{u}_{1,22} + R(1 + \nu) \overset{*}{u}_{2,12} - 2R\nu \overset{*}{u}_{3,1} = -\frac{2R^2}{D} \overset{*}{p}^1$$

$$\overset{*}{\mathbf{h}}_2 : R^4(1 - \nu) \overset{*}{u}_{2,11} + R^3(1 + \nu) \overset{*}{u}_{1,12} + 2R^2 \overset{*}{u}_{2,22} - 2R^2 \overset{*}{u}_{3,2} +$$

$$+ \frac{2B}{D} [R^2(\overset{*}{u}_{3,112} + \overset{*}{u}_{2,11}) + \overset{*}{u}_{3,222} + 3\overset{*}{u}_{2,22}] = -\frac{2R^4}{D} \overset{*}{p}^2$$

$$\overset{*}{\mathbf{h}}_3 : R^3\nu \overset{*}{u}_{1,1} + R^2 \overset{*}{u}_{2,2} - R^2 \overset{*}{u}_3 -$$

$$-\frac{B}{D} [R^4 \overset{*}{u}_{3,1111} + 2R^2(\overset{*}{u}_{3,1122} + 2\overset{*}{u}_{2,112}) + \overset{*}{u}_{3,2222} + 4\overset{*}{u}_{2,22}] = -\frac{R^4}{D} \overset{*}{p}^3$$

Der Sonderfall rotationssymmetrischer Belastung

Bem.: Bei Rotationssymmetrie entfallen alle Ableitungen nach θ^2 , d.h. $(\cdot)_{,2} \equiv 0$.

Damit folgt

$$\overset{*}{\mathbf{h}}_1 : R \overset{*}{u}_{1,11} - \nu \overset{*}{u}_{3,1} = -\frac{R}{D} \overset{*}{p}^1$$

$$\overset{*}{\mathbf{h}}_2 : [R^2(1 - \nu) + \frac{2B}{D}] \overset{*}{u}_{2,11} = -\frac{2R^2}{D} \overset{*}{p}^2$$

$$\overset{*}{\mathbf{h}}_3 : R\nu \overset{*}{u}_{1,1} - \overset{*}{u}_3 - \frac{B}{D} R^2 \overset{*}{u}_{3,1111} = -\frac{R^2}{D} \overset{*}{p}^3$$

Lösung der gekoppelten Differentialgleichung:

Für den Fall $\overset{*}{p}^1 = 0$ folgt

$$(R \overset{*}{u}_{1,1} - \nu \overset{*}{u}_3)_{,1} = 0 \quad \longrightarrow \quad R \overset{*}{u}_{1,1} - \nu \overset{*}{u}_3 = C = \text{konstant}$$

so daß z.B. mit $C = 0$

$$R \overset{*}{u}_{1,1} = \nu \overset{*}{u}_3$$

Damit folgt

$$\frac{B}{D} R^2 u_{3,1111}^* + (1 - \nu^2) u_3^* = \frac{R^2}{D} p^3$$

Die Lösung entsteht aus der Addition von homogener Lösung und Partikulärlösung, d.h.

$$u_3^*(\theta^1) = u_{3h}^*(\theta^1) + u_{3p}^*(\theta^1)$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$u_{3h,1111}^* + \frac{D(1-\nu^2)}{B R^2} u_{3h}^* = 0 \quad \longrightarrow \quad R^4 u_{3h,1111}^* + 4\kappa^4 u_{3h}^* = 0$$

$$\text{mit } \kappa^4 := 3(1-\nu^2) \frac{R^2}{t^2} : \text{ Schalenparameter } \kappa$$

Lösung über charakteristische Gleichung und Fundamentalansätze liefert

$$u_{3h}^* = e^{-\kappa \frac{\theta^1}{R}} \left[C_1 \cos\left(\kappa \frac{\theta^1}{R}\right) + C_2 \sin\left(\kappa \frac{\theta^1}{R}\right) \right] + e^{\kappa \frac{\theta^1}{R}} \left[C_3 \cos\left(\kappa \frac{\theta^1}{R}\right) + C_4 \sin\left(\kappa \frac{\theta^1}{R}\right) \right]$$

Bem.: Die Konstanten C_1 bis C_4 sind aus den Randbedingungen zu bestimmen.

Partikulärlösung:

Bem.: Partikulärlösungen müssen für den speziell vorliegenden Fall nach Art des Störglieds entwickelt werden. Zum Teil kann die Membranlösung benutzt werden.

11 Membrantheorie der Rotationsschalen

Gleichgewichtsbedingungen

Gleichgewichtszustand:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= n^{\beta\alpha} |_{|\alpha} + n^{3\alpha} \Gamma_{3\alpha}{}^\beta + p^\beta \\ 0 &= n^{3\alpha} |_{|\alpha} + n^{\gamma\alpha} \Gamma_{\gamma\alpha}{}^3 + p^3 \end{aligned} \right\} \text{ Kräfte}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= m^{\beta\alpha} |_{|\alpha} - n^{3\beta} \\ 0 &= m^{\beta\gamma} \Gamma_{3\gamma}{}^\alpha + n^{\beta\alpha} \end{aligned} \right\} \text{ Momente}$$

Konsequenzen:

- Mit $\sigma^{ik} = \sigma^{ki}$ und $\sigma^{33} \equiv 0 \rightarrow 5$ unbekannte Spannungen

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow n^{ik} &= \int_{(t)} \sigma^{ik} d\theta^3 \\ \rightarrow m^{ik} &= \int_{(t)} \sigma^{ik} \theta^3 d\theta^3 \end{aligned} \right\} 2 \times 5 \text{ unbekannte Schnittgrößen}$$

- In der Schalentheorie stehen 10 unbekannte Schnittgrößen 6 Gleichgewichtsbedingungen gegenüber, d.h. das System ist 4-fach innerlich unbestimmt
 \rightarrow Allgemeine Lösung setzt Stoffgesetze, d.h. Hauptgleichungen, voraus.

Membranschnittgrößen:

- Alle Momente $m^{\alpha\beta}$ und Querkräfte $n^{3\alpha}$ verschwinden. Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= n^{\beta\alpha} ||_{\alpha} + p^{\beta} \\ 0 &= n^{\beta\alpha} \Gamma_{\beta\alpha}^3 + p^3 \end{aligned}$$

- Es verbleiben 3 Unbekannte Kräfte $n^{\beta\alpha} \rightarrow$ innerlich statisch bestimmt

Verformungsgrößen:

Mit bekannten Schnittgrößen $n^{\alpha\beta}$ können die zugehörigen Verzerrungen aus dem inversen Elastizitätsgesetz ermittelt werden.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma^{\gamma\delta} = \frac{1+\nu}{E} (h_{\alpha\gamma} h_{\beta\delta} - \frac{\nu}{1+\nu} h_{\alpha\beta} h_{\gamma\delta}) \sigma^{\gamma\delta}$$

$$\text{mit } \sigma^{\alpha\beta} = \frac{n^{\alpha\beta}}{t} \quad (\text{Membranspannungszustand})$$

12 Membran- und Biegetheorie der Kreiszylinderschale

Gleichungssysteme**Gleichgewichtsbedingung:**

Allgemein gilt

$$\begin{aligned} 0 &= n^{\beta\alpha} ||_{\alpha} + m^{\alpha\gamma} ||_{\gamma} \Gamma_{3\alpha}^{\beta} + p^{\beta} \\ 0 &= m^{\alpha\beta} ||_{\beta\alpha} + n^{\beta\alpha} \Gamma_{\beta\alpha}^3 + p^3 \end{aligned}$$

Es folgt für die Kreiszyinderschale

$$\begin{aligned} 0 &= n^{1\alpha}{}_{,\alpha} + p^1 \\ 0 &= n^{2\alpha}{}_{,\alpha} - R^{-1} m^{2\gamma}{}_{,\gamma} + p^2 \\ 0 &= m^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha} + R n^{22} + p^3 \end{aligned}$$

Übergang auf physikalische Koeffizienten

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{*}{n}{}^{11}{}_{,1} + R^{-1} \overset{*}{n}{}^{12}{}_{,2} + \overset{*}{p}{}^1 \\ 0 &= \overset{*}{n}{}^{21}{}_{,1} + R^{-1} \overset{*}{n}{}^{22}{}_{,2} - (R^{-1} \overset{*}{m}{}^{21}{}_{,1} + R^{-2} \overset{*}{m}{}^{22}{}_{,2}) + \overset{*}{p}{}^2 \\ 0 &= \overset{*}{m}{}^{11}{}_{,11} + 2R^{-1} \overset{*}{m}{}^{12}{}_{,12} + R^{-2} \overset{*}{m}{}^{22}{}_{,22} + R^{-1} \overset{*}{n}{}^{22} + \overset{*}{p}{}^3 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \begin{cases} n^{11} = \overset{*}{n}{}^{11}, n^{12} = n^{21} = R^{-1} \overset{*}{n}{}^{12}, n^{22} = R^{-2} \overset{*}{n}{}^{22} \\ m^{11} = \overset{*}{m}{}^{11}, m^{12} = m^{21} = R^{-1} \overset{*}{m}{}^{12}, m^{22} = R^{-2} \overset{*}{m}{}^{22} \end{cases}$$

Bem.: Die Gleichgewichtsbedingungen sind i. A. nicht lösbar, ohne die Stoffbeziehungen einzusetzen.

Membranspannungszustand

Bem.: Im Membranspannungszustand entfallen alle Momente.

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{*}{n}{}^{11}{}_{,1} + R^{-1} \overset{*}{n}{}^{12}{}_{,2} + \overset{*}{p}{}^1 \\ 0 &= \overset{*}{n}{}^{21}{}_{,1} + R^{-1} \overset{*}{n}{}^{22}{}_{,2} + \overset{*}{p}{}^2 \\ 0 &= R^{-1} \overset{*}{n}{}^{22} + \overset{*}{p}{}^3 \end{aligned}$$

Für den Fall der rotationssymmetrischen Belastung folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{*}{n}{}^{11}{}_{,1} + \overset{*}{p}{}^1 \\ 0 &= \overset{*}{n}{}^{21}{}_{,1} + \overset{*}{p}{}^2 \\ 0 &= \overset{*}{n}{}^{22} + R \overset{*}{p}{}^3 \end{aligned}$$

Bem.: Dies sind 3 nicht gekoppelte Gleichungen, die jede für sich gelöst werden kann.

Hauptgleichungen im Membranspannungszustand:

Da alle Momente entfallen, entfallen alle Terme mit der Biegesteifigkeit B . Damit folgt

$$\begin{aligned} 2R^2 \overset{*}{u}_{1,11} + (1 - \nu) \overset{*}{u}_{1,22} + (1 + \nu) R \overset{*}{u}_{2,12} - 2R\nu \overset{*}{u}_{3,1} &= -\frac{2R^2}{D} \overset{*}{p}^1 \\ R^2 (1 - \nu) \overset{*}{u}_{2,11} + R(1 + \nu) \overset{*}{u}_{1,12} + 2 \overset{*}{u}_{2,22} - 2 \overset{*}{u}_{3,2} &= -\frac{2R^2}{D} \overset{*}{p}^2 \\ R\nu \overset{*}{u}_{1,1} + \overset{*}{u}_{2,2} - \overset{*}{u}_3 &= -\frac{R^2}{D} \overset{*}{p}^3 \end{aligned}$$

so daß sich für rotationssymmetrische Belastung ergibt

$$\begin{aligned} R \overset{*}{u}_{1,11} - \nu \overset{*}{u}_{3,1} &= -\frac{R}{D} \overset{*}{p}^1 \\ (1 - \nu) \overset{*}{u}_{2,11} &= -\frac{2}{D} \overset{*}{p}^2 \\ R\nu \overset{*}{u}_{1,1} - \overset{*}{u}_3 &= -\frac{R^2}{D} \overset{*}{p}^3 \end{aligned}$$

Stoffgesetz zur Ermittlung der Verzerrungen aus den Schnittgrößen:

Es gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= L_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma^{\gamma\delta} \\ \text{mit } \left\{ \begin{array}{l} \sigma^{\gamma\delta} = \frac{n^{\gamma\delta}}{t} \\ L_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1 + \nu}{E} (h_{\alpha\gamma} h_{\beta\delta} - \frac{\nu}{1 + \nu} h_{\alpha\beta} h_{\gamma\delta}) \end{array} \right. \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_{1111} = \frac{1}{E} \\ L_{1212} = L_{2121} = R^2 \frac{1 + \nu}{E} \\ L_{1122} = L_{2211} = -R^2 \frac{\nu}{E} \\ L_{2222} = R^4 \frac{1}{E} \end{array} \right. \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} D \varepsilon_{11} &= \frac{1}{1 - \nu^2} (n^{11} - R^2 \nu n^{22}) \\ D \varepsilon_{12} &= D \varepsilon_{21} = \frac{R^2}{1 - \nu^2} (1 + \nu) n^{12} \\ D \varepsilon_{22} &= \frac{R^2}{1 - \nu^2} (-\nu n^{11} + R^2 n^{22}) \end{aligned}$$

Überführung in physikalische Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^* &= \frac{1}{Et} (\bar{n}^{11} - \nu \bar{n}^{22}) \\ \varepsilon_{12}^* &= \varepsilon_{21}^* = \frac{1}{Et} (1 + \nu) \bar{n}^{12} \\ \varepsilon_{22}^* &= \frac{1}{Et} (-\nu \bar{n}^{11} + \bar{n}^{22}) \end{aligned}$$

Berechnung der Verschiebungen aus den Verzerrungen:

Man erhält für die Kreiszylinderschale

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1} \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \\ \varepsilon_{22} &= u_{2,2} - R u_3 \end{aligned}$$

Überführung in physikalische Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^* &= u_{1,1} \\ \varepsilon_{12}^* &= \varepsilon_{21}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} u_{1,2} + u_{2,1} \right) \\ \varepsilon_{22}^* &= \frac{1}{R} (u_{2,2} - u_3) \end{aligned}$$

Verschiebungen als Funktion der Schnittgrößen:

Einsetzen des inversen Stoffgesetzes liefert

$$\begin{aligned} u_{1,1}^* &= \frac{1}{Et} (\bar{n}^{11} - \nu \bar{n}^{22}) \\ u_{2,1}^* &= \frac{2(1 + \nu)}{Et} \bar{n}^{12} - \frac{1}{R} u_{1,2}^* \\ u_3^* &= \frac{R}{Et} (\nu \bar{n}^{11} - \bar{n}^{22}) + u_{2,2}^* \end{aligned}$$

Durch Integration folgt

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{1}{Et} \int_{(\theta^1)} (\bar{n}^{11} - \nu \bar{n}^{22}) d\theta^1 + C_1(\theta^2) \\ u_2^* &= \int_{(\theta^1)} \left(\frac{2(1 + \nu)}{Et} \bar{n}^{12} - \frac{1}{R} u_{1,2}^* \right) d\theta^1 + C_2(\theta^2) \\ u_3^* &= \frac{R}{Et} (\nu \bar{n}^{11} - \bar{n}^{22}) + u_{2,2}^* \end{aligned}$$

13 Schwache Formulierung des Randwertproblems

Das PdvV in der technischen Schalentheorie

Mit dem Prinzip von *d'Alembert*

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} \, dV + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \int_{\mathcal{S}} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{x} \, dA + \int_{\mathcal{V}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{x} \, dV$$

folgt mit $\ddot{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{0}$ und $\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{u}$ für das PdvV der Statik

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \int_{\mathcal{S}} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_{\mathcal{V}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV$$

Reduktion auf die Schalenmittelfläche

hier: Untersuchung der einzelnen Summanden

(1) Virtuelle Formänderungsarbeit

Mit dem Verzerrungstensor der technischen Schalentheorie

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{U} + \theta^3 \mathbf{R} = \varepsilon \alpha_\beta \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta, \quad \varepsilon_{33} \equiv 0$$

folgt

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \int_{(A^3)} (\mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{U} + \bar{\mathbf{M}} \cdot \delta \mathbf{R}) \, dA^3$$

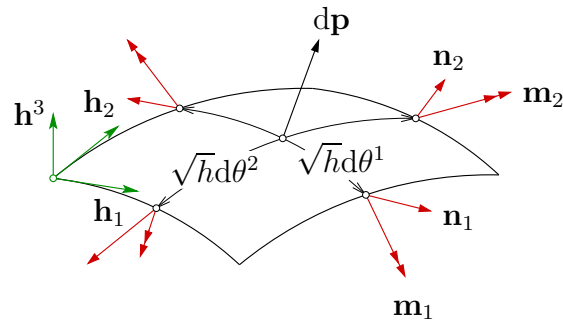
Einsetzen der Stoffbeziehungen

$$\mathbf{N} = D \overset{4}{\mathbf{H}} \mathbf{U}, \quad \bar{\mathbf{M}} = B \overset{4}{\mathbf{H}} \mathbf{R}$$

liefert

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = D \int_{(A^3)} (\overset{4}{\mathbf{H}} \mathbf{U} \cdot \delta \mathbf{U} + \frac{t^2}{12} \overset{4}{\mathbf{H}} \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{R}) \, dA^3$$

(2) Virtuelle Arbeit der äußeren Nah- und Fernwirkungskräfte



- $dp = \mathbf{p} dA^3$: enthält äußere Nahwirkung (Belastung) und äußere Fernwirkung (Gravitation) nach Teilintegration über t
- $\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{m}_\alpha$: Randschnittgrößen

Fernwirkung und äußere Nahwirkung auf dA^3

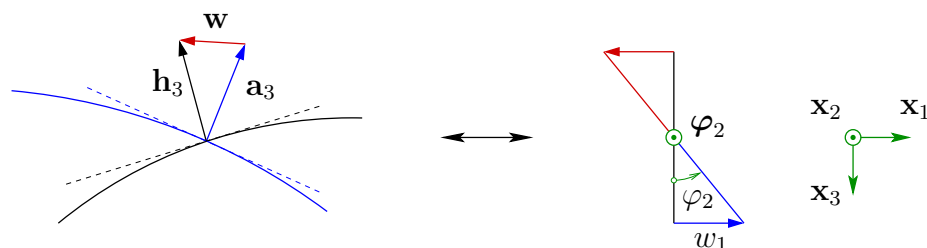
$$\int_{(A^3)} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{u} dA^3 + \int_V \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV = \int_{(A^3)} (\bar{\mathbf{p}} + \rho_0 \mathbf{b} t) \cdot \delta \mathbf{u} dA^3$$

$$=: \int_{A^3} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dA^3$$

Randterme aus Nahwirkung auf dA^α

Bem.: Für eine Reduktion auf die Mittelfläche ist eine Integration über die Schalendicke t erforderlich
 → Untersuchung der kinematischen Beziehungen für $\delta \mathbf{u}$ erforderlich.

Kinematik \mathbf{u} und $\delta \mathbf{u}$



Mit $w_3 \approx 0$ und $w_\alpha = -u_3 \parallel_\alpha$ gilt

$$\mathbf{w} =: \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{w}_\alpha = w_\alpha \mathbf{h}^\alpha$$

$$\text{wobei} \quad \begin{cases} w_1 = \theta^3 \sqrt{h} \varphi^2 \\ w_2 = -\theta^3 \sqrt{h} \varphi^1 \end{cases}$$

u und δu Schalenraum und Mittelfläche

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{h}^i =: \mathbf{u}_M + \theta^3 \boldsymbol{\omega} \quad \longrightarrow \quad \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_M + \theta^3 \delta \boldsymbol{\omega}$$

$$\text{mit } \begin{cases} u_1 = u_{1M} + w_1, & w_1 = \theta^3 \sqrt{h} \varphi^2 = \theta^3 \omega_1 \\ u_2 = u_{2M} + w_2, & w_2 = -\theta^3 \sqrt{h} \varphi^1 = \theta^3 \omega_2 \\ u_3 = u_{3M} \end{cases}$$

Randterm auf dA^1

$$\int_{(A^1)} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{u} dA^1 = \int_{(\theta^2)} (\mathbf{n}_1 \cdot \delta \mathbf{u}_M + \bar{\mathbf{m}}_1 \cdot \delta \mathbf{w}) \sqrt{h} d\theta^2$$

Randterm auf dA^2

$$\int_{(A^2)} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{u} dA^2 = \int_{(\theta^1)} (\mathbf{n}_2 \cdot \delta \mathbf{u}_M + \bar{\mathbf{m}}_2 \cdot \delta \mathbf{w}) \sqrt{h} d\theta^1$$

Zusammenfassung der Randterme

$$\int_{(A^1)} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{u} dA^1 + \int_{(A^2)} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{u} dA^2 =: \int_{(S)} (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_M + \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \mathbf{w}) dS$$

Ergebnis: PdvV für Flächentragwerke

$$\int_{(A^3)} (\mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{U} + \bar{\mathbf{M}} \cdot \delta \mathbf{R}) dA^3 = \int_{(S)} (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_M + \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \mathbf{w}) dS + \int_{(A^3)} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dA^3$$