



Universität Stuttgart

Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

[www.mechbau.uni-stuttgart.de](http://www.mechbau.uni-stuttgart.de)

**Ergänzung zur Vorlesung**

**Technische Mechanik III – Teil II**

Formelsammlung

Stand WS 2012/13

letzte Änderung: 26.09.2012

# 1 Grundlegende Beziehungen

- **Allgemeine Fluide** (Flüssigkeiten und Gase) sind definiert als isotrope „Nicht-festkörper“

- \* **Isotropie:** richtungsunabhängige Materialeigenschaften

- \* **Festkörper:** benachbarte materielle Punkte bleiben während der Deformation benachbart, d. h.

→ Übertragung von  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Volumendehnungen} \\ \text{Schubverzerrungen (Gleitungen)} \end{array} \right.$

→ Übernahme von  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Druckspannungen} \\ \text{Schubspannungen} \end{array} \right.$

**Bem.:** Oben genannte Eigenschaften sind unabhängig vom Materialverhalten des Festkörpers (elastisch, elastisch-plastisch, viskoelastisch).

- **Fluide:** benachbarte materielle Punkte bleiben nur im Zustand der Ruhe benachbart

- \* im Zustand der Ruhe (Statik der Fluide):

→ Übertragung von Volumendehnungen

→ Übernahme von Druckspannungen

**Bem.:** Dieses Verhalten heißt hydrostatisch und ist geschwindigkeits-unabhängig

- \* im Zustand der Bewegung (Dynamik der Fluide):

→ Übertragung von  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Volumendehnungsgeschwindigkeiten} \\ \text{Schubverzerrungsgeschwindigkeiten} \end{array} \right.$

→ Übernahme von  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Druckspannungen} \\ \text{Schubspannungen} \end{array} \right.$

**Bem.:** Im Zustand der Bewegung bleiben materielle Punkte **nicht** benachbart. Das Verhalten ist **viskos**, d. h. geschwindigkeitsabhängig.

- \* **Kompressibilität:** Veränderlichkeit der Dichte

- Flüssigkeiten: nahezu inkompressibel

- Gase: stark kompressibel

**Bem.:** Auch Gase können mit konstanter Dichte strömen. Dieses Verhalten ist vom Randwertproblem abhängig.

- **Flüssigkeiten:**

- \* Inkompressibilität (Ausnahme: Gaseinschlüsse bzw. sehr hohe Drücke)

- \* Viskosität bzw. Zähigkeit (temperaturabhängig)

→  $\left\{ \begin{array}{l} \text{hohe Viskosität: z. B. Öle} \\ \text{niedrige Viskosität: z. B. Wasser} \end{array} \right.$

**Bem.:** Im folgenden Beschränkung auf

- isotherme (temperaturunabhängige) Prozesse

- inkompressible Flüssigkeiten

## Materieller Körper, Konfiguration und Bewegung

- **Bewegungsdarstellung:**

Materielle Beschreibung der Bewegung (*Lagrange*):

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$$

Räumliche Beschreibung der Bewegung (*Euler*):

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

Existenz einer ein-eindeutigen (invertierbaren) Bewegung:

$$J := \det \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \neq 0$$

**Erläuterung:**

Es gilt für den Differenzvektor zweier infinitesimal benachbarter materieller Punkte  $\mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{P}_2$

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} =: \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad \longrightarrow \quad d\mathbf{X} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)^{-1} d\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} & : \text{ materieller Deformationsgradient} \\ \mathbf{F}^{-1} &= \frac{(\text{cof } \mathbf{F})^T}{\det \mathbf{F}} \end{cases}$$

d. h. die Bewegung ist nur invertierbar, wenn  $J = \det \mathbf{F} = \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) \neq 0$ .

Außerdem gilt  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t_0)$ , so daß  $\det \mathbf{F}(t_0) = 1 \rightarrow J = \det \mathbf{F} > 1$ .

- **Geschwindigkeit und Beschleunigung:**

*Lagrangesche* Beschreibung (Festkörper):

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$$

$$\mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$$

*Eulersche* Beschreibung (Fluide):

Mit Hilfe der inversen Bewegungsfunktion folgt aus o. g. Darstellung für  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) \longrightarrow \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{b} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) \longrightarrow \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

## Materielle Zeitableitung, Geschwindigkeitsgradient

- **Zeitabhängigkeit von Feldfunktionen:**

- **implizite Zeitabhängigkeit:** z. B.  $\alpha = \alpha(\mathbf{x}(t))$

Die Funktion  $\alpha$  ist nur implizit über die Abhängigkeit von  $\mathbf{x}(t)$  von der Zeit abhängig.

- **implizite und explizite Zeitabhängigkeit:** z. B.  $\beta = \beta(\mathbf{x}(t), t)$

Die Funktion  $\beta$  hängt implizit über  $\mathbf{x}(t)$  von  $t$  ab und explizit über  $t$ .

- **explizite Zeitabhängigkeit:** z. B.  $\gamma = \gamma(\mathbf{X}(t_0), t)$

Die Funktion  $\gamma$  hängt nur explizit von der Zeit  $t$  ab.

- **Materielle Zeitableitung:**

Es seien  $\psi(\mathbf{x}(t), t)$  eine „skalarwertige“ (z. B. Dichte  $\rho$ ) und  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t), t)$  eine „vektorielle“ (z. B. Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ ) Feldfunktion von  $\mathbf{x}$  und  $t$ .

$$\begin{array}{l} \dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial t}}_{\text{lokaler Anteil}} + \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}}_{\text{konvektiver Anteil}} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t}}_{\text{lokaler Anteil}} + \underbrace{\left(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\mathbf{x}}\right) \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}}_{\text{konvektiver Anteil}} \end{array}$$

- **Materieller Geschwindigkeitsgradient:**

$$\dot{\mathbf{F}} := \frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{X}} = \text{Grad } \dot{\mathbf{x}}$$

- **Räumlicher Geschwindigkeitsgradient:**

$$\mathbf{L} := \frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{x}} = \text{grad } \dot{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$$

Deformations- und Drehgeschwindigkeit:

$$\begin{array}{l} \text{sym } \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{D} := \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \\ \text{skw } \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{W} := \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{D} : \text{Deformationsgeschwindigkeit} \\ \mathbf{W} : \text{Drehgeschwindigkeit} \end{cases}$$

## Intergrallinien des Geschwindigkeitfelds

### (a) Bahnlinie:

Man sucht die Kurve der Bahn, die ein materieller Punkt der Flüssigkeit im Laufe der Zeit zurücklegt. Die Bahnlinie ist die Lösung der Differentialgleichung:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{X}$$

**Bem.:** Es wird die Bahn eines materiellen Punkts  $\mathcal{P}$  beschrieben, der zur Zeit  $t_0$  am Ort  $\mathbf{X}$  war. Kurvenparameter ist die Zeit  $t$ .

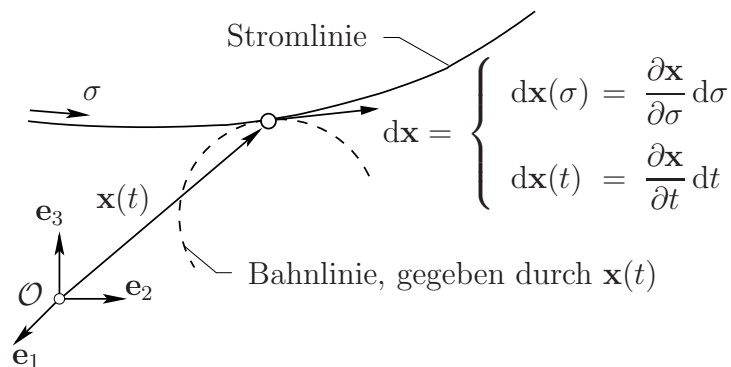
### (b) Stromlinien:

Man sucht die Kurvenschar, deren Tangenten in jedem Punkt  $\mathbf{x}$  mit der Richtung des örtlichen Geschwindigkeitsvektors übereinstimmen. Die Stromlinien sind die Lösung der Differentialgleichung:

$$\boxed{\frac{d}{d\sigma} \mathbf{x}(\sigma) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\sigma), t)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(\sigma_0) = \mathbf{x}_0$$

**Bem.:** Es wird die zur Zeit  $t$  momentan im Raumpunkt  $\mathbf{x}$  bestehende Parallelität des Kurveninkrements  $d\mathbf{x}(\sigma)$  der Stromlinie mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}(\mathbf{x}(\sigma), t)$  beschrieben.  $\sigma$  kann hierbei als Bogenlänge der Stromlinie verstanden werden.

### Veranschaulichung der Bahn- und Stromlinie:



### (c) Streichlinie:

Man sucht zur Zeit  $t$  die Verbindungskurve derjenigen materiellen Punkte, die sich zu irgendeiner Zeit  $t = \tau$  am Ort  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$  aufgehalten haben oder aufhalten werden. Die Streichlinie ist die Lösung der Differentialgleichung:

$$\boxed{\mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\xi}, \tau, t)} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\xi}, \tau, t) = \boldsymbol{\xi}$$

**Bem.:**  $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\xi}, \tau, t)$  ist das allgemeine Integral zur Bestimmung der Bahnlinie. Für den Fall des stationären Geschwindigkeitszustandes fällt die Streichlinie mit Bahnlinie und Stromlinie zusammen.

## 2 Materialeigenschaften inkompressibler Fluide

**Bem.:** In der linearen Elastizitätstheorie existiert ein linearer Zusammenhang zwischen Spannung (Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ ) und Verzerrung (linearer *Greenscher* Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ). Das Verhalten linear-viskoser Flüssigkeiten kann durch ein formal gleiches Gesetz für die Reibungsspannung in Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit beschrieben werden.

### Allgemeine Form des Stoffgesetzes

$$\boxed{\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{T} & : \text{Cauchy'scher Spannungstensor} \\ \mathbf{T}_E & : \text{„Extra“-Spannung} \\ p & : \text{unbestimmter Druck} \end{cases}$$

### Die ideale, nicht-viskose Flüssigkeit

Für die ideale, nicht-viskose Flüssigkeit existiert keine Extraspannung  $\mathbf{T}_E$

$$\boxed{\mathbf{T} = -p \mathbf{I}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} p & : \text{Flüssigkeitsdruck} \\ \mathbf{T}_E & \equiv \mathbf{0} \end{cases}$$

### Die *Newtonsche*, linear-viskose Flüssigkeit

$$\boxed{\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} p & : \text{unbestimmter Druck} \\ \mathbf{T}_E & : \text{Extraspannung} \end{cases}$$

**Bem.:** Für das viskose Fluid folgt die Extraspannung nur aus der inneren Reibung (Viskosität) des Fluids  $\rightarrow$  „Reibungsspannung“, d. h.  $\mathbf{T}_E = \mathbf{T}_R$ .

### Stoffgesetz der inkompressiblen, linear-viskosen Flüssigkeit:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{T} &= -p \mathbf{I} + \mathbf{T}_R \quad ; \quad \mathbf{T}_R = 2 \mu \mathbf{D} \\ \text{mit } p &: \text{unbestimmter Flüssigkeitsdruck} \end{aligned}}$$

**Bem.:** Für die ruhende Flüssigkeit entspricht  $p$  dem Flüssigkeitsruhedruck. Die Scherviskosität  $\mu$  ist stark temperaturabhängig.

### 3 Bilanzrelationen der Mechanik

#### 3.1 Massenbilanz und Kontinuitätsgleichung

**Axiom:** In einem geschlossenen System bleibt die Masse eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  konstant.

**Formulierung des Massenerhaltungssatzes:**

$$m(\mathcal{B}, t) = \int_{\mathcal{M}} dm = \int_{\mathcal{V}} \rho dv = \text{konst.}$$

**Lokale Formulierung der Massenbilanz:**

*Lagrangesche Formulierung:*

*Eulersche Formulierung:*

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Es folgt aus der *Eulerschen* Formulierung mit dem *Gauss'schen* Integralsatz

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \quad \text{mit} \begin{cases} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} : \text{Massenausflu\ss} \text{ \u00fcber die Oberfl\u00e4che} \\ -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} : \text{Massenzuflu\ss} \end{cases}$$

**Sonderf\u00e4lle der Massenbilanz:**

(a) Station\u00e4re Str\u00f6mung, d. h.  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0$

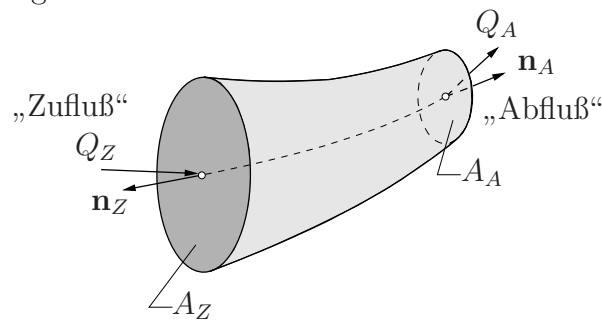
- globale Aussage:  $\int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da = 0$
- lokale Aussage:  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$

Es folgt bei Aufteilung der Oberfl\u00e4che  $\mathcal{S}$  in einen Zuflu\u00dfbereich  $A_Z$  und einen Abflu\u00dfbereich  $A_A$ :

$$0 = \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da = \underbrace{\int_{A_Z} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da}_{-Q_Z} + \underbrace{\int_{A_A} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da}_{Q_A}$$

$$\text{mit} \left\{ \begin{array}{l} Q_Z = - \int_{A_Z} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da : \text{Massenzuflu\ss} \\ Q_A = \int_{A_A} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da : \text{Massenabflu\ss} \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{Q_Z = Q_A}$$

**Beispiel:** Durchströmung eines Rohrs



Annahme:  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  sei unabhängig vom Flächenintegral, d. h.

$$\left. \begin{aligned} Q_Z &= \rho v_Z A_Z \\ Q_A &= \rho v_A A_A \end{aligned} \right\} \text{ mit } \begin{cases} v_Z &= -\mathbf{v}_Z \cdot \mathbf{n}_Z \\ v_A &= \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n}_A \end{cases}$$

Es folgt

$$\boxed{v_Z A_Z = v_A A_A} \longrightarrow \boxed{v A = \text{konst.}}$$

(b) Inkompressible Fluide, d. h.  $\dot{\rho} = 0$

Man erhält folgende Aussagen:

- globale Aussage:  $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da = 0$
- lokale Aussage:  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  (Kontinuitätsgleichung)

Es folgt bei Aufteilung der Oberfläche  $\mathcal{S}$  in einen Zuflußbereich  $A_Z$  und einen Abflußbereich  $A_A$ :

$$0 = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da = \underbrace{\int_{A_Z} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da}_{-V_Z} + \underbrace{\int_{A_A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da}_{V_A}$$

$$\text{mit } \left\{ \begin{aligned} V_Z &= - \int_{A_Z} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da : \text{Volumenzufluß} \\ V_A &= \int_{A_A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da : \text{Volumenausfluß} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \boxed{V_Z = V_A}$$



### 3.2 Impulssatz

**Axiom:** Die materielle zeitliche Änderung des Impulses entspricht der Summe der am Körper  $\mathcal{B}$  angreifenden Nah- und Fernwirkungskräfte.

- Formulierung des Impulssatzes

$$\dot{\mathbf{l}}(\mathcal{B}, t) = \mathbf{k}(\mathcal{B}, t) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{l} = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{v} \, dv \\ \mathbf{k} = \int_S \mathbf{t} \, da + \int_V \rho \mathbf{b} \, dv \end{cases}$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{k}(\mathcal{B}, t) & : \text{ Summe der äußeren Kräfte} \\ \mathbf{t} & : \text{ Oberflächenkräfte (Nahwirkung)} \\ \rho \mathbf{b} & : \text{ Volumenkräfte (Fernwirkung)} \end{cases}$$

- Globale Form des Impulssatzes

$$\int_V \rho \ddot{\mathbf{x}} \, dv = \int_V (\text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}) \, dv$$

- Lokale Form des Impulssatzes (*Cauchy'sche Bewegungsgleichung*)

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}$$

- Impulssatz in der Stromröhre

$$\mathbf{k} = Q(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_Z) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} Q & : \text{ Massenstrom} \\ \mathbf{v}_A & : \text{ Volumenausfluß} \\ \mathbf{v}_Z & : \text{ Volumenzufluß} \end{cases}$$

### 3.3 Energiesatz der Mechanik

**Formulierung des Energiesatzes** (Bilanz der mechanischen Leistung)

$$\dot{\mathcal{K}}(\mathcal{B}, t) = \mathcal{L}(\mathcal{B}, t)$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} \mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dv & : \text{ Kinetische Energie} \\ \mathcal{L} = \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_a & : \text{ Leistung der inneren und äußeren Kräfte} \end{cases}$$

## 4 Hydrostatik

### 4.1 Einführung in die Statik der Flüssigkeiten

**Bem.:** In der Hydrostatik beschreibt man Probleme mit materiell konstanter Geschwindigkeit, d. h.  $\dot{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}$ .

**hier:** Beschränkung auf die ruhende Flüssigkeit mit  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$   
 $\rightarrow$  Kontinuitätsgleichung  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  ist identisch erfüllt.

**Gleichgewichtsbedingungen der ruhenden Flüssigkeit:**

*Cauchy'sche* Bewegungsgleichung für  $\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{0} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}$$

nach Einsetzen des Stoffgesetzes der ruhenden Flüssigkeit folgt

$$\mathbf{0} = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{b}$$

mit  $p$  : Flüssigkeitsruhedruck

**Konservative Volumenkräfte:**

**Bem.:** Die Arbeit der äußeren Volumenkräfte (Gravitationskräfte) ist konservativ, d. h.  $\rho \mathbf{b}$  kann aus einem Potential (Gravitationspotential  $U_g(\mathbf{x})$ ) hergeleitet werden.

$$\rho \mathbf{b} = -\frac{dU_g(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = -\operatorname{grad} U_g(\mathbf{x})$$

Es folgt für die Gleichgewichtsbedingung der ruhenden Flüssigkeit

$$\mathbf{0} = -\operatorname{grad} (p + U_g) \quad \rightarrow$$

$$p + U_g = C = \text{konst.}$$

**Bemerkungen:**

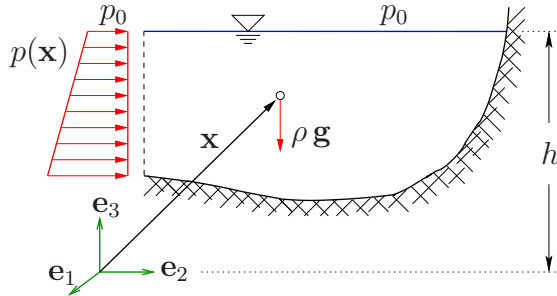
- Oben genannte Beziehung ist die Gleichung der Druckverteilung. Die Konstante  $C$  muß aus einer Druckrandbedingung gewonnen werden.
- Konstante Werte des Potentials  $U_g(\mathbf{x})$  liefern Äquipotentialflächen mit  $U_g(\mathbf{x}) = \text{konst.}$

$$\rightarrow dU_g = \frac{dU_g}{d\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \perp d\mathbf{x}$$

**hier:**  $d\mathbf{x}$  tangential an  $U_g$ ,  $\mathbf{f}$  senkrecht auf  $U_g$ .

## 4.2 Flüssigkeiten im Schwerfeld

### (a) Flüssigkeitsruhedruck



#### Voraussetzungen:

- allgemeine Volumenkraft:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \rho \mathbf{b}(\mathbf{x})$
- homogene Flüssigkeit:  $\text{grad } \rho \equiv \mathbf{0}$
- homogenes Schwerfeld:  $\text{grad } \mathbf{b} = \text{grad } \mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$   
 $\rightarrow \rho$  und  $\mathbf{b} = \mathbf{g}$  sind ortsunabhängig
- konservative Volumenkräfte

#### Gleichung der Druckverteilung

$$p - p_0 = \rho g (h - x_3)$$

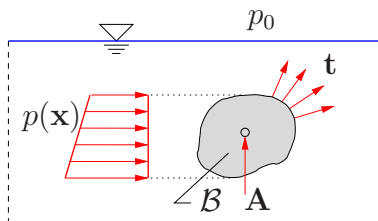
#### Bemerkungen:

- $p - p_0$  ist der sogenannte Überdruck ( $p_0$  ist in der Regel der atmosphärische Druck)
- Druckspannungen wirken immer senkrecht auf Rand- bzw. Schnittflächen
- Äquipotentialflächen sind gegeben durch  $x_3 = \text{konst.}$

### (b) Hydrostatischer Auftrieb

**Bem.:** Man sucht die Auftriebskraft, die auf einen Körper  $\mathcal{B}$  einwirkt

#### Der vollständig eingetauchte Körper:



$$\mathbf{A} = \mathbf{k}_0 = \rho g V \mathbf{e}_3 = -\rho V \mathbf{g}$$

mit  $V$  : eingetauchtes Volumen

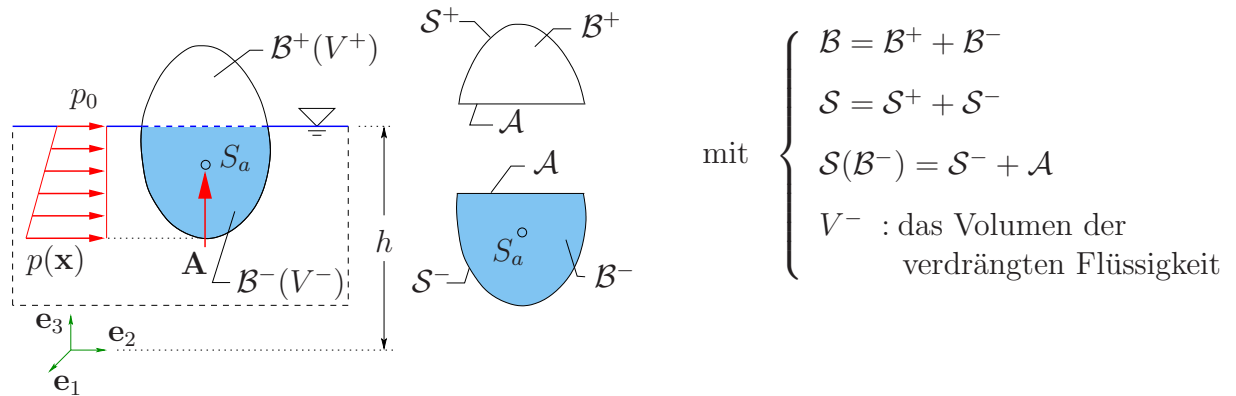
#### Bemerkungen:

- Die Auftriebskraft wird über die auf den Körper einwirkende Kontaktkraft (Nahwirkung) bestimmt.
- Die Auftriebskraft greift im Schwerpunkt  $S_A$  des verdrängten Flüssigkeitskörpers ( $\rho = \rho^W$ ) an.
- Es gilt der **Satz von Archimedes** (287–212 v. Ch.)

Ein Körper verliert im Wasser so viel an Gewicht, wie das von ihm verdrängte Wasser wiegt.

- Für schwimmende und poröse Körper (Schwämme, Böden, etc.) gilt dies entsprechend.

**Der schwimmende Körper:**

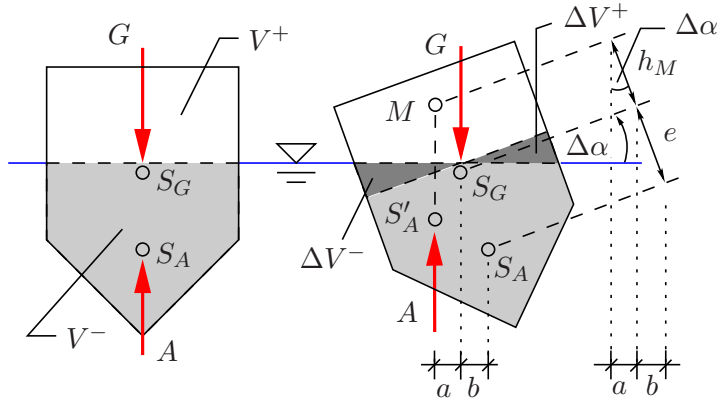


Auftriebskraft  $\mathbf{A}$  des schwimmenden Körpers  $\mathcal{B}$ :

$$\mathbf{A} = \rho g V^- \mathbf{e}_3 = -\rho V^- \mathbf{g}$$

**4.3 Schwimmstabilität**

**Bem.:** Man betrachtet einen teilweise in eine Flüssigkeit eingetauchten, symmetrischen Körper und lenkt diesen um einen kleinen Winkel  $\Delta\alpha$  aus der Ruhelage aus.



**Gleichgewicht in der Ausgangslage (Schwimmbedingung):**

$$G = A = \rho g V^-$$

**Stabilitätsbedingung:**

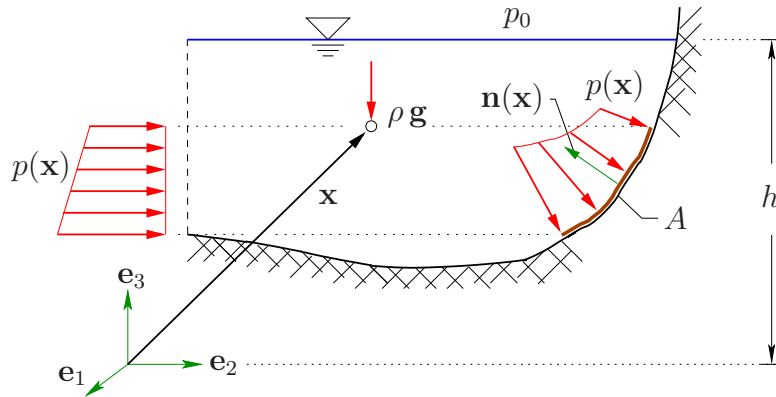
$$h_M = \frac{J_{11}}{V^-} - e \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 : \text{stabiles} \\ = 0 : \text{indifferentes} \\ < 0 : \text{labiles} \end{array} \right\} \text{Gleichgewicht}$$

mit  $\left\{ \begin{array}{l} J_{11} : \text{axiales Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche} \\ e : \text{Abstand zw. Schwerpunkten der gesamten und der eingetauchten Fläche} \\ V^- : \text{Volumen der verdrängten Flüssigkeit} \end{array} \right.$

**Bem.:** Für  $h_M > 0$  liegt das Metazentrum M oberhalb des Schwerpunkts  $S_G$ .

### 4.4 Druck auf ebene und gekrümmte Flächen

- Allgemeine Voraussetzungen



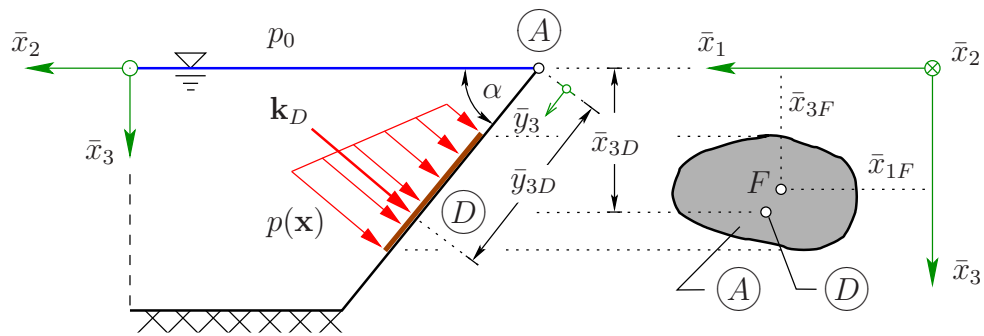
Gleichung der Druckverteilung:  $p(\mathbf{x}) = p_0 + \rho g (h - x_3)$

Resultierende Druckkraft an einer beliebigen Fläche A:

$$\mathbf{k}_D = -\rho g \int_A (h - x_3) \mathbf{n} da$$

- Druck auf ebene Flächen

**Bem.:** Auf ebenen Flächen ist der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  konstant bezüglich einer Integration über  $da$ .



Resultierende Druckkraft:

$$\mathbf{k}_D = -\rho g \bar{x}_{3F} A \mathbf{n} = -p_F A \mathbf{n}$$

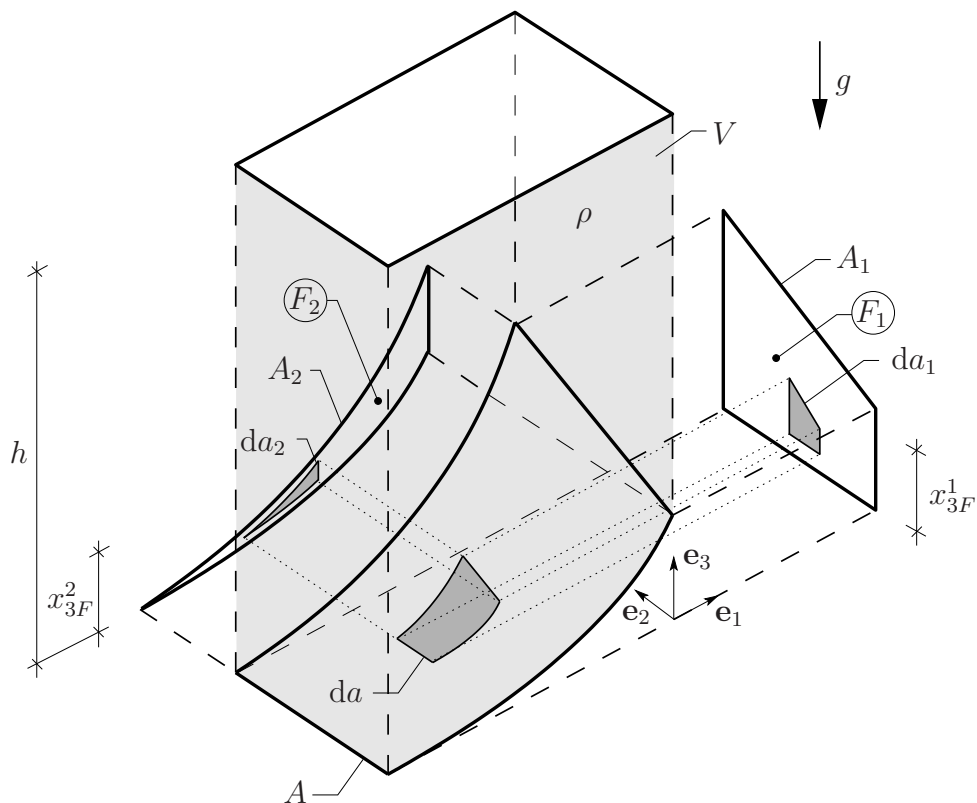
$$\text{mit } \begin{cases} \bar{S}_1 = \int_A \bar{x}_3 da = \bar{x}_{3F} A & : \text{ statisches Moment} \\ p_F = \rho g \bar{x}_{3F} & : \text{ Druck im Flächenschwerpunkt von } A \end{cases}$$

**Lage der resultierenden Druckkraft:**Berechnung von  $\bar{x}_{3D}$  durch Momentenäquivalenz  $M_{\bar{1}}$  bzgl.  $\textcircled{A}$ 

$$\boxed{\bar{x}_{3D} = \frac{\bar{J}_{11}}{\bar{S}_1}} \quad \text{mit } \bar{J}_{11} : \text{Axiales Flächenträgheitsmoment bzgl. } \bar{x}_1\text{-Achse}$$

Berechnung von  $\bar{x}_{1D}$  durch Momentenäquivalenz  $M_{\bar{3}}$  bzgl.  $\textcircled{A}$ 

$$\boxed{\bar{x}_{1D} = -\frac{\bar{J}_{13}}{\bar{S}_1}} \quad \text{mit } \bar{J}_{13} : \text{Deviationsmoment}$$

• **Druck auf gekrümmte Flächen**

$$\mathbf{k}_D = \rho g (h - x_{3F}^1) A_1 \mathbf{e}_1 + \rho g (h - x_{3F}^2) A_2 \mathbf{e}_2 - \rho g V \mathbf{e}_3$$

$$\text{mit } \begin{cases} x_{3F}^1 : \text{Schwerpunkt in } \mathbf{e}_3\text{-Richtung der projizierten Fläche } A_1 \\ x_{3F}^2 : \text{Schwerpunkt in } \mathbf{e}_3\text{-Richtung der projizierten Fläche } A_2 \\ V : \text{Volumen über der Fläche } A \end{cases}$$

## 5 Dynamik nicht-viskoser Flüssigkeiten

### 5.1 Potentialströmung

**Bem.:** Potentialströmungen treten auf, wenn das Geschwindigkeitsfeld aus einem Potential hergeleitet werden kann. Dies trifft jedoch nur auf die wirbelfreie Strömung zu.

**Laplace-Gleichung für das Geschwindigkeitpotential:**

$$\Delta \phi := \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}) \equiv 0$$

$$\text{mit } \begin{cases} \phi(\mathbf{x}) & : \text{ Geschwindigkeitpotential} \\ \mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}) & : \text{ Geschwindigkeitsfeld} \\ \Delta(\cdot) = \operatorname{div} \operatorname{grad}(\cdot) & : \text{ Laplace-Operator} \end{cases}$$

Ausführung des Laplace-Operators liefert

$$0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = \phi_{,11} + \phi_{,22} + \phi_{,33}$$

**Bem.:** Feldlich konstante Werte des Geschwindigkeitpotential  $\phi(\mathbf{x}, t)$  liefern Äquipotentialflächen. Stromlinien sind senkrecht zu den Äquipotentialflächen des Geschwindigkeitsfelds.

### 5.2 Euler-Gleichung der Hydrodynamik

**Bem.:** Ausgangsbeziehung ist die lokale Form der Impulsbilanz (*Cauchy'sche Bewegungsgleichung*), in die man das Stoffgesetz der inkompressiblen Flüssigkeit einsetzt.

**Euler-Gleichung:**

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{b}$$

Umformung der Euler-Gleichung (Verwendung der *Grassmann-Entwicklung*) liefert für konservative Volumenkräfte ( $\rho \mathbf{b} = -\operatorname{grad} U_g$ ) und homogene Flüssigkeiten ( $\operatorname{grad} \rho = \mathbf{0}$ ):

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \right) = -\operatorname{grad} \left( p + U_g + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right)$$

**Sonderfälle der Eulerschen Gleichung:**

(a) wirbelfreie Strömung:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\text{grad} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p + U_g \right) = \mathbf{0}$$

(b) stationäre, wirbelfreie Strömung:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\cdot) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{grad} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p + U_g \right) = \mathbf{0}$$

$$\frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p + U_g = \text{konst.}$$

Umformung und Einsetzen des Gravitationspotentials liefert mit  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

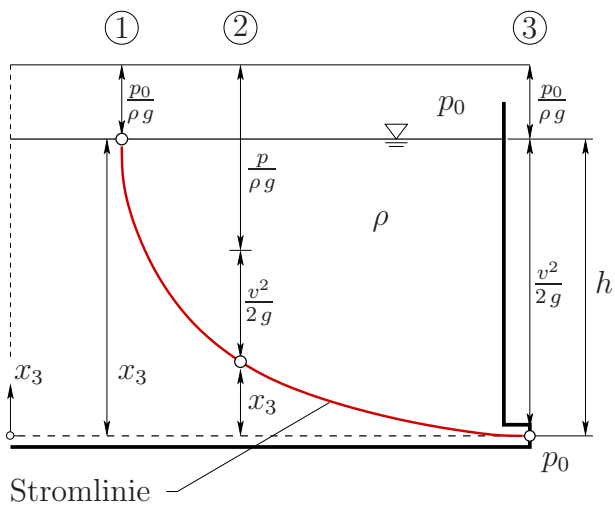
$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + x_3 = \text{konst.} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \frac{v^2}{2g} & : \text{ Geschwindigkeitshöhe} \\ \frac{p}{\rho g} & : \text{ Druckhöhe} \\ x_3 & : \text{ Ortshöhe (geodätische Höhe)} \end{cases}$$

### 5.3 Bernoulli-Gleichung

**Bem.:** Man erhält die *Bernoulli*-Gleichung durch Integration der *Euler*-Gleichung entlang der Stromlinie einer stationären Strömung (Stromlinie  $\hat{=}$  Bahnlinie). Wirbelfreiheit wird hier nicht vorausgesetzt.

**Bernoulli-Gleichung:**

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + x_3 = \text{konst.} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \frac{v^2}{2g} & : \text{ Geschwindigkeitshöhe} \\ \frac{p}{\rho g} & : \text{ Druckhöhe} \\ x_3 & : \text{ Ortshöhe} \end{cases}$$



- Zustand 1 : Ruhezustand der Flüssigkeit
- Zustand 2 : beliebiger Zwischenzustand
- Zustand 3 : Ausfluß

**Ausflußgeschwindigkeit (Torricelli):**

Vergleich von Zustand 1 und 3 liefert

$$\frac{p_0}{\rho g} + h = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$



## 6 Dynamik viskoser Flüssigkeiten

### 6.1 Navier-Stokes-Gleichung

**Bem.:** Ausgangsbeziehung ist die lokale Form der Impulsbilanz (*Cauchy'sche Bewegungsgleichung*), in die man das Stoffgesetz der linear-viskosen Flüssigkeit einsetzt.

*Navier-Stokes-Gleichung:*

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = -\text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{b}$$

Division der *Navier-Stokes-Gleichung* durch  $\rho$  liefert für homogene Dichten:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\text{grad } \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \nu := \frac{\mu}{\rho} & : \text{ kinematische Zähigkeit [m}^2/\text{s]} \\ \mu & : \text{ dynamische Zähigkeit [Ns/m}^2\text{]} \end{cases}$$

### 6.2 Ähnlichkeitsbetrachtungen

**Bem.:** Im Zusammenhang mit der Durchführung von Modellversuchen stellt sich die Frage nach der Übertragbarkeit der Meßergebnisse am Modell auf die Realität.

**Einführung dimensionsloser Größen:**

- dimensionsloser Ortsvektor:  $\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}$  mit  $L$ : charakteristische Länge
- dimensionslose Geschwindigkeit:  $\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{V}$  mit  $V$ : charakteristische Geschwindigkeit
- dimensionslose Zeit:  $t^* = \frac{t}{T}$  ( $T = \frac{L}{V}$  : Bezugszeit)

Einsetzen der *Reynolds-* und *Froude-Zahl* liefert mit  $\text{grad}^*(\cdot) := L \text{grad}(\cdot)$  und  $\Delta^*(\cdot) := L^2 \Delta(\cdot)$  die entdimensionierte *Navier-Stokes-Gleichung*:

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = -\text{grad}^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \mathbf{v}^* + \frac{1}{\text{Fr}} \mathbf{b}^* \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \text{Re} = \frac{LV}{\nu} & : \text{ Reynolds-Zahl [-]} \\ \text{Fr} = \frac{V^2}{L|\mathbf{b}|} & : \text{ Froude-Zahl [-]} \\ p^* := \frac{p}{\rho V^2} & : \text{ dimensionsloser Druck} \\ \mathbf{b}^* := \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} & : \text{ dimensionslose Volumenkraft} \end{cases}$$

**Bemerkungen:**

- $Re$  beschreibt den Einfluß der kinematischen Zähigkeit auf die entdimensionierte *Navier-Stokes*-Gleichung  
 → für kleine  $Re$  (große Zähigkeiten) nimmt der Einfluß der dimensionslosen Zähigkeitskraft  $\mathbf{z} = \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{v}$  zu.
- $Fr$  beschreibt den Einfluß der äußeren Volumenkraft (i. d. R. Gravitationskraft) auf den Strömungsprozeß.
- Für schleichende Strömung (Hydraulik) kann die dimensionlose Beschleunigung vernachlässigt werden.
- Die dimensionslose Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^*$  genügt der Kontinuitätsgleichung  $\text{div}^* \mathbf{v}^* \equiv 0$ .

**Maßstabeffekte:**

Ähnlichkeit zwischen Modell- und Hauptausführung liegt vor, wenn

- $Re_H = Re_M$  und
- $Fr_H = Fr_M$

**Bem.:** Können beide Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllt werden, ist abzuwägen, ob der Einfluß der Zähigkeits- oder der Volumenkraft auf die Strömung überwiegt, so daß man entweder  $Re_H = Re_M$  oder  $Fr_H = Fr_M$  wählt.

Sind  $Re_H = Re_M$  und  $Fr_H = Fr_M$ , dann können Druck- und Geschwindigkeitsverteilung vom Modell auf die Realität übertragen werden:

- Druck:  $p_H^* = p_M^*$   
 →  $p_H = \frac{\rho_H}{\rho_M} \left( \frac{V_H}{V_M} \right)^2 p_M$
- Geschwindigkeit:  $\mathbf{v}_H^* = \mathbf{v}_M^*$   
 →  $\mathbf{v}_H = \frac{V_H}{V_M} \mathbf{v}_M$

## 7 Hydraulik in porösen Festkörpersystemen

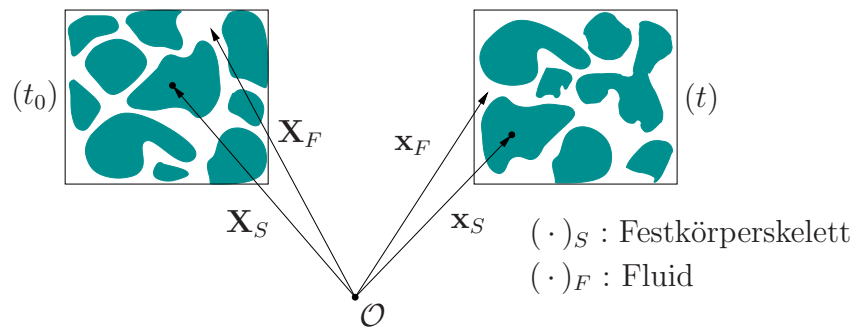
### 7.1 Grundlegende Konzepte

**Ziel:** Beschreibung der Fluidbewegung (Strömung) in porösen Festkörpern

**hier:** Beschränkung auf inkompressible Porenfluide

**Anwendung:** Grundwasserströmung in Böden

**Mikroskopische und makroskopische Beschreibung:**

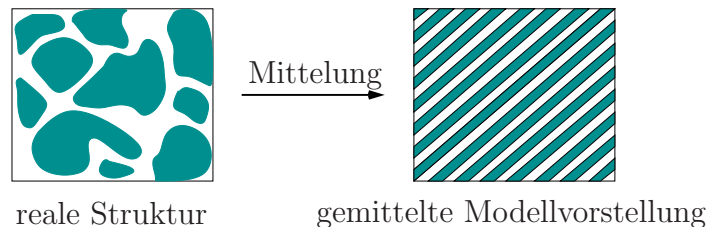


- **Mikroskopische Beschreibung:**

Beschreibung der Bewegung der Teilkörper (Festkörperskelett und Fluid) auf dem Gebiet der Teilkörper

→ Nachteil: innere Geometrie ist in der Regel unbekannt

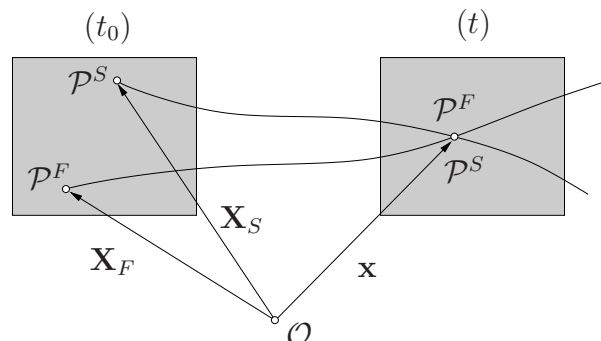
→ Lösung: Verschmierung der inneren Geometrie durch Mittelwertbildung, d. h.



- **Makroskopische Beschreibung:**

Ausführung eines Mittelungsprozesses (Durchschnittsbildung, Homogenisierung), so daß alle Funktionen im gesamten Gebiet definiert sind.

Dabei folgt jeder Teilkörper seiner eigenen Bewegung.



Einführung von Plazierungsfunktionen:

$$\boxed{\mathbf{x} = \chi_\alpha(\mathcal{P}^\alpha, t) \longleftrightarrow \mathbf{x} = \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha & = S \text{ (Skelett)}, F \text{ (Fluid)} \\ \mathcal{P}^\alpha & : \text{ materieller Punkt von } \mathcal{B}^\alpha \\ \mathbf{X}_\alpha & = \chi_\alpha(\mathcal{P}^\alpha, t_0) \end{cases}$$

**Konzept der Volumenanteile:**

- **Gesamtvolumen des Körpers  $\mathcal{B}$**  (aus der Summe der Teilvolumina von  $\mathcal{B}^\alpha$ )

$$V = \sum_{\alpha} V^{\alpha} \quad \text{mit} \quad V^{\alpha} = \int_{\mathcal{B}^{\alpha}} dv = \int_{\mathcal{B}} dv^{\alpha} =: \int_{\mathcal{B}} n^{\alpha} dv$$

- **Volumenanteil des Teilkörpers  $\mathcal{B}^\alpha$**

$$\boxed{n^{\alpha} = \frac{dv^{\alpha}}{dv} \longleftrightarrow dv^{\alpha} = n^{\alpha} dv}$$

Die Volumenanteile genügen der Sättigungsbeziehung

$$\sum_{\alpha} n^{\alpha} = 1$$

**Effektive und Partiale Dichte:**

- **Effektive (reale) Dichte** (Massenelement  $dm^{\alpha}$  pro Partialvolumenelement  $dv^{\alpha}$ )

$$\boxed{\rho^{\alpha R} := \frac{dm^{\alpha}}{dv^{\alpha}}}$$

- **Partiale Dichte** (Massenelement  $dm^{\alpha}$  pro Volumenelement  $dv$ )

$$\boxed{\rho^{\alpha} := \frac{dm^{\alpha}}{dv}}$$

- Zusammenhang zwischen  $\rho^{\alpha R}$  und  $\rho^{\alpha}$

$$\rho^{\alpha R} = \frac{dm^{\alpha}}{dv^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha}} \frac{dm^{\alpha}}{dv} \longrightarrow \boxed{\rho^{\alpha} = n^{\alpha} \rho^{\alpha R}}$$

**Materielle Inkompressibilität:**

**Definition:** Ein Körper  $\mathcal{B}^\alpha$  ist materiell inkompressibel, wenn sich seine effektive (reale) Dichte während eines Deformationsvorgangs nicht ändert, d. h. wenn  $\rho^{\alpha R} = \text{konst.}$

**Lagrangesche und Eulersche Beschreibung:**

- Lagrangesche Beschreibung für den Festkörper  $\mathcal{B}^S$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_S(\mathbf{X}_S, t)$$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{x}}_S = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_S(\mathbf{X}_S, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{x}}_S(\mathbf{X}_S, t) \quad ; \quad \ddot{\mathbf{x}}_S = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}_S(\mathbf{X}_S, t)}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{x}}_S(\mathbf{X}_S, t)$$

- Eulersche Beschreibung für das Porenfluid  $\mathcal{B}^F$

$$\mathbf{X}_F = \boldsymbol{\chi}_F^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{x}}_F = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_F(\mathbf{X}_F, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{x}}_F(\mathbf{X}_F, t) = \dot{\mathbf{x}}_F(\mathbf{X}_F(\mathbf{x}, t), t) = \dot{\mathbf{x}}_F(\mathbf{x}, t)$$

$$\rightarrow \ddot{\mathbf{x}}_F = (\dot{\mathbf{x}}_F)'_F = \ddot{\mathbf{x}}_F(\mathbf{x}, t)$$

mit der materiellen Zeitableitung

$$(\cdot)'_\alpha = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \text{grad}(\cdot) \dot{\mathbf{x}}_\alpha$$

**Einführung von Sicker- und Filtergeschwindigkeit:**

$$\text{Sickergeschwindigkeit} : \quad \mathbf{w}_F := \dot{\mathbf{x}}_F - \dot{\mathbf{x}}_S$$

$$\text{Filtergeschwindigkeit} : \quad n^F \mathbf{w}_F = n^F (\dot{\mathbf{x}}_F - \dot{\mathbf{x}}_S)$$

**7.2 Bilanzrelationen für Masse und Impuls****Truesdells metaphysische Prinzipie (verkürzt)**

**Bem.:** In der Theorie Poröser Medien (TPM) werden homogenisierte Mehrphasenmaterialien als Mischungen behandelt.

1. Alle Eigenschaften der Mischung (des Gesamtkörpers) sind mathematische Folgerungen aus den Eigenschaften der Konstituierenden (der Teilkörper).
2. Um den Bewegungszustand einer Konstituierenden zu beschreiben, kann man diese in Gedanken von den übrigen Konstituierenden trennen, vorausgesetzt, man berücksichtigt die Wechselwirkungseffekte.
3. Die Bewegung der Mischung wird durch die selben Gleichungen beschrieben wie die Bewegung eines einphasigen Materials.

**Massenbilanz:**

$$(\rho^\alpha)'_\alpha + \rho^\alpha \text{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = \hat{\rho}^\alpha$$

mit  $\hat{\rho}^\alpha$  : Dichteproduktion durch Wechselwirkung

**Impulsbilanz:**

$$\rho^\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \text{div} \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}^\alpha$$

mit  $\hat{\mathbf{p}}^\alpha$  : Impulsproduktion durch Wechselwirkung

### 7.3 Das Darcysche Filtergesetz

**Bem.:** Herleitung aus der Impulsbilanz für den Porenfluidkörper  $\mathcal{B}^F$  unter Berücksichtigung von Konstitutivgleichungen für  $\mathbf{T}^F$  und  $\hat{\mathbf{p}}^F$  bei schleichender Strömung.

- **Das Darcysche Filtergesetz:**

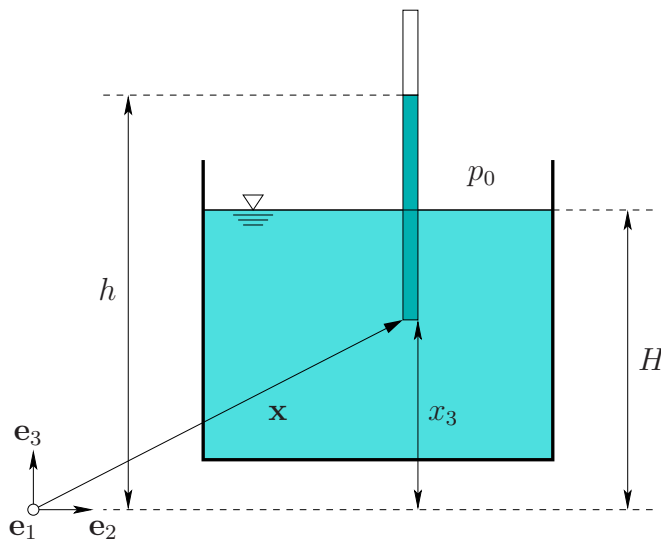
Für homogene Fluidwichten  $\gamma^{FR} := \rho^{FR} g$  ( $\rightarrow \text{grad } \gamma^{FR} = \mathbf{0}$ ) und konservative Gravitationskräfte ( $\rho^{FR} \mathbf{g} = -\text{grad } U_g$ ) folgt

$$n^F \mathbf{w}_F = -k^F \text{grad } h$$

mit  $h = \frac{1}{\gamma^{FR}} (p + U_g)$  : hydraulische Höhe (Standrohrspiegelhöhe)

- **Die Standrohrspiegelhöhe:**

Für konstante Gravitationsfelder folgt



$$U_g = -\rho^{FR} \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + U_0$$

$$= \rho^{FR} g x_3 + U_0$$

Randbedingung für  $U_g$

$$U_g(x_3 = 0) = 0$$

$$\rightarrow U_0 = 0$$

so daß

$$U_g = \rho^{FR} g x_3$$

$$h = \frac{p}{\rho^{FR} g} + x_3$$

mit  $\begin{cases} \frac{p}{\rho^{FR} g} & : \text{ Druckhöhe} \\ x_3 & : \text{ Ortshöhe} \end{cases}$

- **Das Darcy-Gesetz in Hydraulik und Geotechnik:**

Es gilt in Schreibweise der technischen Anwendung

$$\mathbf{v} = k^F \mathbf{i}$$

mit  $\begin{cases} \mathbf{v} := n^F \mathbf{w}_F & : \text{ Filtergeschwindigkeit} \\ \mathbf{i} := -\text{grad } h & : \text{ hydraulischer Gradient} \end{cases}$

## 7.4 Potentialströmung in starren Festkörpersystemen

### Folgerungen aus der Sättigungsbedingung:

Die Sättigungsbedingung liefert für ein Festkörper-Fluid-Aggregat

$$\sum_{\alpha=S,F} n^\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad n^S + n^F = 1,$$

so daß durch partielle Zeitableitung folgt:  $\frac{\partial n^S}{\partial t} + \frac{\partial n^F}{\partial t} = 0$ .

### Massenbilanz für inkompressible Teilkörper:

Es gilt für  $\hat{\rho}^\alpha \equiv 0$

$$(\rho^\alpha)'_\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad (n^\alpha)'_\alpha \rho^{\alpha R} + n^\alpha (\rho^{\alpha R})'_\alpha + n^\alpha \rho^{\alpha R} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = 0$$

Für inkompressible Teilkörper gilt  $\rho^{\alpha R} = \text{konst.}$  so daß

$$(n^\alpha)'_\alpha + n^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial n^\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} (n^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha) = 0$$

**Bem.:** Massenbilanzen für inkompressible Teilkörper gehen in Volumenbilanzen über.

### Volumenbilanz bzw. Inkompressibilitätsbedingung:

$$\operatorname{div} (n^S \dot{\mathbf{x}}_S + n^F \mathbf{w}_F) = 0$$

Für ein starres Festkörperskelett mit  $\dot{\mathbf{x}}_S \equiv \mathbf{0}$  gilt

$$\operatorname{div} (n^F \mathbf{w}_F) = 0$$

### Potentialströmung inkompressibler Porenflüssigkeiten in starren Festkörperskeletten:

Einsetzen des *Darcy*-Gesetzes liefert:  $\operatorname{div} (k^F \operatorname{grad} h) = 0$ ,

so daß für homogene Durchlässigkeiten ( $\operatorname{grad} k^F = \mathbf{0}$ ) gilt:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} h = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \Delta h = 0$$

mit  $h = \frac{p}{\rho^{FR} g} + x_3$